НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Грушка Ярослав Іванович

УДК 510.22 + 512.562 + 51-71 + 517.982

Теоретико-множинні методи в релятивістській кінематиці

01.01.06 — алгебра і теорія чисел
111 — математика

Реферат

дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Київ — 2024

Дисертацією є рукопис.
Роботу виконано в Інституті математики НАН України.

Науковий консультант:
доктор фізико-математичних наук, професор,
член-кореспондент НАН України

ДРОЗД Юрій Анатолійович

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, професор
ПЕТРАВЧУК Анатолій Петрович,
Київський університет імені Тараса Шевченка, м. Київ,
професор кафедри алгебри і комп'ютерної математики;

доктор фізико-математичних наук, професор
ПРИКАРПАТСЬКИЙ Анатолій Карольович,
Національний університет «Львівська Політехніка»,
професор кафедри вищої математики;

доктор фізико-математичних наук
ГОРБАЧУК Володимир Мирославович,
Національний технічний університет «КПІ імені Ігоря Сікорського»
професор кафедри математичної фізики
та диференціальних рівнянь.

Захист відбудеться ____________________ *2024 р. о* ____________ *годині* на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.03 Інституту математики НАН України за адресою: 01024, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради **Андріяна ПЛАКОШ**

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Незважаючи на величезні успіхи сучасної теоретичної фізики і потужність математичного апарату, який вона застосовує, основи цієї науки залишаються нечіткими. Відому шосту проблему Гільберта стосовно математично строгого обґрунтування основ теоретичної фізики, поставлену ще 1900 року, на сьогодні не можна вважати остаточно розв'язаною. На сьогодні існує величезна кількість наукових публікацій, які можна вважати так чи інак пов'язаними із шостою проблемою Гільберта.

Наявні наукові дослідження, пов'язані з шостою проблемою Гільберта умовно можна поділити на два напрямки:

- У роботах першого напрямку здійснюють спроби формалізації чи аксіоматизації тих або інших фізичних теорій;
- У роботах другого напрямку автори намагаються поставити і розв'язати математично строгими методами ту чи іншу математичну задачу, яка виникає у теоретичній фізиці, чи принаймні побудувати математичний апарат для її розв'язування.

Отже, тематика, пов'язана з застосуванням математично строгих методів для розв'язування конкретних фізичних задач і математичної формалізації фізичних теорій на сьогодні вельми актуальна. І саме цій тематиці присвячена наша дисертаційна робота.

Через складність і багатогранність сучасної теоретичної фізики шосту проблему Гільберта неможливо розв'язати "одним ударом". Для її розв'язку передусім потрібна напружена праця не одного покоління математиків і фізиків-теоретиків. Саме тому обидва зазначені вище напрямки наукових досліджень на сьогодні дуже актуальні і важливі, оскільки математичний апарат, напрацьований у роботах, пов'язаних із другим напрямком, може виявитись корисним і для першого напрямку.

Перші три розділи цієї дисертаційної роботи пов'язані саме з першим напрямком досліджень, тоді як останній, четвертий, — із другим. У перших трьох розділах побудовано новий математичний апарат, призначений для формалізації деяких фізичних теорій (перш за все теорій, пов'язаних із фізикою макросвіту). Зазначений математичний апарат базується на теорії мінливих множин. Із формальнго погляду теорія мінливих множин це надбудова над класичною теорією множин. Мінливі множини це новий абстрактний клас математичних об'єктів (схожий на групи, кільця, поля, решітки, банахові простори тощо). На основі теорії мінливих множин побудовано ієрархію нових абстрактних класів математичних об'єктів, у рамках якої можна математично строго формулювати певні фізичні теорії, а також показано, що напрацьований математичний апарат може бути застосований для математичної формалізації спеціальної теорії відносності й деяких її узагальнень. В останньому розділі дисертації розвинуто математичний апарат, призначений для опису еволюції багаточастинкових квантових систем за допомогою операторів зі трансляційно інваріантним ядром, зокрема побудовано простір узагальнених операторів із обмеженим проєкційним слідом над заданим гільбертовим простором.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Роботу над дисертацією розпочато у відділі диференціальних рівнянь з частинними похідними, а завершено у відділі нелінійного аналізу Інституту математики НАН України. Дисертацію було виконано в рамках таких тем і програм: "Еволюційні та спектральні задачі для диференціальних рівнянь у банаховому просторі" (номер держреєстрації 0111U001027), "Розробка операторних підходів до розв'язування еволюційних і спектральних задач для диференціальних рівнянь" (номер держреєстрації 0116U000032), "Спектральні задачі, дробово-диференціальні та неархімедові моделі сучасної математичної фізики" (номер держреєстрації 0120U100169), цільова наукова програма Відділення математики НАН України "Розробка математичних моделей та чисельно-аналітичних методів сучасних задач фізико-технічних і медико-біологічних наук і інформаційних технологій" (номер держреєстрації 0112U002104) та цільова програма наукових досліджень Відділення математики НАН України "Розробка та дослідження сучасних математичних моделей у галузі фізико-технічних та медико-біологічних наук" (номер держреєстрації 0117U002119).

Мета і завдання дослідження. *Мета* дисертаційної роботи це створення нового математичного апарату для формалізації певних фізичних теорій (передовсім релятивістської кінематики), а також опису еволюції багаточастинкових систем.

Об'єкт дослідження — мінливі множини і породжені ними математичні об'єкти (а саме кінематичні множини й універсальні кінематики), а також простори узагальнених операторів із обмеженим проєкційним слідом над заданим гільбертовим простором.

Предмет дослідження — це властивості мінливих множин, кінематичних множин і універсальних кінематик (зокрема можливість їхнього застосування для математичної формалізації спеціальної теорії відносності й деяких її узагальнень), а також структура просторів узагальнених операторів із обмеженим проєкційним слідом над заданим гільбертовим простором і їхні властивості (зокрема повнота, існування проєкційного сліду, можливість визначення груп операторів, пов'язаних із описом еволюції багаточастинкових квантових систем).

Методи дослідження. В дисертації використані методи загальної теорії множин, теорії лінійно упорядкованих множин, лінійної алгебри, загальної топології, функціонального аналізу, теорії операторів над банаховими й гільбертовими просторами.

Наукова новизна одержаних результатів. Основні результати, які визначають наукову новизну й винесені на захист, такі:

1. Сформульовані означення і досліджено властивості базових мінливих множин і мінливих множин.
2. Доведено, що довільна система абстрактних траєкторій породжує певну базову мінливу множину, і навпаки, довільна базова мінлива множина може бути породжена системою абстрактних траєкторій, — її ліній долі, тобто максимальнх ланцюгів на множині її елементарно-часових станів.
3. Введено аналоги відношення включення й операції об'єднання для базових мінливих множин. Доведено, що операція еволюційного об'єднання має багато властивостей, схожих на властивості операції об'єднання звичайних множин.
4. Введено класифікацію видимості систем відліку в мінливих множинах. Поняття видимості характеризує, наскільки адекватними один до одного можуть бути описи процесів і подій у різних системах відліку. Доведено, що за певних умов множина систем відліку мінливої множини може розпадатись на класи видимості, які попарно не перетинаються і будь-який клас видимості цілком невидимй з інших класів видимості.
5. Доведено, що в мінливих множинах, усі компоненти яких цілком видимі в кожній системі відліку, відображення уніфікації породжуються бієктивними відображеннями між множинами елементарно-часових станів відповідних систем відліку.
6. Досліджено властивості кінематичних множин, тобто мінливих

множин, оснащених різноманітними геометричними й топологічними структурами.

7. Доведено необхідну і достатню ознаку існування універсального перетворення координат між системами відліку кінематичних множин.
8. Побудовані й досліджені конкретні кінематичні мінливі множини, які виникають у спеціальній теорії відносності, а також у її тахіонному розширенні. Для них доведено існування універсального перетворення координат. Натомість, доведено, що кінематичні мінливі множини, в яких дозволена частинково-залежна швидкість світла, не допускають універсального перетворення координат.
9. Досліджено властивості універсальних кінематик, тобто кінематичних множин із заданим універсальним перетворенням координат. Доведено теорему про мультиобраз, яка показує, як із узгодженого набору базових кінематичних множин із фіксованими універсальними кінематичними перетвореннями будується універсальна кінематика.
10. Побудовано приклади універсальних кінематик — математично строгих моделей еволюції фізичних систем у рамках кінематики Лоренца-Пуанкаре спеціальної теорії відносності і її тахіонових розширень у розумінні Рекамі, Ольховського й Гольдоні, а також Хассані.
11. Введено поняття еволюційного розширення й операцію еволюційного об'єднання для кінематичних множин і універсальних кінематик. Доведено теорему теорему про еволюційне розширення для універсальних кінематик.
12. Методами теорії універсальних кінематик досліджено питання про існування "часових парадоксів". Встановлено достатні ознаки умовної часозворотності й безумовної часонезворотності. Доведено теорему про неповернення, яка стверджує, що якщо перехід принаймні з однієї системи відліку до кожної іншої зберігає напрямок часу в усіх процесах, то універсальна кінематика часонезворотна. Отже, в ній не можуть виникнути «часові парадокси», коли виникає можливість впливати на власне минуле.
13. Досліджено властивості одностайно-поступальних систем відліку у векторних універсальних кінематиках. Встановлено не-

обхідну і достатню умову одностайної поступальності однієї системи відліку відносно іншої. Встановлено зв'язок одностайної поступальності з часознаковизначенністю, тобто з монотонністю перетворення часу.

14. Побудовано простір узагальнених операторів із обмеженим проєкційним слідом над заданим гільбертовим простором і встановлено його властивості.
15. Доведено існування проєкційного сліду для довільного узагальненого оператора з обмеженим проекційним слідом над заданим гільбертовим простором. Встановлено, що простір узагальнених операторів із обмеженим проєкційним слідом вкладається в ширший банаховий простір псевдооператорів, над яким побудовано групу унітарних операторів, пов'язану з описом еволюції багаточастинкових квантових систем.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота має теоретичний характер. Отримані результати й розвинуті методи можна використати у подальших дослідженнях абстрактних кінематичних множин і універсальних кінематик, а також моделей сучасної математичної й теоретичної фізики (зокрема астрофізики).

Особистий внесок здобувача. Усі результати, що виносяться на захист здобувач одержав самостійно.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації доповідались на таких міжнародних і всеукраїнських конференціях:

- Міжнародна конференція до 100-річчя М.М. Боголюбова та 70-річчя М.І. Нагнибіди (Чернівці, 8-13 червня, 2009).
- Український Математичний Конгрес – 2009 (до 100-річчя від дня народження М.М. Боголюбова) (Київ, 27-29 серпня, 2009).
- Bogolubov Kyiv Conference "Modern Problems of Theoretical and Mathematical Physics" (Kyiv, September 15-18, 2009).
- Humboldt-Kolleg for Research Fellows and Awardees "Humboldt Cosmos: Science and Society" (Kyiv, November 19-22, 2009).
- Humbolt-Kolleg "Mathematics and Life Sciencies" (Kyiv, August 05-08, 2010).
- Міжнародна конференція "Сучасні проблеми аналізу" (Чернівці, 30 вересня – 3 жовтня, 2010).
- II всеукраїнський семінар "Українська школа групового аналізу диференціальних рівнянь" (Полтава, 19-20 жовтня, 2011).

- Workshop on Mathematics for Life Sciences (Kyiv, September 3 -14, 2012).
- International Conference dedicated to 120-th anniversary of Stefan Banach (Lviv, September 17-21, 2012).
- Четверта Міжнародна конференція молодих математиків з диференціальних рівнянь та їх застосувань, присвячена Я.Б. Лопатинському (Донецьк, 14-17 листопада 2012).
- 2nd EUMLS Conference “Mathematics for Life Sciences” (Crimea, Olenivka, September 5-10, 2013).
- Кримська міжнародна математична конференція КММК-2013 (Крим, Судак, 23 вересня – 4 жовтня, 2013).
- П’ятнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука (Київ, 15-17 травня 2014).
- Humboldt Kolleg "The Education and Science and their Role in Social and Industrial Progress of Society" (Kyiv, 12-15 June, 2014).
- IV Міжнародна Ганська конференція (Чернівці, 30 червня – 5 липня 2014 року).
- Міжнародна конференція, присвячена 100-річчю від дня народження К.М.Фішмана та М.К.Фаґе (Чернівці, 1-4 липня, 2015).
- 3rd EUMLS Conference “Mathematics for Life Sciences” (Rivne, September 15-19, 2015).
- Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (м. Ворохта Івано-Франківської області, 24-27 лютого, 2016).
- International Conference on Differential Equations Dedicated to the 110th Anniversary of Ya.B. Lopatynsky (Lviv, September 20-24, 2016).
- International conference dedicated to the 120th anniversary of Kazimierz Kuratowski (Lviv, September 27 – October 1, 2016).
- Міжнародний семінар "Симетрія та інтегровність рівнянь математичної фізики", присвячений Вільгельму Іллічу Фущичу (Київ, 17-20 грудня, 2016).
- Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (м. Ворохта Івано-Франківської області, 22-25 лютого 2017).
- XII-та літня школа “Алгебра, топологія, аналіз” (село Колочава Закарпатської обл. Міжгірського району, 10-23 липня, 2017).

- International Conference "Differential Equations, Mathematical Physics and Applications" (Cherkasy, October 17-19, 2017).
- 3rd International Conference "Logic, Relativity and Beyond" (Budapest, August 23-27, 2017).
- Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (м. Ворохта Івано-Франківської області, 27 лютого — 2 березня 2018).
- Міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми механіки та математики", присвячена 90-річчю від дня народження акад. НАН України Я.С. Підстригача (Львів, 22-25 травня, 2018).
- Міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях" (Чернівці, 17-19 вересня, 2018).
- Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта, 25 лютого – 1 березня, 2019).
- XII International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 215th anniversary of V. Bunyakovsky (Vinnytsia, July 02-06, 2019).
- Winter School in Abstract analysis – WS2020 (Czech Republic, Prague-Hejnice, Jan 25 – Feb 1, 2020).
- Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта, 26 лютого – 1 березня, 2020).
- Міжнародна наукова конференція "Прикладна математика та інформаційні технології" (Чернівці, 22 – 24 вересня, 2022).
- Міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми механіки та математики – 2023" (Львів, 23–25 травня, 2023).
- 18th Triennial Conference of the International Society for the Study of Time (ISST) (Japan, Yamaguchi, July 2 – 7, 2023).
- Міжнародна наукова конференція "Математика та інформаційні технології" (Чернівці, 28–30 вересня, 2023).

Також результати дисертації обговорювали на засіданнях Київського семінару з функціонального аналізу 30.03.2011, 15.11.2017, 29.11.17 й 10.05.2018 (керівники семінару — академік НАН України Ю.М. Березанський, член-кореспондент НАН України

А.Н. Кочубей, академік НАН України Ю.С. Самойленко), семінарі відділу математичної фізики Інституту математики НАН України 29.05.2018 (керівник семінару — член-кореспондент НАН України, професор А.Г. Нікітін), семінарі кафедри математичної фізики Київського національного університету імені Тараса Шевченка 06.06.2018 (керівники семінару — професор Т.А. Мельник, професор В.Г. Самойленко), семінарі лабораторії топології Інституту математики НАН України 12.12.2018, 26.12.2018, 23.01.2019, 03.11.2023 (керівник семінару — член-кореспондент НАН України С.І. Максименко), семінарі "Числення Маллявена та його застосування" Інституту математики НАН України (керівник семінару — член-кореспондент НАН України А.А. Дороговцев), Алгебраїчному семінарі Інституту математики НАН України (керівник семінару — член-кореспондент НАН України Ю.А. Дрозд).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в роботах [1–38]. Усі роботи опубліковано без співавторів. Повні тексти більшості наведених нижче наукових робіт (за винятком деяких тез конференцій) можна знайти на web-сторінці: `https://www.researchgate.net/profile/Yaroslav_Grushka/contributions`.

- Роботи [1–27], [29] відповідають вимогам до публікації результатів дисертаційних робіт у фахових виданнях із фізико-математичних наук.
- Роботи [1–7] надруковані у виданнях, внесених до наукометричних баз Scopus або Web of Science.
- Роботи [1–32] надруковано у виданнях, які належать до інших міжнародних наукометричних баз (MathSciNet, Zentralblatt MATH, Google Scholar та ін.).
- Роботи [33–38] — публікації у збірниках праць конференцій і препринти.

Структура та обсяг дисертації. Дисертацію становлять зміст, вступ, чотири розділи, висновки, список використаних джерел, який містить 253 найменування. Повний обсяг дисертації становить 425 сторінок.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

Основну частину роботи становлять 4 розділи. На початку першого, другого і четвертого розділів подано стислий огляд літератури й опис основних результатів, викладених у них. Третій — це розділ фактично продовження другого розділу, а тому цей розділ починається лише з коротенького мотиваційного вступу.

Перший розділ дисертації присвячено викладу теорії мінливих множин. На початку розділу проведено детальний огляд літератури з цьогоt й суміжних питань. Зокрема на основі аналізу переваг і недоліків наявних нині підходів до формалізації фізичних теорій поставлена проблема математично строгого означення поняття мінливої множини як множини об'єктів, здатних еволюціонувати довільним чином, чия картина еволюції може залежати від способу спостереження, тобто від системи відліку.

Далі побудовано ієрархію допоміжних математичних понять і об'єктів, потрібних для формулювання математично строгого означення мінливих множин, а також досліджено основні властивості зазначених об'єктів. Зокрема у підрозділі 1.2 за допомогою означення орієнтованої множини описано найпримітивнішу математичну модель сукупності мінливих об'єктів.

Означення 1.1. Нехай $M \neq \emptyset$ — довільна непорожня множина.

Довільне рефлексивне бінарне відношення $\Leftarrow\!\!\!-$ на M (тобто таке, що $\forall x \in M \;\; (x \Leftarrow\!\!\!- x)$) називатимемо **орієнтацією**, а пару $\mathcal{M} = (M, \Leftarrow\!\!\!-)$ називатимемо **орієнтованою множиною**. При цьому множину M називатимемо **базовою**, або множиною всіх **елементарних станів** орієнтованої множини $\mathcal{M}$, і позначатимемо її через $\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$, а відношення $\Leftarrow\!\!\!-$ називатимемо **напрямним відношенням змін (трансформацій)** $\mathcal{M}$, і позначатимемо його через $\underset{\mathcal{M}}{\leftarrow}$. Елементи множини $\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ називатимемо **елементарними станами** орієнтованої множини $\mathcal{M}$.

У разі, коли відомо, про яку орієнтовану множину $\mathcal{M}$ ідеться, в позначенні $\underset{\mathcal{M}}{\leftarrow}$ символ $\mathcal{M}$ опускатимемо, вживаючи позначення "$\leftarrow$". Для елементів $x, y \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ запис $y \leftarrow x$ треба розуміти як "елементарний стан y — це результат трансформацій, або "трансформаційний нащадок" елементарного стану x".

Означення 1.3. Непорожня підмножина $N \subseteq \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ називається **транзитивною** в $\mathcal{M}$, якщо для довільних $x, y, z \in N$ з умов $z \leftarrow y$ і $y \leftarrow x$ випливає умова $z \leftarrow x$. Транзитивна підмножина $L \subseteq \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ називається **ланцюгом** в $\mathcal{M}$, якщо для довільних $x, y \in L$ має місце хоч одне зі співвідношень $y \leftarrow x$ або $x \leftarrow y$. Ланцюг $L \subseteq \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$

називається **максимальним ланцюгом** в $\mathcal{M}$, якщо не існує такого ланцюга $L_1 \subseteq \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$, що $L \subset L_1$.

Твердження 1.6. *Для довільного ланцюга L у довільній орієнтованій множині $\mathcal{M}$ існує максимальний ланцюг $L_{\max}$, такий, що $L \subseteq L_{\max}$.*

Зауважимо, що на твердження 1.6 можна дивитися, як на певне узагальнення принципу максимальності Гаусдорфа.

У підрозділі 1.3 дане означення часу на орієнтованих множинах, а також введене поняття примітивної мінливої множини, тобто орієнтованої множини з заданим на ній часом (хронологізацією).

Означення 1.9. Нехай $\mathcal{M}$ — орієнтована множина і $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$ — лінійно упорядкована множина. Відображення $\psi : \mathbf{T} \to 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})}$ називається **часом** на $\mathcal{M}$, якщо виконані такі умови:

1) Для довільного елементарного стану $x \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ існує елемент $t \in \mathbf{T}$, такий, що $x \in \psi(t)$.

2) Якщо $x_1, x_2 \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$, $x_2 \leftarrow x_1$ і $x_1 \neq x_2$, то існують елементи $t_1, t_2 \in \mathbf{T}$ такі, що $x_1 \in \psi(t_1)$, $x_2 \in \psi(t_2)$ і $t_1 < t_2$ (тобто наявна часова роздільність послідовних неоднакових елементарних станів).

При цьому елементи $t \in \mathbf{T}$ називатимемо **моментами часу**, пару $\mathcal{H} = (\mathbb{T}, \psi) = ((\mathbf{T}, \leq), \psi)$ називатимемо **хронологізацією** $\mathcal{M}$, а трійку $\mathcal{P} = (\mathcal{M}, \mathbb{T}, \psi) = (\mathcal{M}, (\mathbf{T}, \leq), \psi)$ називатимемо **примітивною мінливою множиною**.

Легко довести, що можливостей визначити час на довільній орієнтованій множині (тобто її **хронологізувати**) існує нескінченно багато. Тому, у підрозділі 1.4 досліджується питання про існування часу з заданими додатковими властивостями.

Означення 1.12. Нехай $(\mathcal{M}, \mathbb{T}, \psi) = (\mathcal{M}, (\mathbf{T}, \leq), \psi)$ — примітивна мінлива множина.

1) Час ψ називатимемо **квазіточковим**, якщо для довільного $t \in \mathbf{T}$ множина $\psi(t)$ одноелементна.

2) Час ψ називатимемо **точковим**, якщо час ψ квазіточковий і для довільних $x_1, x_2 \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ з умов $x_1 \in \psi(t_1)$, $x_2 \in \psi(t_2)$ і $t_1 \leq t_2$, випливає $x_2 \leftarrow x_1$.

Якщо час ψ квазіточковий (точковий), то відповідну хронологізацію $(\mathbb{T}, \psi)$ орієнтованої множини $\mathcal{M}$ називатимемо квазіточковою (точковою) відповідно.

Очевидно, що *будь-який точковий час є квазіточковим.* Обернене твердження, взагалі кажучи, неправильне.

Орієнтовану множину $\mathcal{M}$ називатимемо **ланцюговою**, якщо вся множина $\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ — це ланцюг $\mathcal{M}$, тобто якщо відношення $\leftarrow$ транзитивне на $\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ і для довільних $x, y \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ виконується хоча б одна з умов $x \leftarrow y$ або $y \leftarrow x$.

Теорема 1.19. *Будь-яку ланцюгову орієнтовану множину можна точково хронологізувати (тобто визначити на ній точковий час).*

Теорема 1.22. *Будь-яку орієнтовану множину можна хронологізувати квазіточково.*

У підрозділі 1.5 досліджується питання про існування часу на орієнтованих множинах із додатково заданою синхронізацією (одночасністю).

Означення 1.24. Нехай $(\mathcal{M}, \mathbb{T}, \psi) = (\mathcal{M}, (\mathbf{T}, \leq), \psi)$ — примітивна мінлива множина. Множину $Y_\psi = \{\psi(t) \mid t \in \mathbf{T}\}$ називатимемо **множиною одночасних станів**, породженою часом ψ.

Нехай $(\mathcal{M}, \mathbb{T}, \psi) = (\mathcal{M}, (\mathbf{T}, \leq), \psi)$ — примітивна мінлива множина, а Y_ψ — множина одночасних станів, породжена часом ψ. Тоді за означенням 1.9 маємо, $\bigcup_{A \in Y_\psi} A = \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$.

Означення 1.26. Нехай $\mathcal{M}$ — орієнтована множина. Довільну сім'ю множин $\mathbf{Y} \subseteq 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})}$, таку, що $\bigcup_{A \in \mathbf{Y}} A = \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ називатимемо **одночасністю** на $\mathcal{M}$.

Теорема 1.28. *Нехай $\mathcal{M}$ — орієнтована множина і $\mathbf{Y} \subseteq 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})}$ — одночасність на $\mathcal{M}$. Тоді на орієнтованій множині $\mathcal{M}$ існує такий час ψ, що $\mathbf{Y} = Y_\psi$, де Y_ψ — множина одночасних станів, породжена часом ψ.*

Також у підрозділі 1.5 для певного класу синхронізацій орієнтованих множин отримано теорему про існування і єдиність внутрішнього часу (тобто часу, який, нестрого кажучи, можна "спостерігати і фіксувати всередині" орієнтованої множини), що породжує відповідну синхронізацію (див. теорему 1.47).

У підрозділі 1.6 для довільної примітивної мінливої множини $\mathcal{P} = (\mathcal{M}, \mathbb{T}, \phi)$ (де $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \trianglelefteq)$ — лінійно упорядкована множина) введено такі стандартні позначення:

$$\mathfrak{Bs}(\mathcal{P}) := \mathfrak{Bs}(\mathcal{M}); \quad \underset{\mathcal{P}}{\leftarrow} := \underset{\mathcal{M}}{\leftarrow}; \quad \mathbf{Tm}(\mathcal{P}) := \mathbf{T};$$
$$\leq_{\mathcal{P}} := \trianglelefteq; \; \psi_{\mathcal{P}} := \phi; \quad \mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{P}) := (\mathbf{Tm}(\mathcal{P}), \leq_{\mathcal{P}}) = (\mathbf{T}, \trianglelefteq).$$

Також через $<_{\mathcal{P}}$ позначене відношення строгого порядку, породжене відношенням $\le_{\mathcal{P}}$ (тобто для довільних $t_1, t_2 \in \mathbf{Tm}(\mathcal{P})$ співвідношення $t_1 <_{\mathcal{P}} t_2$ виконується тоді і тільки тоді, коли $t_1 \le_{\mathcal{P}} t_2$ і $t_1 \ne t_2$).

У підрозділі 1.7 формулюється означення системи абстрактних траєкторій.

Означення 1.49. Нехай M — довільна непорожня множина і $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \le)$ — довільна лінійно упорядкована множина. Відображення $r : \mathfrak{D}(r) \to M$ називатимемо **абстрактною траєкторією** з $\mathbb{T}$ в M, якщо $\mathfrak{D}(r) \subseteq \mathbf{T}$ і $\mathfrak{D}(r) \ne \emptyset$. **Системою абстрактних траєкторій** з $\mathbb{T}$ в M називатимемо довільну множину $\mathcal{R}$, елементами якої є абстрактні абстрактні траєкторії з $\mathbb{T}$ в M таку, що $\bigcup_{r \in \mathcal{R}} \mathfrak{R}(r) = M$ (тут $\mathfrak{D}(r)$ і $\mathfrak{R}(r)$ — відповідно область визначення і область значень абстрактної траєкторії r).

Далі доведено, що довільна система абстрактних траєкторій природним чином породжує примітивну мінливу множину.

У підрозділі 1.8 введене поняття елементарно-часового стану примітивної мінливої множини і на конкретному прикладі показано, що для того, щоб описати еволюцію елементарно-часових станів у примітивних мінливих множинах, що моделюють певні фізичні процеси, недостатньо інформації про еволюцію її елементарних станів, заданої напрямним відношенням змін. У зв'язку з зазначеним фактом введені поняття бази елементарних процесів і поняття базової мінливої множини, тобто примітивної мінливої множини з заданою на ній базою елементарних процесів. Із інтуїтивного погляду довільна базова мінлива множина — це сукупність мінливих об'єктів, спостереження за якою проводиться в рамках однієї (фіксованої) системи відліку.

Означення 1.52. Нехай $\mathcal{P}$ — примітивна мінлива множина. Пару (t, x) $(x \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{P}),\ t \in \mathbf{Tm}(\mathcal{P}))$ називатимемо **елементарно-часовим станом** $\mathcal{P}$, якщо $x \in \psi(t)$.

Множину всіх елементарно-часових станів $\mathcal{P}$ позначатимемо через $\mathbb{Bs}(\mathcal{P})$, $\mathbb{Bs}(\mathcal{P}) := \{\omega \mid \omega = (t, x)\,,\ \text{де}\ t \in \mathbf{Tm}(\mathcal{P}),\ x \in \psi(t)\}\,.$

З означень 1.1 і 1.9 випливає, що $\mathbb{Bs}(\mathcal{P}) \ne \emptyset$ для довільної примітивної мінливої множини $\mathcal{P}$. За означенням 1.9, для довільного $t \in \mathbf{Tm}(\mathcal{P})$ маємо, $\psi(t) \subseteq \mathfrak{Bs}(\mathcal{P})$. Тому $\mathbb{Bs}(\mathcal{P}) \subseteq \mathbf{Tm}(\mathcal{P}) \times \mathfrak{Bs}(\mathcal{P})$ для довільної примітивної мінливої множини $\mathcal{P}$.

Нехай $\mathbb{T} = (\mathbf{T} \le)$ — довільна лінійно упорядкована множина, а $\mathcal{X}$ — довільна множина. Для довільної упорядкованої пари $\omega = (\tau, \xi) \in$

$\mathbf{T}\times\mathcal{X}$ введімо такі позначення: $\boxed{\mathsf{bs}\,(\omega):=\xi,\quad \mathsf{tm}\,(\omega):=\tau}$.

Означення 1.59. Нехай $\mathcal{P}$ — примітивна мінлива множина.
1. Відношення $\Lleftarrow$ на $\mathbb{Bs}(\mathcal{P})$ називатимемо **базою елементарних процесів** на $\mathcal{P}$, якщо:

(1) $\forall\,\omega\in\mathbb{Bs}(\mathcal{P})\ \omega\Lleftarrow\omega$

(2) Якщо $\omega_1,\omega_2\in\mathbb{Bs}(\mathcal{P})$ і $\omega_2\Lleftarrow\omega_1$, то $\omega_1=\omega_2$ або $\mathsf{bs}\,(\omega_2)\underset{\mathcal{P}}{\leftarrow}\mathsf{bs}\,(\omega_1)$ і $\mathsf{tm}\,(\omega_1)<_{\mathcal{P}}\mathsf{tm}\,(\omega_2)$

(3) Для довільних $x_1,x_2\in\mathfrak{Bs}(\mathcal{P})$, таких, що $x_2\leftarrow x_1$, існують $\omega_1,\omega_2\in\mathbb{Bs}(\mathcal{P})$, такі, що $\mathsf{bs}\,(\omega_1)=x_1$, $\mathsf{bs}\,(\omega_2)=x_2$ і $\omega_2\Lleftarrow\omega_1$.

2. Якщо $\mathcal{P}$ — примітивна мінлива множина і $\Lleftarrow$ — база елементарних процесів на $\mathcal{P}$, то пару $\boxed{\mathcal{B}=(\mathcal{P},\Lleftarrow)}$ називатимемо **базовою мінливою множиною**.

Для довільної базової мінливої множини $\mathcal{B}=(\mathcal{P},\Lleftarrow)$ використовуватимемо такі позначення:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{Bs}(\mathcal{B}):=\mathfrak{Bs}(\mathcal{P}); & \mathbb{Bs}(\mathcal{B}):=\mathbb{Bs}(\mathcal{P}); & \underset{\mathcal{B}}{\leftarrow}:=\underset{\mathcal{P}}{\leftarrow}; \\ & \overset{\mathbb{Bs}}{\underset{\mathcal{B}}{\leftarrow}}:=\Lleftarrow; & \mathbf{Tm}(\mathcal{B}):=\mathbf{Tm}(\mathcal{P}); \\ \mathbb{Tm}(\mathcal{B}):=\mathbb{Tm}(\mathcal{P}); & \leq_{\mathcal{B}}:=\leq_{\mathcal{P}}; & <_{\mathcal{B}}:=<_{\mathcal{P}}\ . \end{array}$$

Коли відомо, про яку базову мінливу множину $\mathcal{B}$ йдеться, в позначеннях $\underset{\mathcal{B}}{\leftarrow}$, $\overset{\mathbb{Bs}}{\underset{\mathcal{B}}{\leftarrow}}$ $\leq_{\mathcal{B}}$, $<_{\mathcal{B}}$ символ $\mathcal{B}$ пропускатимемо, вживаючи замість них позначення $\leftarrow$, $\overset{\mathbb{Bs}}{\leftarrow}$, $\leq$, $<$ відповідно.

Крім того, для довільних елементарно-часових станів $\omega_1,\omega_2\in\mathbb{Bs}(\mathcal{B})$ часто вживатимемо скорочені позначення $\omega_2\underset{\mathcal{B}}{\leftarrow}\omega_1$ або $\omega_2\leftarrow\omega_1$ замість, відповідно, $\omega_2\overset{\mathbb{Bs}}{\underset{\mathcal{B}}{\leftarrow}}\omega_1$ або $\omega_2\overset{\mathbb{Bs}}{\leftarrow}\omega_1$ (у випадках, коли це не призводить до непорозумінь).

Теорема 1.63. *Для довільної системи абстрактних траєкторій $\mathcal{R}$ з $\mathbb{T}=(\mathbf{T},\leq)$ в M існує (причому єдина) така базова мінлива множина $\mathcal{B}=\mathcal{A}t(\mathbb{T},\mathcal{R})$, що:*

1) $\mathbb{Tm}\,(\mathcal{A}t(\mathbb{T},\mathcal{R}))=\mathbb{T}$ *(тобто* $\mathbf{Tm}\,(\mathcal{A}t(\mathbb{T},\mathcal{R}))=\mathbf{T}$, $\leq_{\mathcal{A}t(\mathbb{T},\mathcal{R})}=\leq$*);*

2) $\mathbb{Bs}(\mathcal{A}t(\mathbb{T},\mathcal{R}))=\bigcup_{r\in\mathcal{R}}r$*;*

3) *для довільних* $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{A}t(\mathbb{T},\mathcal{R}))$ *умова* $\omega_2 \underset{\mathcal{A}t(\mathbb{T},\mathcal{R})}{\leftarrow} \omega_1$ *виконується тоді й тільки тоді, коли* $\mathsf{tm}(\omega_1) \leq \mathsf{tm}(\omega_2)$ *й існує така траєкторія* $r \in \mathcal{R}$, *що* $\omega_1, \omega_2 \in r$.

У підрозділі 1.9 доведено, що довільна базова мінлива множина може бути породжена системою абстрактних траєкторій, які утворені її лініями долі, тобто максимальними ланцюгами на множині її елементарно-часових станів.

Твердження 1.69. *Нехай* $\mathcal{B}$ *— базова мінлива множина. Тоді пара*

$$\mathcal{Q}_{\mathcal{B}} = \left(\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}), \overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{B}}{\leftarrow}}\right) = (\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}), \leftarrow)$$

є орієнтованою множиною, а відображення $\tilde{\psi}(t) = \tilde{\psi}_{\mathcal{B}}(t) := \{\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}) \mid \mathsf{tm}(\omega) = t\} \in 2^{\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})} \quad (t \in \mathbf{Tm}(\mathcal{B}))$ *є часом на* $\mathcal{Q}_{\mathcal{B}}$.

Як і в довільній орієнтованій множині, в $(\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}), \leftarrow)$ можна розглядати транзитивні множини і ланцюги. Надалі через $\mathbb{L}l(\mathcal{B})$ позначатимемо множину всіх ланцюгів у множині елементарно-часових станів базової мінливої множини $\mathcal{B}$, тобто множину всіх ланцюгів орієнтованої множини $(\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}), \leftarrow)$.

Означення 1.72. Нехай $\mathcal{B}$ — базова мінлива множина. Довільний максимальний ланцюг $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ орієнтованої множини $(\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}), \leftarrow)$ називатимемо **лінією долі** $\mathcal{B}$. При цьому множину всіх ліній долі $\mathcal{B}$ позначатимемо через $\mathbb{L}d(\mathcal{B})$: $\mathbb{L}d(\mathcal{B}) = \{\mathcal{L} \in \mathbb{L}l(\mathcal{B}) \mid \mathcal{L}$ — лінія долі $\mathcal{B}\}$.

Означення 1.73. Будемо говорити, що елементарно-часові стани $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ ***об'єднані долею***, якщо існує хоч одна лінія долі $\mathcal{L} \in \mathbb{L}d(\mathcal{B})$, така, що $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{L}$.

Твердження 1.74. *Для того, щоб елементарно-часові стани* $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ *базовії мінливої множини* $\mathcal{B}$ *були об'єднані долею необхідно і достатньо, щоб виконувалась хоч одна з умов,* $\omega_2 \leftarrow \omega_1$ *або* $\omega_1 \leftarrow \omega_2$.

Нехай $\mathcal{R}$ — система абстрактних траєкторій із $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$ в M. Траєкторію $r \in \mathcal{R}$ системи абстрактних траєкторій $\mathcal{R}$ називатимемо **максимальною** (відносно $\mathcal{R}$), якщо не існує траєкторії $\rho \in \mathcal{R}$ $(\rho \neq r)$, такої, що $\mathfrak{D}(r) \subset \mathfrak{D}(\rho)$ і $r(t) = \rho(t)$, $t \in \mathfrak{D}(r)$, тобто такої, що $r \subset \rho$. Систему абстрактних траєкторій $\mathcal{R}$ називатимемо **системою максимальних траєкторій**, якщо кожна траєкторія $r \in \mathcal{R}$ максимальна (відносно $\mathcal{R}$).

Твердження 1.77. *Нехай $\mathcal{B}$ — базова мінлива множина. Тоді:*

1) Довільний ланцюг $\mathcal{L} \in \mathbb{L}l(\mathcal{B})$ є абстрактною траєкторією з $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B})$ в $\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$, при цьому множина $\mathbb{L}l(\mathcal{B})$ є системою абстрактних траєкторій із $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B})$ в $\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$.

2) Довільна лінія долі $\mathcal{L} \in \mathbb{L}d(\mathcal{B}) \subseteq \mathbb{L}l(\mathcal{B})$ є максимальною траєкторією (відносно системи абстрактних траєкторій $\mathbb{L}l(\mathcal{B})$), причому $\mathbb{L}d(\mathcal{B})$ є системою максимальних траєкторій із $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B})$ в $\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$.

Подальша теорема показує, що довільна базова мінлива множина може бути породжена певною системою максимальних траєкторій.

Теорема 1.79. *Для довільної базової мінливої множини $\mathcal{B}$ виконується рівність, $\mathcal{A}t\left(\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}), \mathbb{L}d(\mathcal{B})\right) = \mathcal{B}$.*

У підрозділі 1.10 введене поняття мінливої системи базової мінливої множини $\mathcal{B}$.

Означення 1.84. Нехай $\mathcal{B}$ — базова мінлива множина. Будь-яку підмножину $S \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ будемо називати **мінливою системою** базової мінливої множини $\mathcal{B}$.

З інтуїтивного погляду на поняття мінливої системи можна дивитись як на абстрактне узагальнення поняття фізичного тіла, склад якого, взагалі кажучи, не постійний і може змінюватись довільним чином упродовж еволюції цього тіла.

У підрозділі 1.11 введено аналоги теоретико-множинних відношення включення й операції об'єднання для базових мінливих множин (а саме відношення еволюційного й суперечволюційного включення та операції еволюційного й суперечволюційного об'єднання). Також доведено, що операція еволюційного об'єднання має багато властивостей, схожих на властивості операції об'єднання звичайних множин.

Означення 1.92. Базову мінливу множину $\mathcal{B}_1$ називатимемо **еволюційним розширенням** базової мінливої множини $\mathcal{B}_0$, якщо:

1. $\mathcal{B}_0$ і $\mathcal{B}_1$ хронологічно споріднені, тобто $\mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathcal{B}_0\right) = \mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathcal{B}_1\right)$;
2. $\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_0\right) \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_1\right)$ і для довільних $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_0\right)$ з умови $\omega_2 \underset{\mathcal{B}_0}{\leftarrow} \omega_1$ випливає, що $\omega_2 \underset{\mathcal{B}_1}{\leftarrow} \omega_1$ $\left(\text{тобто } \overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{B}_0}{\leftarrow}} \subseteq \overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{B}_1}{\leftarrow}}\right)$.

Якщо базова мінлива множина $\mathcal{B}_1$ є еволюційним розширенням базової мінливої множини $\mathcal{B}_0$, то говоритимемо також, що $\mathcal{B}_0$ **еволюційно включається** в $\mathcal{B}_1$ і позначатимемо цей факт через $\mathcal{B}_0 \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathcal{B}_1$.

Твердження 1.97. *Еволюційне включення має такі властивості:*
1) $\mathcal{B}\underset{\rightarrow}{\subsetneq}\mathcal{B}$ *для довільної базової мінливої множини* $\mathcal{B}$.
2) Якщо $\mathcal{B}_1\underset{\rightarrow}{\subsetneq}\mathcal{B}_2$ *і* $\mathcal{B}_2\underset{\rightarrow}{\subsetneq}\mathcal{B}_1$ *то* $\mathcal{B}_1=\mathcal{B}_2$.
3) Якщо $\mathcal{B}_1\underset{\rightarrow}{\subsetneq}\mathcal{B}_2$ *і* $\mathcal{B}_2\underset{\rightarrow}{\subsetneq}\mathcal{B}_3$ *то* $\mathcal{B}_1\underset{\rightarrow}{\subsetneq}\mathcal{B}_3$.

Твердження 1.99. *Якщо* $\mathcal{R}_i$ $(i\in\{1,2\})$ *— системи абстрактних траєкторій із* $\mathbb{T}$ *в* M_i *і при цьому* $\mathcal{R}_1\subseteq\mathcal{R}_2$, *то* $\mathcal{A}t\,(\mathbb{T},\mathcal{R}_1)\underset{\rightarrow}{\subsetneq}\mathcal{A}t\,(\mathbb{T},\mathcal{R}_2)$.

Означення 1.103. Нехай $(\mathcal{B}_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ $(\mathcal{A}\neq\emptyset)$ — довільна індексована сім'я базових мінливих множин. Базову мінливу множину $\mathcal{B}$ будемо називати **еволюційним об'єднанням** сім'ї $(\mathcal{B}_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$, якщо:

($\mathbf{EO}_1$) $\mathcal{B}_\alpha\underset{\rightarrow}{\subsetneq}\mathcal{B}$ для довільного $\alpha\in\mathcal{A}$

($\mathbf{EO}_2$) Якщо $\mathcal{B}_\alpha\underset{\rightarrow}{\subsetneq}\mathcal{B}'$ при всіх $\alpha\in\mathcal{A}$ (де $\mathcal{B}'$ — базова мінлива множина), то $\mathcal{B}\underset{\rightarrow}{\subsetneq}\mathcal{B}'$.

З означення 1.103 випливає, що довільна сім'я базових мінливих множин $(\mathcal{B}_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ $(\mathcal{A}\neq\emptyset)$ може мати не більш як одне еволюційне об'єднання. Враховуючи цей факт, еволюційне об'єднання $\mathcal{B}$ сім'ї базових мінливих множин $(\mathcal{B}_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ позначатимемо через $\mathcal{B}=\overleftarrow{\bigcup\limits_{\alpha\in\mathcal{A}}}\mathcal{B}_\alpha$. Зокрема, якщо $\mathcal{A}=\{1,...,n\}$ $(n\in\mathbb{N})$, то будемо використовувати позначення: $\mathcal{B}_1\overleftarrow{\cup}\cdots\overleftarrow{\cup}\mathcal{B}_n:=\overleftarrow{\bigcup\limits_{k=1}^{n}}\mathcal{B}_k:=\overleftarrow{\bigcup\limits_{\alpha\in\mathcal{A}}}\mathcal{B}_\alpha$.

З означень 1.103 й 1.92 випливає, що якщо $\mathcal{B}=\overleftarrow{\bigcup\limits_{\alpha\in\mathcal{A}}}\mathcal{B}_\alpha$, то сім'я базових мінливих множин $(\mathcal{B}_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ є хронологічно спорідненою, причому $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B})=\mathbb{T}\mathbf{m}\,(\mathcal{B}_\alpha)$ $(\forall\alpha\in\mathcal{A})$.

Нехай $\mathbb{T}=(\mathbf{T},\leq)$ — довільна лінійно упорядкована множина, $\mathcal{A}$ — довільна непорожня множина індексів, і для довільного індексу $\alpha\in\mathcal{A}$ визначена система абстрактних траєкторій $\mathcal{R}_\alpha$ з $\mathbb{T}$ в M_α. У такому разі індексовану сім'ю систем абстрактних траєкторій $(\mathcal{R}_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ називатимемо ***$\mathbb{T}$-хронологічно спорідненою***. Тоді легко довести, що $(\mathcal{A}t\,(\mathbb{T},\mathcal{R}_\alpha))_{\alpha\in\mathcal{A}}$ — хронологічно споріднена сім'я базових мінливих множин.

Твердження 1.106. *Нехай* $(\mathcal{R}_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ *—* $\mathbb{T}$*-хронологічно споріднена сім'я систем абстрактних траєкторій. Тоді існує еволюційне об'єднання* $\overleftarrow{\bigcup}_{\alpha\in\mathcal{A}}\mathcal{A}t\,(\mathbb{T},\mathcal{R}_\alpha)$, *причому:* $\overleftarrow{\bigcup\limits_{\alpha\in\mathcal{A}}}\mathcal{A}t\,(\mathbb{T},\mathcal{R}_\alpha)=$

$$\mathcal{A}t\left(\mathbb{T},\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}}\mathcal{R}_\alpha\right).$$

Наслідок 1.107. *Довільна хронологічно споріднена сім'я базових мінливих множин* $(\mathcal{B}_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ *($\mathcal{A} \neq \emptyset$) має еволюційне об'єднання* $\overleftarrow{\bigcup}_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathcal{B}_\alpha$*, причому:*

$$\overleftarrow{\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}}} \mathcal{B}_\alpha = \mathcal{A}t\left(\mathbb{T}, \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathbb{L}d\left(\mathcal{B}_\alpha\right)\right), \quad \text{де } \mathbb{T} = \mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathcal{B}_\alpha\right)\ (\alpha \in \mathcal{A}).$$

Останній наслідок дає змогу виразити операцію еволюційного об'єднання через операцію звичайного об'єднання множин. Наприкінці розділу доведено такі дві теореми про еволюційне розширення.

Теорема 1.122. *Нехай $\mathcal{B}$ — базова мінлива множина, і $\mathcal{R}$ — система абстрактних траєкторій із $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B})$ в M. Тоді базова мінлива множина $\widetilde{\mathcal{B}} = \mathcal{B} \overleftarrow{\cup} \mathcal{A}t\left(\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}), \mathcal{R}\right)$ є еволюційним розширенням $\mathcal{B}$ таким, що $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{L}l\left(\widetilde{\mathcal{B}}\right)$.*

Теорема 1.123. *Нехай $\mathcal{B}$ — базова мінлива множина, і $\mathcal{R}$ — система абстрактних траєкторій із $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B})$ в M, така, що $\left(\bigcup_{r\in\mathcal{R}} r\right) \cap \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}) = \emptyset$. Тоді базова мінлива множина $\widetilde{\mathcal{B}} = \mathcal{B} \overleftarrow{\cup} \mathcal{A}t\left(\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}), \mathcal{R}\right)$ є еволюційним розширенням $\mathcal{B}$ таким, що $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{L}d\left(\widetilde{\mathcal{B}}\right)$.*

У фізиці часто бувають міркування, коли до фізичної моделі подумки долучають додаткові, не існуючі в ній, компоненти. Наприклад, під час виведення формул перетворень Лоренца для систем відліку з паралельними осями використовують метод "світлової сфери", тобто припускають, що в нульовий момент часу на початку відліку "спалахнуло світло" і світлові промені розходяться від початку відліку у всіх напрямках, тобто до наявної моделі (у рамках спеціальної теорії відносності) подумки долучають світлову сферу. І теорема 1.123 може розглядатись як обґрунтування процедури долучення до вихідної моделі нових "віртуальних" еволюціонуючих елементів за припущення, що еволюція цих нових об'єктів **не впливає** на еволюцію вихідної системи (в рамках теорії базових мінливих множин). Зауважимо, що у підрозділі 1.10 показано, що поняття лінії долі може бути аналогом поняття елемента звичайної (статичної) множини.

У підрозділі 1.12 введене поняття (загальної) мінливої множини та системи відліку довільної мінливої множини, а також введена система стандартних позначень теорії мінливих множин.

Означення 1.124. Нехай $\overleftarrow{\mathcal{B}} = (\mathcal{B}_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A})$ індексована — сім'я базових мінливих множин, де $\mathcal{A} \neq \emptyset$ — певна (непорожня) множина індексів. Систему відображень $\overleftarrow{\mathfrak{U}} = (\mathfrak{U}_{\beta\alpha} \mid \alpha, \beta \in \mathcal{A})$ вигляду:

$$\mathfrak{U}_{\beta\alpha} : 2^{\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}_\alpha)} \longrightarrow 2^{\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}_\beta)} \ (\alpha, \beta \in \mathcal{A})$$

називаємо **уніфікацією сприймання** на $\overleftarrow{\mathcal{B}}$, якщо виконані такі умови:

1. $\mathfrak{U}_{\alpha\alpha} A \equiv A$ для довільних $\alpha \in \mathcal{A}$ і $A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_\alpha)$.
(Тут і надалі через $\mathfrak{U}_{\beta\alpha} A$ позначатимемо дію відображення $\mathfrak{U}_{\beta\alpha}$ на множину $A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_\alpha)$, тобто $\mathfrak{U}_{\beta\alpha} A := \mathfrak{U}_{\beta\alpha}(A)$.)
2. Будь-яке відображення $\mathfrak{U}_{\beta\alpha}$ є монотонним відображенням множин, тобто для довільних $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ і $A, B \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_\alpha)$ з умови $A \subseteq B$ випливає, що $\mathfrak{U}_{\beta\alpha} A \subseteq \mathfrak{U}_{\beta\alpha} B$.
3. Для довільних $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{A}$ і $A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_\alpha)$ має місце включення, $\boxed{\mathfrak{U}_{\gamma\beta}\mathfrak{U}_{\beta\alpha} A \subseteq \mathfrak{U}_{\gamma\alpha} A}$.

При цьому відображення $\mathfrak{U}_{\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta \in \mathcal{A})$ називатимемо **відображеннями уніфікації**, а трійку виду, $\boxed{\mathcal{Z} = \left(\mathcal{A}, \overleftarrow{\mathcal{B}}, \overleftarrow{\mathfrak{U}}\right)}$ будемо називати **мінливою множиною**.

Відображення уніфікації в означенні мінливої множини визначають, якою ми "побачимо" еволюцію довільної мінливої системи в іншій системі відліку.

Нехай $\mathcal{Z} = \left(\mathcal{A}, \overleftarrow{\mathcal{B}}, \overleftarrow{\mathfrak{U}}\right)$ — мінлива множина, де $\overleftarrow{\mathcal{B}} = (\mathcal{B}_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A})$ — це індексована сім'я базових мінливих множин і $\overleftarrow{\mathfrak{U}} = (\mathfrak{U}_{\beta\alpha} \mid \alpha, \beta \in \mathcal{A})$ — уніфікація сприймання на $\overleftarrow{\mathcal{B}}$. Надалі вживатимемо наступні терміни й позначення:

1) Множину $\mathcal{A}$ будемо називати ***множиною індексів*** мінливої множини $\mathcal{Z}$ і будемо позначати її через $\mathcal{I}nd\,(\mathcal{Z})$.

2) Для довільного індексу $\alpha \in \mathcal{I}nd\,(\mathcal{Z})$ пару $(\alpha, \mathcal{B}_\alpha)$ називатимемо ***системою відліку*** мінливої множини $\mathcal{Z}$.

3) Множину всіх систем відліку мінливої множини $\mathcal{Z}$ будемо позначати через $\mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ $(\mathcal{L}k\,(\mathcal{Z}) := \{(\alpha, \mathcal{B}_\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{I}nd\,(\mathcal{Z})\})$. Системи відліку мінливих множин будемо позначати зазвичай малими готичними буквами ($\mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{k}, \mathfrak{p}$ тощо).

4) Для довільної системи відліку $\mathfrak{l} = (\alpha, \mathcal{B}_\alpha) \in \mathcal{L}k(\mathcal{Z})$ введемо такі позначення: $\boxed{\mathtt{ind}(\mathfrak{l}) := \alpha; \quad \mathfrak{l}^{\wedge} := \mathcal{B}_\alpha}$. Отже, для довільної системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{Z})$ математичний об'єкт $\mathfrak{l}^{\wedge}$ — це базова мінлива множина. Надалі, коли це не спричиняє непорозумінь, для довільної системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{Z})$ в позначеннях: $\mathfrak{Bs}(\mathfrak{l}^{\wedge}), \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}^{\wedge}), \mathbf{Tm}(\mathfrak{l}^{\wedge}), \mathbb{T}\mathbf{m}(\mathfrak{l}^{\wedge}), \leq_{\mathfrak{l}^{\wedge}}, <_{\mathfrak{l}^{\wedge}}, \underset{\mathfrak{l}^{\wedge}}{\leftarrow}, \overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathfrak{l}^{\wedge}}{\leftarrow}}, \mathbb{L}d(\mathfrak{l}^{\wedge})$ та ін. символ "$\,^{\wedge}$" будемо пропускати, використовуючи замість них позначення: $\mathfrak{Bs}(\mathfrak{l}), \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}), \mathbf{Tm}(\mathfrak{l}), \mathbb{T}\mathbf{m}(\mathfrak{l}), \leq_{\mathfrak{l}}, <_{\mathfrak{l}}, \underset{\mathfrak{l}}{\leftarrow}, \overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathfrak{l}}{\leftarrow}}, \mathbb{L}d(\mathfrak{l})$ відповідно.

5) Для довільних систем відліку $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{Z})$ відображення уніфікації $\mathfrak{U}_{\mathtt{ind}(\mathfrak{m}),\mathtt{ind}(\mathfrak{l})}$ позначатимемо через $\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathcal{Z} \rangle$, тобто:

$$\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathcal{Z} \rangle = \mathfrak{U}_{\mathtt{ind}(\mathfrak{m}),\mathtt{ind}(\mathfrak{l})}.$$

Якщо відомо, про яку мінливу множину $\mathcal{Z}$ йдеться, то символ $\mathcal{Z}$ у зазначеному вище позначенні будемо пропускати, вживаючи замість нього позначення "$\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle$". Також, коли це не спричиняє непорозумінь, у позначеннях "$\leq_{\mathfrak{l}}, <_{\mathfrak{l}}, \underset{\mathfrak{l}}{\leftarrow}, \overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathfrak{l}^{\wedge}}{\leftarrow}}$" символ "$\mathfrak{l}$" пропускатимемо, застосовуючи замість них позначення "$\leq, <, \leftarrow, \overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\leftarrow}$". Крім того, для елементарно-часових станів $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ ми, зазвичай, використовуватимемо позначення $\omega_2 \leftarrow \omega_1$ або $\omega_2 \underset{\mathfrak{l}}{\leftarrow} \omega_1$ замість позначень $\omega_2 \overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\leftarrow} \omega_1$ або $\omega_2 \overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathfrak{l}}{\leftarrow}} \omega_1$ відповідно (у випадках, коли це не спричиняє непорозумінь).

У підрозділі 1.13 наведені певні приклади мінливих множин, які демонструють, що математичний апарат відповідної теорії має достатній запас гнучкості. Важливу роль для побудови математично строгих моделей еволюції систем у рамках кінематики спеціальної теорії відносності відіграють мінливі множини, породжені мультиобразом базової мінливої множини.

Означення 1.132. Упорядковану трійку $(\mathbb{T}, \mathcal{X}, U)$ будемо називати **еволюційним проєктором** для базової мінливої множини $\mathcal{B}$, якщо:

1. $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$ — лінійно упорядкована множина;
2. $\mathcal{X}$ — довільна множина;
3. U — відображення виду $U : \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}) \to \mathbf{T} \times \mathcal{X}$.

Теорема 1.133 (про образ базової мінливої множини)**.** *Нехай* $(\mathbb{T}, \mathcal{X}, U)$ *— еволюційний проєктор для базової мінливої множини* $\mathcal{B}$*. Тоді існує (причому єдина) базова мінлива множина* $U[\mathcal{B}, \mathbb{T}]$*, що задовольняє такі умови:*

1. $\mathbb{T}\mathbf{m}\,(U\,[\mathcal{B},\mathbb{T}])=\mathbb{T}$;
2. $\mathbb{B}\mathfrak{s}(U\,[\mathcal{B},\mathbb{T}])=U(\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}))=\{U(\omega)\mid\omega\in\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})\}$;
3. *Якщо* $\widetilde{\omega}_1,\widetilde{\omega}_2\in\mathbb{B}\mathfrak{s}(U\,[\mathcal{B},\mathbb{T}])$ *і* $\mathsf{tm}\,(\widetilde{\omega}_1)\neq\mathsf{tm}\,(\widetilde{\omega}_2)$, *то* $\widetilde{\omega}_1$ *і* $\widetilde{\omega}_2$ *об'єднані долею в* $U\,[\mathcal{B},\mathbb{T}]$ *тоді й тільки тоді, коли існують об'єднані долею в* $\mathcal{B}$ *елементарно-часові стани* $\omega_1,\omega_2\in\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$, *такі, що* $\widetilde{\omega}_1=U\,(\omega_1)$, $\widetilde{\omega}_2=U\,(\omega_2)$.

Базову мінливу множину $U\,[\mathcal{B},\mathbb{T}]$, що задовольняє умови 1,2,3 теореми 1.133 будемо називати **образом базової мінливої множини** $\mathcal{B}$ відносно (трансформуючого) відображення U і часової шкали $\mathbb{T}$. У разі, коли $\mathbb{T}=\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B})$, замість позначення $U\,[\mathcal{B},\mathbb{T}]$ будемо використовувати позначення $U\,[\mathcal{B}]$, $U\,[\mathcal{B}]:=U\,[\mathcal{B},\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B})]$.

Означення 1.138. 1. Еволюційний проєктор $(\mathbb{T},\mathcal{X},U)$ (де $\mathbb{T}=(\mathbf{T},\leq)$) для базової мінливої множини $\mathcal{B}$ будемо називати **ін'єктивним**, якщо відображення U є ін'єкцією з $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ в $\mathbf{T}\times\mathcal{X}$ (тобто бієкцією з $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ на множину $\mathfrak{R}(U)\subseteq\mathbf{T}\times\mathcal{X}$).

2. Довільну індексовану сім'ю ін'єктивних еволюційних проєкторів для базової мінливої множини $\mathcal{B}$ вигляду $\mathfrak{P}=((\mathbb{T}_\alpha,\mathcal{X}_\alpha,U_\alpha)\mid\alpha\in\mathcal{A})$ (де $\mathcal{A}\neq\emptyset$) називатимемо **еволюційним мультипроєктором** для $\mathcal{B}$.

Теорема 1.139 (про мультиобраз для мінливих множин)**.** *Нехай* $\mathfrak{P}=((\mathbb{T}_\alpha,\mathcal{X}_\alpha,U_\alpha)\mid\alpha\in\mathcal{A})$ *— еволюційний мультипроєктор для базової мінливої множини* $\mathcal{B}$*. Тоді існує (причому єдина) мінлива множина* $\mathcal{Z}$*, що задовольняє такі умови:*

1. $\mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})=\{(\alpha,U_\alpha\,[\mathcal{B},\mathbb{T}_\alpha])\mid\alpha\in\mathcal{A}\}$.
2. *Для довільних систем відліку* $\mathfrak{l}=(\alpha,U_\alpha\,[\mathcal{B},\mathbb{T}_\alpha])\in\mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$, $\mathfrak{m}=(\beta,U_\beta\,[\mathcal{B},\mathbb{T}_\beta])\in\mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ $(\alpha,\beta\in\mathcal{A})$ *і довільної множини* $A\subseteq\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})=U_\alpha(\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}))$ *справедлива наступна рівність:*
$$\langle\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l},\mathcal{Z}\rangle\,A=U_\beta\left(U_\alpha^{[-1]}(A)\right)=\left\{U_\beta\left(U_\alpha^{[-1]}(\omega)\right)\mid\omega\in A\right\},$$
де $U_\alpha^{[-1]}$ *— відображення, обернене до* U_α.

Нехай $\mathfrak{P}=((\mathbb{T}_\alpha,\mathcal{X}_\alpha,U_\alpha)\mid\alpha\in\mathcal{A})$ — еволюційний мультипроєктор для базової мінливої множини $\mathcal{B}$. Мінливу множину $\mathcal{Z}$, що задовольняє умови $1,2$ теореми 1.139, будемо називати **еволюційним мультиобразом** базової мінливої множини $\mathcal{B}$ відносно еволюційного мультипроєктора $\mathfrak{P}$ і будемо позначати її через $\mathcal{Z}\mathsf{im}\,[\mathfrak{P},\mathcal{B}]$:
$$\mathcal{Z}\mathsf{im}\,[\mathfrak{P},\mathcal{B}]:=\mathcal{Z}.$$

Нехай $\mathcal{B}$ — довільна базова мінлива множина, X — довільна множина, що містить $\mathfrak{Bs}(\mathcal{B})$ $(\mathfrak{Bs}(\mathcal{B}) \subseteq X)$. Множина бієкцій $\mathbb{U}$, заданих на $\mathbf{Tm}(\mathcal{B}) \times X$:

$$U : \mathbf{Tm}(\mathcal{B}) \times X \longrightarrow \mathbf{Tm}(\mathcal{B}) \times X \qquad (\forall U \in \mathbb{U}), \tag{1}$$

називається ***трансформуючою множиною бієкцій*** відносно базової мінливої множини $\mathcal{B}$ на X. Нехай $\mathbb{U}$ — трансформуюча множина бієкцій відносно $\mathcal{B}$ на X. Тоді, за означенням 1.132, кожне відображення $U \in \mathbb{U}$ породжує ін'єктивний еволюційний проєктор, $\left(\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}), X, U_{\restriction \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})}\right)$, де $U_{\restriction \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})}$ — звуження відображення U на множину $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}) \subseteq \mathbf{Tm}(\mathcal{B}) \times X$ (надалі, коли не виникає непорозумінь, відображення $U_{\restriction \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})}$ будемо ототожнювати з відображенням U; при такому ототожненні можна вважати, що $\left(\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}), X, U_{\restriction \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})}\right) = (\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}), X, U))$. Отже, індексована сім'я $\mathfrak{P}_{\mathcal{B}}[\mathbb{U}] = ((\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}), X, U) \mid U \in \mathbb{U})$ є еволюційним мультипроєктором для $\mathcal{B}$. У цьому частковому випадкові отримуємо мінливу множину:

$$\mathcal{Z}\mathsf{im}\,(\mathbb{U}, \mathcal{B}) = \mathcal{Z}\mathsf{im}\,[\mathfrak{P}_{\mathcal{B}}[\mathbb{U}], \mathcal{B}]\,. \tag{2}$$

Мінливу множину $\mathcal{Z}\mathsf{im}\,(\mathbb{U}, \mathcal{B})$ будемо називати ***багатоликим образом*** базової мінливої множини $\mathcal{B}$ відносно трансформуючої множини бієкцій $\mathbb{U}$.

Приклад 1.148. Нехай $\mathcal{B}$ — базова мінлива множина, така, що

$$\mathfrak{Bs}(\mathcal{B}) \subseteq \mathbb{R}^3, \quad \mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}) = \mathbb{R}_{ord} = (\mathbb{R}, \leq)\,,$$

де $\leq$ — стандартне відношення лінійного порядку на полі дійсних чисел. Така базова мінлива множина $\mathcal{B}$ обов'язково існує, оскільки, наприклад, можна покласти, $\mathcal{B} := \mathcal{A}t\,(\mathbb{R}_{ord}, \mathcal{R})$, де $\mathcal{R}$ — система абстрактних траєкторій із $\mathbb{R}_{ord}$ у певну підмножину $M \subseteq \mathbb{R}^3$. Розгляньмо групу Пуанкаре $\mathbb{U} = P(1,3,c)$ із заданою фіксованою швидкістю світла $c \in (0, \infty)$, визначену на 4-мірному просторі часу $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \supseteq \mathbf{Tm}(\mathcal{B}) \times \mathfrak{Bs}(\mathcal{B})$. Група Пуанкаре $\mathbb{U} = P(1,3,c)$ є трансформуючою множиною бієкцій відносно базової мінливої множини $\mathcal{B}$ на $\mathbb{R}^3$. Отже, отримуємо мінливу множину $\mathcal{Z}\mathsf{im}\,(P(1,3), \mathcal{B})$, яка є математично строгою моделлю кінематики спеціальної теорії відносності в інерційних системах відліку.

Приклад 1.149. Нехай $\overleftarrow{\mathcal{B}} = (\mathcal{B}_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A})$ — довільна індексована сім'я базових мінливих множин. Покладемо: $\mathfrak{U}_{\beta\alpha} A := \begin{cases} A, & \alpha = \beta \\ \emptyset, & \alpha \neq \beta \end{cases}$

$(\alpha,\beta\in\mathcal{A},\ A\subseteq\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}_\alpha))$. Легко перевірити, що сім'я відображень $\overleftarrow{\mathfrak{U}}=(\mathfrak{U}_{\beta\alpha}\,|\,\alpha,\beta\in\mathcal{A})$ задовольняє всі умови означення 1.124. Тому трійка $\mathcal{Z}\mathsf{nv}\left(\overleftarrow{\mathcal{B}}\right)=\left(\mathcal{A},\overleftarrow{\mathcal{B}},\overleftarrow{\mathfrak{U}}\right)$ є мінливою множиною.

У підрозділі 1.14 введено класифікацію видимості систем відліку у мінливих множинах, зокрема доведено, що за певних умов множина систем відліку мінливої множини може розпадатись на класи видимості, які попарно не перетинаються і будь-який клас видимості є цілком невидимим з інших класів видимості. Також досліджено чітко видимі мінливі множини, тобто мінливі множини, всі компоненти яких є цілком видимими у кожній системі відліку.

Означення 1.155. Нехай $\mathcal{Z}$ — довільна мінлива множина і $\mathfrak{l},\mathfrak{m}\in\mathcal{L}k(\mathcal{Z})$ — довільні системи відліку $\mathcal{Z}$. Будемо говорити, що система відліку $\mathfrak{l}$ є:

- **Видимою** з системи відліку $\mathfrak{m}$, якщо існує мінлива система $A\subseteq\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$, така, що $\langle\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}\rangle\,A\neq\emptyset$, тобто якщо $\langle\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}\rangle\,\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})\neq\emptyset$. **Позначення**: $\mathfrak{l}\succ\mathfrak{m}$.
- **Нормально видимою** з системи відліку $\mathfrak{m}$, якщо для довільної непорожньої мінливої системи $A\subseteq\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ $(A\neq\emptyset)$ виконується співвідношення $\langle\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}\rangle\,A\neq\emptyset$. **Позначення**: $\mathfrak{l}\succ!\,\mathfrak{m}$.
- **Чітко видимою** з системи відліку $\mathfrak{m}$, якщо $\mathfrak{l}$ є нормально видимою з системи відліку $\mathfrak{m}$ і для довільної непорожньої мінливої системи $A\subseteq\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ виконується рівність: $\langle\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}\rangle\,A=\bigsqcup\limits_{\omega\in A}\langle\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}\rangle\,\{\omega\}$. **Позначення**: $\mathfrak{l}\succ!!\,\mathfrak{m}$.

Будемо говорити, що мінлива множина $\mathcal{Z}$ є **видимою** / **нормально видимою** / **чітко видимою**, якщо для довільних систем відліку $\mathfrak{l},\mathfrak{m}\in\mathcal{L}k(\mathcal{Z})$ виконується співвідношення $\mathfrak{l}\succ\mathfrak{m}$ / $\mathfrak{l}\succ!\,\mathfrak{m}$ / $\mathfrak{l}\succ!!\,\mathfrak{m}$ відповідно.

Зауваження 1.156. Нехай $\mathcal{Z}$ — довільна мінлива множина. Тоді для довільних систем відліку $\mathfrak{l},\mathfrak{m}\in\mathcal{L}k(\mathcal{Z})$ справедливі такі твердження:

- якщо $\mathfrak{l}\succ!!\,\mathfrak{m}$, то $\mathfrak{l}\succ!\,\mathfrak{m}$;
- якщо $\mathfrak{l}\succ!\,\mathfrak{m}$, то $\mathfrak{l}\succ\mathfrak{m}$.

У дисертації на конкретних прикладах доведено, що імплікації, обернені до зазначених вище тверджень, взагалі кажучи, хибні.

Наслідок 1.169. *Нехай* $\mathfrak{P}$ *— еволюційний мультипроектор для базової мінливої множини* $\mathcal{B}$. *Тоді мінлива множина* $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}\mathsf{im}\,[\mathfrak{P}, \mathcal{B}]$ *є чітко видимою.*

Наслідок 1.170. *Нехай* $\mathbb{U}$ *— трансформуюча множина бієкцій відносно базової мінливої множини* $\mathcal{B}$ *на* X. *Тоді мінлива множина* $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}\mathsf{im}\,(\mathbb{U}, \mathcal{B})$ *є чітко видимою.*

Твердження 1.171. *Для довільних систем відліку* $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ *довільної мінливої множини* $\mathcal{Z}$ *наступні твердження рівносильні:*
(I) $\mathfrak{l} \succ! \, \mathfrak{m}$ *і* $\mathfrak{m} \succ! \, \mathfrak{l}$; **(II)** $\mathfrak{l} \succ!! \, \mathfrak{m}$ *і* $\mathfrak{m} \succ!! \, \mathfrak{l}$.

Мінлива множина $\mathcal{Z}\mathsf{nv}\left(\overleftarrow{\mathcal{B}}\right)$ (де $\overleftarrow{\mathcal{B}} = (\mathcal{B}_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A})$) із прикладу 1.149 за умови $\mathbf{card}(\mathcal{A}) \geq 2$ не є видимою. (Тут $\mathbf{card}(\mathcal{A})$ — потужність множини $\mathcal{A}$.) Із зауваження 1.156 випливає, що *якщо мінлива множина* $\mathcal{Z}$ *є нормально видимою, то вона є видимою.* В дисертації доведено, що твердження, обернене до виділеного курсивом, взагалі кажучи не справедливе. Водночас, незважаючи на те, що, згідно з зауваженням 1.156, на рівні систем відліку поняття нормальної і чіткої видимості не еквівалентні, із твердження 1.171 випливає:

Наслідок 1.172. *Мінлива множина* $\mathcal{Z}$ *є чітко видимою тоді й тільки тоді, коли вона є нормально видимою.*

Теорема 1.182. *Мінлива множина* $\mathcal{Z}$ *є чітко видимою тоді й тільки тоді, коли для довільних* $\mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{p} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ *справедлива рівність:* $\langle \mathfrak{p} \leftarrow \mathfrak{m} \rangle \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle = \langle \mathfrak{p} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle$.

Твердження 1.183. *Нехай* $\mathcal{Z}$ *— чітко видима мінлива множина і* $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ *— довільні системи відліку* $\mathcal{Z}$. *Якщо мінлива система* $A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ *є одноелементною (тобто* $\mathbf{card}(A) = 1$*), то мінлива система* $\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle A$ *також одноелементна.*

Означення 1.184. Нехай $\mathcal{Z}$ — чітко видима мінлива множина, $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ і $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$. Елементарно-часовий стан $\omega' \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{m})$, такий, що $\{\omega'\} = \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle \{\omega\}$, будемо називати **видимим образом** елементарно-часового стану $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ в системі відліку $\mathfrak{m}$ і будемо позначати його через $\boxed{\langle !\, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l},\, \mathcal{Z} \rangle\, \omega}$ ($\langle !\, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l},\, \mathcal{Z} \rangle\, \omega = \omega'$). Відображення $\langle !\, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l},\, \mathcal{Z} \rangle : \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}) \to \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{m})$ будемо називати відображенням **чіткої уніфікації** між системами відліку $\mathfrak{l}$ і $\mathfrak{m}$ (із системи відліку $\mathfrak{l}$ в систему відліку $\mathfrak{m}$). У разі, коли наперед відомо про яку мінливу множину $\mathcal{Z}$ йде мова, замість позначення $\langle !\, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l},\, \mathcal{Z} \rangle$ будемо використовувати позначення $\langle !\, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle$.

Згідно з твердженням 1.183, довільний елементарно-часовий стан $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ завжди має видимий образ $\omega' = \langle !\, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, \omega$ (в іншій системі відліку довільної чітко видимої мінливої множини).

Теорема 1.185. *Для довільної непорожньої мінливої системи $A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ у системі відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ чітко видимої мінливої множини $\mathcal{Z}$ справедлива рівність:*
$\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, A = \bigsqcup_{\omega \in A} \{\langle !\, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, \omega\} = \{\langle !\, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, \omega \mid \omega \in A\}$ $(\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z}))$.

Наслідок 1.186. *Нехай $\mathcal{Z}$ — чітко видима мінлива множина і $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ — її довільні системи відліку. Тоді для будь-якої мінливої системи $A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ множини A і $\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, A$ є рівнопотужними. При цьому у випадку $A \neq \emptyset$ відображення: $f(\omega) = \langle !\, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, \omega$ $(\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}))$ є бієкцією між множинами A та $\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, A$. Зокрема рівнопотужними є множини $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ та $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{m})$ і відображення $f(\cdot)$ є бієкцією між цими множинами.*

У **другому** розділі досліджуються кінематичні мінливі множини, тобто мінливі множини, кожна система відліку яких оснащена своїм власним геометричним оточенням, яке може бути представлене топологічним, лінійним або топологічним векторним простором.

У підрозділі 2.1 наведений огляд літератури за тематикою розділу, сформульовані основні завдання подальших досліджень і анонсовані найвагоміші результати, отримані у другому розділі.

У підрозділі 2.2 дане математично строге означення кінематичних мінливих множин (кінематичних множин), а також введена система стандартних позначень теорії кінематичних множин.

Означення 2.1. Під ***координатним простором*** $\mathfrak{Q}$ будемо розуміти математичну структуру одного з наступних трьох типів:

а) $\mathfrak{Q} = (\mathfrak{X}, \mathcal{T})$ — топологічний простір (тобто $\mathcal{T}$ — топологія на $\mathfrak{X}$).

б) $\mathfrak{Q} = (\mathfrak{X}, \oplus, \otimes)$ — лінійний простір над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$ (тобто $\oplus$ і $\otimes$ — лінійні операції додавання елементів із множини $\mathfrak{X}$ і множення елементів множини $\mathfrak{X}$ на елементи поля $\mathbb{R}$ відповідно).

в) $\mathfrak{Q} = (\mathfrak{X}, \mathcal{T}, \oplus, \otimes)$ — топологічний векторний простір.

У всіх трьох випадках множину множину $\mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}) := \mathfrak{X}$ будемо називати ***множиною значень координат*** координатного простору $\mathfrak{Q}$. Елементи $x \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q})$ називатимемо ***координатами*** $\mathfrak{Q}$.

Означення 2.2. 1. Пару $\mathcal{G}_0 = (\mathfrak{Q}, k)$ будемо називати **геометричним оточенням** базової мінливої множини $\mathcal{B}$, якщо $\mathfrak{Q}$

— координатний простір і $k : \mathfrak{Bs}(\mathcal{B}) \to \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q})$ — відображення з $\mathfrak{Bs}(\mathcal{B})$ в $\mathbf{Zk}(\mathfrak{Q})$. При цьому пару $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}} = (\mathcal{B}, \mathcal{G}_0) = (\mathcal{B}, (\mathfrak{Q}, k))$ будемо називати **базовою кінематичною мінливою множиною**, чи, скорочено — **базовою кінематичною** множиною.

2. Нехай $\mathcal{Z}$ — довільна мінлива множина. Індексовану сім'ю пар $\mathcal{G} = ((\mathfrak{Q}_{\mathfrak{l}}, k_{\mathfrak{l}}) \mid \mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z}))$ будемо називати **геометричним оточенням** мінливої множини $\mathcal{Z}$, якщо для довільної системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ пара $(\mathfrak{Q}_{\mathfrak{l}}, k_{\mathfrak{l}})$ є геометричним оточенням базової мінливої множини $\mathfrak{l}^{\wedge}$, породженої системою відліку $\mathfrak{l}$, тобто якщо пара $(\mathfrak{l}^{\wedge}, (\mathfrak{Q}_{\mathfrak{l}}, k_{\mathfrak{l}}))$ є базовою кінематичною множиною. При цьому пару $\mathfrak{C} = (\mathcal{Z}, \mathcal{G})$ будемо називати **кінематичною мінливою множиною**, чи, скорочено — **кінематичною** множиною.

Нехай $\mathfrak{C} = (\mathcal{Z}, \mathcal{G})$, де $\mathcal{G} = \big((\mathfrak{Q}_{\mathfrak{l}}, k_{\mathfrak{l}}) \big|\ \mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})\big)$ — кінематична множина.

- Мінливу множину $\mathbb{BE}\,(\mathfrak{C}) := \mathcal{Z}$ будемо називати ***базою еволюції*** кінематичної множини $\mathfrak{C}$.
- Множини $$\mathcal{I}nd\,(\mathfrak{C}) := \mathcal{I}nd\,(\mathcal{Z}) = \mathcal{I}nd\,(\mathbb{BE}\,(\mathfrak{C})) \text{ і}$$ $$\mathcal{L}k\,(\mathfrak{C}) := \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z}) = \mathcal{L}k\,(\mathbb{BE}\,(\mathfrak{C}))$$ будемо називати ***множиною індексів*** і ***множиною систем відліку*** кінематичної множини $\mathfrak{C}$ (відповідно).
- Для довільної системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C}) = \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ зберігаються всі позначення, введені для систем відліку в теорії мінливих множин (а саме, це стосується позначень: $\mathtt{ind}\,(\mathfrak{l})$, $\mathfrak{Bs}(\mathfrak{l})$, $\underset{\mathfrak{l}}{\leftarrow}$, $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$, $\overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathfrak{l}}{\leftarrow}}$, $\mathbf{Tm}(\mathfrak{l})$, $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathfrak{l})$, $\mathbb{L}l\,(\mathfrak{l})$, $\mathbb{L}d\,(\mathfrak{l})$, $\leq_{\mathfrak{l}}$, $<_{\mathfrak{l}}$). Так само зберігаються всі скорочені варіанти цих позначень.
- Для довільних систем відліку $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C})$ індукуються позначення для відображень уніфікації $\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l},\ \mathfrak{C} \rangle := \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l},\ \mathcal{Z} \rangle$. Зокрема, у випадку, коли мінлива множина $\mathcal{Z}$ є чітко видимою випадку будемо говорити, що кінематична множина $\mathfrak{C}$ є ***чітко видимою*** і використовувати позначення: $$\langle !\, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathfrak{C} \rangle := \langle !\, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathcal{Z} \rangle .$$
- Для довільної системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C})$ введемо позначення: $$\mathbf{Zk}(\mathfrak{l};\ \mathfrak{C}) := \mathbf{Zk}\,(\mathfrak{Q}_{\mathfrak{l}})\,; \quad \mathsf{BG}(\mathfrak{l};\ \mathfrak{C}) := \mathfrak{Q}_{\mathfrak{l}};$$ $$\mathfrak{q}_{\mathfrak{l}}\,(x;\ \mathfrak{C}) := k_{\mathfrak{l}}(x)\ \ (x \in \mathfrak{Bs}\,(\mathfrak{l}))\,.$$

- У тих випадках, коли наперед відомо, про яку кінематичну множину $\mathfrak{C}$ йде мова замість позначень $\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l},\, \mathfrak{C} \rangle$, $\langle ! \, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l},\, \mathfrak{C} \rangle$, $\mathbf{Zk}(\mathfrak{l};\, \mathfrak{C})$, $\mathsf{BG}(\mathfrak{l};\, \mathfrak{C})$, $\mathfrak{q}_{\mathfrak{l}}\,(x;\, \mathfrak{C})$ будемо використовувати позначення, $\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle$, $\langle ! \, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle$, $\mathbf{Zk}(\mathfrak{l})$, $\mathsf{BG}(\mathfrak{l})$, $\mathfrak{q}_{\mathfrak{l}}\,(x)$ відповідно.
- Для довільної системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C})$ вводимо позначення:
$$\mathbb{M}k(\mathfrak{l};\mathfrak{C}) := \mathbf{Tm}(\mathfrak{l}) \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{l}) \ \text{ і}$$
$$\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l} \rangle}(\omega;\mathfrak{C}) := \left(\mathsf{tm}\,(\omega)\,, \mathfrak{q}_{\mathfrak{l}}(\mathsf{bs}\,(\omega))\right) \in \mathbb{M}k(\mathfrak{l};\mathfrak{C}) \quad (\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}))\,.$$
Множину $\mathbb{M}k(\mathfrak{l};\mathfrak{C})$ будемо називати ***множиною Мінковського*** системи відліку $\mathfrak{l}$ в кінематичній множині $\mathfrak{C}$. Значення $\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l} \rangle}(\omega;\mathfrak{C})$ будемо називати ***координатами Мінковського*** елементарно-часового стану $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathfrak{l})$ ***у системі відліку*** $\mathfrak{l}$.

У підрозділі 2.3 сформульовані означення реального й універсального перетворення координат у кінематичних множинах.

Означення 2.6. Нехай $\mathfrak{C}$ — чітко видима кінематична множина і $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C})$ — довільні системи відліку $\mathfrak{C}$.

1. Відображення $\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle}\,(\,\cdot\,;\mathfrak{C}) : \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}) \to \mathbb{M}k(\mathfrak{m})$, що визначається за формулою:
$$\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle}(\omega;\mathfrak{C}) = \mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{m} \rangle}(\langle ! \, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, \omega) \quad (\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})),$$
будемо називати **реальним перетворенням координат** із $\mathfrak{l}$ в $\mathfrak{m}$. (Для елементарно-часового стану $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathfrak{l})$ значення $\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle}(\omega;\mathfrak{C})$ можна назвати координатами Мінковського ω в (іншій) системі відліку $\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C})$.)
2. Відображення $\widetilde{Q} : \mathbb{M}k(\mathfrak{l}) \to \mathbb{M}k(\mathfrak{m})$ будемо називати **універсальним перетворенням координат** із $\mathfrak{l}$ в $\mathfrak{m}$, якщо $\widetilde{Q}$ є бієкцією (взаємно-однозначним відображенням) між $\mathbb{M}k(\mathfrak{l})$ та $\mathbb{M}k(\mathfrak{m})$ і при цьому для довільного елементарно-часового стану $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ справедлива рівність $\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle}(\omega;\mathfrak{C}) = \widetilde{Q}\left(\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l} \rangle}(\omega)\right)$.
3. Будемо говорити, що системи відліку $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C})$ **допускають універсальне перетворення координат**, якщо існує хоч одне універсальне перетворення координат $\widetilde{Q}$ з $\mathfrak{l}$ в $\mathfrak{m}$.
4. Індексовану сім'ю відображень $\left(\widetilde{Q}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}}\right)_{\mathfrak{l},\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C})}$ будемо називати **універсальним перетворенням координат для кінематичної множини** $\mathfrak{C}$, якщо для довільних систем відліку $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C})$ відображення $\widetilde{Q}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}}$ є універсальним перетворенням координат із $\mathfrak{l}$ в $\mathfrak{m}$, причому для довільних $\mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{p} \in \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C})$

і $\mathrm{w} \in \mathbb{M}k(\mathfrak{l})$ справедливі наступні рівності:

$$\widetilde{Q}_{\mathfrak{l},\mathfrak{l}}(\mathrm{w}) = \mathrm{w}; \qquad \widetilde{Q}_{\mathfrak{p},\mathfrak{m}}\left(\widetilde{Q}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}}(\mathrm{w})\right) = \widetilde{Q}_{\mathfrak{p},\mathfrak{l}}(\mathrm{w}).$$

5. Будемо говорити, що кінематична множина $\mathfrak{C}$ **допускає універсальне перетворення координат**, якщо існує хоч одне універсальне перетворення координат $\left(\widetilde{Q}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}}\right)_{\mathfrak{l},\mathfrak{m}\in\mathcal{L}k(\mathfrak{C})}$ для $\mathfrak{C}$.

У тих випадках, коли наперед відомо, про яку кінематичну множину $\mathfrak{C}$ йдеться, замість позначення $\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}\rangle}(\omega;\mathfrak{C})$ будемо використовувати позначення $\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}\rangle}(\omega)$.

Твердження 2.9. *Для довільної чітко видимої кінематичної множини $\mathfrak{C}$ наступні твердження рівносильні:*

1. *$\mathfrak{C}$ допускає універсальне перетворення координат.*
2. *Довільні системи відліку $\mathfrak{l},\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C})$ допускають універсальне перетворення координат.*
3. *Існує така система відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C})$, що системи відліку $\mathfrak{l},\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C})$ допускають універсальне перетворення координат для довільної системи відліку $\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C})$.*

Також у підрозділі 2.3 доведена *необхідна і достатня ознака існування універсального перетворення координат* у кінематичній множині. Нехай $\mathfrak{C}$ — довільна кінематична множина. Для довільної системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C})$ введемо такі позначення:
$\mathbb{T}\mathbf{rj}(\mathfrak{l}) := \left\{\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}(\omega) \mid \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})\right\}$; $\overline{\mathbb{T}\mathbf{rj}}(\mathfrak{l}) := \mathbb{M}k(\mathfrak{l}) \setminus \mathbb{T}\mathbf{rj}(\mathfrak{l})$.

Теорема 2.10. *Нехай $\mathfrak{C}$ — чітко видима кінематична множина. Системи відліку $\mathfrak{l},\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C})$ допускають універсальне перетворення координат тоді й тільки тоді, коли виконуються такі умови:*

1. $\mathbf{card}\left(\overline{\mathbb{T}\mathbf{rj}}(\mathfrak{l})\right) = \mathbf{card}\left(\overline{\mathbb{T}\mathbf{rj}}(\mathfrak{m})\right)$.
2. *Для довільних елементарно-часових станів $\omega_1,\omega_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ рівність $\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}\rangle}(\omega_1) = \mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}\rangle}(\omega_2)$ справедлива тоді і тільки тоді, коли $\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}(\omega_1) = \mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}(\omega_2)$.*

Зауваження 2.11. Якщо універсальне перетворення координат у кінематичній множині $\mathfrak{C}$ існує, то воно, взагалі кажучи, не єдине.

У підрозділі 2.4 доведено *теорему про мультиобраз для кінематичних множин*, а у підрозділі 2.5, використовуючи цю теорему, побудовано *приклади кінематичних множин, які є математично* *строгими моделями еволюції фізичних систем в рамках кінематики Лоренца-Пуанкаре та її тахіонових розширень* (тобто розширень, у яких дозволяється надсвітловий рух для матеріальних точок та інерційних систем відліку) на основі узагальнених перетворень Лоренца-Пуанкаре в сенсі Е. Рекамі, В. Ольховського й Р. Голдоні.

Означення 2.12. **1**. Упорядковану п'ятірку $(\mathbb{T}, \mathcal{X}, U, \mathfrak{Q}, k)$ будемо називати **кінематичним проєктором** для базової мінливої множини $\mathcal{B}$, якщо $(\mathbb{T}, \mathcal{X}, U)$ — еволюційний проєктор для $\mathcal{B}$, $\mathfrak{Q}$ — координатний простір, а k — відображення з $\mathcal{X}$ в $\mathbf{Zk}(\mathfrak{Q})$ $(k : \mathcal{X} \to \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}))$. У випадку, коли $(\mathbb{T}, \mathcal{X}, U)$ є ін'єктивним еволюційним проєктором для $\mathcal{B}$, відповідний кінематичний проєктор $(\mathbb{T}, \mathcal{X}, U, \mathfrak{Q}, k)$ будемо називати **ін'єктивним**.

2. Довільну індексовану сім'ю $\mathfrak{P} = ((\mathbb{T}_\alpha, \mathcal{X}_\alpha, U_\alpha, \mathfrak{Q}_\alpha, k_\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{A})$ (де $\mathcal{A} \neq \emptyset$), що складається з ін'єктивних кінематичних проєкторів для базової мінливої множини $\mathcal{B}$ будемо називати **кінематичним мультипроєктором** для $\mathcal{B}$.

Нехай $\mathfrak{P} = ((\mathbb{T}_\alpha, \mathcal{X}_\alpha, U_\alpha, \mathfrak{Q}_\alpha, k_\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{A})$ — кінематичний мультипроєктор для $\mathcal{B}$. Легко бачити, що тоді $\mathfrak{P}^{[e]} := ((\mathbb{T}_\alpha, \mathcal{X}_\alpha, U_\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{A})$ є еволюційним мультипроєктором для $\mathcal{B}$.

Теорема 2.14. *Нехай* $\mathfrak{P} = ((\mathbb{T}_\alpha, \mathcal{X}_\alpha, U_\alpha, \mathfrak{Q}_\alpha, k_\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{A})$ *— кінематичний мультипроєктор для базової мінливої множини* $\mathcal{B}$. *Тоді:*
А) *Існує (причому єдина) кінематична множина* $\mathfrak{C}$, *що задовольняє такі умови:*

1. $\mathbb{BE}(\mathfrak{C}) = \mathcal{Z}\mathsf{im}\left[\mathfrak{P}^{[e]}, \mathcal{B}\right]$. ***2.*** *Для довільної системи відліку* $\mathfrak{l} = (\alpha, U_\alpha[\mathcal{B}, \mathbb{T}_\alpha]) \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C})$ *(де* $\alpha \in \mathcal{A}$*) виконуються наступні рівності:*

$$\textbf{2.1)}\ \mathsf{BG}(\mathfrak{l}) = \mathfrak{Q}_\alpha; \qquad \textbf{2.2)}\ \mathfrak{q}_{\mathfrak{l}}(x) = k_\alpha(x) \quad (x \in \mathfrak{Bs}(\mathfrak{l})).$$

Б) *Кінематична множина* $\mathfrak{C}$, *що задовольняє умови 1,2, є чітко видимою.*

Означення 2.15. Кінематичну множину $\mathfrak{C}$, що задовольняє умови 1,2 теореми 2.14, будемо називати **кінематичним мультиобразом** базової мінливої множини $\mathcal{B}$ відносно кінематичного мультипроєктора $\mathfrak{P}$ і будемо позначати її через $\boxed{\mathfrak{Kim}\,[\mathfrak{P}, \mathcal{B}]}$.

Нехай $\mathfrak{Q}$ — координатний простір, а $\mathcal{B}$ — базова мінлива множина, така, що $\mathfrak{Bs}(\mathcal{B}) \subseteq \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q})$ (така базова мінлива множина $\mathcal{B}$ обов'язково існує, оскільки, наприклад, можна покласти $\mathcal{B} :=$

$\mathcal{A}t\,(\mathbb{T},\mathcal{R})$, де $\mathcal{R}$ — система абстрактних траєкторій із лінійно впорядкованої множини $\mathbb{T}$ у множину $\mathbf{M}\subseteq\mathbf{Zk}(\mathfrak{Q})$). Нехай $\mathbb{U}$ — довільна трансформуюча множина бієкцій відносно $\mathcal{B}$ на $\mathbf{Zk}(\mathfrak{Q})$ (в сенсі (1)). Тоді $\mathbb{U}$ породжує кінематичний мультипроєктор $\widehat{\mathbb{U}}:=\left(\left(\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}),\mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}),\mathbf{U},\mathfrak{Q},\mathbb{I}_{\mathbf{Zk}(\mathfrak{Q})}\right)\mid\mathbf{U}\in\mathbb{U}\right)$ для базової мінливої множини $\mathcal{B}$, де $\mathbb{I}_{\mathbf{Zk}(\mathfrak{Q})}$ — тотожне відображення на $\mathbf{Zk}(\mathfrak{Q})$. Позначимо:

$$\mathfrak{Kim}\,(\mathbb{U},\mathcal{B},\mathfrak{Q}):=\mathfrak{Kim}\left[\widehat{\mathbb{U}},\mathcal{B}\right]. \tag{3}$$

Теорема 2.17. *Довільна кінематична множина виду* $\mathfrak{C}=\mathfrak{Kim}\,(\mathbb{U},\mathcal{B},\mathfrak{Q})$ *допускає універсальне перетворення координат.*

Із результатів, сформульованих далі буде видно, що загальні кінематичні мультиобрази виду $\mathfrak{Kim}\,[\mathfrak{P},\mathcal{B}]$ (частинними випадками яких є кінематичні множини виду $\mathfrak{Kim}\,(\mathbb{U},\mathcal{B},\mathfrak{Q})$) можуть і не допускати універсального перетворення координат.

Нехай $(\mathfrak{H},\|\cdot\|,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ — дійсний гільбертовий простір. Тоді $\mathfrak{H}$ породжує координатний простір $\widehat{\mathfrak{H}}=(\mathfrak{H},\mathcal{T}_{\mathfrak{H}},\oplus_{\mathfrak{H}},\otimes_{\mathfrak{H}})$, де $\mathcal{T}_{\mathfrak{H}}$ — топологія, породжена нормою $\|\cdot\|$ на $\mathfrak{H}$, а $(\oplus_{\mathfrak{H}},\otimes_{\mathfrak{H}})$ — природна лінійна структура простору $\mathfrak{H}$.

Позначимо через $\mathcal{L}\,(\mathfrak{H})$ простір лінійних (однорідних) неперервних операторів над $\mathfrak{H}$, а через $\mathcal{L}^{\times}\,(\mathfrak{H})$ простір всіх операторів афінних перетворень простору $\mathfrak{H}$, тобто $\mathcal{L}^{\times}\,(\mathfrak{H})=\left\{\mathbf{A}_{[\mathbf{a}]}\mid\mathbf{A}\in\mathcal{L}\,(\mathfrak{H})\,,\,\mathbf{a}\in\mathfrak{H}\right\}$, де $\mathbf{A}_{[\mathbf{a}]}x=\mathbf{A}x+\mathbf{a}$, $x\in\mathfrak{H}$. Простором ***Мінковського*** над $\mathfrak{H}$ називається гільбертовий простір $\mathcal{M}\,(\mathfrak{H})=\mathbb{R}\times\mathfrak{H}=\{(t,x)\mid t\in\mathbb{R},\ x\in\mathfrak{H}\}$, оснащений скалярним добутком і нормою: $\langle\mathrm{w}_1,\mathrm{w}_2\rangle=\langle\mathrm{w}_1,\mathrm{w}_2\rangle_{\mathcal{M}(\mathfrak{H})}=t_1t_2+\langle x_1,x_2\rangle$, $\|\mathrm{w}_1\|=\|\mathrm{w}_1\|_{\mathcal{M}(\mathfrak{H})}=\left(t_1^2+\|x_1\|^2\right)^{1/2}$ (де $\mathrm{w}_i=(t_i,x_i)\in\mathcal{M}\,(\mathfrak{H})\,,\ i\in\{1,2\}$). Позначимо через $\mathbf{Pk}\,(\mathfrak{H})$ множину всіх операторів $\mathbf{S}\in\mathcal{L}^{\times}\,(\mathcal{M}\,(\mathfrak{H}))$, що мають неперервний обернений оператор $\mathbf{S}^{-1}\in\mathcal{L}^{\times}\,(\mathcal{M}\,(\mathfrak{H}))$. Оператори $\mathbf{S}\in\mathbf{Pk}\,(\mathfrak{H})$ будемо називати ***операторами (афінного) перетворення координат***. У просторі $\mathcal{M}\,(\mathfrak{H})$ виділимо наступні підпростори: $\mathfrak{H}_0=\{(t,\mathbf{0})\mid t\in\mathbb{R}\}$, $\mathfrak{H}_1=\{(0,x)\mid x\in\mathfrak{H}\}$. Позначимо через $\mathfrak{U}\,(\mathfrak{H}_1)$ множину всіх ***унітарних*** операторів на підпросторі $\mathfrak{H}_1$, тобто множину всіх лінійних операторів $J\in\mathcal{L}\,(\mathfrak{H}_1)$, таких, що $\|J\mathbf{x}\|=\|\mathbf{x}\|$ $(\forall\mathbf{x}\in\mathfrak{H}_1)$ і $J\mathfrak{H}_1=\mathfrak{H}_1$. Покладемо: $\mathbf{B}_1\,(\mathfrak{H}_1):=\{\mathbf{n}\in\mathfrak{H}_1\mid\|\mathbf{n}\|=1\}$, а також для довільних $\mathbf{n}\in\mathbf{B}_1\,(\mathfrak{H}_1)$ і $\mathrm{w}=(t,x)\in\mathcal{M}\,(\mathfrak{H})$ покладемо $\mathbf{X}_1^{\perp}\,[\mathbf{n}]\,\mathrm{w}:=x-\langle\mathbf{n},\mathrm{w}\rangle\,\mathbf{n}$.

Для довільних фіксованих значень $c\in(0,\infty)$, $\lambda\in[0,\infty]\setminus\{c\}$, $s\in\{-1,1\}$, $J\in\mathfrak{U}\,(\mathfrak{H}_1)$, $\mathbf{n}\in\mathbf{B}_1\,(\mathfrak{H}_1)$ і $\mathbf{a}\in\mathcal{M}\,(\mathfrak{H})$ введемо наступні оператори:

$$\mathbf{W}_{\lambda,c}[s,\mathbf{n},J]\,\mathrm{w} :=$$
$$= \begin{cases} \dfrac{st - \frac{\lambda}{c^2}\langle \mathbf{n},\mathrm{w}\rangle}{\sqrt{\left|1-\frac{\lambda^2}{c^2}\right|}}\mathbf{e}_0 + J\left(\dfrac{\lambda t - s\langle \mathbf{n},\mathrm{w}\rangle}{\sqrt{\left|1-\frac{\lambda^2}{c^2}\right|}}\mathbf{n} + \mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}]\,\mathrm{w}\right), & \lambda < \infty \\ -\frac{\langle \mathbf{n},\mathrm{w}\rangle}{c}\mathbf{e}_0 + J\left(ct\mathbf{n} + \mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}]\,\mathrm{w}\right); & \lambda = \infty \end{cases} \tag{4}$$

$$\mathbf{W}_{\lambda,c}[s,\mathbf{n},J;\mathbf{a}]\,\mathrm{w} := \mathbf{W}_{\lambda,c}[s,\mathbf{n},J](\mathrm{w}+\mathbf{a}) \quad (\mathrm{w} = (t,x) \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})). \tag{5}$$

Легко бачити, що $\mathbf{W}_{\lambda,c}[s,\mathbf{n},J] = \mathbf{W}_{\lambda,c}[s,\mathbf{n},J,\mathbf{0}]$, де $\mathbf{0}$ — нульовий вектор простору $\mathcal{M}(\mathfrak{H})$. Можна довести, що $\mathbf{W}_{\lambda,c}[s,\mathbf{n},J;\mathbf{a}] \in \mathbf{Pk}(\mathfrak{H})$ (при довільних значеннях параметрів $c \in (0,\infty)$, $\lambda \in [0,\infty] \setminus \{c\}$, $s \in \{-1,1\}$, $J \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)$, $\mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)$ і $\mathbf{a} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})$).

Для $0 < c < \infty$ введемо наступні класи операторів:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{PT}(\mathfrak{H},c) &:= \big\{\mathbf{W}_{\lambda,c}[s,\mathbf{n},J;\mathbf{a}] \mid s \in \{-1,1\},\ \lambda \in [0,\infty] \setminus \{c\}, \\ &\qquad \mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1),\ J \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1),\ \mathbf{a} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})\big\}; \\ \mathfrak{PT}_+(\mathfrak{H},c) &:= \{\mathbf{W}_{\lambda,c}[s,\mathbf{n},J;\mathbf{a}] \in \mathfrak{PT}(\mathfrak{H},c) \mid s = 1\}; \\ \mathfrak{P}(\mathfrak{H},c) &:= \{\mathbf{W}_{\lambda,c}[s,\mathbf{n},J;\mathbf{a}] \in \mathfrak{PT}(\mathfrak{H},c) \mid \lambda < c\}; \\ \mathfrak{P}_+(\mathfrak{H},c) &:= \{\mathbf{W}_{\lambda,c}[s,\mathbf{n},J;\mathbf{a}] \in \mathfrak{P}(\mathfrak{H},c) \mid s = 1\}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Використовуючи введені вище класи операторів і формулу (3), можемо визначити такі кінематичні множини:

$$\mathfrak{KPT}_0(\mathfrak{H},\mathcal{B},c) := \mathfrak{Kim}\left(\mathfrak{PT}(\mathfrak{H},c),\mathcal{B},\widehat{\mathfrak{H}}\right);$$

$$\mathfrak{KPT}(\mathfrak{H},\mathcal{B},c) := \mathfrak{Kim}\left(\mathfrak{PT}_+(\mathfrak{H},c),\mathcal{B},\widehat{\mathfrak{H}}\right);$$

$$\mathfrak{KP}_0(\mathfrak{H},\mathcal{B},c) := \mathfrak{Kim}\left(\mathfrak{P}(\mathfrak{H},c),\mathcal{B},\widehat{\mathfrak{H}}\right);$$

$$\mathfrak{KP}(\mathfrak{H},\mathcal{B},c) := \mathfrak{Kim}\left(\mathfrak{P}_+(\mathfrak{H},c),\mathcal{B},\widehat{\mathfrak{H}}\right).$$

У випадку $\dim(\mathfrak{H}) = 3$ кінематична множина $\mathfrak{KP}(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)$ являє собою найпростішу математично строгу модель кінематики спеціальної теорії відносності в інерційних системах відліку. Кінематична множина $\mathfrak{KP}_0(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)$ побудована на основі загальної групи Лоренца-Пуанкаре і містить окрім звичайних систем відліку (з додатним напрямком часу), які мають зрозумілу фізичну інтерпретацію, також системи відліку з від'ємним напрямком часу. Кінематичні множини $\mathfrak{KPT}(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)$ і $\mathfrak{KPT}_0(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)$ містять крім стандартних (“тардіонних”) систем відліку також і “тахіонні” системи відліку, які рухаються відносно “тардіонних” систем відліку зі швидкістю більшою за швидкість світла c. З теореми 2.17 випливає, що *кінематичні множини типів* $\mathfrak{KPT}_0(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)$, $\mathfrak{KPT}(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)$, $\mathfrak{KP}_0(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)$ *та* $\mathfrak{KP}(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)$ *допускають універсальне перетворення координат.*

У підрозділі 2.6 побудовано один цікавий клас кінематичних множин, в яких кожна частинка в кожен момент часу може мати свою власну “швидкість світла” і доведено, що *в таких кінематичних множинах не існує універсального перетворення координат в нетривіальних випадках.* Нехай множина $\mathfrak{V}_\mathfrak{f} \subseteq (0,\infty)$ така, що $\mathfrak{V}_\mathfrak{f} \neq \emptyset$ і $(0,\infty)\setminus\mathfrak{V}_\mathfrak{f} \neq \emptyset$. Покладемо:

$$\mathfrak{H}_{\mathfrak{V}_\mathfrak{f}} := \mathfrak{H}\times\mathfrak{V}_\mathfrak{f} = \{(x,c) \mid x\in\mathfrak{H},\ c\in\mathfrak{V}_\mathfrak{f}\};$$

$$\mathcal{M}\left(\mathfrak{H}_{\mathfrak{V}_\mathfrak{f}}\right) := \mathbb{R}\times\mathfrak{H}_{\mathfrak{V}_\mathfrak{f}}.$$

Множину $\mathcal{M}\left(\mathfrak{H}_{\mathfrak{V}_\mathfrak{f}}\right)$ будемо називати простором Мінковського ***із множиною заборонених швидкостей*** $\mathfrak{V}_\mathfrak{f}$ над $\mathfrak{H}$. Множину $\widetilde{\mathfrak{V}_\mathfrak{f}} := [0,\infty]\setminus\mathfrak{V}_\mathfrak{f}$ будемо називати ***множиною дозволених швидкостей*** для простору $\mathcal{M}\left(\mathfrak{H}_{\mathfrak{V}_\mathfrak{f}}\right)$. Множина $\widetilde{\mathfrak{V}_\mathfrak{f}}$ завжди є непорожньою, оскільки, за визначенням $\widetilde{\mathfrak{V}_\mathfrak{f}}$, гарантовано маємо $0\in\widetilde{\mathfrak{V}_\mathfrak{f}}$. Введемо ***множину скінченних ненульових дозволених швидкостей*** для простору $\mathcal{M}\left(\mathfrak{H}_{\mathfrak{V}_\mathfrak{f}}\right)$:

$$\widetilde{\mathfrak{V}_\mathfrak{f}}^{\mathsf{fin}+} := \widetilde{\mathfrak{V}_\mathfrak{f}}\setminus\{0,\infty\} = (0,\infty)\setminus\mathfrak{V}_\mathfrak{f}.$$

Для довільного $\omega = (t,(x,c))\in\mathcal{M}\left(\mathfrak{H}_{\mathfrak{V}_\mathfrak{f}}\right)$ покладемо, $\omega^* := (t,x)\in\mathcal{M}(\mathfrak{H})$, а для довільних $\mathrm{w} = (t,x)\in\mathcal{M}(\mathfrak{H})$ і $c\in(0,\infty)$ покладемо, $\mathrm{w}_{[c]} := (t,(x,c))\in\mathcal{M}\left(\mathfrak{H}_{\mathfrak{V}_\mathfrak{f}}\right)$. Для довільних $\lambda\in\widetilde{\mathfrak{V}_\mathfrak{f}}$, $s\in\{-1,1\}$, $J\in\mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)$, $\mathbf{n}\in\mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)$, $\mathbf{a}\in\mathcal{M}(\mathfrak{H})$ і $\omega=(t,(x,c))\in\mathcal{M}\left(\mathfrak{H}_{\mathfrak{V}_\mathfrak{f}}\right)$ введемо таке позначення:

$$\mathbf{W}_{\lambda;\mathfrak{V}_\mathfrak{f}}[s,\mathbf{n},J;\mathbf{a}]\,\omega := \left(\mathbf{W}_{\lambda,c}[s,\mathbf{n},J;\mathbf{a}]\,\omega^*\right)_{[c]}.$$

Твердження 2.25. *Для довільних* $\lambda\in\widetilde{\mathfrak{V}_\mathfrak{f}}$, $s\in\{-1,1\}$, $J\in\mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)$, $\mathbf{n}\in\mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)$, $\mathbf{a}\in\mathcal{M}(\mathfrak{H})$ *відображення* $\mathbf{W}_{\lambda;\mathfrak{V}_\mathfrak{f}}[s,\mathbf{n},J;\mathbf{a}]$ *є бієкцією на* $\mathcal{M}\left(\mathfrak{H}_{\mathfrak{V}_\mathfrak{f}}\right)$.

Введемо наступні позначення:

$$\mathfrak{PT}(\mathfrak{H};\mathfrak{V}_\mathfrak{f}) := \Big\{\mathbf{W}_{\lambda;\mathfrak{V}_\mathfrak{f}}[s,\mathbf{n},J;\mathbf{a}] \mid \lambda\in\widetilde{\mathfrak{V}_\mathfrak{f}},\ s\in\{-1,1\},$$
$$J\in\mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1),\ \mathbf{n}\in\mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1),\ \mathbf{a}\in\mathcal{M}(\mathfrak{H})\Big\};$$

$$\mathfrak{PT}_+(\mathfrak{H};\mathfrak{V}_\mathfrak{f}) := \left\{\mathbf{W}_{\lambda;\mathfrak{V}_\mathfrak{f}}[s,\mathbf{n},J;\mathbf{a}]\in\mathfrak{PT}(\mathfrak{H};\mathfrak{V}_\mathfrak{f}) \mid s=1\right\}.$$

Нехай $\mathcal{B}$ — базова мінлива множина така, що $\mathfrak{Bs}(\mathcal{B}) \subseteq \mathfrak{H}_{\mathfrak{V}_\mathfrak{f}}$, $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}) = (\mathbb{R}, \leq)$. Тоді $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}) \subseteq \mathbb{R} \times \mathfrak{H}_{\mathfrak{V}_\mathfrak{f}} = \mathcal{M}\left(\mathfrak{H}_{\mathfrak{V}_\mathfrak{f}}\right)$. Розглянемо такі кінематичні мультипроєктори для $\mathcal{B}$:

$$\mathfrak{PT}\left(\mathfrak{H};\mathfrak{V}_\mathfrak{f}\right)^\wedge = \left(\left((\mathbb{R}, \leq), \mathfrak{H}_{\mathfrak{V}_\mathfrak{f}}, \mathbf{S}, \widehat{\mathfrak{H}}, \mathbf{q}\right) \mid \mathbf{S} \in \mathfrak{PT}\left(\mathfrak{H};\mathfrak{V}_\mathfrak{f}\right)\right);$$

$$\mathfrak{PT}_+\left(\mathfrak{H};\mathfrak{V}_\mathfrak{f}\right)^\wedge = \left(\left((\mathbb{R}, \leq), \mathfrak{H}_{\mathfrak{V}_\mathfrak{f}}, \mathbf{S}, \widehat{\mathfrak{H}}, \mathbf{q}\right) \mid \mathbf{S} \in \mathfrak{PT}_+\left(\mathfrak{H};\mathfrak{V}_\mathfrak{f}\right)\right), \quad \text{де}$$

$$\mathbf{q}(\widetilde{x}) = x \quad \left(\forall\, \widetilde{x} = (x, c) \in \mathfrak{H}_{\mathfrak{V}_\mathfrak{f}}\right)$$

Відповідно до теореми 2.14 та означення 2.15, введемо кінематичні множини:

$$\mathfrak{KPT}_0\left(\mathfrak{H}, \mathcal{B};\mathfrak{V}_\mathfrak{f}\right) := \mathfrak{Kim}\left[\mathfrak{PT}\left(\mathfrak{H};\mathfrak{V}_\mathfrak{f}\right)^\wedge, \mathcal{B}\right];$$

$$\mathfrak{KPT}\left(\mathfrak{H}, \mathcal{B};\mathfrak{V}_\mathfrak{f}\right) := \mathfrak{Kim}\left[\mathfrak{PT}_+\left(\mathfrak{H};\mathfrak{V}_\mathfrak{f}\right)^\wedge, \mathcal{B}\right].$$

Виявляється, що введені кінематичні множини допускають універсальне перетворення координат лише тоді, коли в них реалізується лише одна заборонена швидкість $c \in (0, \infty)$, тобто коли вони зводяться до кінем. множин виду $\mathfrak{KPT}_0\left(\mathfrak{H}, \mathcal{B}, c\right)$ або $\mathfrak{KPT}\left(\mathfrak{H}, \mathcal{B}, c\right)$ (з єдиною, "універсальною" швидкістю світла).

Теорема 2.26. *Якщо множина заборонених швидкостей $\mathfrak{V}_\mathfrak{f}$ є такою, що відповідна множина скінченних ненульових дозволених швидкостей $\widetilde{\mathfrak{V}_\mathfrak{f}}^{\mathsf{fin}+} = (0, \infty) \setminus \mathfrak{V}_\mathfrak{f}$ містить щонайменше два елемента, то кінематична множина $\mathfrak{KPT}\left(\mathfrak{H}, \mathcal{B};\mathfrak{V}_\mathfrak{f}\right)$ допускає універсальне перетворення координат тоді і тільки тоді, коли не існує елементарних станів $(x_1, c_1), (x_2, c_2) \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{B})$ таких, що $c_1 \neq c_2$.*

Враховуючи, що, згідно із зауваженням 2.11, універсальне перетворення координат на кінематичній множині (якщо воно існує) визначається неоднозначно, природним є поняття кінематичної множини разом із заданим (фіксованим) універсальним перетворенням координат. **Третій** розділ дисертації присвячено дослідженню універсальних кінематик, тобто кінематичних множин із заданим універсальним перетворенням координат. Після коротенького вступу, наведеного в підрозділі 3.1, у підрозділі 3.2 формулюється означення універсальних кінематик та вводиться система стандартних позначень теорії універсальних кінематик.

Означення 3.1. Якщо $\overleftarrow{\mathcal{Q}} = \left(\widetilde{Q}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}}\right)_{\mathfrak{l},\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C})}$ є універсальним перетворенням координат для чітко видимої кінематичної множини $\mathfrak{C}$, то пару $\boxed{\mathcal{F} = \left(\mathfrak{C}, \overleftarrow{\mathcal{Q}}\right)}$ будемо називати **універсальною кінематичною множиною**, або, скорочено, **універсальною кінематикою**.

Для довільної універсальної кінематики $\mathcal{F} = \left(\mathfrak{C}, \overleftarrow{\mathcal{Q}}\right) = \left(\mathfrak{C}, \left(\widetilde{Q}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}}\right)_{\mathfrak{l},\mathfrak{m}\in\mathcal{L}k(\mathfrak{C})}\right)$ використовується така система позначень:

А. Автоматично переносяться всі позначення, введені для кінематичної множини $\mathfrak{C}$. Зокрема, $\mathcal{L}k(\mathcal{F}) = \mathcal{L}k(\mathfrak{C})$, і для довільних систем відліку $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F}) = \mathcal{L}k(\mathfrak{C})$ маємо рівності: $\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathcal{F}\rangle = \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathfrak{C}\rangle$; $\langle ! \, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathcal{F}\rangle = \langle ! \, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathfrak{C}\rangle$; $\mathbb{M}k(\mathfrak{l}; \mathcal{F}) = \mathbb{M}k(\mathfrak{l}; \mathfrak{C})$.
Якщо наперед відомо про яку універсальну кінематику $\mathcal{F}$ йде мова, символ $\mathcal{F}$ в зазначних позначеннях опускається, як і в теорії кінематичних множин.

Б. Для довільних систем відліку $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ будемо використовувати таке позначення:
$$[\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathcal{F}]\, \mathrm{w} = [\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathcal{F}]\, (\mathrm{w}) := \widetilde{Q}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}}(\mathrm{w}), \quad \mathrm{w} \in \mathbb{M}k(\mathfrak{l}).$$
Таким чином, $[\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathcal{F}]$ є відображенням з $\mathbb{M}k(\mathfrak{l}) := \mathbb{M}k(\mathfrak{l}; \mathcal{F})$ в $\mathbb{M}k(\mathfrak{m})$ ($[\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathcal{F}] : \mathbb{M}k(\mathfrak{l}) \to \mathbb{M}k(\mathfrak{m})$). Крім того, коли це не викликає непорозумінь, використовуємо скорочений варіант позначення $[\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]$.

У підрозділі 3.3 доводиться *теорема про мультиобраз для універсальних кінематик.* У підрозділі 3.4, використовуючи цю теорему, будуються *приклади універсальних кінематик, які є математично строгими моделями еволюції фізичних систем в рамках кінематики Лоренца-Пуанкаре та її тахіонових розширень* в сенсі Е. Рекамі, В. Ольховського та Р. Голдоні. У підрозділі 3.5 вводиться поняття *еквівалентності універсальних кінематик відносно перетворення координат* та встановлюються деякі властивості цього поняття.

У підрозділі 3.6 введено відношення *еволюційного та суперреволюційного включення для кінематичних множин та універсальних кінематик.* Доведено, що відношення еволюційного та суперреволюційного включення кінематичних множин та універсальних кінематик *мають властивості відношення порядку.* У підрозділі 3.7 введено операції *еволюційного об'єднання* та *диз'юнктного еволюційного об'єднання для універсальних кінематик.* Доведено, що якщо диз'юнктне еволюційне об'єднання двох універсальних кінематик існує, то воно збігається з їхнім еволюційним об'єднанням. Також доведено, що довільні дві диз'юнктні універсальні кінематики мають диз'юнктне еволюційне об'єднання і що диз'юнктне еволюційне об'єднання еволюційно видимих універсальних кінематик є еволюційно видимим. У підрозділі 3.8 доводиться теорема про еволюційне розширення для універсальних кінематик, яка математично обґрунтовує процедуру долучення до вихідної універсальної кінематики нових, "віртуальних" еволюціонуючих компонентів за припущення, що долучення цих, нових, компонентів не впливає на еволюцію старих (вихідних) компонентів кінематики.

У підрозділі 3.9 методами теорії універсальних кінематик досліджується питання про "часові парадокси", пов'язані з гіпотезою про існування матеріальних об'єктів та інерційних систем відліку, що рухаються зі швидкістю, більшою за швидкість світла.

Означення 3.83. Нехай $\mathcal{F}$ — універсальна кінематика. Будемо говорити, що система відліку $\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ є **часододатною** в $\mathcal{F}$ відносно системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ (позначення $\mathfrak{m} \Uparrow_{\mathcal{F}}^{+} \mathfrak{l}$), якщо для довільних $\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2 \in \mathbb{M}k(\mathfrak{l})$ з умов $\mathsf{bs}(\mathrm{w}_1) = \mathsf{bs}(\mathrm{w}_2)$ і $\mathsf{tm}(\mathrm{w}_1) <_{\mathfrak{l}} \mathsf{tm}(\mathrm{w}_2)$ випливає нерівність, $\mathsf{tm}([\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\,\mathrm{w}_1) <_{\mathfrak{m}} \mathsf{tm}([\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\,\mathrm{w}_2)$.

Зауваження 3.90. Нехай $\mathcal{F}$ універсальна кінематика і $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ — довільна система відліку $\mathcal{F}$. Тоді з означення 3.83 випливає, що $\mathfrak{l} \Uparrow_{\mathcal{F}}^{+} \mathfrak{l}$. Отже бінарне відношення $\Uparrow_{\mathcal{F}}^{+}$ є рефлексивним на множині $\mathcal{L}k(\mathcal{F})$ систем відліку довільної універсальної кінематики $\mathcal{F}$. Проте виявляється, що в загальному випадку це відношення не є ні симетричним ні транзитивним. Останній факт обґрунтовується в дисертаційній роботі з допомогою контрприкладів.

Означення 3.92. Універсальну кінематику $\mathcal{F}$ будемо називати **слабко часопозитивною**, якщо існує хоча б одна система відліку $\mathfrak{l}_0 \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ така, що для довільної системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ має місце співвідношення, $\mathfrak{l}_0 \Uparrow_{\mathcal{F}}^{+} \mathfrak{l}$.

Будемо говорити, що універсальна кінематика $\mathcal{F}$ є **безумовно часонезворотною**, якщо жоден потенційний міжсистемний мандрівник, що почав свій шлях в довільній точці x довільної системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$, перескакуючи скінченну кількість разів з однієї системи відліку в іншу, що проходить повз нього, не може закінчити свій шлях в тій же самій точці x тієї ж самої системи відліку $\mathfrak{l}$ у минулому часі. В протилежному випадку кінематику $\mathcal{F}$ будемо називати **умовно часозворотною**. Зауважимо, що наведене означення безумовної часонезворотності не є математично строгим. Строге означення потребує введення громіздких технічних понять, і його можна знайти безпосередньо в дисертаційній роботі (див. означення 3.98).

Наступна теорема встановлює достатню ознаку безумовної часонезворотності для універсальних кінематик.

Теорема 3.101. *Будь-яка слабко часопозитивна універсальна кінематика $\mathcal{F}$ є безумовно часонезворотною.*

Крім того встановлено достатню ознаку умовної часозворотності для універсальних кінематик. Використовуючи отримані результати проаналізовано на безумовну часонезворотність універсальні кінематики, які є математично строгими моделями еволюції фізичних систем в рамках тахіонових розширень кінематики Лоренца-Пуанкаре в сенсі Е. Рекамі, В. Ольховського та Р. Голдоні. Зокрема доведено існування часонезворотних тахіонових кінематик, в яких дозволяється рух тіл та інерційних систем відліку з довільною швидкістю, відмінною від швидкості світла.

У підрозділі 3.10 досліджуються властивості одностайно-поступальних систем відліку у векторних універсальних кінематиках. Зокрема, встановлено *необхідну і достатню умову одностайної поступальності однієї системи відліку відносно іншої у векторній універсальній кінематиці.*

У **четвертому** розділі будується простір узагальнених операторів з обмеженим проекційним слідом над заданим гільбертовим простором і досліджуються властивості цього простору. У підрозділі 4.1 зроблено огляд літератури за тематикою розділу, та сформульовано мету досліджень, розміщених в розділі.

У підрозділі 4.2 введено поняття абстрактного трансляційно інваріантного оператора в гільбертовому просторі та доведено, що звичайний слід від трансляційно інваріантних операторів в загальному випадку розбіжний. Далі вводиться аналог сліду для таких операторів — узагальнений проекційний слід. При цьому будується лінійний нормований простір лінійних неперервних операторів з обмеженим проекційним слідом і доводиться його неповнота. В зв'язку з цим ставиться задача опису поповнення зазначеного простору з теоретико-операторної точки зору.

В наступному підрозділі 4.3, використовуючи метод оснащених просторів, розвинутий в працях академіка Ю.М. Березанського та його учнів, будується повний простір узагальнених операторів з обмеженим проекційним слідом та визначається поняття проекційного сліду для таких узагальнених операторів.

У підрозділі 4.4. доводиться, що простір узагальнених операторів з обмеженим проекційним слідом можна вкласти в більш широкий банаховий простір псевдооператорів з обмеженим проекційним слідом і визначити на цьому більш широкому банаховому просторі деякі важливі групи операторів, пов'язані з описом еволюції багаточастинкових квантових систем.

ВИСНОВКИ

Дисертаційну роботу присвячено розробці нового математичного апарату, призначеного для моделювання еволюції складних систем і формалізації фізичних теорій. Цей апарат базується на теорії мінливих множин та теорії операторів у гільбертовому просторі. Основні результати дисертації можна сформулювати таким чином:

- Досліджено властивості базових мінливих та мінливих множин. Встановлено, що довільна система абстрактних траєкторій породжує певну базову мінливу множину і що довільна базова мінлива множина може бути породжена системою абстрактних траєкторій, утвореною її лініями долі.
- Введено аналоги теоретико-множинного відношення включення й теоретико-множинної операції об'єднання для базових мінливих множин (операцію еволюційного об'єднання). Доведено, що операція еволюційного об'єднання має багато властивостей, схожих на відповідні властивості операції об'єднання звичайних множин.
- Введено класифікацію видимості систем відліку в мінливих множинах. Доведено, що за певних умов множина систем відліку мінливої множини може розпадатись на класи видимості, які попарно не перетинаються і будь-який клас видимості є цілком невидимим із інших класів видимості.
- Введено поняття чітко видимих мінливих множин, всі компоненти яких є цілком видимими в кожній системі відліку, і доведено, що в таких мінливих множинах відображення уніфікації породжуються бієктивними відображеннями між множинами елементарно-часових станів відповідних систем відліку.
- Досліджено властивості кінематичних мінливих множин (кінематичних множин), тобто мінливих множин, оснащених різноманітними геометричними й топологічними структурами. Та-

кі математичні об'єкти можуть виявитись корисними для моделювання фізичних та ін. процесів, які відбуваються в рамках певного просторового оточення і включають в себе рух тіл у просторі, а також можуть бути цікавими для астрофізики, оскільки існує припущення, що у великих масштабах Всесвіту закони фізики (зокрема, закони кінематики) можуть бути відмінними від тих, які діють в околі нашої сонячної системи.

- Доведено критерій існування універсального перетворення координат у кінематичних множинах.
- Побудовані й досліджені конкретні кінематичні мінливі множини, які виникають у спеціальній теорії відносності, а також у її тахіонному розширенні. Для них доведено існування універсального перетворення координат. Доведено, що кінематичні мінливі множини, в яких дозволяється частинково-залежна швидкість світла, не допускають універсального перетворення координат.
- Досліджено властивості універсальних кінематик, тобто кінематичних множин із заданим універсальним перетворенням координат. Побудовано приклади універсальних кінематик, які є математично строгими моделями еволюції фізичних систем в рамках кінематики Лоренца-Пуанкаре спеціальної теорії відносності, та її тахіонових розширень в розумінні Рекамі, Ольховського й Гольдоні, а також Хассані.
- Введено поняття еволюційного розширення та операцію еволюційного об'єднання для кінематичних множин та універсальних кінематик. Доведено теорему теорему про еволюційне розширення. Очікується, що доведена теорема дасть змогу аксіоматично сформулювати основи спеціальної теорії відносності в рамках теорії універсальних кінематик. Є сподівання, що така аксіоматика виявиться більш природною з фізичної та інтуїтивної точки зору, в порівнянні з існуючими математичними аксіоматизаціями теорії відносності.
- Методами теорії універсальних кінематик досліджено питання про існування "часових парадоксів" при перевищенні швидкості світла. Встановлено достатні ознаки умовної часозворотності та безумовної часонезворотності для універсальних кінематик. Доведено теорему про неповернення, яка стверджує, що якщо перехід принаймні з однієї системи відліку до кожної ін-

шої зберігає напрямок часу в усіх процесах, то універсальна кінематика є часонезворотною. Використовуючи зазначені результати доведено існування часонезворотних тахіонових кінематик в сенсі Е. Рекамі, В. Ольховського та Р. Голдоні, в яких дозволяється рух тіл та інерційних систем відліку з довільною швидкістю, відмінною від швидкості світла.

- Досліджено властивості одностайно-поступальних систем відліку у векторних універсальних кінематиках. Такі системи відліку є важливими з теоретичної точки зору тому, що у випадку одностайно-поступального руху можна дати чітке й однозначне означення переміщення, а отже і середньої та миттєвої швидкості системи відліку. Встановлено необхідну і достатню умову одностайної поступальності однієї системи відліку відносно іншої. Встановлено зв'язок одностайної поступальності із часознаковизначенністю, тобто з монотонністю перетворення часу.
- Використовуючи метод оснащених просторів, розвинутий в працях академіка Ю.М. Березанського і його учнів, побудовано простір узагальнених операторів з обмеженим проєкційним слідом над заданим гільбертовим простором і встановлено його властивості.
- Доведено існування проєкційного сліду для довільного узагальненого оператора з обмеженим проєкційним слідом над заданим гільбертовим простором. Встановлено, що простір узагальнених операторів з обмеженим проєкційним слідом вкладається в більш широкий банаховий простір псевдооператорів, над яким можна побудувати групу унітарних операторів, пов'язану з описом еволюції багаточастинкових квантових систем.

В майбутньому розпочаті в дисертації дослідження можна розвивати в таких напрямках:

- Побудова абстрактних кінематик для інерційних систем відліку. (В рамках цього напрямку розпочато лише перший етап — дослідження одностайно-поступальних систем відліку.)
- Побудова абстрактної процедури продовження кінематики з інерційних систем відліку на довільні. За аналогією з теорією міри (коли міру спочатку задають на простіших математичних об'єктах — кільцях чи напівкільцях множин, а потім продовжують на складніші системи множин — σ-алгебри) можна припустити, що кінематику зручно спочатку задавати для інерційних

систем відліку, а потім має існувати якась стандартна процедура продовження кінематики на довільні системи відліку. В результаті такої процедури вихідна універсальна кінематика $\mathcal{F}$, яка складається лише з попарно інерційно споріднених систем відліку, має вкластись в якесь "ввізуальне розширення" $\widetilde{\mathcal{F}}$ кінематики $\mathcal{F}$ з більшою множиною систем відліку. Враховуючи можливість існування горизонту видимості в неінерційних релятивістських системах відліку, для побудови такого ввізуального розширення доведеться вийти за межі поняття універсальної кінематики (в якій, за означенням, виконнана умова чіткої видимості) і ввести якесь загальніше поняття.

- Введення поняття "еволюційної границі" універсальних кінематик. Формалізація переходу від опису еволюції дискретно-точкових (класичних та релятивістських) механічних систем до опису еволюції довільних (тобто неперервних і дискретно-неперервних) механічних систем. В існуючих на даний час роботах, пов'язаних із шостою проблемою Гільберта, можна знайти досить прості і природні системи аксіом для формалізації опису законів динаміки класичних та релятивістських дискретно-точкових систем. Коли ж переходити до неперервних та дискретно-непервних систем, то аксіоми в існуючих на даний час роботах приймають досить громіздкий вигляд, застосовуючи математичні конструкції, неприродні для аксіоматичних теорій. Тому основна ідея полягає в тому, що достатньо сформулювати закони динаміки лише для дискретно-точкових систем, а на інші системи ці закони поширити за допомогою певної (природної для фізики, але поки-що математично не побудованої) процедури "еволюційної границі", коли ми вихідну систему подумки розбиваємо на маленькі ділянки і замінюємо ці ділянки на матеріальні точки, апроксимуючи вихідну систему дискретно-точковою.

Список опублікованих праць за темою дисертації

1. Grushka Ya.I. Spaces of generalized operators with bounded projection trace. *Ukrainian Mathematical Journal* **63**, (2011), no. 1, 27–48; DOI: 10.1007/s11253-011-0486-z (перекладено з: *Укр. мат. журн.* **63**, (2011), no. 1, 24–39).

2. Hrushka Ya.I. Base Changeable Sets and Mathematical Simulation of the Evolution of Systems. *Ukrainian Mathematical Journal* **65**, (2014), no. 9, 1332–1353; DOI: 10.1007/s11253-014-0862-6 (перекладено з: *Укр. мат. журн.* **65**, (2013), no. 9, 1198–1218).
3. Grushka Ya.I. Tachyon generalization for Lorentz transforms. *Methods Funct. Anal. Topology* **19**, (2013), no. 2, 127–145; `http://mfat.imath.kiev.ua/article/?id=682`.
4. Grushka Ya.I. On Universal Coordinate Transform in Kinematic Changeable Sets. *Methods Funct. Anal. Topology* **23**, (2017), no. 2, 133–154; `http://mfat.imath.kiev.ua/article/?id=968`.
5. Grushka Ya.I. Self-consistently Translational Motion of Reference Frames and Sign- definiteness of Time in Universal Kinematics. *Methods Funct. Anal. Topology* **24**, (2018), no. 2, 107–119; `http://mfat.imath.kiev.ua/article/2018/02/mfat_2018_02_1052.pdf`.
6. Grushka Ya.I. On Monotonous Separately Continuous Functions. *Applied General Topology* **20**, (2019), no. 1, 75–79; DOI: 10.4995/agt.2019.9817 .
7. Grushka Ya.I. On some properties of Hassani transforms. *Matematychni Studii* **57**, (2022), no. 1, 79–91; DOI: 10.30970/ms.57.1.79-91.
8. Грушка Я.І. Простори операторів з обмеженим проекційним слідом. *Математичний вісник НТШ* **6**, (2009), 73–86; `https://www.researchgate.net/publication/267123133`.
9. Грушка Я.І. Трансляційно інваріантні оператори та операторний аналог сліду за різницевою змінною. *Доповіді Національної академії наук України* (2010), no. 3, 13–18; `http://www.researchgate.net/publication/236120894`.
10. Grushka Ya.I. Translation-invariant Operators and Generalized Difference Variable Trace. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія "Фізико-математичні науки"* (2010), no. 3, 24–27; `http://www.researchgate.net/publication/236121509`.
11. Грушка Я.І. Мінливі множини та їх властивості. *Доповіді Національної академії наук України* (2012), no. 5, 12–18; `https://www.researchgate.net/publication/236120448`.
12. Грушка Я.І. Примітивні мінливі множини та їх властивості. *Математичний вісник НТШ* **9**, (2012), 52–80; `https://www.

researchgate.net/publication/236120647.

13. Грушка Я.І. Видимість у мінливих множинах. *Збірник праць Інституту математики НАН України* **9**, (2012), no. 2, 122–145; https://www.researchgate.net/publication/236217050.
14. Грушка Я.І. Алгебраїчні властивості тахіонних перетворень Лоренца. *Збірник праць Інституту математики НАН України* **10**, (2013), no. 2, 138–169; https://www.researchgate.net/publication/257933423.
15. Грушка Я.І. Мінливі множини та їх застосування для побудови кінематики тахіонів. *Збірник праць Інституту математики НАН України* **11**, (2014), no. 1, 192–227; https://www.researchgate.net/publication/268069239.
16. Грушка Я.І. Еволюційні розширення та аналоги операції об'єднання для базових мінливих множин. *Збірник праць Інституту математики НАН України* **11**, (2014), no. 2, 66–99; https://www.researchgate.net/publication/270686197.
17. Грушка Я.І. Критерій існування універсального перетворення координат у кінематичних мінливих множинах. *Буковинський математичний журнал* **2**, (2014), no. 2-3, 59–71; https://www.researchgate.net/publication/270647695.
18. Грушка Я.І. Перетворення координат у кінематичних мінливих множинах. *Доповіді Національної академії наук України* (2015), no. 3, 24–31; DOI: 10.15407/dopovidi2015.03.024.
19. Грушка Я.І. Кінематичні мінливі множини із заданим універсальним перетворенням координат. *Збірник праць Інституту математики НАН України* **12**, (2015), no. 1, 74–118; https://www.researchgate.net/publication/317369478.
20. Грушка Я.І. Теорема про еволюційне розширення для універсальних кінематик. *Буковинський математичний журнал* **3**, (2015), no. 3-4, 67–77; https://www.researchgate.net/publication/317429219.
21. Грушка Я.І. Еволюційні розширення кінематичних множин та універсальних кінематик. *Збірник праць Інституту математики НАН України* **12**, (2015), no. 2, 139–204; https://www.researchgate.net/publication/317428774.
22. Грушка Я.І. Про часонезворотність універсальних кінематик. *Доповіді Національної академії наук України* (2016), no. 7,

14–21; DOI: 10.15407/dopovidi2016.07.014.

23. Грушка Я.І. Про часозворотність тахіонових кінематик. *Збірник праць Інституту математики НАН України* **13**, (2016), no. 2, 125–174; https://www.researchgate.net/publication/317429152.
24. Грушка Я.І. Одностайно-поступальний рух систем відліку в універсальних кінематиках. *Буковинський математичний журнал* **5**, (2017), no. 3-4, 56–70; https://www.researchgate.net/publication/322685969.
25. Грушка Я.І. Критерій одностайної поступальності систем відліку в універсальних кінематиках. *Вісник Черкаського університету: Серія фізико-математичні науки*, (2017), no 1, 122–137; https://www.researchgate.net/publication/326234926.
26. Грушка Я.І. Необхідна і достатня ознака існування точкового часу на орієнтованій множині. *Доповіді НАН України*, (2019), no 8, 9-15, DOI: 10.15407/dopovidi2019.08.009.
27. Грушка Я.І. Критерій трансляційної одностайної поступальності для операторів перетворення координат та систем відліку в універсальних кінематиках. *Буковинський математичний журнал* **9**, (2021), no 1, 128-139, DOI: 10.31861/bmj2021.01.10.
28. Грушка Я.І. Про точкову хронологізацію орієнтованих множин. *Збірник праць Інституту математики НАН України* **19**, (2022), 42-87, https://www.researchgate.net/publication/375640660.
29. Grushka Ya.I. On time irreversibility of generalized Hassani kinematics. *Прикл. проблеми механіки і математики* **20**, (2022), 88-108, DOI: 10.15407/apmm2022.20.88-108.
30. Grushka Ya. I., Notes on Extended Lorentz Transformations for Superluminal Reference Frames. *Progress in Physics* **13**, (2017), no. 4, 200–201.
31. Grushka Ya.I. Logarithmic extension of real numbers and hyperbolic representation of generalized Lorentz transforms. *International Journal of Algebra* **11**, (2017), no. 4, 159–170, DOI: 10.12988/ija.2017.7315.
32. Grushka Ya.I. Theorem of Non-Returning and Time Irreversibility of Tachyon Kinematics. *Progress in Physics* **13**, (2017), no. 4, 218–228.
33. Грушка Я.І. Групи унітарних операторів в просторах псевдооператорів з обмеженим проекційним слідом. *Збірник праць*

II Всеукраїнського наукового семінару "Українська школа групового аналізу диференціальних рівнянь: здобутки і перспективи", Полтавський національний технічний університет імені Юрія Кондратюка, 2012. 13–23; `https://www.researchgate.net/publication/236121509`.

34. Grushka Ya.I. Abstract concept of changeable set. 2012, Preprint: arXiv:1207.3751v1, 1–54.
35. Grushka Ya.I. Abstract Coordinate Transforms in Kinematic Changeable Sets and their Properties. 2015, Preprint: arXiv:1504.02685v2, 1–31.
36. Grushka Ya.I. Comment on the Article "Extended Linear and Nonlinear Lorentz Transformations and Superluminality". 2015, Preprint: ResearchGate, 1–3; `https://www.researchgate.net/publication/279060370`.
37. Grushka Ya.I. Draft introduction to abstract kinematics. (Version 2.0). 2017, Preprint: ResearchGate, 1–208; DOI: 10.13140/RG.2.2.28964.27521.
38. Grushka Ya.I. On Monotonous Separately Continuous Functions. 2018, Preprint: arXiv:1801.03538v1, 1–5.

АНОТАЦІЇ

Грушка Я.І. Теоретико-множинні методи в релятивістській кінематиці. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.06 "алгебра і теорія чисел" (111 — математика). — Інститут математики НАН України, Київ, 2023.

Дисертаційна робота присвячена розробці нового математичного апарату для математичної формалізації деяких фізичних теорій (передусім релятивістської кінематики) й математичного моделювання еволюції складних систем, зокрема багаточастинкових систем. Основним, базовим, поняттям зазначеного математичного апарату є поняття мінливої множини, тобто множини об'єктів, що можуть еволюціонувати і картина еволюції яких може залежати від способу спостереження (тобто системи відліку).

В роботі дано строге означення поняття мінливої множини і досліджено властивості мінливих множин. Визначено поняття системи абстрактних траєкторій і доведено, що довільна система абстрактних траєкторій породжує певну базову мінливу множину. Встановлено, що довільна базова мінлива множина може бути породжена системою абстрактних траєкторій, які утворені максимальними ланцюгами на множині її елементарно-часових станів. Введено класифікацію видимості систем відліку в мінливих множинах. Доведено, що за певних умов множина систем відліку мінливої множини може розпадатись на класи видимості, які попарно не перетинаються і будь-який клас видимості є цілком невидимим з інших класів видимості. Доведено, що в мінливих множинах, усі компоненти яких є цілком видимими в кожній системі відліку, відображення уніфікації породжуються бієктивними відображеннями між множинами елементарно-часових станів відповідних систем відліку.

Досліджено властивості кінематичних множин, тобто мінливих множин, оснащених різноманітними геометричними й топологічними структурами. Введено поняття реального та універсального перетворення координат між системами відліку у кінематичних множинах. Доведено необхідну і достатню ознаку існування універсального перетворення координат. Досліджено властивості універсальних кінематик, тобто кінематичних множин із заданим універсальним перетворенням координат. Побудовано приклади універсальних кінематик, які є математично строгими моделями еволюції фізичних систем в рамках кінематики Лоренца-Пуанкаре та її тахіонових розширень, а також побудовано нетривіальний клас кінематичних множин, які не допускають універсального перетворення координат.

Введено аналоги теоретико-множинного відношення включення та операції об'єднання для базових мінливих множин, кінематичних множин та універсальних кінематик. Доведено, що операція еволюційного об'єднання має багато властивостей, схожих із операцією об'єднання звичайних множин. Доведено теорему про еволюційне розширення для універсальних кінематик. Очікується, що доведена теорема дасть змогу створити аксіоматику спеціальної теорії відносності, більш природну з інтуїтивного погляду, порівняно з існуючими математичними аксіоматизаціями цієї теорії.

Методами теорії універсальних кінематик досліджено питання про порушення принципу причинності, пов'язане з гіпотезою про існування матеріальних об'єктів та інерційних систем відліку, що рухаються зі швидкістю, більшою за швидкість світла. Встановлено достатні ознаки умовної часозворотності та безумовної часонезворотності. Побудовано приклади безумовно часонезворотних тахіонових універсальних кінематик на базі узагальнених перетворень Лоренца в сенсі Е. Рекамі, В. Ольховського та Р. Голдоні, в яких дозволяється рух матеріальних об'єктів та інерційних систем відліку з довільною швидкістю, відмінною від швидкості світла.

Досліджено властивості одностайно-поступальних систем відліку у векторних універсальних кінематиках. Встановлено необхідну і достатню умову одностайної поступальності однієї системи відліку відносно іншої у векторній універсальній кінематиці.

Побудовано простір узагальнених операторів з обмеженим проєкційним слідом над заданим гільбертовим простором і встановлено його властивості. Доведено існування проєкційного сліду для довільного узагальненого оператора з обмеженим проєкційним слідом над заданим гільбертовим простором. Встановлено, що простір узагальнених операторів з обмеженим проєкційним слідом вкладається в ширший банаховий простір псевдооператорів. Над простором псевдооператорів побудовано групу унітарних операторів, пов'язану з описом еволюції багаточастинкових квантових систем.

Ключові слова: рух, еволюція, час, шоста проблема Гільберта, мінливі множини, релятивістська кінематика, інерційні системи відліку, тахіони, порушення принципу причинності, часонезворотність, моделювання еволюції багаточастинкових систем, трансляційно інваріантні оператори, узагальнені оператори, проєкційний слід.

Grushka Ya.I. Set-theoretic methods in relativistic kinematics. — Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

Thesis for the degree of Doctor of Physical and Mathematical Sciences, speciality 01.01.06 "algebra and number theory" (111 — Mathematics). — Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, 2023.

The thesis, is devoted to the development of new mathematical apparatus intended for mathematical formalization of some physical theories (first of all — relativistic kinematics) as well as for mathematical simulation of the evolution of complex systems (in particular many-particle systems). The main, basic, notion of this apparatus is the notion of changeable set, that is the set of elements, which can evolve, and,

which can change their evolution picture in dependence of the way of observation (that is the reference frame).

In the paper the rigorous definition of changeable set notion is given and properties of changeable sets are investigated. The notion of system of abstract trajectories is defined and it is proven that every system of abstract trajectories generates some base changeable set. It is established that arbitrary base changeable set can be generated by the system of abstract trajectories, which are created by maximal chains on the set of its elementary-time states. The classification of visibility of reference frames in changeable sets is introduced. It is proven that, under some conditions, the set of all reference frames of changeable set can be decomposed into the visibility classes, which are pairwise disjoint and, moreover, every visibility class is fully invisible from each another class. It is proven that in changeable sets, all components of which are completely visible in each reference frame, the unification mappings are generated by bijective mappings between the sets of elementary-time states of the corresponding reference frames.

The properties of kinematic sets are investigated, where kinematic sets are changeable sets, equipped by different geometrical or topological structures. The notions of actual and universal coordinate transform between reference frames of kinematic sets are defined. The necessary and sufficient condition of existence of universal coordinate transform is proven. The properties of universal kinematics (that is kinematic sets with given universal coordinate transform) are investigated. The examples of universal kinematics, representing mathematically strict models of evolution of physical systems in the framework of Lorentz-Poincare kinematics as well as its tachyon extensions are constructed. Also it is constructed the non-trivial class of kinematic sets, which do not allow universal coordinate transform.

The analogues of set-theoretic inclusion relation and set-theoretic operation of union are introduced for base changeable sets, kinematic sets and universal kinematics. It is proven that the evolution union operation has many properties similar with the properties of the union operation for ordinary sets. Theorem on evolutional extension for universal kinematics is proven. It is expected that this theorem will make it possible to create axiomatics of the special relativity theory, more natural from the physical and intuitive point of view, in comparison with the existing mathematical axiomatizations of this theory.

Using the methods of the theory of universal kinematics, it is investi-

gated the question of violations of causality principle, connected with the hypothesis on the existence of material objects and inertial reference frames moving at speeds greater than the speed of light. The sufficient conditions of certainly time irreversibility and conditionally time reversibility are established. The examples of certainly time irreversible tachyon universal kinematics were constructed based on the generalized Lorentz transforms in the sense of E.Recami, V. Olkhovsky and R. Goldoni. In these kinematics it is allowed the motion with any velocity, different from the velocity of light for material objects and inertial reference frames.

The properties of self-consistently translational reference frames in vector universal kinematics were investigated. The necessary and sufficient condition of self-consistently translationality of one reference frame relatively to another is established for vector universal kinematics.

The space of generalized operators with bounded projection trace over given Hilbert space is constructed and the properties of this space are investigated. The existence of projection trace for arbitrary generalized operator with bounded projection trace is proven. It is established that the space of generalized operators with bounded projection trace can be embedded into more wide space of pseudo-operators. Over the space of pseudo-operators it is constructed the group of unitary operators related to the description of the evolution of many-particle quantum systems.

Key words: movement, evolution, time, sixth Hilbert's problem, changeable sets, relativistic kinematics, inertial reference frames, tachyons, violation of the principle of causality, irreversibility of time, simulation of the evolution of multiparticle systems, translation-invariant operators, generalized operators, projection trace.

Підписано до друку 31.05.2024. Формат 60×84/16. Папір офс. Офс. друк.

Фіз. друк. арк. 2,9. Умов. друк. арк. 2,7.

Наклад 100 пр. Зам. 26. Безоплатно.

Інститут математики НАН України,
01024, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.