

ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ І МЕХАНІКИ НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Кваліфікаційна наукова

праця на правах рукопису

КАЛОША Юлія Ігорівна

УДК 531.36, 531.39, 517.977

ДИСЕРТАЦІЯ

КЕРУВАННЯ БАГАТОЧАСТОТНИМИ КОЛИВАННЯМИ

ГІБРИДНИХ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ

01.02.01 — теоретична механіка

Подається на здобуття наукового ступеня

кандидата фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

_____ Ю. І. Калоша

Науковий керівник: **Зуєв Олександр Леонідович**,

доктор фізико-математичних наук, професор,

член-кореспондент Національної академії наук

України

Слов'янськ — 2024

АНОТАЦІЯ

Калоша Ю. І. Керування багаточастотними коливаннями гібридних механічних систем. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.02.01 — теоретична механіка. — Інститут прикладної математики і механіки НАН України, Слов'янськ; Інститут математики НАН України, Київ, 2024.

Дисертаційну роботу присвячено дослідженню задач керованої стабілізації і спостереження для гібридної механічної системи у вигляді пружної балки з приєднаною масою на пружинній підвісці. Балка знаходиться під впливом зосередженої сили керування та розподілених п'єзоелектричних приводів (актуаторів). Ця мехатронна установка в математичному сенсі являє собою керовану динамічну систему з нескінченною кількістю ступенів волі. Для цієї системи запропоновано керування зі зворотним зв'язком, яке забезпечує асимптотичну стійкість стану рівноваги. Також досліджено задачу спостереження, а саме запропоновано синтез системи-спостерігача, яка дозволяє асимптотично відновити стан системи за наявності обмеженої інформації про вихідний сигнал. Крім того, розглянуто консольно закріплену пружну балку з керуванням і доведено збіжність методу Гальоркіна побудови наближених розв'язків рівнянь руху.

Дисертація складається з анотації українською та англійською мовами, вступу, п'яти розділів, розділених на підрозділи, заключної частини, списку використаних джерел і двох додатків.

У вступній частині обґрунтовано актуальність тематики дисертаційної роботи, наведено опис потенційних сфер практичного застосування резуль-

татів досліджуваної галузі. Вказано предмет, об'єкт, мету та завдання дисертаційного дослідження, а також відомості про апробацію результатів.

Перший розділ представляє огляд літератури і застосованих методів за темою дослідження та опис сучасного стану наукової галузі. Цей розділ складається з декількох частин. Перша охоплює напрацювання теорії варіаційного числення для опису динамічних процесів. Увагу зосереджено на варіаційному принципі Гамільтона–Остроградського для отримання рівнянь руху пружних механічних систем. Наводяться приклади застосування цього методу до виведення рівнянь коливань пружних балок Ейлера–Бернуллі та Тимошенка. Надаються формулювання необхідних понять і теорем, пов'язаних з прямим методом Ляпунова дослідження стійкості розв'язків звичайних диференціальних рівнянь. Наступну частину присвячено теорії керування рухом нескінченновимірних механічних систем. Розкриваються необхідні поняття і методи теорії C_0 -напівгруп операторів у гільбертових просторах. Далі описано принцип інваріантності ЛаСалля для дослідження асимптотичної стійкості стану рівноваги динамічної системи. Наступна частина стосується задач спостереження і відповідних методів, заснованих Р. Калманом, Д. Луенбергером і розвинених іншими відомими вченими. Наостанок дається стислий опис методу Гальоркіна наближеного розв'язання задач динаміки. Усі частини першого розділу містять огляд наукових робіт, від класичних праць до новітніх статей і монографій із посиланнями на відповідні джерела.

Другий розділ присвячено задачі стабілізації коливань пружної балки з твердим тілом. Наведено детальний опис розглядуваної механічної системи і на основі варіаційного принципу Гамільтона–Остроградського отримано математичну модель руху у вигляді крайової задачі для рівняння Ейлера–Бернуллі. Крайові умови описують шарнірне закріплення кінців балки, також представлено умови інтерфейсу у точці кріплення твердого тіла. Закон руху являє собою лінійне диференціальне рівняння з частин-

ними похідними четвертого порядку. Прийнятим у літературі підходом до вивчення стійкості систем такого типу є методи на основі теорії сильно неперервних напівгруп операторів у гільбертових чи банахових просторах. Для реалізації такого підходу отримане рівняння руху записано у вигляді абстрактного диференціального рівняння в операторній формі

$$\frac{d}{dt} \xi(t) = A \xi(t) + B y. \quad (1)$$

Фазовий вектор $\xi = (u, v, p, q)^T$ є елементом дійсного гільбертового простору $X = \overset{\circ}{H}^2 \times L^2 \times \mathbb{R}^2$. В якості узагальнених координат прийнято $u(x)$ — поперечне переміщення, $v(x)$ — швидкість заданої точки балки з координатою x , $p = u(\ell_0)$ — переміщення та $q = v(\ell_0)$ — швидкість точки $x = \ell_0$, у якій закріплено тверде тіло. Рух системи з керуванням зі зворотним зв'язком вигляду $y = K \xi(t)$ визначається властивостями оператора $\tilde{A} = A + BK$. Предметом значної частини дослідження є вивчення властивостей диференціальних операторів четвертого порядку A та \tilde{A} з областю визначення $D(A) = D(\tilde{A}) = H^4 \times H^2 \times \mathbb{R}^2 \subset X$ у гільбертовому просторі X .

Запропоновано керування $y = K \xi$ зі зворотним зв'язком. Доведено, що таке керування є обмеженим функціоналом.

Важливим є питання коректної постановки задачі Коші з початковою функцією $\xi_0 \in X$ для розглянутої системи з керуванням. З літератури відомо, що задача Коші є коректною, якщо оператор $A + BK$ є інфінітезимальним генератором C_0 -напівгрупи. Також відомим є факт, що обмежене збурення генератора напівгрупи є генератором напівгрупи. Тому, в силу доведеної обмеженості керування, достатньо дослідити генеративні властивості оператора A . Вирішення цього питання ґрунтується на теоремі Люмера–Філліпса, згідно з якою для породження сильно неперервної напівгрупи в X оператор A має бути щільно визначеним, дисипативним та максимальним. Перша з цих властивостей виконується на основі теорем

Соболева, другу встановлено безпосередньою перевіркою нерівності дисипативності, тоді як для доведення максимальності необхідно показати, що резольвенту оператора A коректно визначено у всьому просторі X . Зазначену резольвенту побудовано як відображення $(I - \lambda A)^{-1} : X \rightarrow X$ для деякого $\lambda > 0$ і таким чином на основі теореми Люмера–Філлїпса показано, що диференціальний оператор A породжує C_0 -напівгрупу $\{e^{tA}\}_{t \geq 0}$ у гільбертовому просторі X , що гарантує коректність задачі Коші для рівняння (1). Схематичне представлення наведеної послідовності міркувань подається на рис. А.1 у додатку А.

Крім того, доведено ще одну важливу властивість генератора — його замкненість. Для цього побудовано обернений до A оператор A^{-1} і на основі оцінки норми показано його обмеженість у просторі X . Цей результат є важливим у подальшому дослідженні компактності резольвенти інфінітезимального генератора замкненої системи з керуванням.

На основі прямого методу Ляпунова доведено стійкість стану рівноваги замкненої системи. Функцію Ляпунова $V(t)$ обрано у вигляді повної енергії і показано, що запропоноване керування забезпечує незростання цієї функції на траєкторіях замкненої системи: $\dot{V}(t) \leq 0$.

У третьому розділі наведено достатні умови асимптотичної стійкості стану рівноваги системи зі зворотним зв'язком. Як відомо, доведення асимптотичної стійкості вимагає, крім стійкості за Ляпуновим, доведення властивості притягання траєкторій, що в свою чергу вимагає перевірки умови ЛаСалля та передкомпактності траєкторій замкненої системи. Під умовою ЛаСалля мається на увазі властивість множини $Z = \left\{ \xi \mid \dot{V} = 0 \right\}$, а саме: максимальна інваріантна підмножина множини Z не містить нетривіальних траєкторій системи (1). Іншими словами, аттрактором для системи (1) є множина, яка складається з траєкторії $\xi = 0$.

Для доведення асимптотичної стійкості отримано частотне рівняння і досліджено асимптотичний розподіл власних частот коливань балки. Час-

тотне рівняння для досліджуваної моделі гібридної системи виявляється доволі громіздким. Тому одним з етапів дослідження асимптотичного розподілу частот коливань є виділення головної частини характеристичного рівняння і доведення еквівалентності її отриманому повному рівнянню в сенсі асимптотичної поведінки розв'язків. За рахунок цього частотне рівняння зводиться до більш зрозумілого і доступного для аналізу трансцендентного рівняння. На основі аналізу асимптотичного розподілу розв'язків характеристичного рівняння доведено, що система експонент $\{e^{\lambda_n t}\}_{n=1}^{\infty}$ є ω -лінійно незалежною в $L^2(0, T)$, де λ_n — власні значення оператора A , $n = 1, 2, \dots$.

Крім того, досліджено спектральні властивості диференціального оператора A . Показано, що його власні функції утворюють базис розглянутого гільбертового простору. Розподіл частот проілюстровано за допомогою чисельного моделювання. Також наводяться графіки власних функцій інфінітезимального генератора.

Одним з ключових результатів третього розділу роботи є побудова резольвенти для оператора \tilde{A} зі зворотним зв'язком і доведення компактності резольвенти. Оскільки ця задача є технічно складною, її спочатку розв'язано для допоміжного оператора, в якому частину параметрів керування прийнято константами. Після цього отримано систему рівнянь для виключення цих параметрів у вигляді запропонованого раніше зворотного зв'язку, таким чином записано резольвенту для оператора замкненої системи. Компактність побудованої резольвенти доведено за допомогою оцінок норми у гільбертовому просторі. Властивість компактності резольвенти є, згідно з теоремою Дафермоса–Слемрода, достатньою умовою передкомпактності траєкторій замкненої системи.

На основі цих результатів, спираючись на принцип інваріантності Ласалля, доведено асимптотичну стійкість стану рівноваги замкненої системи. Наочне схематичне представлення наведених міркувань міститься на

рис. А.2 в додатку А.

Четвертий розділ присвячено дослідженню задачі спостереження системи керування з виходом. Запропоновано явний аналітичний підхід для побудови динамічного спостерігача типу Луенбергера для класу моделей гнучких конструкцій.

Розглянуто задачу спостереження для скінченновимірної проєкції крайової задачі, отриманої методом Гальоркіна. Також побудовано спостерігач Луенбергера для класу динамічних систем у нескінченновимірному просторі. В обох випадках проаналізовано динаміку похибки спостережень і доведено асимптотичну стійкість тривіального розв'язку системи відносно похибок. Таким чином, показано, що запропонований динамічний спостерігач дозволяє оцінити з високою точністю стан лінійної системи за умови наявності неповної інформації виходу. Доведення базуються, відповідно, на ранговому критерії Калмана і принципі інваріантності ЛаСалля. Запропонований дизайн спостерігача дозволяє оцінювати повний стан системи для довільної розмірності вихідного вектора. Збіжність спостерігача проілюстровано за допомогою результатів чисельного моделювання.

У п'ятому розділі дисертації досліджується рух консольної балки. Наведено математичну модель коливань, розглянуто відповідну спектральну задачу і запропоновано спосіб побудови системи наближених розв'язків на основі методу Гальоркіна. Доведено і проілюстровано чисельно збіжність системи наближених розв'язків до узагальненого розв'язку вихідної задачі.

В заключному розділі наводяться основні висновки дисертаційного дослідження. Список використаних джерел містить усі джерела, на які є посилання в тексті дисертації, включно зі списком опублікованих робіт авторки. Окремо список опублікованих робіт авторки наводиться у додатку Б.

У додатку А містяться допоміжні викладки, а також ілюстративні схеми, які наочно представляють послідовність міркувань, викладених у тексті дослідження.

Ключові слова: гібридна механічна система, балка Ейлера–Бернуллі, динамічна система, фазовий простір, сильно неперервна напівгрупа операторів, інфінітезимальний генератор, стан рівноваги механічної системи, керування зі зворотним зв'язком, функція Ляпунова, стійкість за Ляпуновим, асимптотична стійкість, принцип інваріантності, спостерігач Луенбергера, метод Гальоркіна.

ABSTRACT

Kalosha J. I. Control of multi-frequency oscillations of hybrid mechanical systems. — Qualification scientific work in the form of manuscript.

Thesis for candidate of physical and mathematical sciences degree in speciality 01.02.01 — analytical mechanics. — Institute of Applied Mathematics and Mechanics NAS Ukraine, Sloviansk; Institute of Mathematics NAS Ukraine, Kyiv, 2024.

The dissertation is devoted to the study of controlled stabilization and observation problems for a hybrid mechanical system in the form of a flexible beam with an absolutely rigid body attached by a spring-mass system. The beam is controlled by a lumped force and distributed piezoelectric actuators. In the mathematical sense, the mechatronic installation is a controlled dynamical system with an infinite number of degrees of freedom. A feedback control is proposed for this system, which ensures asymptotic stability of the equilibrium. Furthermore, the observation problem is studied, namely, the observer design is proposed, which allows to restore asymptotically the full state of the system operating by limited output information. In addition, a cantilever flexible beam with control is considered and the convergence of the Galerkin method for constructing approximate solutions of the equations of motion is proved.

The dissertation consists of an abstract in Ukrainian and English, an introduction, five chapters divided into sections and subsections, a conclusion, a list of references, and two appendices.

The introductory part provides a substantiation of the relevance of the topic of the dissertation, a description of potential scope of practical appli-

cation of the results of the research area. The subject, object, purpose and objectives of the dissertation research are indicated, as well as information on the results' approbation.

The first chapter provides a review of the literature and methods used on the research topic and a description of the current state of the art. This chapter consists of several parts. The first one covers the developments in the theory of calculus of variations for describing dynamical processes. Attention is focused on the Hamilton–Ostrogradsky variational principle for obtaining the equations of motion of elastic mechanical systems. Examples of applications of this method to the derivation of the Euler–Bernoulli and Timoshenko equations of flexible beams oscillations are given. Formulations of the necessary concepts and theorems related to the direct Lyapunov method of studying the stability of solutions of ordinary differential equations are presented. The next part is devoted to the theory of motion control of infinite-dimensional mechanical systems. The necessary concepts and methods of the theory of C_0 -semigroups of operators in Hilbert spaces are revealed. Next, the LaSalle invariance principle for studying the asymptotic stability of the equilibrium of a dynamical system is described. The next part deals with the observation problems and the corresponding methods founded by Rudolf E. Kálmán and David Luenberger and developed by other well-known scientists. Finally, a brief description of the Galerkin method for the approximate solution of problems of dynamics is given. All parts of the first chapter contain a review of scientific works, from classical texts to recent articles and monographs, with references to the relevant sources.

The second chapter is devoted to the problem of stabilization of vibrations of an elastic beam with a rigid body. A detailed description of the mechanical system is given, and a mathematical model of the motion in the form of a boundary value problem for the Euler–Bernoulli equation is obtained on the basis of the Hamilton–Ostrogradsky variational principle. The boundary

conditions describe the hinged attachment of the beam ends, and the interface conditions at the point of rigid body attachment are presented. The law of motion is a fourth-order linear partial differential equation. A common approach in the literature to studying the stability of systems of this type is based on the theory of strongly continuous semigroups of operators in Hilbert or Banach spaces. To implement this approach, the obtained equation of motion is written by means of an abstract differential equation in the operator form

$$\frac{d}{dt} \xi(t) = A \xi(t) + B y. \quad (2)$$

The phase vector $\xi = (u, v, p, q)^T$ is an element of the real Hilbert space $X = H^2 \times L^2 \times \mathbb{R}^2$. The generalized coordinates are $u(x)$ — the transverse displacement, $v(x)$ — the velocity of a given point of the beam with coordinate x , $p = u(\ell_0)$ — the displacement and $q = v(\ell_0)$ — the velocity of the point $x = \ell_0$ where the rigid body is attached. The motion of the system with feedback control of the form $y = K \xi(t)$ is determined by the properties of the operator $\tilde{A} = A + BK$. The subject of a significant part of the work is the study of properties of fourth-order differential operators A and \tilde{A} with the domain $D(A) = D(\tilde{A}) = H^4 \times H^2 \times \mathbb{R}^2 \subset X$ in the Hilbert space X .

The control $y = K \xi$ with feedback is proposed. It is proved that this control is a bounded functional.

An important issue is the well-posedness of the Cauchy problem with the initial function $\xi_0 \in X$ for the considered control system. It is known from the literature that the Cauchy problem is well-posed if the operator $A + BK$ is an infinitesimal generator of a C_0 -semigroup. It is also known that a bounded perturbation of a semigroup generator is a semigroup generator. Therefore, due to the proved boundedness of the control, it is sufficient to study the generative properties of the operator A . The solution to this question is based on the Lumer–Phillips theorem, according to which, in order

to generate a strongly continuous semigroup in X , the operator A must be densely defined, dissipative and maximal. The first of these properties is fulfilled on the basis of Sobolev's theorems, the second is established by a direct check of the dissipativity inequality, while to prove maximality it is necessary to show that the resolvent of the operator A is well defined in the entire space X . The resolvent is constructed as mapping $(I - \lambda A)^{-1}X \rightarrow X$ for some $\lambda > 0$ and thus, on the basis of the Lumer–Phillips theorem, it is shown that the differential operator A generates a C_0 -semigroup $\{e^{tA}\}_{t \geq 0}$ in the Hilbert space X , which guarantees the well-posedness of the Cauchy problem for equation (2). A schematic representation of the above reasoning is shown in Fig. A.1 in Appendix A.

Furthermore, we prove another important property of the generator — its closedness. For this purpose, we construct the inverse of A operator A^{-1} and show its boundedness in the space X on the basis of the norm estimate. This result is important in the further study of the compactness of the resolvent of an infinitesimal generator of a closed-loop system with control.

On the basis of the direct Lyapunov method, the stability of the closed-loop system equilibrium is proved. The Lyapunov function $V(t)$ is chosen in the form of total energy and it is shown that the proposed control ensures the nonincreasing of this function on the trajectories of the closed-loop system: $\dot{V}(t) \leq 0$.

In the third chapter, we give sufficient conditions for the asymptotic stability of the equilibrium of the system with feedback control. As is well known, the proof of asymptotic stability requires, in addition to Lyapunov stability, the proof of the trajectories attractivity property, which in turn requires the verification of LaSalle's condition and the precompactness of the trajectories of a closed-loop system. By LaSalle's condition we mean the property of the set $Z = \left\{ \xi \mid \dot{V} = 0 \right\}$, namely: the maximal invariant subset of the set Z does not contain non-trivial trajectories of system (2). In other words, an

attractor for system (2) is a set consisting of the trajectory $\xi = 0$.

To prove the asymptotic stability, the frequency equation is derived and the asymptotic distribution of eigenfrequencies of the beam oscillations is investigated. The frequency equation for the studied model of the hybrid system turns out to be quite cumbersome. Therefore, one of the steps in the study of the asymptotic distribution of vibration frequencies is to isolate the main part of the characteristic equation and prove its equivalence to the obtained full equation in terms of the asymptotic behavior of the solutions. Due to this approach, the frequency equation is reduced to a more understandable and accessible for analysis transcendental equation. Based on the analysis of the asymptotic distribution of solutions of the characteristic equation, it is proved that the system of exponents $\{e^{\lambda_n t}\}_{n=1}^{\infty}$ is ω -linearly independent in $L^2(0, T)$, where λ_n — eigenvalues of the operator A , $n = 1, 2, \dots$.

Moreover, spectral properties of the differential operator A are investigated. It is shown that its eigenfunctions form the basis of the considered Hilbert space. The frequency distribution is illustrated by means of numerical modeling. Besides, the graphs of eigenfunctions of the infinitesimal generator are presented.

One of the key results of the third section of the thesis is the construction of a resolvent for the feedback operator \tilde{A} and the proof of the compactness of the resolvent. Since this problem is technically complex, it is first solved for the auxiliary operator, in which some of the control parameters are taken as constants. After that, a system of equations is obtained to exclude these parameters in the form of the previously proposed feedback, thus obtaining the resolvent for the closed-loop operator. The compactness of the constructed resolvent is proved by means of complementary estimates of the norm in the Hilbert space. The compactness property of the resolvent is, according to the Dafermos–Slemrod theorem, a sufficient condition for the precompactness of the trajectories of a closed-loop system.

Based on these results, the asymptotic stability of the equilibrium of the closed-loop system is proved on the basis of the LaSalle invariance principle. An illustrative schematic representation of the above considerations is given in Fig. A.2 in Appendix A.

The fourth chapter is focused on the study of the observation problem of a control system with an output. An explicit analytical approach is proposed for constructing a Luenberger-type dynamic observer for a class of flexible structure models.

We consider the observation problem for a finite-dimensional projection of a boundary value problem obtained by the Galerkin method. We also construct a Luenberger observer for a class of dynamical systems in infinite-dimensional space. In both cases, we analyze the dynamics of the observation error and prove the asymptotic stability of the trivial solution of the error dynamics. Thus, it is shown that the proposed dynamic observer allows us to estimate the state of a linear system with high accuracy in the presence of limited output information. The proofs are based, respectively, on the Kalman rank criterion and the LaSalle invariance principle. The proposed design of the observer allows us to estimate the full state of the system for an arbitrary dimension of the output vector. The convergence of the observer is illustrated using the results of numerical simulations.

In the fifth chapter of the thesis, the motion of a cantilever beam is considered. A mathematical model of the vibrations is presented, the corresponding spectral problem is considered, and a method for constructing a system of approximate solutions based on the Galerkin method is proposed. The convergence of the system of approximate solutions to the generalized solution of the original problem is proved and illustrated numerically.

The final chapter summarizes the main conclusions of the dissertation research. The list of references contains all sources cited in the text of the dissertation, including a list of the author's published works. A standalone

list of the author's published works is provided in Appendix B.

Appendix A contains auxiliary statements as well as illustrative diagrams that clearly represent the sequence of reasoning set forth in the text of the study.

Key words: hybrid mechanical system, Euler–Bernoulli beam, dynamical system, phase space, strongly continuous semigroup of operators, infinitesimal generator, equilibrium of a mechanical system, feedback control, the Lyapunov function, Lyapunov's stability, asymptotic stability, invariance principle, the Luenberger observer, the Galerkin method.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧКИ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Kalosha J. I., Zuyev A. L.: Asymptotic stabilization of a flexible beam with an attached mass. *Ukrainian Mathematical Journal* **73**(10), 1537–1550 (2022). DOI 10.1007/s11253-022-02012-6
2. Kalosha, J., Zuyev, A., Benner, P.: On the eigenvalue distribution for a beam with attached masses. In: G. Sklyar, A. Zuyev (eds.) *Stabilization of Distributed Parameter Systems: Design Methods and Applications*, *SEMA SIMAI Springer Series*, vol. 2, pp. 43–56. Springer International Publishing, Cham (2021). DOI 10.1007/978-3-030-61742-4_3
3. Kalosha, J.I., Zuyev, A.L.: Finite-dimensional model of the beam oscillations with distributed and lumped controls. In: *Proceedings of the International Conference on Differential Equations, Mathematical Physics and Applications (DEMPH A–2017)*, pp. 30–31. Bohdan Khmelnytsky national university of Cherkasy, Cherkasy, Ukraine, October 17 – 19 (2017)
4. Kucher Julia I., Zuyev Alexander L.: Stabilization of a flexible beam with distributed actuators. In: *Proceedings of the International Conference “The Twenty Third Crimea Autumn Mathematical School-Symposium” (KROMSh)*, p. 81. Taurida national V. Vernadsky university, Crimea, Ukraine, September 17 – 29 (2012)
5. Kucher, J., Zuyev, A.: Limit behavior of the trajectories for the problem of vibrations of a beam–mass system under the action of distributed and lumped controls. In: *Proceedings of the Crimean International Math. Conf. “KMMK–2013”*. Taurida national V. Vernadsky university, Sudak, Ukraine, September 22 – October 4 (2013)
6. Kucher, J., Zuyev, A.: Asymptotic stability analysis of the Euler–Bernoulli

- beam model. In: Proceedings of the International V. Skorobohatko Mathematical Conference, p. 86. Pidstryhach institute for applied problems of mechanics and mathematics of NAS of Ukraine, Drohobych, Ukraine, August 25 – 28 (2015)
7. Kucher, J., Zuyev, L.: Stabilization of a flexible beam with a shaker and piezoelectric actuators. In: Proceedings of the 16th International Conference “Dynamical System Modelling and Stability Investigation” (DSMSI), p. 336. Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine, May 29 – 31 (2013)
 8. Zuyev, A., Kalosha, J.: Observer design for a flexible structure with distributed and point sensors. Proceedings of the Institute of Applied Mathematics and Mechanics of NAS of Ukraine **35**(2), 125–136 (2021). DOI 10.37069/1683-4720-2021-35-9
 9. Zuyev, A., Kalosha, J.: A dynamic observer for a class of infinite-dimensional vibrating flexible structures. In: 2023 European Control Conference (ECC), pp. 200–205. IEEE, Bucharest (2023). DOI 10.23919/ECC57647.2023.10178223
 10. Zuyev, A.L., Kucher, J.I.: Asymptotic distribution of the spectral parameter in the stabilization problem for a beam system. In: Proceedings of the XVII International Conference “Dynamical Systems Modelling and Stability Investigation” (DSMSI), p. 103. Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine, May 27 – 29 (2015)
 11. Zuyev A. L., Masharova J. I.: Application of Galerkin’s method for the Euler–Bernoulli beam model. In: Proceedings of the 11th International Conference “Stability, Control and Rigid Bodies Dynamics” (ICSCD), p. 144. IAMM NASU, Donetsk, Ukraine, June 8 – 12 (2011)
 12. Зуев А. Л., Калоса Ю. И.: Приближённое решение задачи об управляемых колебаниях балки с точечной массой. In: Proceedings of the International Conference “Dynamical Systems Modelling and Stability

- Investigation” (DSMSI–2017), p. 51. Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine, May 24 – 26 (2017)
13. Зуев А. Л., Кучер Ю. И.: Сходимость последовательности приближенных решений динамических уравнений упругой балки. Труды ИПММ НАН Украины **23**, 86–99 (2011)
 14. Зуев А. Л., Кучер Ю. И.: Стабилизация модели упругой балки с распределенными и сосредоточенными управляющими воздействиями. Динамические системы **31**(3), 25–35 (2013)
 15. Зуев А. Л., Кучер Ю. И.: Устойчивость упругой балочной системы с распределенными и сосредоточенным управлением. In: Proceedings of the International Mathematical Conference “The Boundary Problems, the Theory of Functions and Their Applications” dedicated to the 75th birthday of Academician A.M. Samoilenko, p. 17. DSPU, Sloviansk, Ukraine, June 12 – 14 (2013)
 16. Калоша Ю. І., Зуєв О. Л.: Асимптотична стійкість моделі пружної балки з приєднаною масою. In: Proceedings of the International Conference of Young Mathematicians, p. 133. Institute of mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine, June 3 – 5 (2021)
 17. Калоша, Ю., Зуєв, О.: Асимптотичний розподіл власних частот коливань пружної балки з приєднаною масою. In: Proceedings of The Conference of Young Scientists “Pidstryhach Readings — 2021”. Pidstryhach institute for applied problems of mechanics and mathematics of NAS of Ukraine, Lviv, Ukraine, May 26 – 28 (2021)
 18. Калоша, Ю., Зуєв, О.: Спостерігач Луенбергера для пружної балки з точковою масою. In: Proceedings of The Conference of Young Scientists “Pidstryhach Readings — 2022”. Pidstryhach institute for applied problems of mechanics and mathematics of NAS of Ukraine, Lviv, Ukraine, May 25 – 27 (2022)
 19. Калоша, Ю., Зуєв, О.: Спостерігач Луенбергера для моделі пружної

- балки у гамільтоновій формі. In: Proceedings of the International Scientific Conference “Current Problems of Mechanics and Mathematics – 2023”. Pidstryhach institute for applied problems of mechanics and mathematics of NAS of Ukraine, Lviv, Ukraine, May 23 – 25 (2023)
20. Кучер, Ю.І.: Асимптотична поведінка власних значень інфінітезимального генератора напівгрупи в задачі стабілізації пружної балки. In: Proceedings of the International Conference of Young Mathematicians, p. 105. Institute of mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine, June 3 – 6 (2015)

ЗМІСТ

Вступ	23
Розділ 1. Огляд літератури та методика досліджень	32
Розділ 2. Стабілізація коливань пружної балки з приєднаною масою	53
2.1. Модель коливань пружної балки з твердим тілом	54
2.1.1. Фазовий простір	56
2.1.2. Рівняння руху в операторній формі	57
2.2. Керування зі зворотним зв'язком	59
2.3. Інфінітезимальний генератор C_0 -напівгрупи	62
2.4. Стійкість стану рівноваги	73
Висновки до розділу 2	73
Розділ 3. Асимптотична стійкість стану рівноваги пружної системи	75
3.1. Асимптотичний розподіл власних значень оператора A	75
3.1.1. Спектральна задача	76
3.1.2. Аналіз частотного рівняння	79
3.1.3. Результати чисельного моделювання	83
3.2. Властивості спектра оператора A	86
3.2.1. Базис гільбертового простору	86
3.2.2. Лінійна незалежність системи експоненціальних функцій	88
3.3. Передкомпактність траєкторій замкненої системи	90
3.4. Асимптотична поведінка траєкторій замкненої системи	98
Висновки до розділу 3	100

Розділ 4. Синтез динамічного спостерігача для моделі пружної системи	101
4.1. Побудова спостерігача для скінченновимірної моделі пружної балки з приєднаною масою та розподіленими сенсорами . . .	101
4.1.1. Спектральна задача для шарнірно опертої балки з точковою масою	101
4.1.2. Метод Гальоркіна для шарнірно опертої балки з приєднаною масою	104
4.1.3. Спостережуваність системи з виходом	105
4.1.4. Результати чисельного моделювання	108
4.2. Синтез спостерігача для класу нескінченновимірних коливальних пружних систем	109
4.2.1. Нескінченновимірна система керування з виходом . .	110
4.2.2. Синтез спостерігача	113
4.2.3. Динаміка похибки спостерігача	114
4.2.4. Передкомпактність траєкторій	114
4.2.5. Асимптотична стійкість	116
4.2.6. Коливання пружної балки	117
4.2.7. Результати обчислень	120
Висновки до розділу 4	122
Розділ 5. Наближені розв'язки рівняння коливань консольної пружної балки	124
5.1. Рівняння коливань консольної пружної балки	124
5.2. Спектральна задача для консольної пружної балки	125
5.3. Рівняння відносно коефіцієнтів системи Гальоркіна	128
5.4. Збіжність послідовності наближених розв'язків до узагальненого розв'язку	131
5.5. Результати чисельного моделювання	134

Висновки до розділу 5	135
Висновки	136
Список використаних джерел	137
Додаток А. Допоміжні обчислення	156
Додаток Б. Список публікацій здобувачки за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації	160
Б.1. Список публікацій здобувачки за темою дисертації	160
Б.2. Відомості про апробацію результатів дисертації	163

ВСТУП

Актуальність теми. Гібридні механічні конструкції, які містять у собі елементи у вигляді пружних балок, з'єднаних з твердими тілами, широко застосовуються в сучасній інженерії. Зокрема, частини промислових роботів-маніпуляторів, щогли космічних апаратів, стволи артилерійських гармат, опори нафтовидобувних конструкцій, опори та лопаті вітрових турбін, підвіски автомобілів можуть бути змодельованими у вигляді балок з активним керуванням. У зв'язку з широким застосуванням гібридних механічних конструкцій з пружними балками у техніці та промисловості виникає потреба у дослідженні проблем керування та спостереження для певних типів коливальних систем з розподіленими та зосередженими параметрами.

Повний стан динамічної системи часто виявляється недоступним для прямого вимірювання в багатьох прикладних задачах. Проте для деяких систем можна вимірювати вихідні сигнали у вигляді певних компонент фазового вектора як функцій часу. Для оптимального керування та стабілізації стає важливим оцінити стан, використовуючи спостереження обмеженої кількості вихідних даних системи. Тому виникає потреба у відновленні повного вектора стану за наявності неповної інформації виходу. В цьому полягає задача спостереження, яка розглядається в дисертації. Також у реальних інженерних конструкціях часто виникає потреба забезпечити керування зі зворотним зв'язком, яке враховує вихідну інформацію про стан системи. Загальна проблема полягає в тому, що більшість реальних устаткувань мають обмеження для запису та обробки вихідних сигналів. Зазвичай доступна лише часткова інформація про рух певних точок. Тому питання спостережуваності та синтезу спостерігача стають важливими для

оцінки повного стану динамічної моделі і є предметом досліджень багатьох авторів.

Об'єкт дослідження — математичні моделі керованих коливань гібридних механічних систем з пружною балкою та твердим тілом.

Предмет дослідження — задачі стійкості, стабілізації та спостереження моделей керованих гібридних механічних систем.

Обґрунтування вибору теми дослідження. Гібридні механічні системи, які складаються з абсолютно твердих і деформівних тіл, є широко розповсюдженими у сучасній техніці. До цього класу систем відносяться роботи-маніпулятори з пружними ланками, супутники з гнучкими антенами і панелями сонячних батарей, підйомні крани з пружними стрілами та протяжними тросовими зв'язками тощо. Математичне моделювання таких об'єктів призводить до необхідності дослідження коливань в системах керування, які описуються сукупністю диференціальних рівнянь з частинними похідними та рівнянь Лагранжа відносно узагальнених координат. Одним з актуальних напрямків такого дослідження є обґрунтування скінченновимірних наближених методів синтезу керувань, які базуються на розв'язанні задач оптимального керування та планування руху. Дослідження в напрямках теорії стійкості руху та математичної теорії керування системами з розподіленими параметрами проводяться у школах J.-L. Lions, J.-M. Coron, M. Balas, H. Fattorini, R. Curtain, H. Zwart, B. Jacob, E. Zuazua, Z. H. Luo, B.-Z. Guo, W. Krabs, G. Sklyar, D. L. Russell, I. Lasiecka, J. E. Lagnese, G. Leugering, В. І. Коробова, О. Г. Мазка, А. А. Мартинюка та ін. У дисертаційній роботі одержано нові науково обґрунтовані розв'язки задач керованої стабілізації та синтезу динамічних спостерігачів для моделей гібридної механічної системи із розподіленими параметрами, що складає внесок у розвиток методів теорії керування рухом та теорії стійкості в механіці.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами, грантами. Дослідження, результати яких викладено у дисертаційній роботі, виконувалися в рамках таких науково-дослідних робіт в Інституті прикладної математики і механіки Національної академії наук України:

- Керування, стійкість та редукція моделей гібридних систем з еластичними компонентами (проект міжнародної науково-технічної співпраці, партнер з досліджень: Інститут механіки і мехатроніки Технічного університету м. Відень, Австрія), 0111U007275, 2011–2012 рр.
- Розробка конструктивних методів теорії керування і стійкості із застосуванням до задач машинобудування, 0111U000483, 2012 р.
- Керування моделями мехатронних систем із застосуванням до задач навігації космічних апаратів і стабілізації робототехнічних комплексів, 0112U000029, 2012–2016 рр.
- Задачі синтезу керування для нелінійних систем з багатомасштабною динамікою, 0116U007161, 2016–2017 рр.
- Аналітичні методи дослідження задач стійкості і керування рухом нелінійних механічних систем, 0018U006265, 2018–2019 рр.
- Стабілізація траєкторій динамічних систем з гібридними керуваннями та проблеми апроксимації розв'язків неавтономних граничних задач, 0119U103214, 2019 р.
- Керування та аналіз нелінійної динаміки коливальних механічних систем і процесів масопереносу, 0116U002033, 2020 р.
- Задачі розподіленого керування та ідентифікації багатокomпонентних механічних систем, 0121U100219, 2021–2023 рр.
- Сучасні методи теорії крайових задач та їх застосування до проблем математичної фізики і механіки, 0122U000594, 2022 р.
- Grant EFDS-FL2-08 of the found The European Federation of Academies of Sciences and Humanities (ALLEA), 2023 р.

Мета і завдання дослідження. Метою дослідження є розвиток методів синтезу функцій керування зі зворотним зв'язком для механічних систем з розподіленими параметрами. Завданням дослідження є розв'язання задач асимптотичної стабілізації та спостереження для гібридної системи з пружними та твердими елементами.

Методи дослідження. У дисертаційному дослідженні використовувались методи аналітичної механіки і математичної теорії керування. Математичну модель руху гібридної системи, яка представляється в дисертаційній роботі, отримано із застосуванням варіаційного принципу Гамільтона–Остроградського. Керування зі зворотним зв'язком побудовано на основі прямого методу Ляпунова, за допомогою якого також показано стійкість стану рівноваги системи. Задачу, записану в операторній формі, досліджено на коректність за допомогою теорії C_0 -напівгруп у нескінченновимірних гільбертових просторах. Такий підхід є прийнятим у теорії керування системами з розподіленими параметрами. Умови асимптотичної стійкості отримано на основі принципу інваріантності ЛаСалля, при цьому передкомпактність траєкторій доведено із застосуванням теореми Дафермоса–Слемрода про компактну резольвенту. Задачу спостереження розв'язано методом побудови спостерігача Луенбергера. Для скінченновимірної системи підхід засновано на перевірці рангової умови Калмана. Аналіз поведінки похибки запропонованого спостерігача базується на теоремі ЛаСалля. Зазначені методи дають можливість отримати заявлені результати спираючись на наявні дані про рух механічної системи.

Наукова новизна отриманих результатів. У дисертаційній праці представлено нову математичну модель руху гібридної механічної системи, яка складається з пружної балки, розподілених п'єзоелектричних актуаторів та твердого тіла, приєднаного в точці. Запропоновано закон керування у вигляді зворотного зв'язку, який гарантує асимптотичну стійкість стану

рівноваги розглянутої системи. Вперше досліджено асимптотичний розподіл власних частот коливань такої балкової системи. Отримано новий спосіб побудови спостерігача для такої моделі. Вперше доведено збіжність методу Гальборкіна для моделі консольно закріпленої пружної балки.

Практичне значення отриманих результатів. Результати дисертаційної роботи носять в основному теоретичний характер. Потенційними сферами практичного застосування може бути імплементація одержаних методів синтезу керування зі зворотним зв'язком і системи-спостерігача в інженерні конструкції, які містять роботизовані маніпулятори з гнучкими ланками чи опорами, а також у космічні апарати з частинами, які можуть бути змодельованими у вигляді пружних балок. Крім того, запропоноване в роботі активне керування може бути впроваджене для гасіння вібрацій в автомобільних підвісках.

Особистий внесок здобувачки. Усі результати, що представляються в дисертації, отримані здобувачкою у співавторстві з науковим керівником професором О. Л. Зуєвим. Керівникові належать постановки задач, вибір методів дослідження і обговорення одержаних результатів. Здобувачці належать доведення всіх результатів, розгляд прикладів і проведення чисельних розрахунків.

Апробація матеріалів дисертації. Основні результати дослідження доповідалися на наукових конференціях різного рівня та наукових семінарах. Це такі конференції:

- 11th International Conference “Stability, Control and Rigid Bodies Dynamics” (ICSCD), Donetsk, Ukraine, June 8 – 12, 2011.
- International Conference “The Twenty Third Crimea Autumn Mathematical School-Symposium” (KROMSh), Crimea, Ukraine, September 17 – 29, 2012.
- International Mathematical Conference “The Boundary Problems, the Theo-

- ry of Functions and Their Applications” dedicated to the 75th birthday of Academician A.M. Samoilenko, Sloviansk, Ukraine, June 12 – 14, 2013.
- 16th International Conference “Dynamical System Modelling and Stability Investigation” (DSMSI), Kyiv, Ukraine, May 29–31, 2013.
 - Crimean International Math. Conf. “KMMK–2013”, Sudak, Ukraine, September 22 – October 4, 2013.
 - XVII International Conference “Dynamical Systems Modelling and Stability Investigation” (DSMSI), Kyiv, Ukraine, May 27 – 29, 2015.
 - International V. Skorobohatko Mathematical Conference, Drohobych, Ukraine, August 25 – 28, 2015.
 - International Conference of Young Mathematicians, Kyiv, Ukraine, June 3 – 6, 2015.
 - International Conference on Differential Equations, Mathematical Physics and Applications (DEMPHA–2017), Cherkasy, Ukraine, October 17 – 19, 2017.
 - International Conference “Dynamical Systems Modelling and Stability Investigation” (DSMSI–2017), Kyiv, Ukraine, May 24 – 26, 2017.
 - International Conference of Young Mathematicians, Kyiv, Ukraine, June 3 – 5, 2021.
 - The Conference of Young Scientists “Pidstryhach Readings — 2021”, Lviv, Ukraine, May 26 – 28, 2021.
 - The Conference of Young Scientists “Pidstryhach Readings — 2022”, Lviv, Ukraine, May 25 – 27, 2022.
 - International Scientific Conference “Current Problems of Mechanics and Mathematics – 2023”, Lviv, Ukraine, May 23 – 25, 2023.
 - European Control Conference (ECC23), Bucharest, Romania, June 13 – 16, 2023.

Семінари:

- Семінар відділу прикладної механіки Інституту прикладної математики і механіки Національної академії наук України (2011–2023).
- Семінар молодих вчених Інституту прикладної математики і механіки Національної академії наук України (2016–2023).
- Семінари в Інституті механіки і мехатроніки Технічного університету Відня (Австрія) в рамках проекту міжнародної наукової співпраці “Control, stability and model reduction of hybrid systems with elastic components” (2011–2012).
- Seminar of Biomathematics and Game Theory Group at University of Warsaw, Faculty of Mathematics, Informatics and Mechanics, Warsaw, Poland (2022).
- Open seminar on partial differential equations at The Faculty of Mathematics and Information Science, Warsaw University of Technology, Warsaw, Poland (2022).
- Seminar at The Institute of Mathematics, Polish Academy of Sciences, Warsaw, Poland (2022).
- Seminar at The Max Planck Institute for Dynamics of Complex Technical Systems, Computational Methods in Systems and Control Theory Group (CSC Seminar), Magdeburg, Germany (2022).
- Seminar at the Institute of Mathematics, Kassel University, Kassel, Germany. Presentation “Asymptotic Stabilization of the Flexible Beam Oscillations” (2022).
- Розширений семінар відділу прикладної механіки Інституту прикладної математики і механіки Національної академії наук України (17.11.2023).
- Семінар кафедри прикладної математики Харківського національного університету ім. В. Н. Каразіна (21.11.2023).
- Семінар відділу математичних проблем механіки та теорії керування Інституту математики Національної академії наук України (23.11.2023).

Публікації. Основні результати дисертаційного дослідження опубліковано у статтях [41, 42, 122, 123, 143, 144] та додатково висвітлено у тезах доповідей [43], [53] — [56], [128, 129], [142], [145] — [149], [155]. Результати другого розділу дисертації опубліковано у статті [144]. Результати, представлені у третьому розділі, опубліковано у статтях [41] та [42]. Результати, викладені в розділі 4, опубліковано в роботах [122] та [123]. Результати п'ятого розділу дисертації опубліковано у статті [143]. Публікації [122, 143, 144] відповідають вимогам до публікації результатів дисертаційних робіт у фахових виданнях із фізико-математичних наук. Статті [41, 42, 123] проіндексовано в міжнародних наукометричних базах даних Web of Science і Scopus.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається з анотації українською та англійською мовами, вступу, п'яти розділів, розділених на підрозділи, заключної частини, списку використаних джерел і двох додатків. Загальний обсяг дисертації складає 165 сторінок. Список використаних джерел (173 посилання включно з роботами здобувачки), список публікацій здобувачки (6 статей і 14 тез конференцій), відомості про апробацію результатів і додаток займають 29 сторінок (з них 2 сторінки — ілюстративні матеріали у додатку А).

Зміст роботи. У першому розділі дисертації наводиться огляд літератури та методики досліджень. Результати власного наукового дослідження за темою дисертації викладено у розділах 2–5. Розв'язано задачу стабілізації для моделі пружної балки з твердою масою і розподіленим керуванням. Модель руху отримано за допомогою варіаційного принципу. Запропоновано керування у вигляді зворотного зв'язку. Доведено коректність задачі Коші для рівняння руху, записаного у вигляді абстрактного рівняння у гільбертовому просторі з диференціальним оператором четвертого порядку. Досліджено властивості інфінітезимального генератора

C_0 -напівгрупи. На основі прямого методу Ляпунова доведено стійкість стану рівноваги замкненої системи.

Асимптотичну стійкість доведено за допомогою принципу інваріантності ЛаСалля. Побудовано резольвенту інфінітезимального генератора, показано її компактність, на основі чого доведено передкомпактність траєкторій замкненої системи у фазовому просторі. Досліджено асимптотичний розподіл модальних частот коливань балки. На основі цього перевірено умову ЛаСалля — властивість інваріантних підмножин множини траєкторій, на яких похідна функціонала Ляпунова за часом дорівнює нулеві.

Крім того, розв'язано задачу спостереження для динамічної системи з виходом, спочатку для скінченновимірної моделі, після чого результат узагальнено на широкий клас гамільтонових систем у нескінченновимірному просторі. Запропоновано алгоритм побудови динамічного спостерігача типу Луенбергера. Доведено асимптотичну стійкість похибки спостережень, результати проілюстровано за допомогою чисельного моделювання. Також отримано результат про збіжність методу Гальоркіна для консольної балки з розподіленим керуванням.

Подяка. Авторка висловлює подяку Силам оборони України, завдяки чийм героїчним зусиллям має можливість проводити наукові дослідження. Особливу подяку авторка висловлює науковому керівникові професору Олександру Леонідовичу Зуєву, чийі консультації і всебічна підтримка впродовж усіх етапів підготовки дисертації неоціненні. Окрема подяка висловлюється авторові набору класів і пакетів L^AT_EX `vakthesis` та `vakaref` Олександру Барановському, чийі напрацювання значно спростили роботу над підготовкою рукопису.

РОЗДІЛ 1

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ТА МЕТОДИКА ДОСЛІДЖЕНЬ

Моделювання механічних систем за допомогою варіаційних принципів. Існують різні підходи до математичного моделювання руху механічних систем. У класичних працях з аналітичної механіки та механіки суцільного середовища [5, 8, 29, 135, 139] викладено універсальні методи для опису фізичних процесів за допомогою варіаційних принципів. Такий підхід дає спосіб отримати рівняння руху системи, досліджуючи характеристики зміни кінетичної та потенціальної енергії. Концепція полягає в тому, що у реальних процесах деякі функціонали мають стаціонарне значення, і закони взаємодії часток середовища можуть бути отримані з умови стаціонарності функціонала дії. Ідея сходиться до робіт П'єра Ферма, П'єра Морпетюї, Ж. Л. Даламбера, Йогана та Якоба Бернуллі, Леонарда Ейлера¹ [172]. Подальший розвиток напрямку дав формулювання принципу найменшої дії у формі Лагранжа: істинний рух системи є стаціонарною точкою дії на множині траєкторій, які виходять в момент часу t_0 з однієї заданої точки конфігураційного простору та приходять в іншу в момент часу t_1 і задовольняють закон збереження енергії. При цьому функціонал дії приймається у вигляді інтеграла за проміжком $[t_0, t_1]$ від кінетичної енергії системи, яка вважається додатною однорідною другого степеня відносно швидкості² функцією узагальнених координат і швидкостей.

Пізніше з'явилися версії викладеного принципу у роботах В. Гамільто-

¹Написання прізвища Л. Ейлера в українській мові є дискусійним. Правильним також вважається написання "Ойлер".

²Якщо q_i — узагальнені координати, \dot{q}_i — узагальнені швидкості, то для кінетичної енергії E мають місце рівності $E(q, \lambda \dot{q}) = \lambda^2 E(q, \dot{q})$ та $\dot{q}_i \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_i} = 2E(q, \dot{q})$.

на, М. В. Остроградського, А. Пуанкаре, К. Г. Я. Якобі. Основні відмінності полягали в тому, як записувати функціонал дії. Зокрема, Гамільтон [33] і Остроградський [87] запропонували принцип найменшої дії у формі, яка не вимагає виконання закону збереження енергії на допустимих траєкторіях.

Диференціальне рівняння руху механічної системи можна отримати як наслідок варіаційного принципу на основі лагранжевого формалізму — методу виведення рівнянь руху за допомогою принципу стаціонарної дії за Гамільтоном, або принципу Гамільтона–Остроградського [133, 159], коли функціоналом дії приймається інтеграл за часовим проміжком від функції Лагранжа. Інтегральний принцип Гамільтона описує рух тих механічних систем, для яких всі сили (крім сил опору) виводяться з узагальненого скалярного потенціалу, який може бути функцією координат і часу. Принцип Гамільтона–Остроградського полягає в тому, що рух (зміна конфігурації) системи від моменту часу t_0 до моменту t_1 є таким, що криволінійний інтеграл дії $\int_{t_0}^{t_1} L dt$ має стаціонарне значення на фактичній траєкторії руху, тут L є різницею між кінетичною і потенціальною енергією системи. Тобто, з усіх допустимих зв'язками (віртуальних) траєкторій дійсною є та, для якої дія за Гамільтоном набуває екстремального значення.

Системи з розподіленими параметрами, такі як гнучкі струни, балки чи мембрани, фізичні поля тощо, не можуть бути описані скінченною кількістю узагальнених координат. У таких випадках можна застосувати узагальнення принципу Гамільтона–Остроградського на випадок нескінченної кількості ступенів вільності. А саме: нехай конфігурація системи описується вектор-функцією $q(t)$ в деякому банаховому або гільбертовому просторі. Позначимо кінетичну енергію системи через $K(t, q, \dot{q})$, потенціальну — через $U(q)$. Функціонал дії за Гамільтоном можна записати у вигляді $I = \int_{t_0}^{t_1} L(t, q, \dot{q}) dt$, де $L = K - U$ — лагранжіан. Надамо функції $q(t)$ малий приріст $\delta q(t) \in C^1[t_0, t_1]$, який задовольняє крайові умови

$\delta q(t_0) = \delta q(t_1) = 0$, і обчислимо приріст $\Delta I = I(t, q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}) - I(t, q, \dot{q})$ функціонала дії. Варіацією δI функціонала I є головна лінійна відносно δq частина ΔI . Необхідною умовою стаціонарності I на функції $q(t) \in \delta I = 0$. Відповідно до принципу Гамільтона–Остроградського з урахуванням роботи сторонніх сил [133, с. 189], рух механічної системи відповідає стаціонарному значенню функціонала дії і тому здійснюється на функціях $q(t)$, які задовольняють умову

$$\delta I + \int_{t_0}^{t_1} \delta A dt = 0, \quad (1.1)$$

де δA — варіація роботи зовнішніх сил на переміщеннях δq . Рівність (1.1) виконано для довільних віртуальних переміщень δq класу C^1 з нульовими крайовими умовами на кінцях відрізка $[t_0, t_1]$. Під віртуальними переміщеннями маються на увазі нескінченно малі переміщення системи, що допускаються рівняннями в'язів. Застосовуючи основну лему варіаційного числення (див. [133, с. 15], [136, с. 29], [165, с. 7]) та інтегрування частинами, з (1.1) можна отримати диференціальні рівняння руху з відповідними крайовими умовами. Перевагою такого підходу є те, що варіаційні принципи дають можливість поєднати геометричні та фізичні властивості системи і отримати єдиний підхід до аналізу різних систем. У книгах [136, 173] наводяться узагальнення цього методу на випадки, коли функція q залежить від кількох змінних, а функціонал I залежить, крім q, \dot{q} , від похідних вищих порядків.

Моделі коливань пружних тіл. Дослідження руху пружних коливальних систем сходять до Йоганна Бернуллі та Леонарда Ейлера, які встановили диференціальні рівняння для кривих прогину пружного стрижня та ідеально пружної мембрани. Леонард Ейлер запропонував правила знаходження екстремалей функціоналів і застосував варіаційний підхід до моделювання гнучких пластин та дослідження руху тіл у суцільному се-

редовищі. У теорії балки Ейлера–Бернуллі ключовим припущенням є те, що плоский поперечний переріз залишається перпендикулярним до опорної осі під час деформації. У роботах [136, 165] із застосуванням підходу на основі лагранжевого формалізму були отримані рівняння малих коливань струни, пружного стрижня, простого механічного осцилятора, мембрани і пластини з різними умовами закріплення кінців або межі.

Український вчений Степан Тимошенко запропонував модель пружної балки [166, 167], беручи до уваги не тільки поперечне переміщення, а і деформацію згину та інерцію обертання поперечного перетину елемента балки. Хоча рівняння балки Тимошенка більш точно описує коливання за рахунок обертальних інерційних моментів, лінійна модель Ейлера–Бернуллі досі залишається затребуваною і достатньо точною для дослідження руху балок, чия довжина значно перевищує розміри перерізу. У роботі [35] сонячні панелі космічного апарату моделюються у вигляді двох балок Ейлера–Бернуллі, приєднаних до точкової маси. Автори звертаються до принципу Гамільтона для виведення рівнянь руху і пропонують спосіб експоненціальної стабілізації на основі породженого енергією функціонала Ляпунова. У статті [97] принцип Гамільтона використано для отримання рівнянь руху зв'язаної системи, яка представляє модель заправної машини ядерного реактора і складається з моста і візка та гнучкого стрижня. З використанням методу Ляпунова розроблене керування, яке стабілізує положення моста і візка, а також поперечні та бічні коливання паливного стрижня, які спричинені рухом моста і візка. Запропонований синтез керування гарантує рівномірну граничну обмеженість розв'язків замкненої системи.

Стійкість і стабілізація руху. Підґрунтя сучасної теорії стійкості заклав О. М. Ляпунов [158], надавши чіткої математичної форми ідеям Анрі Пуанкаре [164] і поняттям стійкості, асимптотичної стійкості, і довівши теореми про стійкість та нестійкість динамічної системи. У запро-

понованому Ляпуновим підході дослідження стійкості руху зводиться до дослідження поведінки розв'язків системи диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n \quad (1.2)$$

в малому околі стану рівноваги $x_0 = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})^T \in \mathbb{R}^n$. Передбачається що вектор-функція $f(t, x) = (f_1(t, x), \dots, f_n(t, x))^T$ є неперервною на множині $t \geq 0$, $x \in D \subseteq \mathbb{R}^n$, де область D містить точку x_0 та $f(t, x_0) \equiv 0$ для всіх $t \geq 0$. Основи прямого методу Ляпунова висвітлені в роботах [138, 140, 156] і багатьох інших.

Стан рівноваги системи є стійким за Ляпуновим, якщо при малих початкових збуреннях траєкторії системи залишаються в малому околі стану рівноваги.

Означення 1.1. Розв'язок $x = x_0$ системи (1.2) називатимемо стійким (за Ляпуновим), якщо для кожного $\varepsilon > 0$ можна знайти таке значення $\delta > 0$, що з $\|x(0) - x_0\| < \delta$ випливає $\|x(t) - x_0\| < \varepsilon$ для всіх $t \geq 0$.

Тут символом $\|\cdot\|$ позначено евклідову норму вектора в \mathbb{R}^n .

При розгляді прикладних задач виникає необхідність розрізняти деякі види стійкості. Наприклад, стан рівноваги у нижньому положенні математичного маятника є стійким, однак жодна з близьких до нього траєкторій ніколи не досягає його, на противагу маятника з тертям. Для опису поведінки фізичних систем, які з часом прямують до стійкого стану рівноваги, вводиться поняття асимптотичної стійкості.

Означення 1.2. Розв'язок $x = x_0$ системи (1.2) називатимемо асимптотично стійким, якщо він є стійким за Ляпуновим та існує таке $\delta > 0$, що з $\|x(0) - x_0\| < \delta$ випливає $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x_0\| = 0$.

Прийнято казати, що розв'язок є асимптотично стійким, якщо він є стійким і притягуючим.

Ляпунов запропонував методи отримання достатніх умов стійкості стану рівноваги або періодичного руху на нескінченному інтервалі часу за

малих змін початкових умов. Прямий (другий) метод Ляпунова дозволяє знаходити умови стійкості, не вдаючись до інтегрування рівнянь руху, і полягає у завданні додатновизначеної функції, яка є незростаючою вздовж кожної траєкторії системи. Таким чином, дослідження стійкості зводиться до побудови функції, яка має певні властивості. Таку функцію прийнято називати функцією Ляпунова.

Означення 1.3. ([131, с. 12]). Неперервна в області D ($0 \in D$) функція $V(x)$ називається додатновизначеною (додатною знаковизначеною) або від'ємновизначеною, якщо $V > 0$ або $V < 0$, відповідно, для всіх $x \in D$, крім точки $x = 0$, при цьому $V(0) = 0$. Якщо всюди в області D має місце нерівність $V \geq 0$ або $V \leq 0$, то функція V називається знакосталою — знакододатною або знаковід'ємною відповідно.

Розглянемо автономну систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.3)$$

Нехай функції f_i є неперервними і задовольняють умову Ліпшиця в деякій області D , яка містить точку $x = 0$ разом з деяким її оточенням, і нехай точка $x = 0$ є положенням рівноваги системи (1.3), тобто $f_i(0) = 0$.

Теорема 1.1. *Якщо в області D існує така знаковизначена функція $V \in C^1(D)$, похідна \dot{V} якої в силу системи (1.3) є знакосталою функцією знаку, протилежного знаку V , то стан рівноваги є стійким за Ляпуновим. Якщо функція \dot{V} є також знаковизначеною, то стан рівноваги є асимптотично стійким.*

Функція Ляпунова дає можливість не тільки встановити умови асимптотичної стійкості, а і визначити множину допустимих початкових збурень. Хоча не існує загального алгоритму побудови функції Ляпунова, для багатьох механічних систем вона може бути породжена повною енергією, тоді як умова її незростання на траєкторіях системи набуває змісту збереження енергії. Основи теорії стійкості за Ляпуновим для систем із зосередженими

параметрами, які описуються звичайними диференціальними рівняннями типу (1.2), де праві частини рівнянь можуть залежати від t , викладено у [138, 152], також наведено умови стійкості систем лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами, записаних у матричному вигляді $\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t)$. Критерії стійкості формулюються у термінах власних чисел матриці A . Знаки дійсних частин і кратність власних чисел визначають асимптотичну поведінку траєкторій. У книгах [93, 160] наведено приклади побудови функції Ляпунова для систем усталеного обертального руху твердих тіл, маятника зі змінним тертям, систем автоматичного регулювання, консервативних систем з постійно діючими збуреннями, а також систем з дисипацією. Монографії [130, 131] присвячено задачам стійкості і побудові функції Ляпунова, в тому числі для деяких нелінійних систем і систем у функціональних просторах. У роботі [140] застосування методів Ляпунова подаються з загальних позицій, в тому числі для систем, чий рух описується рівняннями з частинними похідними.

Якщо праві частини системи містять величини u_j , які характеризують керуючий вплив, то рівняння руху набувають форми

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m), \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.4)$$

і задача стабілізації полягає у знаходженні таких керувань $u_j = u_j(t, x)$, $j = \overline{1, m}$, які забезпечують стійкість (асимптотичну стійкість) розв'язку $x_i = 0$ системи (1.4).

Підхід до розв'язання задачі експоненціальної та асимптотичної стабілізації запропоновано у [15] для кількох послідовно з'єднаних пружних балок та у статті [49] для консольної балки. В обох працях керування застосовується у вигляді точкової сили, прикладеної до вільного кінця балки. Автор статей [82, 83] звертається до побудови функціонала Ляпунова у вигляді енергії для доведення стійкості керованої гібридної системи з балками Ейлера–Бернуллі та Тимошенка. Закон керування, побудований

на основі функції Ляпунова, також породженої енергією, пропонується у статті [98] для моделі балки Ейлера–Бернуллі. Автори згаданих робіт наголошують на застосовності розглянутих моделей балкових систем до інженерних задач керування рухом промислових роботів-маніпуляторів та космічних апаратів. Умови керованості на основі апріорних оцінок енергії для серії з'єднаних балок представлені у [59]. Автори книги [20] застосували універсальні підходи з використанням негармонійних рядів Фур'є до дослідження керованості з'єднаних струн, надаючи таким чином ефективні інструменти також для аналізу рівнянь балок. У роботі [94] теорію Фур'є для негармонійних функцій поширено на випадок диференціальних рівнянь другого порядку і встановлено властивості розв'язків задачі моментів при базових припущеннях на керуючу функцію. Серію робіт [99, 101, 102] присвячено керованості та спектральному аналізу моделей балок Ейлера–Бернуллі з різними типами крайових умов. У статті [170] розглянуто нелінійну модель одноланкового маніпулятора з пружним зчленуванням у вигляді торсіонної пружини. Запропоновано керування, яке забезпечує глобальну асимптотичну стійкість заданого стану рівноваги системи диференціальних рівнянь. Керування, отримане за допомогою техніки Dynamic Surface Control, гарантує глобальне асимптотичне прямування траєкторії руху моделі маніпулятора до заданої програмної траєкторії. Доведення стійкості базується на методі функцій Ляпунова.

Особливий інтерес становлять задачі оптимального керування, основи якого викладено детально у [65]. У книзі [141] всебічно розглянуто задачі оптимальної стабілізації для лінійних, нелінійних, стохастичних систем, зокрема, задачі орієнтації тіла, які мають особливо важливе значення при моделюванні руху космічних апаратів. Задачі оптимального керування коливаннями пружних балок були детально розглянуті в [45] для всіх основних типів крайових умов, що впливають з механічної постановки задачі. Для симетричних гіперболічних систем були розглянуті деякі загальні ти-

пи керування, в тому числі імпульсне, а також описано випадок керування розподіленим навантаженням для моделі осцилюючої балки.

Стабілізація нескінченновимірних систем. Керування гнучкими структурами є актуальною галуззю сучасних досліджень з теоретичної механіки та математичної теорії керування. Проблеми керованості та стабілізації для різних моделей пружних балок були предметом уваги багатьох авторів протягом кількох десятиліть [6, 47, 60]. Узагальнення скінченновимірної лінійної задачі керування на абстрактну лінійну задачу в гільбертовому просторі можна знайти у [48]. Умови керованості осцилюючих струн і балок з розподіленим та крайовими керуваннями надаються в загальному вигляді. В останні роки все більший інтерес викликають задачі керування, які виникають при моделюванні морських бурових споруд [61, 67] та різного роду гнучких роботів-маніпуляторів [85, 108].

Задачі динаміки систем з розподіленими параметрами призводять до необхідності розгляду диференціальних рівнянь у нескінченновимірних просторах, адже мають нескінченну кількість ступенів вільності і описуються рівняннями з частинними похідними. Для таких систем були розроблені методи дослідження стійкості у функціональних просторах. Нові результати в галузі стабілізації нескінченновимірних динамічних систем у функціональних просторах викладено у [103].

Прийнятим є представлення математичної моделі у вигляді абстрактного диференціального рівняння $\dot{\xi}(t) = A\xi(t)$, в якому траєкторія системи задається вектор-функцією $\xi(t)$ у нескінченновимірному просторі, відображення A може бути необмеженим оператором.

У книзі [162] наочно продемонстровано зв'язок спектральних властивостей операторів зі стійкістю коливальних систем на прикладах пружної струни і мембрани. У монографії [77] продемонстровано, як різноманітні процеси можна записати у вигляді задачі Коші для абстрактного диферен-

ціального рівняння

$$\frac{d\xi(t)}{dt} = A\xi(t), \quad \xi(0) = \xi_0 \quad (1.5)$$

з лінійним оператором $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ у підбраному належним чином гільбертовому чи банаховому просторі X . При дослідженні задач стабілізації та керування таких систем на нескінченному часовому проміжку використовується представлення за допомогою напівгруп операторів у гільбертових і банахових просторах. У [154, Теорема 2.8] доведено, що оператор A коректно поставленої задачі Коші (1.5) породжує сильно неперервну напівгрупу лінійних обмежених операторів в X . Вагомі результати отримано за допомогою розвинутої теорії C_0 -напівгруп, яка була всебічно висвітлена в роботах [77, 89] із застосуванням до задач стійкості. У монографії [77] представлено напрацювання в галузі теорії стійкості нескінченновимірних систем із застосуванням до стабілізації зі зворотним зв'язком різноманітних систем керування, що описуються диференціальними рівняннями з частинними похідними. У тому числі наводяться умови експоненціальної стійкості станів рівноваги механічних систем з балками Ейлера–Бернуллі. Вивченню систем з розподіленими параметрами присвячено, крім згаданих вище, роботи [18, 171], також [112, Глава 2]. У монографії [18] було комплексно висвітлено теорію напівгруп та її застосування до дослідження керованості, спостережуваності, експоненціальної стабілізації та ідентифікації лінійних систем керування з обмеженими вхідними та вихідними операторами у нескінченновимірних просторах. Деякі застосування теорії напівгруп до проблем спостережуваності та керованості для абстрактних хвильових рівнянь були розглянуті в [46]. У статтях [120, 127] розв'язано задачі моделювання і стабілізації руху складного маніпулятора з пружною балкою Ейлера–Бернуллі з масою на кінці, запропоновано закон керування зі зворотним зв'язком і доведено стійкість на основі прямого методу Ляпунова і теорії сильно неперервних напівгруп у гільбертовому просторі.

Далі наведемо деякі важливі означення й теореми, послуговуючись матеріалами [25, 77, 86, 89, 91, 153, 154, 168]. Нехай $A : D(A) \rightarrow Y$ — лінійне відображення з областю визначення $D(A) \subset X$, X та Y — банахові або гільбертові простори над полем дійсних чисел \mathbb{R} .

Означення 1.4. Функція $\xi(\cdot) : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ називається класичним розв'язком задачі Коші (1.5), якщо $\xi(t)$ неперервна для $t \geq 0$, неперервно диференційовна для $t > 0$ і задовольняє (1.5).

Означення 1.5. Задача Коші (1.5) є коректною на відрізку $[0, T]$, якщо для будь-якого $\xi_0 \in D(A)$ існує єдиний розв'язок $\xi(t)$, $t \in [0, T]$ задачі (1.5) і цей розв'язок неперервно залежить від початкових даних в тому сенсі, що з $\xi_n(0) \rightarrow 0$ ($\xi_n(0) \in D(A)$) для відповідних розв'язків $\xi_n(t)$ випливає $\xi_n(t) \rightarrow 0$ для всіх $t \in [0, T]$.

З коректності задачі Коші (1.5) на будь-якому відрізку $[0, T]$ випливає її коректність на всій піввісі $[0, +\infty)$.

Означення 1.6. Нормою лінійного відображення $A : D(A) \subset X \rightarrow Y$ називається $\|A\|_Y = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|_Y$. Оператор A називається обмеженим, якщо $\|A\|_Y < \infty$.

Означення 1.7. Лінійний оператор A називається замкненим, якщо з $x_n \in D(A)$, $x_n \rightarrow x$ та $Ax_n \rightarrow y$ випливає $x \in D(A)$ та $Ax = y$.

Означення 1.8. Обмежений лінійний оператор $A(t) : D(A) \subset X \rightarrow Y$ називається сильно неперервним, якщо для кожного $x \in D(A)$ функція $A(t)x$ зі значеннями в Y неперервна.

Означення 1.9. Оператор A називатимемо компактним, якщо будь-яку обмежену множину в X він переводить у передкомпактну³ (відносно компактну) множину в Y . Або, еквівалентно: для будь-якої обмеженої послідовності $x_n \in D(A)$ послідовність Ax_n містить в собі збіжну підпослі-

³замикання якої є компактом — тобто, для будь-якого відкритого покриття цієї множини існує скінченне підпокриття.

довність.

Якщо оператор A є обмеженим, то задача Коші (1.5) є коректною для будь-яких початкових даних $\xi_0 \in X$ і розв'язок може бути обчислений за допомогою матричної експоненти: $\xi(t, x) = e^{tA} \xi_0$, де $e^A = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{t^j}{j!} A^j$. Тут під A^n мається на увазі послідовне застосування n разів оператора A . Зокрема, у випадку, коли A вдається задати за допомогою квадратної матриці, це звичайний матричний добуток. Існують різні способи обчислення матричної експоненти e^A в залежності від конкретної задачі, також сучасні системи комп'ютерної алгебри дозволяють це робити у випадку оператора, заданого квадратною матрицею. Для широкого класу задач, які призводять до рівнянь з частинними похідними, оператор A не є обмеженим, і операторну експоненту неможливо визначити у звичному розумінні. Такі випадки призводять до необхідності узагальнення поняття матричної експоненти, що дається за допомогою напівгруп. Для вивчення еволюції динамічної системи доцільно розглядати проміжки часу для додатних значень t , тому надалі говоритимемо про напівгрупи, маючи на увазі, що всі оператори визначено на піввісі часової прямої $t \geq 0$. Варто зауважити, що існують узагальнення теорії на випадки, коли $t < 0$, і вони мають широке застосування, наприклад, при вивченні систем з запізненням. Однак у цій роботі мова йтиме виключно про системи, що розвиваються в додатному часовому проміжку, а отже, послуговуватимемось поняттями теорії напівгруп. Нехай X — гільбертів простір зі скалярним добутком $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$ та нехай $A : D(A) \subset X \rightarrow X$.

Означення 1.10. Оператор $A^* : X \rightarrow X$ називається спряженим до оператора A , якщо $\langle x, A^*y \rangle_X = \langle Ax, y \rangle_X$, $\forall x, y \in X$. Якщо $A = A^*$, або, еквівалентно, $\langle Ax, y \rangle_X = \langle x, Ay \rangle_X$ для довільних елементів x, y простору X , то оператор A називається самоспряженим.

Кососиметричним називатимемо оператор A , для якого $A = -A^*$, що

еквівалентно $\langle Ax, y \rangle_X = -\langle x, Ay \rangle_X$. Оператор $A : X \rightarrow X$ називатимемо нормальним, якщо $AA^* = A^*A$.

Очевидно, будь-який кососиметричний оператор є нормальним.

Означення 1.11. Однопараметричне сімейство $T(t) : X \rightarrow X$ обмежених лінійних операторів у гільбертовому просторі X , які залежать від параметра t , $0 \leq t < \infty$, називається напівгрупою, якщо $T(0) = I$ та $T(t+s) = T(t)T(s)$, $t, s \in [0, +\infty)$. Якщо при цьому $\lim_{t \rightarrow 0} T(t)x = x$ для всіх $x \in X$, то напівгрупа $T(t)$ називається сильно неперервною, або C_0 -напівгрупою.

Означення 1.12. Нехай $T(t)$ — C_0 -напівгрупа у банаховому просторі X з інфінітезимальним генератором A . Для кожного $\xi_0 \in X$ вектор $\xi(t) = T(t)\xi_0$ називається слабким розв'язком задачі Коші (1.5).

Будь-який класичний розв'язок є також слабким. Слабкий розв'язок $\xi(t)$, $t \in [0, T]$ є класичним тоді і тільки тоді, коли $\xi(t) \in D(A)$ для всіх $t \in [0, T]$.

Теорема 1.2. ([89, Теорема 2.2]). Для сильно неперервної напівгрупи $T(t)$ існують константи $M \geq 1$ та $\omega \geq 0$, такі, що $\|T(t)\|_X \leq Me^{\omega t}$, $0 \leq t < \infty$.

Означення 1.13. Оператор A , визначений правилом $Ax = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t}$ для всіх $x \in X$, для яких існує границя, називається інфінітезимальним генератором напівгрупи $T(t)$.

Зауважимо наступний важливий факт: генератор напівгрупи представляється у такому вигляді, який не містить залежності від параметра t , завдяки чому будь-який елемент напівгрупи можна записати через генератор за допомогою експоненціювання. Таким чином, генератор містить інформацію про групову операцію без прив'язки до конкретного елемента. Якщо оператор A породжує сильно неперервну напівгрупу $T(t)$, то неоднорідна

задача Коші

$$\frac{d\xi(t)}{dt} = A\xi(t) + f(t), \quad \xi(0) = \xi_0 \quad (1.6)$$

з правою частиною $f \in L^1(0, T)$ є коректною [154, с. 67] і її розв'язок можна записати у вигляді $\xi(t) = T(t)\xi_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds$.

У монографії [77] для рівнянь теплопровідності, чисельності популяції, коливань струни та балки розв'язок задачі Коші представлено у вигляді образу початкової функції при відображенні напівгрупи, породженої оператором системи. Зазначається, що стан рівноваги системи характеризується власним вектором оператора A , при цьому стійкість системи визначається ненульовим спектром оператора A . Зокрема, асимптотично стійкою є напівгрупа, що породжена оператором із компактною резольвентою, всі власні значення якого лежать у відкритій лівій комплексній півплощині. При цьому для рівнянь коливань струни або поздовжніх коливань балки асимптотична стійкість системи не гарантує експоненціальної стійкості. Для поперечних коливань балки, що обертається, експоненціальна стійкість системи з заданим керуванням не впливає прямо з розташування спектра у відкритій лівій комплексній півплощині, а потребує додаткових досліджень, на відміну від скінченновимірних систем.

Означення 1.14. Число $\lambda \in \mathbb{C}$ називається регулярним для оператора $A : D(A) \subset X \rightarrow X$, якщо його резольвента $R(\lambda; A) = (A - \lambda I)^{-1}$ є обмеженим лінійним оператором на всьому просторі X . Резольвентна множина — сукупність всіх регулярних точок оператора A . Спектр оператора A — доповнення на комплексній площині резольвентної множини оператора.

У [86] на загальній основі викладено спектральні методи дослідження сильної стійкості розподілених систем у гільбертових просторах для систем керування з обмеженими вхідними та вихідними операторами та проаналізовано деякі приклади керованих балок. Стабілізацію суттєво нелінійної

системи, що складається з балки, прикріпленої до диска, з керуванням обертального моменту, представлено у [16]. В цій монографії також досліджено нерівності, пов'язані з керованістю диференціальних рівнянь. В роботі [31] досліджено динамічну поведінку неоднорідної консольної балки Ейлера–Бернуллі з крайовим керуванням. Автор підкреслює, що асимптотичні властивості власних значень відповідного інфінітезимального генератора відіграють важливу роль для доведення експоненціальної стійкості замкненої системи. У статті [69] запропоновано чисельну схему для апроксимації розв'язків задачі рівномірної експоненціальної стабілізації моделі балки Ейлера–Бернуллі з закріпленням кінцем і крайовим керуванням на іншому кінці. У роботі [100] розглянуто балку Ейлера–Бернуллі з одним закріпленням кінцем як систему керування з двовимірними входом і виходом. Показано, що спектр генератора для розглянутої моделі лежить у відкритій верхній півплощині, і запропоновано асимптотичні наближення власних значень. У статті [44] сформульовано загальну задачу про власні значення для моделей Тимошенка та Ейлера–Бернуллі для широкого класу крайових умов. Запропоновано підхід до чисельного розв'язання характеристичного рівняння. Роботи [12, 13, 14, 34] присвячено задачам керування для гібридних систем, що складаються з пружних струн або балок, з'єднаних за допомогою точкової маси. Досліджено питання коректності, керованості і стабілізації для таких систем. Також останнім часом привертають значну увагу проблеми стійкості та стабілізації ламінованих балок та балочних сполучень завдяки їх широкому теоретичному контексту та численним інженерним застосуванням [3, 4, 71, 84].

На відміну від систем звичайних диференціальних рівнянь, умови коректної постановки задачі Коші для систем з розподіленими параметрами постають нетривіальним питанням навіть у лінійному випадку. Один з підходів до вирішення цього питання є теорема Хіле–Йосіди [89]. Іншим інструментом для перевірки генеративних властивостей оператора часто

виступає теорема Люмера–Філіпса і зокрема дисипативність оператора, яка також тісно пов'язана зі стійкістю.

Означення 1.15. Сильно неперервна напівгрупа операторів $T(t)$ у гільбертовому просторі X називається стискаючою, якщо $\|T(t)\|_X \leq 1$ для всіх $t \geq 0$.

Означення 1.16. Нехай A — оператор (можливо, необмежений) у гільбертовому просторі X з областю визначення $D(A) \subset X$. A називається дисипативним оператором, якщо $\langle Ax, x \rangle_X + \langle x, Ax \rangle_X \leq 0$, $\forall x \in D(A)$ [86, означення 2.2.1], або $\operatorname{Re} \langle Ax, x \rangle_X \leq 0$, $\forall x \in D(A)$ [153, с. 121].

Оператор $B : D(B) \subset X \rightarrow X$ називатимемо розширенням оператора $A : D(A) \subset X \rightarrow X$, якщо $D(A) \subset D(B)$ та $B\xi = A\xi$ для всіх $\xi \in D(A)$. Щільно визначений дисипативний оператор у гільбертовому просторі допускає замкнене розширення, яке також є дисипативним оператором. Дисипативний лінійний оператор у гільбертовому просторі X називається максимальним, якщо він не є власним звуженням жодного іншого дисипативного оператора, тобто резольвента $R(\lambda; A) = (I - \lambda A)^{-1}$ є сюр'єктивним відображенням $X \rightarrow X$. Будемо послуговуватись наступним еквівалентним означенням максимального оператора.

Означення 1.17. Дисипативний лінійний оператор $A : D(A) \rightarrow X$ у гільбертовому просторі X називається максимальним, якщо множина значень $R(I - \lambda A)$ оператора $I - \lambda A$, де I — тотожний оператор, співпадає з простором X . Лінійний оператор у гільбертовому просторі X називається m -дисипативним, якщо він є дисипативним і максимальним.

Теорема 1.3. (Люмера-Філіпса, [89, с. 81]). *Щільно визначений лінійний оператор A є інфінітезимальним генератором стискаючої C_0 -напівгрупи тоді і тільки тоді, коли A є m -дисипативним.*

Асимптотична стійкість. Як зазначалося вище, в багатьох прикладних задачах функцію Ляпунова можна обрати у вигляді повної енер-

гії системи. Тоді перевірка умов стійкості зводиться до перевірки знаків від'ємності похідної функції Ляпунова за часом, обчисленої в силу системи. Ця властивість безпосередньо пов'язана з дисипативністю оператора системи. Для дослідження асимптотичної стійкості використовується підхід, вперше представлений у статті [132] і пізніше розвинений для абстрактних (у тому числі нескінченновимірних) систем у [62].

Означення 1.18. Нехай X_1 — замкнена підмножина X , і нехай $T(t)$ — неперервна напівгрупа операторів в X_1 (при цьому $T(t) : X_1 \rightarrow X_1$ для кожного $t \geq 0$). Траєкторією (точніше, додатною напівтраєкторією, або додатною орбітою), яка починається в $\xi_0 \in X_1$, називатимемо $\gamma(\xi_0) = \bigcup_{t \geq 0} \{T(t) \xi_0\}$. Множину $\omega(\xi_0) = \left\{ y \in X_1 \mid y = \lim_{n \rightarrow \infty} T(t_n) \xi_0 \text{ при деякій послідовності } t_n \rightarrow \infty \right\}$ називатимемо ω -граничною множиною для ξ_0 .

Для того, щоб ω -гранична множина була непорожньою, достатньо [171], щоб множина $\gamma(\xi_0)$ була передкомпактною. Позначимо \mathcal{E} максимальну інваріантну (відносно напівгрупи $T(t)$) підмножину множини $Z = \left\{ \xi \mid \xi \in X_1, \dot{V}(\xi) = 0 \right\}$. Під інваріантністю \mathcal{E} відносно напівгрупи $T(t)$ мається на увазі властивість $T(t) \mathcal{E} \subset \mathcal{E}$ для всіх $t \geq 0$. Іншими словами, \mathcal{E} — об'єднання всіх цілих напівтраєкторій системи (1.5), які містяться повністю у множині Z .

Теорема 1.4. (Принцип інваріантності ЛаСалля, [77, Теорема 3.64]).
Нехай V — неперервна функція Ляпунова для неперервної стискаючої напівгрупи $T(t)$ на замкненій підмножині X_1 дійсного банахового простору X та нехай \mathcal{E} — максимальна інваріантна підмножина множини $Z = \left\{ \xi \mid \xi \in X_1, \dot{V}(\xi) = 0 \right\}$. Якщо $\xi_0 \in X_1$ та траєкторія $\gamma(\xi_0)$ є передкомпактною, то $\lim_{t \rightarrow \infty} d(T(t) \xi_0, \mathcal{E}) = 0$.⁴

⁴ $d(y, \Omega) = \inf_{w \in \Omega} \|y - w\|$ — відстань від $y \in X$ до $\Omega \subset X$.

Як бачимо, гранична поведінка траєкторій системи (1.6) пов'язана з властивостями лінійного диференціального оператора A . Для доведення асимптотичної стійкості у нескінченновимірному випадку разом з умовою ЛаСалля на інваріантну підмножину Z необхідно перевіряти також властивість передкомпактності траєкторій. Для цього можна послуговуватись результатом [19] К. Дафермоса та М. Слемрода, згідно якого *достатньою умовою передкомпактності множини траєкторій динамічної системи є компактність відповідної резольвенти диференціального оператора*. Таким чином [19, 104, 105], оператори з компактною резольвентою породжують крайові задачі, чиї траєкторії утворюють передкомпактну множину у гільбертовому просторі.

Перевірка компактності резольвенти часто виявляється дуже складною задачею з технічної точки зору. Альтернативний підхід до асимптотичної стабілізації розподілених систем за рахунок скінченновимірних нелінійних збурень на кінцях, представлений у [92], застосовано в [64] до гібридної системи, яка складається з балки Ейлера–Бернуллі та приєднаних пружин з масами. Властивості асимптотичної стійкості керованої балки Ейлера–Бернуллі, з'єднаної з нелінійною системою пружин і демпферів, розглянуто при слабких припущеннях на приєднані маси.

Ряд робіт [116]–[119] і монографію [121] О. Л. Зуєва присвячено задачам стабілізації за частиною змінних (часткової стабілізації) для лінійних та нелінійних нескінченновимірних систем з пружними елементами. Результати про асимптотичну стійкість базуються на прийомах побудови функції Ляпунова, породженої енергією, та принципі інваріантності ЛаСалля. Проблеми керованості та оптимального керування лінійних систем досліджувалися з загальних позицій в роботах [11, 17, 26, 68]. У статті [80] умови експоненціальної стійкості динамічної системи наведено в термінах монотонності і позитивності систем диференціальних рівнянь. У роботі [81] досліджуються умови робастної стабілізації і стабілізації зі зворотним зв'язком

за виходом для деяких класів лінійних та афінних керованих систем.

Задача спостереження. Динамічна система вважається спостережуваною, якщо для кожного припустимого керування і кожної можливої еволюції вектора стану поточний стан можна оцінити, використовуючи лише інформацію виходу (фізично це, як правило, відповідає інформації, отриманій від датчиків чи сенсорів). Іншими словами, можна визначити поведінку всієї системи за її виходами, якщо функція керування є відомою. Концепцію спостережуваності представив у 1960 році Рудольф Е. Калман [39] через задачу відновлення невимірюваних змінних стану з вимірюваних за мінімально можливий проміжок часу. Він також довів ранговий критерій керованості і спостережуваності [40]. Однак для динамічних систем із розподіленими параметрами критерій Калмана не застосовний, оскільки передбачає обчислення рангу матриці, яка пов'язана з операторами у нескінченновимірному просторі. Це дало поштовх розробці потужних операторних методів для реалізації нескінченновимірних модифікацій класичних методів [22, 23, 38, 50, 51]. У 1964 році Девід Луенбергер запропонував підхід до побудови спостерігача — динамічної системи, яка формується наявними виходами та входами оригінальної системи і призначена для оцінки стану на основі вимірювань виходів [73]—[75].

Класичний метод оцінки вектора стану, запропонований Д. Луенбергером, отримав широке поширення для різних класів систем керування, включаючи системи з розподіленими параметрами [7, 52, 57, 58, 78, 79, 115], а також системи з запізненням [2, 111, 113]. Варто відзначити результати, які мають безпосереднє практичне застосування. Наприклад, у роботі [72] розроблено схему керування зі зворотним зв'язком на основі спостерігача збурень для гнучкого космічного апарата, що піддається зовнішнім впливам та обмеженням на величину вхідного сигналу та швидкість. У статті [88] запропоновано нелінійний спостерігач зниженого порядку для гнуч-

кої системи багатьох тіл з використанням методів редукції моделі. Нелінійне керування на основі спостерігача представлено в [79] для гнучкої структури, що обертається, змодельованої у вигляді балки Тимошенка. В цій роботі доведено експоненціальну збіжність схеми оцінювання та асимптотичну стійкість замкненої системи. Авторами праці [21] побудовано оцінку стану для руху поворотної гнучкої конструкції з жорстким тілом. В [90] спостерігач Луенбергера використано для оцінювання внутрішнього стану лінійної системи типу “чорний ящик” і запропоновано оптимальне керування зі зворотним зв’язком. Стійкість при параметризації спостерігача Луенбергера доведено на основі теорії стійкості Ляпунова. У всіх цих роботах результати підтверджено експериментально. У статті [32] розглядаються системи, які описуються білінійними диференціальними рівняннями з частинними похідними і досліджуються умови наближеної спостережуваності у термінах рядів Вольтерри. В оглядовій роботі [95] представлено напрацювання в галузі теорії керованості та спостережуваності нескінченновимірних систем у гільбертових просторах. У статті [70] запропоновано керування на основі спостерігача для нескінченновимірної моделі балки Ейлера–Бернуллі. На основі принципу інваріантності доведено асимптотичну стійкість замкненої системи. Варто також відмітити ряд результатів для класу систем, чий оператори приводяться до гамільтонової чи діагональної форми [36, 37, 96].

Метод Гальоркіна. Для задач, які носять прикладний характер, інтерес представляють методи наближеного розв’язання. Одним із таких методів є метод Гальоркіна, представлений у [134]. Метод полягає у підборі системи базисних функцій і представленні наближеного розв’язку крайової задачі у вигляді розкладу за базисними функціями. Далі обчислюється похибка і рівняння на невідомі коефіцієнти розкладу отримується з умови ортогональності похибки базисним функціям. Отримане рівняння

на коефіцієнти по суті являє собою проєкцію задачі на деякий скінченновимірний лінійний многовид, який утворено у вигляді лінійної оболонки базисних функцій. Тому подібні методи також називають проєкційними. Опис і приклади застосування методу Гальоркіна до задач математичної фізики можна знайти у [30, 161, 162]. Роботи [124]—[126], а також [121, Додаток А] присвячено задачам стабілізації та спостереження для наближень за Гальоркіним складних механічних систем, зокрема, поворотної пожежної драбини, змодельованої у вигляді серії з'єднаних пружних балок Ейлера–Бернуллі або балки Тимошенка з навантаженням.

На завершення цього розділу наведемо додатково декілька робіт з теорії керування [10, 27, 63, 66, 106, 107, 109, 110], в яких можна знайти детальний опис вищезгаданих концепцій.

РОЗДІЛ 2

СТАБІЛІЗАЦІЯ КОЛИВАНЬ ПРУЖНОЇ БАЛКИ З ПРИЄДНАНОЮ МАСОЮ

Досліджується математична модель пружної балки довжини ℓ , яку закріплено у вертикальній площині за допомогою шарнірів з обох кінців. Вважатимемо, що вісь x спрямовано вертикально вниз вздовж центральної лінії балки в недеформованому стані, початок координат збігається з верхнім кінцем балки, координата $x = \ell$ відповідає нижньому кінцю балки. Вздовж балки приєднано k п'єзоелектричних актуаторів, на кожен з яких подається струм для реалізації моментів сил керування. Будемо вважати, що дію актуатора з індексом j можна описати згинальним моментом M_j , $j = \overline{1, k}$. В точці $\ell_0 \in (0; \ell)$ до балки приєднано електромагнітний механізм (шейкер), який реалізує силу керування F_0 . Якір електромагніту має масу m і рухається у пружній підвісці, яку будемо моделювати пружиною з коефіцієнтом жорсткості κ . Всі актуатори відокремлені від кінцевих точок балки та від електромагніту, так звані структурні функції $\psi_j(x)$, $x \in (0, \ell)$ описують розташування актуаторів і задовольняють умову $\text{supp } \psi_j \cap \{0, \ell_0, \ell\} = \emptyset$, $j = \overline{1, k}$. Нехай функція $w(x, t)$ описує поперечне переміщення центральної лінії балки в момент часу $t \in [0, \tau]$, $\tau > 0$; літерою ρ будемо позначати густину (масу балки на одиницю об'єму), E — модуль Юнга (коефіцієнт пружності), I — момент інерції поперечного перетину балки. Розглядається балка з однорідного матеріалу з незмінною площею поперечного перетину, тому вважатимемо $\rho > 0$, $E > 0$ та $I > 0$ сталими параметрами для всіх $x \in [0, \ell]$. На рис. 2.1 схематично зображено основні елементи описаної мехатронної системи. У статті [24] подано детальну технічну схему представленої моделі.

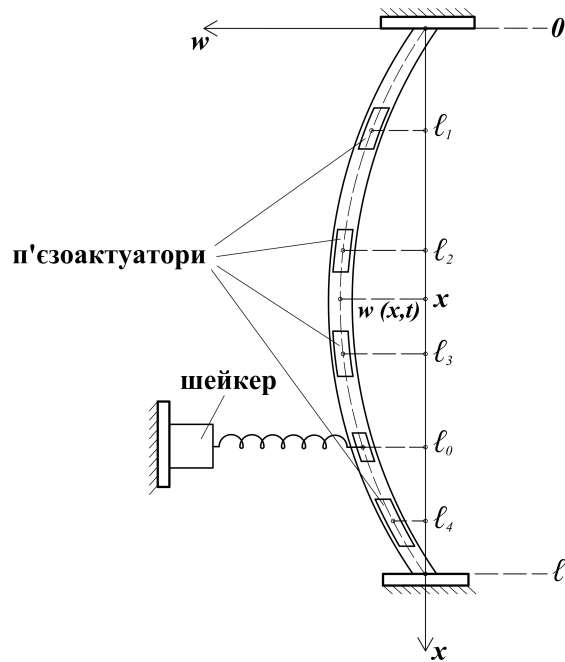


Рис. 2.1: Схематичне зображення мехатронної системи

2.1. Модель коливань пружної балки з твердим тілом

Задля виведення рівнянь руху системи скористаємося принципом Гамільтона–Остроградського, застосування якого для систем з розподіленими параметрами викладено в роботах [133, 157, 163].

Точкою $\dot{w}(x, t)$ будемо позначати диференціювання функції $w(x, t)$ за часом t , штрихом $w'(x, t)$ — диференціювання за просторовою змінною x , для позначення похідної порядку $n \in \mathbb{N}$ використовуватимемо також верхній індекс у дужках, а саме $w^{(n)}(x, t) = \frac{d^n w}{dx^n}$; позначення $C^2(\Omega)$ будемо використовувати для класу неперервних в області $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ функцій, чиї похідні до другого порядку включно є неперервними функціями в Ω .

Нехай функція $w(x, t)$ задає рух розглянутої механічної системи на відріжку часу $[0, \tau]$ та нехай $w(x, t) \in C^2([0, \ell] \times [0, \tau])$, $\tau > 0$. Запишемо кінетичну енергію системи: $2K = \int_0^\ell \rho(\dot{w}(x, t))^2 dx + m(\dot{w}(\ell_0, t))^2$, і потенціальну енергію: $2U = \int_0^\ell EI(w''(x, t))^2 dx + \kappa(w^2(\ell_0, t))$. Оскільки балку закріплено шарнірами на кінцях, геометричні крайові умови мають вигляд

$w(0, t) = w(\ell, t) = 0$. Згідно з принципом Гамільтона–Остроградського з урахуванням роботи зовнішніх сил на можливих переміщеннях, рівність

$$\delta \int_0^\tau (K - U) dt + \int_0^\tau \left(F_0 \delta w(\ell_0, t) + \sum_{j=1}^k M_j \int_0^\ell \psi_j(x) \delta w''(x, t) dx \right) dt = 0 \quad (2.1)$$

виконано для довільної функції $\delta w(x, t)$ класу $C^2([0, \ell] \times [0, \tau])$, яка задовольняє крайові умови $\delta w \Big|_{t=0} = \delta w \Big|_{t=\tau} = \delta w \Big|_{x=0} = \delta w \Big|_{x=\ell} = 0$. Інтегрування (2.1) частинами за змінною t призводить до співвідношення

$$\int_0^\tau \left\{ \int_0^\ell \left[\rho \ddot{w} \delta w + \left(EI w'' - \sum_{j=1}^k M_j \psi_j \right) \delta w'' \right] dx + (m \ddot{w} + \kappa w - F_0) \delta w \Big|_{x=\ell_0} \right\} dt = 0. \quad (2.2)$$

Застосовуючи до (2.2) основну лему варіаційного числення, в силу довільності пробної функції δw , маємо варіаційну форму рівнянь руху:

$$\int_0^\ell \left\{ \rho \ddot{w} + \left(EI w'' - \sum_{j=1}^k M_j \psi_j \right) w'' \right\} dx + (m \ddot{w} + \kappa w - F_0) \delta w \Big|_{x=\ell_0} = 0. \quad (2.3)$$

Інтегрування рівності (2.3) частинами за змінною x призводить до рівняння

$$\int_0^\ell \left\{ \rho \ddot{w} - \sum_{j=1}^k M_j \psi_j'' \right\} \delta w dx + \int_{(0, \ell) \setminus \{\ell_0\}} EI w^{(4)} \delta w dx - EI \left(w''' \delta w \Big|_{x=\ell_0-0} - w''' \delta w \Big|_{x=\ell_0+0} \right) + (m \ddot{w} + \kappa w - F_0) \delta w \Big|_{x=\ell_0} = 0$$

і крайових умов $w''(0) = w''(\ell) = 0$. Таким чином, отримано наступну крайову задачу, яка описує рух розглянутої механічної системи:

$$\rho \ddot{w}(x, t) + EI w^{(4)}(x, t) = \sum_{j=1}^k \psi_j''(x) M_j, \quad x \in [0, \ell] \setminus \{\ell_0\}, \quad (2.4)$$

$$w \Big|_{x=0} = w \Big|_{x=\ell} = 0, \quad w'' \Big|_{x=0} = w'' \Big|_{x=\ell} = 0, \quad (2.5)$$

$$(m \ddot{w} + \kappa w) \Big|_{x=\ell_0} = EI \left(w''' \Big|_{x=\ell_0-0} - w''' \Big|_{x=\ell_0+0} \right) + F_0. \quad (2.6)$$

Розглядається функція $w(\cdot, t) \in C^2[0, \ell]$, тому умову інтерфейсу (2.6), яка

описує рух точки з координатою ℓ_0 , де прикладено зосереджену силу F_0 , можна доповнити умовами неперервності похідних за змінною x функції $w(x, t)$ до другого порядку включно: $w^{(i)}(\ell_0 - 0, t) = w^{(i)}(\ell_0 + 0, t)$, $i = \overline{0, 2}$.

2.1.1. Фазовий простір. Позначення $L^p(0, \ell)$ будемо використовувати (див., напр., [150, 151]) для простору дійсних вимірних на відрізьку $[0, \ell]$ функцій, які при піднесенні до степеня $p \in \mathbb{N}$ інтегрованими за Лебегом ($1 \leq p < \infty$), тобто сукупність усіх вимірних функцій $f(x) : [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}$, для яких $\int_0^\ell |f(x)|^p dx < \infty$; позначення $H^k(0, \ell)$ — для простору функцій з $L^p(0, \ell)$, які мають узагальнені похідні до порядку k включно з простору $L^p(0, \ell)$ ($1 \leq k < \infty$); $\mathring{H}^k(0, \ell)$ — для підпростору $H^k(0, \ell)$ функцій f , для яких $f(0) = f(\ell) = 0$.

Введемо дійсний лінійний простір $X = \mathring{H}^2(0, \ell) \times L^2(0, \ell) \times \mathbb{R}^2$ і задамо скалярний добуток його елементів $\xi_1 = (u_1, v_1, p_1, q_1)^T \in X$ та $\xi_2 = (u_2, v_2, p_2, q_2)^T \in X$ наступною формулою:

$$\langle \xi_1, \xi_2 \rangle_X = \int_0^\ell (EI u_1''(x) u_2''(x) + \rho v_1(x) v_2(x)) dx + \kappa p_1 p_2 + m q_1 q_2. \quad (2.7)$$

Твердження 2.1. *Простір X зі скалярним добутком (2.7) є гільбертовим.*

Доведення. Запишемо нерівність Стеклова (див. [161, с. 150]) для функції $u \in \mathring{H}^2(0, \ell)$:

$$\|u\|_{L^2(0, \ell)}^2 = \int_0^\ell (u(x))^2 dx \leq \frac{\ell^2}{2} \int_0^\ell (u'(s))^2 ds = \frac{\ell^2}{2} \|u'\|_{L^2(0, \ell)}^2.$$

В області $\Omega = (-\varepsilon, \ell + \varepsilon)$, де ε — довільна додатна стала, задамо допоміжну функцію $\hat{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ таким чином: $\hat{u}(x) = \begin{cases} u(x), & x \in [0, \ell], \\ 0, & x \in \Omega \setminus [0, \ell]. \end{cases}$ Очевидно,

$\hat{u}'(x) = \begin{cases} u'(x), & x \in [0, \ell], \\ 0, & x \in \Omega \setminus [0, \ell]. \end{cases}$ В силу нерівності Стеклова, для функції

$\hat{u}'(x) \in \mathring{H}^1(0, \ell)$ виконано наступну оцінку:

$$\begin{aligned} \|u'\|_{L^2(0, \ell)}^2 &= \int_0^\ell (u'(x))^2 dx = \int_\Omega (\hat{u}'(x))^2 dx \leq \frac{(\ell + 2\varepsilon)^2}{2} \int_{-\varepsilon}^{\ell+\varepsilon} (\hat{u}''(x))^2 dx = \\ &= \frac{(\ell + 2\varepsilon)^2}{2} \left(\int_{-\varepsilon}^0 (\hat{u}''(x))^2 dx + \int_0^\ell (\hat{u}''(x))^2 dx + \int_\ell^{\ell+\varepsilon} (\hat{u}''(x))^2 dx \right) = \\ &= \frac{(\ell + 2\varepsilon)^2}{2} \int_0^\ell (u''(x))^2 dx = \frac{(\ell + 2\varepsilon)^2}{2} \|u''\|_{L^2(0, \ell)}^2. \end{aligned}$$

Звідси $\|u\|_{\mathring{H}^2(0, \ell)}^2 \leq C \|u''\|_{L^2(0, \ell)}^2$, де $C = \frac{\ell^2(\ell+2\varepsilon)^2}{4} + \frac{(\ell+2\varepsilon)^2}{2} + 1$. Таким чином, виконано наступні нерівності:

$$\|\xi\|_{X,s} \leq C_1 \|\xi\|_X, \quad \text{де } C_1^2 = \max \left\{ \frac{C}{EI}, \frac{1}{\rho}, \frac{1}{\kappa}, \frac{1}{m} \right\}, \quad (2.8)$$

$$\|\xi\|_X \leq C_2 \|\xi\|_{X,s}, \quad \text{де } C_2^2 = \max \{EI, \rho, \kappa, m\}. \quad (2.9)$$

Тут символ $\|\cdot\|_{X,s}$ використовується для позначення стандартної норми

$$\|(u, v, p, q)^T\|_{X,s} = \left(\|u\|_{L^2}^2 + \|u'\|_{L^2}^2 + \|u''\|_{L^2}^2 + \|v\|_{L^2}^2 + |p|^2 + |q|^2 \right)^{1/2}$$

простору $\mathring{H}^2(0, \ell) \times L^2(0, \ell) \times \mathbb{R}^2$. Нерівності (2.8) та (2.9) доводять еквівалентність норми, яку породжено скалярним добутком (2.7), стандартній нормі простору X . Цей факт підтверджує, що простір X зі скалярним добутком (2.7) є гільбертовим. \square

Надалі розглядатимемо фазовий вектор ξ , що складається з таких елементів: $u(\cdot) = w(\cdot, t)$, $v(\cdot) = \dot{w}(\cdot, t)$, $p = w(\ell_0, t)$, $q = \dot{w}(\ell_0, t)$. Запишемо рівняння руху (2.4)–(2.6) мехатронної системи у вигляді абстрактного диференціального рівняння у просторі X .

2.1.2. Рівняння руху в операторній формі. Задачу (2.4)–(2.6)

можна записати в операторній формі:

$$\frac{d}{dt} \xi(t) = A\xi(t) + By(t), \quad (2.10)$$

де $A : D(A) \rightarrow X$ — лінійний диференціальний оператор з областю визначення

$$D(A) = \left\{ \xi = \begin{pmatrix} u \\ v \\ p \\ q \end{pmatrix} \in X : \begin{array}{l} u|_{x \in [0, \ell_0]} \in H^4(0, \ell_0), \\ u|_{x \in (\ell_0, \ell]} \in H^4(\ell_0, \ell), \\ u''(0) = u''(\ell) = 0, \\ u''(\ell_0 - 0) = u''(\ell_0 + 0), \\ v \in \overset{\circ}{H}^2(0, \ell), \\ p = u(\ell_0), \quad q = v(\ell_0) \end{array} \right\} \subset X, \quad (2.11)$$

який діє за правилом

$$A : \xi = \begin{pmatrix} u \\ v \\ p \\ q \end{pmatrix} \in D(A) \mapsto A\xi = \begin{pmatrix} v \\ -\frac{EI}{\rho} u^{(4)} \\ q \\ \frac{EI}{m} (u'''(\ell_0 - 0) - u'''(\ell_0 + 0)) - \frac{z}{m} p \end{pmatrix} \in X; \quad (2.12)$$

$y = (F_0, M_1, \dots, M_k)^T$ — вектор керування, $B : \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow X$ — відображення,

задане матрицею $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho} \psi_1'' & \dots & \frac{1}{\rho} \psi_k'' \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$. У подальшому неодноразово

знадобиться звертатись до крайових умов для $\xi \in D(A)$, тому запишемо їх у явному вигляді:

$$\begin{aligned} u(0) = u(\ell) = 0, \quad u''(0) = u''(\ell) = 0, \quad v(0) = v(\ell) = 0, \\ p = u(\ell_0), \quad q = v(\ell_0). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Також випишемо для $\xi \in D(A)$ умови інтерфейсу в точці ℓ_0 :

$$u^{(i)}(\ell_0 - 0) - u^{(i)}(\ell_0 + 0) = 0, \quad i = \overline{0, 2}. \quad (2.14)$$

2.2. Керування зі зворотним зв'язком

Запишемо повну енергію механічної системи:

$$\mathcal{E} = K + U = \frac{1}{2} \int_0^\ell (\rho v^2 + EI(u'')^2) dx + \frac{m q^2}{2} + \frac{\varkappa p^2}{2} = \frac{1}{2} \|\xi\|_X^2. \quad (2.15)$$

Керування y у вигляді зворотного зв'язку оберемо таким чином, щоб виконувалася умова незростання повної енергії на траєкторіях, тобто умова $\dot{\mathcal{E}}(\xi(t)) \leq 0$. Для цього обчислимо похідну $\dot{\mathcal{E}}(\xi(t))$ в силу системи (2.10).

Продиференціюємо (2.15):

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}}{dt} &= \int_0^\ell (\rho v \dot{v} + EI u'' \dot{u}'') dx + m q \dot{q} + \varkappa p \dot{p} = \\ &= \int_0^\ell (\rho v \dot{v} + EI u^{(4)} v) dx - EI (u'''(\ell_0 - 0) - u'''(\ell_0 + 0)) q + m q \dot{q} + \varkappa p \dot{p}. \end{aligned}$$

На векторах, які задовольняють (2.10) з урахуванням (2.11), (2.12), цей вираз набуває вигляду $\dot{\mathcal{E}} = \sum_{j=1}^k M_j \int_0^\ell \psi_j''(x) v(x) dx + F_0 q$. Умову $\dot{\mathcal{E}} \leq 0$ виконано, зокрема, при наступному виборі законів керування:

$$F_0 = -\alpha_0 q, \quad \alpha_0 > 0, \quad (2.16)$$

$$M_j = -\alpha_j \int_0^\ell \psi_j''(x) v(x) dx, \quad \alpha_j > 0, \quad j = \overline{1, k}. \quad (2.17)$$

Таким чином задано керування зі зворотним зв'язком

$$y = K\xi, \quad (2.18)$$

де лінійний оператор $K : X \rightarrow \mathbb{R}^{k+1}$ дається формулою:

$$K : \xi = \begin{pmatrix} u \\ v \\ p \\ q \end{pmatrix} \mapsto K\xi = - \begin{pmatrix} \alpha_0 q \\ \alpha_1 \int_0^\ell \psi_1''(x) v(x) dx \\ \vdots \\ \alpha_k \int_0^\ell \psi_k''(x) v(x) dx \end{pmatrix}$$

з довільними додатними параметрами регулювання $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k$. Підставляючи керування y , задане в (2.18), у рівняння (2.10), отримуємо замкнену систему, яку можна записати в операторному вигляді наступним чином:

$$\frac{d}{dt} \xi(t) = \tilde{A}\xi(t), \quad (2.19)$$

де оператор $\tilde{A} : \xi \mapsto \tilde{A}\xi$ має область визначення $D(\tilde{A}) = D(A)$ і діє за таким законом: $\tilde{A}\xi = A\xi + \tilde{B}\xi$, де

$$\tilde{B}\xi = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\rho} \sum_{j=1}^k \alpha_j \psi_j''(x) \int_0^\ell \psi_j''(s) v(s) ds \\ 0 \\ -\frac{\alpha_0}{m} q \end{pmatrix}. \quad (2.20)$$

Тут $A\xi$ визначено формулою (2.12), тому оператор з керуванням задається у формі

$$\tilde{A}\xi = \begin{pmatrix} v \\ -\frac{EI}{\rho} u^{(4)} - \frac{1}{\rho} \sum_{j=1}^k \alpha_j \psi_j''(x) \int_0^\ell \psi_j''(s) v(s) ds \\ q \\ \frac{EI}{m} (u'''(\ell_0 - 0) - u'''(\ell_0 + 0)) - \frac{1}{m} (\kappa p + \alpha_0 q) \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

Статтю [1] присвячено побудові алгоритму визначення оптимального розташування п'єзокерамічних актуаторів для керування формою прогину балочних систем.

Лема 2.1. *Лінійне відображення $\tilde{B}\xi : X \rightarrow X$, визначене матрицею (2.20), є обмеженням.*

Доведення. Розглянемо вираз

$$\|By\|_X^2 = \frac{1}{\rho} \int_0^\ell \left(\sum_{j=1}^k \psi_j''(x) M_j(\xi) \right)^2 dx + \frac{1}{m} (F_0(\xi))^2,$$

в якому параметри керування F_0 та M_j задані формулами (2.16), (2.17).

Нескладно переконатись, що для довільних $a_j \in \mathbb{R}$ виконано нерівність

$$\left(\sum_{j=1}^k a_j \right)^2 \leq k^* \sum_{j=1}^k a_j^2, \quad (2.22)$$

де $k^* = 2^{\lceil \frac{k+1}{2} \rceil}$; тут квадратними дужками у показнику степеня позначено цілу частину частки. Зауважимо, що

$$\|By\|_X^2 \leq \frac{k^*}{\rho} \sum_{j=1}^k \int_0^\ell (\psi_j''(x) M_j(\xi))^2 dx + \frac{1}{m} (F_0(\xi))^2,$$

тому, в силу (2.22) та нерівності Коші–Буняковського–Шварца, виконано нерівність

$$\begin{aligned} \|\tilde{B}\xi\|_X^2 &\leq \frac{k^*}{\rho} \sum_{j=1}^k \alpha_j^2 \int_0^\ell \left(\psi_j''(x) \int_0^\ell \psi_j''(s) v(s) ds \right)^2 dx + \frac{\alpha_0^2}{m} q^2 = \\ &= \frac{k^*}{\rho} \sum_{j=1}^k \alpha_j^2 \int_0^\ell \psi_j''(x) dx \cdot \left(\int_0^\ell \psi_j''(s) v(s) ds \right)^2 + \frac{\alpha_0^2}{m} q^2 \leq \\ &\leq \frac{k^*}{\rho} \sum_{j=1}^k \alpha_j^2 \int_0^\ell (\psi_j''(x))^2 dx \cdot \int_0^\ell (\psi_j''(s))^2 ds \cdot \int_0^\ell v^2(s) ds + \frac{\alpha_0^2}{m} q^2 = \\ &= \frac{k^*}{\rho} \sum_{j=1}^k \alpha_j^2 \left(\int_0^\ell (\psi_j''(x))^2 dx \right)^2 \cdot \int_0^\ell v^2(x) dx + \frac{\alpha_0^2}{m} q^2 \leq \\ &\leq \frac{k^* \ell}{\rho} \sum_{j=1}^k \alpha_j^2 \int_0^\ell (\psi_j''(x))^4 dx \cdot \int_0^\ell v^2(x) dx + \frac{\alpha_0^2}{m} q^2, \end{aligned}$$

отже, $\|\tilde{B}\xi\|_X^2 \leq \Lambda \|\xi\|_X^2$, де $\Lambda = \max \left\{ EI, \kappa, \frac{\alpha_0^2}{m^2}, \frac{k^* \ell}{\rho^2} \sum_{j=1}^k \alpha_j^2 \int_0^\ell (\psi_j''(x))^4 dx \right\}$.

Остання нерівність з додатною константою Λ доводить обмеженість оператора керування. \square

Перш ніж перейти до дослідження стійкості стану рівноваги замкненої системи, переконаємося, що для (2.19) і довільної початкової функції $\xi_0 \in D(\tilde{A})$ задача Коші є коректно поставленою на проміжку $t \in [0, \infty)$.

Для цього необхідно і достатньо [18, 77, 154] довести, що оператор \tilde{A} є інфінітезимальним генератором C_0 -напівгрупи у просторі X . Згідно з [18, Теорема 3.2.1], якщо деякий оператор є інфінітезимальним генератором C_0 -напівгрупи у гільбертовому просторі, то додавання до нього обмеженого лінійного оператора зберігає цю властивість. Оскільки оператор \tilde{A} з керуванням є обмеженим збуренням диференціального оператора A , то достатньо довести, що A є інфінітезимальним генератором. Згідно з теоремою Люмера–Філліпса, лінійний оператор A є інфінітезимальним генератором C_0 -напівгрупи операторів у просторі X , якщо він є щільно визначеним та m -дисипативним. Дослідженню властивостей оператора, заданого в (2.12), присвячено наступний підрозділ.

2.3. Інфінітезимальний генератор C_0 -напівгрупи

Згідно з теоремами Соболева маємо щільні вкладення просторів: $H^4(0, \ell) \stackrel{ds}{\subset} H^2(0, \ell)$ та $H^2(0, \ell) \stackrel{ds}{\subset} L^2(0, \ell)$ ¹, звідси $D(A) \stackrel{ds}{\subset} X$, тому маємо

Твердження 2.2. *Оператор $A : D(A) \rightarrow X$ є щільно визначеним.*

Лема 2.2. *Оператор $A : D(A) \rightarrow X$, заданий формулами (2.11), (2.12), є дисипативним.*

Доведення. В силу симетричності скалярного добутку (2.7),

$$\begin{aligned} \langle A\xi, \xi \rangle_X + \langle \xi, A\xi \rangle_X &= 2 \langle A\xi, \xi \rangle_X = \\ &= 2 \left(\int_0^\ell EI u''(x) v''(x) dx - \int_0^\ell EI u^{(4)}(x) v(x) dx + \kappa p q + \right. \\ &\quad \left. + EI \left(u'''(\ell_0 - 0) - u'''(\ell_0 + 0) \right) q - \kappa p q \right). \end{aligned}$$

¹Символ “ ds ” використовується для позначення щільного вкладення просторів.

Зауважимо, що інтегрування частинами дає

$$\int_0^{\ell} EI u''(x) v''(x) dx = -EI \left(u'''(\ell_0 - 0) - u'''(\ell_0 + 0) \right) v(\ell_0) + \int_0^{\ell} EI u^{(4)}(x) v(x) dx,$$

при чому $v(\ell_0) = q$, тому $\langle A\xi, \xi \rangle_X + \langle \xi, A\xi \rangle_X \equiv 0$. Згідно з означенням 1.16, доведено дисипативність оператора A . \square

Побудуємо обернений до A оператор $A^{-1} : X \rightarrow X$ і покажемо, що він є коректно визначеним у всьому просторі X .

Лема 2.3. *Нехай оператор A задано формулами (2.11), (2.12). Тоді оператор A^{-1} коректно визначено на множині $D(A^{-1}) = X$.*

Доведення. Розв'яжемо рівняння

$$A\xi = \hat{\xi} \quad (2.23)$$

відносно вектора $\xi \in D(A)$ для довільного $\hat{\xi} = (\hat{u}, \hat{v}, \hat{p}, \hat{q})^T \in X$. За компонентами векторів ξ та $\hat{\xi}$ це рівняння можна записати у вигляді наступної системи:

$$v = \hat{u}, \quad (2.24)$$

$$-\frac{EI}{\rho} u^{(4)} = \hat{v}, \quad (2.25)$$

$$q = \hat{p}, \quad (2.26)$$

$$\frac{EI}{m} \left(u'''(\ell_0 - 0) - u'''(\ell_0 + 0) \right) - \frac{\varkappa}{m} p = \hat{q}. \quad (2.27)$$

Оскільки $\xi \in D(A)$, маємо крайові умови (2.13) та умови інтерфейсу (2.14). Загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння (2.25) знайдемо методом варіації:

$$u(x) = \begin{cases} \tilde{C}_1 + x\tilde{B}_1 + x^2\tilde{C}_2 + x^3\tilde{B}_2 + \frac{\rho}{6EI} \int_0^x (s-x)^3 \hat{v}(s) ds, & 0 \leq x \leq \ell_0, \\ \tilde{C}_3 + x\tilde{B}_3 + x^2\tilde{C}_4 + x^3\tilde{B}_4 - \frac{\rho}{6EI} \int_x^{\ell} (s-x)^3 \hat{v}(s) ds, & \ell_0 < x \leq \ell \end{cases} \quad (2.28)$$

з довільними сталими $\tilde{C}_1, \dots, \tilde{C}_4, \tilde{B}_1, \dots, \tilde{B}_4$. Диференціюючи (2.28) та враховуючи крайові умови (2.13), можемо виключити деякі константи інтегру-

вання: $\tilde{C}_1 = 0$, $\tilde{C}_2 = 0$, $\tilde{C}_3 = 2\ell^3 \tilde{B}_4 - \ell \tilde{B}_3$, $\tilde{C}_4 = -3\ell \tilde{B}_4$. Задля спрощення подальших викладок введемо нові константи такою заміною: $C_1 = \tilde{C}_1$, $C_2 = 2\tilde{C}_2$, $C_3 = \tilde{C}_3 + \ell \tilde{B}_3 + \ell^2 \tilde{C}_4 + \ell^3 \tilde{B}_4$, $C_4 = \tilde{C}_4 + 3\ell \tilde{B}_4$, $B_1 = \tilde{B}_1$, $B_2 = \tilde{B}_2$, $B_3 = \tilde{B}_3 + 2\ell \tilde{C}_4 + 3\ell^2 \tilde{B}_4$, $B_4 = \tilde{B}_4$. Тоді розв'язок (2.28) запишеться у вигляді

$$\begin{aligned} u(x) \Big|_{x \leq \ell_0} &= C_1 + xB_1 + x^2C_2 + x^3B_2 + \frac{\rho}{6EI} \int_0^x (s-x)^3 \hat{v}(s) ds, \\ u(x) \Big|_{x > \ell_0} &= C_3 + (x-\ell)B_3 + (x-\ell)^2C_4 + (x-\ell)^3B_4 - \frac{\rho}{6EI} \int_x^\ell (s-x)^3 \hat{v}(s) ds, \end{aligned} \quad (2.29)$$

при цьому умови (2.13) виконано для $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, $C_3 = 0$, $C_4 = 0$.

Запишемо умови інтерфейсу (2.14) і рівняння (2.27), підставляючи в них (2.29) разом з відповідними похідними функції $u(x)$. Так для виключення решти констант інтегрування отримаємо систему алгебраїчних рівнянь

$$N(B_1, B_2, B_3, B_4)^T = (\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4)^T \quad (2.30)$$

із правими частинами $\Gamma_z = \Gamma_z(\hat{\xi})$, $z = \overline{1, 4}$, де

$$\begin{aligned} \Gamma_1(\xi) &= \frac{\rho}{6EI} \int_0^\ell (\ell_0 - s)^3 v(s) ds, & \Gamma_2(\xi) &= \frac{\rho}{2EI} \int_0^\ell (\ell_0 - s)^2 v(s) ds, \\ \Gamma_3(\xi) &= \frac{\rho}{6EI} \int_0^\ell (\ell_0 - s) v(s) ds, & & \\ \Gamma_4(\xi) &= \rho \int_0^\ell v(s) ds - \frac{\varkappa\rho}{2EI} \int_0^{\ell_0} (\ell_0 - s)^3 v(s) ds + mq, \end{aligned} \quad (2.31)$$

та матрицею

$$N = \begin{pmatrix} \ell_0 & \ell_0^3 & \ell - \ell_0 & (\ell - \ell_0)^3 \\ 1 & 3\ell_0^2 & -1 & -3(\ell - \ell_0)^2 \\ 0 & \ell_0 & 0 & \ell - \ell_0 \\ -\varkappa\ell_0 & 6EI - \varkappa\ell_0^3 & 0 & -6EI \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

Визначник $\det N = -6\ell^2 EI - 2\varkappa\ell_0^2 \ell (\ell - \ell_0)^2$ матриці N відмінний від

нуля для всіх допустимих наборів значень механічних параметрів, тому неоднорідна система (2.30) має єдиний розв'язок. При цьому компоненту p можна виразити з рівняння (2.27), або за означенням:

$$p = u(\ell_0) = \ell_0 B_1 + \ell_0^3 B_2 - \frac{\rho}{6EI} \int_0^{\ell_0} (\ell_0 - s)^3 \hat{v}(s) ds.$$

Таким чином, обернений до A оператор задається наступною формулою:

$$A^{-1} : \xi = \begin{pmatrix} u \\ v \\ p \\ q \end{pmatrix} \mapsto A^{-1}\xi = \begin{pmatrix} a(\xi) \\ u \\ \ell_0 B_1 + \ell_0^3 B_2 - \frac{\rho}{6EI} \int_0^{\ell_0} (\ell_0 - s)^3 v(s) ds \\ p \end{pmatrix}, \quad (2.33)$$

де

$$a(\xi) = \begin{cases} xB_1 + x^3 B_2 + \frac{\rho}{6EI} \int_0^x (s - x)^3 v(s) ds, & x \leq \ell_0, \\ (x - \ell)B_3 + (x - \ell)^3 B_4 - \frac{\rho}{6EI} \int_x^{\ell} (s - x)^3 v(s) ds, & x > \ell_0, \end{cases} \quad (2.34)$$

а B_1, \dots, B_4 є розв'язками системи рівнянь вигляду (2.30) з правими частинами $\Gamma_i(\xi)$, $i = \overline{1,4}$. Оскільки розв'язок рівняння (2.23) знайдено для довільної правої частини $\hat{\xi}$ з простору X , область визначення оператора A^{-1} співпадає з усім простором X . \square

Лема 2.4. *Оператор $A^{-1} : X \rightarrow X$, заданий формулою (2.33), є обмеженим.*

Доведення. Доведемо нерівність

$$\begin{aligned} \|A^{-1}\xi\|_X^2 &= EI \int_0^{\ell} (a''(\xi))^2 dx + \rho \int_0^{\ell} u^2(x) dx + \\ &+ \varkappa \left(\ell_0 B_1 + \ell_0^3 B_2 - \frac{\rho}{2EI} \int_0^{\ell_0} (\ell_0 - x)^3 v(x) dx \right)^2 + mp^2 \leq \Lambda \|\xi\|_X^2 \end{aligned}$$

для якого-небудь $\Lambda > 0$. Введемо позначення $\bar{\bar{N}}_{ij}$ для елементів матриці, оберненої до N , $i, j = \overline{1,4}$, при чому $\bar{\bar{N}}_{ij}$ залежать тільки від механічних параметрів балкової системи, тож є константами відносно елементів фа-

зового вектора. Тому вирази B_i є лінійними комбінаціями $\Gamma_i(\xi)$, $i = \overline{1,4}$:
 $B_i(\xi) = \sum_{j=1}^4 \bar{N}_{ij} \Gamma_j(\xi)$. Для них з нерівності Коші–Буняковського–Шварца випливають оцінки

$$B_i^2 \leq \check{N}_i \int_0^\ell v^2(x) dx + (2\rho m)^2 \bar{N}_{i4}^2 q^2 \quad (2.35)$$

з константами

$$\begin{aligned} \check{N}_i = \left(\frac{\rho}{EI}\right)^2 & \left[\frac{1}{63} (\ell_0^7 + (\ell - \ell_0)^7) \bar{N}_{i1}^2 + \frac{1}{5} (\ell_0^5 + (\ell - \ell_0)^5) \bar{N}_{i2}^2 + \right. \\ & \left. + \frac{1}{27} (\ell_0^3 + (\ell - \ell_0)^3) \bar{N}_{i3}^2 + 2 \left(8\ell(EI)^2 + \varkappa^2 \frac{\ell_0^7}{7} \right) \bar{N}_{i4}^2 \right]. \quad (2.36) \end{aligned}$$

Оскільки $\xi \in X$, виконано крайові умови $u(0) = u(\ell) = 0$. Згідно з нерівністю Пуанкаре, існує стала $\mathbf{c} > 0$, така, що

$$\int_0^\ell |u|^2 dx \leq \mathbf{c} \int_0^\ell |u'(x)|^2 dx. \quad (2.37)$$

Оскільки $u(x) \in \overset{\circ}{H}^2(0, \ell)$ та $H^2(0, \ell) \subset C^1[0, \ell]$, згідно з теоремою Лагранжа про середнє значення, існує внутрішня точка ζ інтервалу $(0, \ell)$, така, що $u'(\zeta) = \frac{u(\ell) - u(0)}{\ell} = 0$, отже $u'(x) = \int_\zeta^x u''(z) dz + u'(\zeta) = \int_\zeta^x u''(z) dz$. Застосовуючи нерівність Коші–Буняковського–Шварца, маємо

$$\begin{aligned} \int_0^\ell |u'(x)|^2 dx &= \int_0^\zeta |u'(x)|^2 dx + \int_\zeta^\ell |u'(x)|^2 dx = \\ &= \int_0^\zeta \left| \int_\zeta^x u''(z) dz \right|^2 dx + \int_\zeta^\ell \left| \int_\zeta^x u''(z) dz \right|^2 dx \leq \\ &\leq \int_0^\zeta \left((x - \zeta) \int_\zeta^x |u''(z)|^2 dz \right) dx + \int_\zeta^\ell \left((x - \zeta) \int_\zeta^x |u''(z)|^2 dz \right) dx \stackrel{[\zeta, x] \subseteq [0, \ell]}{\leq} \\ &\leq \frac{\ell^2}{2} \int_0^\ell |u''(x)|^2 dx. \quad (2.38) \end{aligned}$$

Зауважимо, що $\Gamma'_i(\xi) = 0$, $i = \overline{1, 4}$, звідки випливає $B'_i(\xi) = 0$ та

$$a''(\xi) = \begin{cases} 6xB_2 + \frac{\rho}{EI} \int_0^x (s-x)v(s) ds, & x \leq \ell_0, \\ 6(x-\ell)B_4 - \frac{\rho}{EI} \int_x^\ell (s-x)v(s) ds, & x > \ell_0. \end{cases}$$

За допомогою нерівності Коші–Буняковського–Шварца та (2.35) отримаємо наступні оцінки:

$$\begin{aligned} \int_0^\ell (a''(\xi))^2 dx &= \int_0^{\ell_0} \left(6xB_2 + \frac{\rho}{EI} \int_0^x (s-x)v(s) ds \right)^2 dx + \\ &+ \int_{\ell_0}^\ell \left(6(x-\ell)B_4 - \frac{\rho}{EI} \int_x^\ell (s-x)v(s) ds \right)^2 dx \leq C_1 \int_0^\ell v^2(x) dx + C_2 q^2 \end{aligned} \quad (2.39)$$

та

$$\varkappa \left(\ell_0 B_1 + \ell_0^3 B_2 - \frac{\rho}{2EI} \int_0^{\ell_0} (\ell_0 - x)^3 v(x) dx \right)^2 \leq C_3 \int_0^\ell v^2(x) dx + C_4 q^2, \quad (2.40)$$

де

$$\begin{aligned} C_1 &= 24 (\ell_0^3 \check{N}_2 + (\ell - \ell_0)^3 \check{N}_4) + \frac{\ell^4}{3} \left(\frac{\rho}{EI} \right)^2, \\ C_2 &= 6 (4\rho m)^2 \left(\ell_0^3 \bar{N}_{24}^2 + (\ell - \ell_0)^3 \bar{N}_{44}^2 \right), \\ C_3 &= \varkappa \ell_0^2 \left(4 (\check{N}_1 + \ell_0^4 \check{N}_2) + \frac{\ell_0^5}{14} \left(\frac{\rho}{EI} \right)^2 \right), \\ C_4 &= \varkappa (4\rho m \ell_0)^2 \left(\bar{N}_{14}^2 + \ell_0^4 \bar{N}_{24}^2 \right). \end{aligned}$$

Сумуючи оцінки (2.37)–(2.40), отримаємо нерівність

$$\|A^{-1}\xi\|_X^2 \leq \Lambda \left(\int_0^\ell (EI(u''(x))^2 + \rho v^2(x)) dx + \varkappa p^2 + mq^2 \right) = \Lambda \|\xi\|_X^2$$

з додатною константою $\Lambda = \max \left\{ \frac{\rho \ell^2}{2EI} \mathbf{c}, \frac{m}{\varkappa}, \frac{1}{\rho} (EI C_1 + C_3), \frac{1}{m} (EI C_2 + C_4) \right\}$.

Таким чином, оператор $A^{-1} : X \rightarrow X$ є обмеженим. \square

Наслідок 2.1. *Оператор $A : D(A) \rightarrow X$, заданий формулою (2.12), є замкненим.*

Доведення. Спираючись на теорему з [168, с. 162], можемо заключити наступне: якщо лінійний оператор, визначений в усьому гільбертовому

просторі, є обмеженим, то він є замкненим; якщо замкнений лінійний оператор в гільбертовому просторі має обернений, то обернений оператор також є замкненим. У лемах 2.3, 2.4 було доведено, що лінійний оператор A^{-1} має областю визначення весь простір X та є обмеженим, тому обернений до нього оператор A є замкненим в X . \square

Для доведення максимальності оператора A побудуємо його резольвенту і покажемо, що область визначення резольвенти співпадає з простором X .

Лема 2.5. *Існує $\lambda > 0$, таке, що резольвенту $R(\lambda; A) = (I - \lambda A)^{-1}$ оператора A коректно визначено у просторі X .*

Тут і надалі символом I позначатимемо тотожне перетворення.

Доведення. Для побудови резольвенти розв'яжемо рівняння

$$(I - \lambda A)\xi = \hat{\xi} \quad (2.41)$$

відносно $\xi \in D(A)$ для довільної правої частини $\hat{\xi} \in X$. Це рівняння являє собою систему

$$u - \lambda v = \hat{u}, \quad (2.42)$$

$$v + \lambda \frac{EI}{\rho} u^{(4)} = \hat{v}, \quad (2.43)$$

$$p - \lambda q = \hat{p}, \quad (2.44)$$

$$q - \lambda \frac{EI}{m} \left(u'''(\ell_0 - 0) - u'''(\ell_0 + 0) \right) + \lambda \frac{\alpha}{m} p = \hat{q}. \quad (2.45)$$

Враховуючи $\xi \in D(A)$, для компонент вектора ξ виконуються крайові умови вигляду (2.13), (2.14). З рівнянь (2.42), (2.43) отримаємо диференціальне рівняння на функцію $u(x)$:

$$u^{(4)} + 4\eta^4 u = \hat{\Gamma}(x), \quad (2.46)$$

в якому $\eta = \left(\frac{\rho}{4EI} \frac{1}{\lambda^2} \right)^{1/4}$, $\hat{\Gamma}(x) = \hat{\Gamma} \left(\lambda, \hat{\xi}(x) \right) = \frac{\rho}{EI} \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{\lambda} \hat{u}(x) + \hat{v}(x) \right)$. Позначимо $u_0 = u(x)$, $u_1 = u'(x)$, $u_2 = u''(x)$, $u_3 = u'''(x)$, $U = (u_0, u_1, u_2, u_3)^T$ і запишемо рівняння четвертого порядку (2.46) у вигляді системи рівнянь

першого порядку в матричному представленні:

$$\frac{d}{dx} U(x) = NU(x) + \Gamma \quad (2.47)$$

з матрицями $N = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 1} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ -4\eta^4 & \mathbf{0}_{1 \times 3} \end{pmatrix}$, $\Gamma = (0, 0, 0, \hat{\Gamma}(x))^T$. Тут і далі $\mathbf{0}_{i \times j}$ та $\mathbf{I}_{i \times j}$ позначають, відповідно, нульову та одиничну матриці розмірності $i \times j$.

Задамо функції

$$\begin{aligned} z_1(x) &= \cos \eta x \cosh \eta x, & z_2(x) &= \cos \eta x \sinh \eta x + \sin \eta x \cosh \eta x, \\ z_3(x) &= \sin \eta x \sinh \eta x, & z_4(x) &= \cos \eta x \sinh \eta x - \sin \eta x \cosh \eta x \end{aligned}$$

і запишемо загальний розв'язок (2.47):

$$U(x) = \begin{cases} e^{xN}U(0) + \int_0^x e^{(x-s)N} \Gamma(s) ds, & x \leq \ell_0, \\ e^{(x-\ell)N}U(\ell) - \int_x^\ell e^{(x-s)N} \Gamma(s) ds, & x > \ell_0. \end{cases}$$

Тут матрична експонента $G(x) = (e_{ij}^{xN})_{i,j=1}^4$ має вигляд

$$G(x) = \begin{pmatrix} z_1(x) & \frac{1}{2\eta} z_2(x) & \frac{1}{2\eta^2} z_3(x) & -\frac{1}{4\eta^3} z_4(x) \\ \eta z_4(x) & z_1(x) & \frac{1}{2\eta} z_2(x) & \frac{1}{2\eta^2} z_3(x) \\ -2\eta^2 z_3(x) & \eta z_4(x) & z_1(x) & \frac{1}{2\eta} z_2(x) \\ -2\eta^3 z_2(x) & -2\eta^2 z_3(x) & \eta z_4(x) & z_1(x) \end{pmatrix}.$$

Враховуючи крайові умови (2.13), запишемо загальний розв'язок рівняння (2.47) покомпонентно у такому вигляді:

$$\begin{aligned} u_{i-1}(x) \Big|_{x \leq \ell_0} &= G_{i2}(x)B_1 + G_{i4}(x)B_2 + \int_0^x G_{i4}(x-s)\hat{\Gamma}(s) ds, \\ u_{i-1}(x) \Big|_{x > \ell_0} &= G_{i2}(x-\ell)B_3 + G_{i4}(x-\ell)B_4 - \int_x^\ell G_{i4}(x-s)\hat{\Gamma}(s) ds, \end{aligned} \quad (2.48)$$

$i = \overline{1, 4}$. Тут $B_1 = u_1(0)$, $B_2 = u_3(0)$, $B_3 = u_1(\ell)$, $B_4 = u_3(\ell)$. Для виключення цих констант запишемо умови інтерфейсу (2.14) у вигляді

$$u_i(\ell_0 - 0) - u_i(\ell_0 + 0) = 0, \quad i = \overline{0, 2}. \quad (2.49)$$

З рівнянь (2.44), (2.45) маємо наступне співвідношення:

$$\frac{EI}{m}(u_3(\ell_0 - 0) - u_3(\ell_0 + 0)) - \tilde{\eta} u_0(\ell_0) = -2\eta^2 (2\kappa^2 \eta^2 \hat{p} + \kappa \hat{q}), \quad (2.50)$$

де $\tilde{\eta} = \frac{\kappa}{m} + \frac{4EI}{\rho} \eta^4$, $\kappa = \sqrt{\frac{EI}{\rho}}$. Підставляючи відповідні вирази з (2.48) у (2.49) та (2.50), отримаємо систему алгебраїчних рівнянь

$$\tilde{N}(B_1, B_2, B_3, B_4)^T = \zeta \quad (2.51)$$

з матрицею

$$\tilde{N} = \begin{pmatrix} G_{12}(\ell_0) & G_{14}(\ell_0) & -G_{12}(\ell_0 - \ell) & -G_{14}(\ell_0 - \ell) \\ G_{22}(\ell_0) & G_{24}(\ell_0) & -G_{22}(\ell_0 - \ell) & -G_{24}(\ell_0 - \ell) \\ G_{32}(\ell_0) & G_{34}(\ell_0) & -G_{32}(\ell_0 - \ell) & -G_{34}(\ell_0 - \ell) \\ G_{42}(\ell_0) - \tilde{\eta} G_{12}(\ell_0) & G_{44}(\ell_0) - \tilde{\eta} G_{14}(\ell_0) & -G_{42}(\ell_0 - \ell) & -G_{44}(\ell_0 - \ell) \end{pmatrix}$$

та стовпчиком правих частин

$$\zeta = \left(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4 + \tilde{\eta} \int_0^{\ell_0} G_{14}(\ell_0 - s) \hat{\Gamma}(s) ds - m \eta^2 \left(\frac{2}{\rho} \eta^2 \hat{p} + (\rho EI)^{-\frac{1}{2}} \hat{q} \right) \right)^T,$$

де $\zeta_i = - \int_0^{\ell} G_{i4}(\ell_0 - s) \hat{\Gamma}(s) ds$, $i = \overline{1, 4}$. Визначник матриці \tilde{N} розкладається в ряд Тейлора: $\det \tilde{N} = -\ell^2 - \frac{\kappa}{3EI} \ell_0^2 \ell (\ell - \ell_0)^2 + \mathcal{O}(\eta^2) \neq 0$, тож існує достатньо велике $\lambda > 0$, для якого неоднорідна система (2.51) має єдиний розв'язок. Таким чином знайдено набір констант B_1, \dots, B_4 для отримання розв'язку рівняння (2.46), який задовольняє умови (2.13), (2.14) і має наступний вигляд:

$$u(x) \Big|_{x \leq \ell_0} = \frac{B_1}{2\eta} z_2(x) - \frac{B_2}{4\eta^3} z_4(x) - \int_0^x z_4(x-s) \left(\eta \hat{u}(s) + \frac{\hat{v}(s)}{2\kappa\eta} \right) ds,$$

$$u(x) \Big|_{x > \ell_0} = \frac{B_3}{2\eta} z_2(x-\ell) - \frac{B_4}{4\eta^3} z_4(x-\ell) + \int_x^{\ell} z_4(x-s) \left(\eta \hat{u}(s) + \frac{\hat{v}(s)}{2\kappa\eta} \right) ds.$$

З рівняння (2.42) знаходимо $v = \frac{1}{\lambda}(u - \hat{u})$, або

$$v(x) \Big|_{x \leq \ell_0} = \kappa \left(\eta B_1 z_2(x) - \frac{B_2}{2\eta} z_4(x) - 2\eta^2 \hat{u}(x) - \eta \int_0^x z_4(x-s) (2\eta^2 \hat{u}(s) + \hat{v}(s)) ds \right),$$

$$v(x) \Big|_{x > \ell_0} = \kappa \left(\eta B_3 z_2(x-\ell) - \frac{B_4}{2\eta} z_4(x-\ell) - 2\eta^2 \hat{u}(x) + \eta \int_x^\ell z_4(x-s) (2\eta^2 \hat{u}(s) + \hat{v}(s)) ds \right).$$

З $\xi \in D(A)$ випливає $p = u(\ell_0)$, тому

$$p = \frac{B_1}{2\eta} z_2(\ell_0) - \frac{B_2}{4\eta^3} z_4(\ell_0) - \int_0^{\ell_0} z_4(\ell_0-s) \left(\eta \hat{u}(s) + \frac{\hat{v}(s)}{2\kappa\eta} \right) ds.$$

З (2.44) знайдемо $q = \frac{1}{\lambda}(p - \hat{p})$:

$$q = \kappa \left(\eta B_1 z_2(\ell_0) - \frac{B_2}{2\eta} z_4(\ell_0) - 2\eta^2 \hat{p} - \eta \int_0^{\ell_0} z_4(\ell_0-s) \left(2\eta^2 \hat{u}(s) + \frac{\hat{v}(s)}{\kappa} \right) ds \right).$$

Оскільки розв'язок рівняння (2.41) одержано для довільної правої частини $\hat{\xi} \in X$, областю визначення оператора $(I - \lambda A)^{-1}$ є простір X .

Отже, резольвенту $R(\lambda; A) : X \rightarrow X$ отримано як оператор, що діє за таким правилом:

$$R(\lambda; A) : \xi = (u, v, p, q)^T \mapsto (R_1\xi, R_2\xi, R_3\xi, R_4\xi)^T,$$

де

$$R_1\xi = \begin{cases} \frac{B_1}{2\eta} z_2(x) - \frac{B_2}{4\eta^3} z_4(x) - \int_0^x \tilde{R}_1(x, s, \hat{\xi}) ds, & x \leq \ell_0, \\ \frac{B_3}{2\eta} z_2(x-\ell) - \frac{B_4}{4\eta^3} z_4(x-\ell) + \int_x^\ell \tilde{R}_1(x, s, \hat{\xi}) ds, & x > \ell_0, \end{cases}$$

$$R_2\xi = \begin{cases} \kappa \left(\eta B_1 z_2(x) - \frac{B_2}{2\eta} z_4(x) - 2\eta^2 \hat{u}(x) - \eta \int_0^x \tilde{R}_2(s) ds \right), & x \leq \ell_0, \\ \kappa \left(\eta B_3 z_2(x - \ell) - \frac{B_4}{2\eta} z_4(x - \ell) - 2\eta^2 \hat{u}(x) + \eta \int_x^\ell \tilde{R}_2(s) ds \right), & x > \ell_0, \end{cases}$$

$$R_3\xi = \frac{B_1}{2\eta} z_2(\ell_0) - \frac{B_2}{4\eta^3} z_4(\ell_0) - \int_0^{\ell_0} z_4(\ell_0 - s) \left(\eta \hat{u}(s) + \frac{\hat{v}(s)}{2\kappa\eta} \right) ds,$$

$$R_4\xi = \kappa \left(\eta B_1 z_2(\ell_0) - \frac{B_2}{2\eta} z_4(\ell_0) - 2\eta^2 \hat{p} - \eta \int_0^{\ell_0} z_4(\ell_0 - s) \left(2\eta^2 \hat{u}(s) + \frac{\hat{v}(s)}{\kappa} \right) ds \right),$$

при цьому

$$\tilde{R}_1(x, s, \hat{\xi}) = z_4(x - s) \left(\eta \hat{u}(s) + \frac{\hat{v}(s)}{2\kappa\eta} \right),$$

$$\tilde{R}_2(x, s, \hat{\xi}) = z_4(x - s) (2\eta^2 \hat{u}(s) + \hat{v}(s)).$$

□

Підсумовуючи, можна зазначити наступні властивості оператора A : щільна визначеність, m -дисипативність, замкненість. Згідно з теоремою Люмера–Філліпса, оператор A є інфінітезимальним генератором стискаючої C_0 -напівгрупи операторів у просторі X . Додаючи до A обмежений лінійний оператор керування BK , отримаємо оператор \tilde{A} , який є також інфінітезимальним генератором C_0 -напівгрупи. Таким чином доведено наступну теорему.

Теорема 2.1. *Нехай оператор \tilde{A} з областю визначення (2.11) задано формулою (2.21). Тоді задача Коші*

$$\frac{d}{dt}\xi(t) = \tilde{A}\xi(t), \quad (2.52)$$

$$\xi(0) = \xi_0 \in X. \quad (2.53)$$

є коректною на $t \geq 0$.

2.4. Стійкість стану рівноваги

Описана вище балка має стан рівноваги $\xi = 0$. Синтез керування, стійкість і асимптотична стійкість тривіального стану рівноваги є предметами досліджень, що викладаються далі.

Теорема 2.2. *Нехай оператор $\tilde{A} : D(\tilde{A}) \rightarrow X$ задано формулою (2.21). Розв'язок $\xi = 0$ рівняння (2.52) є сильно (за нормою простору X) стійким за Ляпуновим.*

Доведення. Для доведення стійкості стану рівноваги оберемо функціонал Ляпунова у вигляді повної енергії:

$$2V = \int_0^\ell \left(\rho v^2(x) + EI(u''(x))^2 \right) dx + mq^2 + \kappa p^2 = \|\xi\|_X^2. \quad (2.54)$$

Запропонований функціонал V є, очевидно, додатновизначеним в X . Обчислимо його похідну за часом в силу системи (2.52)–(2.53):

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \sum_{j=1}^k M_j \int_0^\ell v(x) \psi_j''(x) dx + qF_0 = \\ &= - \sum_{j=1}^k \alpha_j \left(\int_0^\ell \psi_j''(x) v(x) dx \right)^2 - \alpha_0 q^2. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Бачимо, що функціонал \dot{V} є знаковід'ємним. В силу (2.55), для довільного $\xi_0 \in D(\tilde{A})$ справедливо $V(\xi(t)) \leq V(\xi(0))$, $\forall t \geq 0$, звідки $\|\xi(t)\|_X \leq \|\xi_0\|_X$. Таким чином, в означенні стійкості 1.1 можемо взяти $\delta = \varepsilon$. \square

Висновки до розділу 2

За допомогою варіаційного принципу Гамільтона–Остроградського побудовано математичну модель коливань пружної балки з приєднаною точковою масою. Рух системи описано за допомогою рівняння з частинними похідними четвертого порядку із крайовими умовами та умовами інтерфейсу, що описують поведінку окремої точки балки.

Диференціальне рівняння четвертого порядку представлено у вигляді абстрактного диференціального рівняння першого порядку у належним чином обраному нескінченновимірному фазовому просторі.

Запропоновано функціонали керування зі зворотним зв'язком, для яких гарантовано незростання повної енергії на траєкторіях замкненої системи. Показано, що оператор системи зі зворотним зв'язком \tilde{A} є обмеженим збуренням оператора A системи без керування. На основі дослідження властивостей операторів A і \tilde{A} за допомогою теореми Люмера–Філліпса доведено, що оператор системи зі зворотним зв'язком є інфінітезимальним генератором сильно неперервної напівгрупи операторів у гільбертовому просторі.

Показано, що тривіальний стан рівноваги системи з запропонованим зворотним зв'язком є стійким за Ляпуновим.

Результати, отримані у розділі 2, опубліковано у статті [144].

РОЗДІЛ 3

АСИМПТОТИЧНА СТІЙКІСТЬ СТАНУ РІВНОВАГИ ПРУЖНОЇ СИСТЕМИ

У розділі 2 було доведено стійкість за Ляпуновим тривіального стану рівноваги гібридної системи із заданим керуванням. Дослідження граничної поведінки траєкторій замкненої системи і отримання умов асимптотичної стійкості пов'язане з вивченням інваріантних підмножин множини $Z = \left\{ \xi \in D(A) \mid \dot{V}(\xi) = 0 \right\}$, де $V(\xi)$ — функціонал Ляпунова (2.54), побудований у вигляді повної енергії осцилюючої системи. З [121] відомо, що властивості інваріантних підмножин множини Z пов'язані зі спектральними властивостями інфінітезимального генератора. Однією з важливих характеристик систем з розподіленими параметрами у контексті стабілізації, керування і спостереження є розподіл власних значень оператора системи. Розділ 3 присвячено вивченню відповідних властивостей оператора A , а також виведенню і дослідженню характеристичного рівняння і отриманню на основі цього умов асимптотичної стійкості тривіального стану рівноваги гібридної системи.

3.1. Асимптотичний розподіл власних значень оператора A

Твердження 3.1. *Оператор A , заданий в (2.11), (2.12), є кососиметричним.*

Доведення. Розглянемо вираз

$$\begin{aligned} \langle A\xi, \hat{\xi} \rangle_X &= \int_0^\ell EI v'' \hat{u}'' dx - \int_0^\ell EI u^{(4)} \hat{v} dx + \varkappa q \hat{p} + \\ &+ EI \left(u'''(\ell_0 - 0) - u'''(\ell_0 + 0) \right) \hat{q} - \varkappa p \hat{q}. \end{aligned}$$

В силу інтегрування частинами,

$$\begin{aligned} \langle A\xi, \hat{\xi} \rangle_X &= - \int_0^\ell EI u'' \hat{v}'' dx + \int_0^\ell EI v \hat{u}^{(4)} dx - \varkappa p \hat{q} - \\ &\quad - EI \left(u'''(\ell_0 - 0) - u'''(\ell_0 + 0) \right) q + \varkappa \hat{p} q. \end{aligned}$$

Таким чином отримано спряжений до A оператор $A^* : D(A) \rightarrow X$,

$$A^* : \xi = \begin{pmatrix} u \\ v \\ p \\ q \end{pmatrix} \mapsto A^* \xi = \begin{pmatrix} -v \\ \frac{EI}{\rho} u^{(4)} \\ -q \\ -\frac{EI}{m} \left(u'''(\ell_0 - 0) - u'''(\ell_0 + 0) \right) + \frac{\varkappa}{m} p \end{pmatrix}.$$

Бачимо, що $A^* = -A$, оператор A є кососиметричним. \square

Нескладно довести, що власні значення кососиметричного оператора мають нульову дійсну частину.

Твердження 3.2. *Власні значення оператора A є суто уявними комплексними числами.*

3.1.1. Спектральна задача. Розглянемо спектральну задачу

$$A\xi = \lambda\xi, \quad \xi \in D(A), \quad (3.1)$$

де $\lambda = i\omega$, $\omega \in \mathbb{R}$. Таке рівняння являє собою наступну систему рівнянь відносно компонентів вектора ξ :

$$v = \lambda u, \quad (3.2)$$

$$\frac{EI}{\rho} u^{(4)} + \lambda v = 0, \quad (3.3)$$

$$q = \lambda p, \quad (3.4)$$

$$u'''(\ell_0 - 0) - u'''(\ell_0 + 0) - \varkappa p = \lambda m q \quad (3.5)$$

із умовами (2.13), (2.14).

Спочатку розглянемо рівняння (3.3). В силу (3.2) воно має вигляд звичайного диференціального рівняння відносно $u(x)$:

$$u^{(4)} - \mu^4 u = 0, \quad (3.6)$$

де $\mu = \left(\frac{\rho}{EI} \omega^2\right)^{1/4}$ є новим спектральним параметром задачі (3.1). Загальний розв'язок рівняння (3.6) на інтервалах неперервності функції $u(x)$ можна представити у вигляді $u(x) = C_1 e^{-\mu x} + C_2 e^{\mu x} + C_3 \sin \mu x + C_4 \cos \mu x$, $x \neq \ell_0$. Введемо позначення:

$$U(x) = (u_0(x), u_1(x), u_2(x), u_3(x))^T = (u(x), u'(x), u''(x), u'''(x))^T,$$

тоді диференціальне рівняння для визначення власних векторів задачі (3.1) може бути записано в матричному вигляді:

$$\frac{d}{dx} U(x) = MU(x), \quad (3.7)$$

де $M = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 1} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ \mu^4 & \mathbf{0}_{1 \times 3} \end{pmatrix}$. Загальний розв'язок (3.7) представляється у вигляді матричної експоненти наступним чином:

$$U(x) = \begin{cases} e^{xM} U(0), & x \in [0, \ell_0], \\ e^{(x-\ell)M} U(\ell), & x \in (\ell_0, \ell], \end{cases} \quad (3.8)$$

де

$$e^{xM} = \begin{pmatrix} z_1(x) & z_2(x) & z_3(x) & z_4(x) \\ \mu^4 z_4(x) & z_1(x) & z_2(x) & z_3(x) \\ \mu^4 z_3(x) & \mu^4 z_4(x) & z_1(x) & z_2(x) \\ \mu^4 z_2(x) & \mu^4 z_3(x) & \mu^4 z_4(x) & z_1(x) \end{pmatrix},$$

$$z_1(x) = \frac{1}{2} (\cosh \mu x + \cos \mu x), \quad z_2(x) = \frac{1}{2\mu} (\sinh \mu x + \sin \mu x),$$

$$z_3(x) = \frac{1}{2\mu^2} (\cosh \mu x - \cos \mu x), \quad z_4(x) = \frac{1}{2\mu^3} (\sinh \mu x - \sin \mu x).$$

Константи інтегрування $u_0(0)$, $u_2(0)$, $u_0(\ell)$, $u_2(\ell)$ дорівнюють нулеві відповідно до крайових умов спектральної задачі, тоді як значення інших чотирьох констант можна обчислити з (3.4), (3.5), враховуючи умови інтерфейсу в точці $x = \ell_0$. В результаті отримаємо систему лінійних алгебраїчних рів-

нянь $\mathcal{M} (u_1(0), u_3(0), u_1(\ell), u_3(\ell))^T = 0$ з матрицею

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} z_2(\ell_0) & z_4(\ell_0) & -z_2(\ell_0 - \ell) & -z_4(\ell_0 - \ell) \\ z_1(\ell_0) & z_3(\ell_0) & -z_1(\ell_0 - \ell) & -z_3(\ell_0 - \ell) \\ \mu^4 z_4(\ell_0) & z_2(\ell_0) & -\mu^4 z_4(\ell_0 - \ell) & -z_2(\ell_0 - \ell) \\ \mu^4 z_3(\ell_0) - \check{\mu} z_2(\ell_0) & z_1(\ell_0) - \check{\mu} z_4(\ell_0) & -\mu^4 z_3(\ell_0 - \ell) & -z_1(\ell_0 - \ell) \end{pmatrix},$$

де $\check{\mu} = \frac{\varkappa}{EI} - \frac{m}{\rho} \mu^4$. Значення компоненти p розглядається як границя $u_0(x)$ в точці $x = \ell_0$. Таким чином, отримано наступне частотне рівняння:

$$\det \mathcal{M} = 0, \quad (3.9)$$

у якому

$$\det \mathcal{M} = \frac{m EI \mu^4 - \varkappa \rho}{2 \rho EI \mu^5} \left(\sin \mu(\ell - \ell_0) \sin \mu \ell_0 \sinh \mu \ell - \sinh \mu(\ell - \ell_0) \sinh \mu \ell_0 \sin \mu \ell \right) - \frac{1}{\mu^2} \sinh \mu \ell \sin \mu \ell.$$

Якщо μ задовольняє рівняння (3.9), то $\text{rank } \mathcal{M} \leq 3$ і можна обрати ненульовий набір значень $u_1(0), u_3(0), u_1(\ell), u_3(\ell)$. Візьмемо, наприклад, $u_3(\ell) = 1$, тоді інші крайові значення обчислюються як розв'язки наступної системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\tilde{\mathcal{M}} (u_1(0), u_3(0), u_1(\ell))^T = (z_4(\ell_0 - \ell), z_3(\ell_0 - \ell), z_2(\ell_0 - \ell))^T, \quad (3.10)$$

$$\text{у якій } \tilde{\mathcal{M}} = \begin{pmatrix} z_2(\ell_0) & z_4(\ell_0) & -z_2(\ell_0 - \ell) \\ z_1(\ell_0) & z_3(\ell_0) & -z_1(\ell_0 - \ell) \\ \mu^4 z_4(\ell_0) & z_2(\ell_0) & -\mu^4 z_4(\ell_0 - \ell) \end{pmatrix}.$$

Таким чином, розв'язок (3.8) містить функції $u(x)$ вигляду

$$u(x) = \begin{cases} z_2(x) u_1(0) + z_4(x) u_3(0), & x \in [0, \ell_0], \\ z_2(x - \ell) u_1(\ell) + z_4(x - \ell), & x \in (\ell_0, \ell]. \end{cases} \quad (3.11)$$

Зауважимо, що

$$\det \tilde{\mathcal{M}} = \frac{\sinh \mu \ell_0 \sin \mu \ell + \sin \mu \ell_0 \sinh \mu \ell}{2 \mu^2} \neq 0, \quad (3.12)$$

і набір крайових значень $u_1(0), u_3(0), u_1(\ell), u_3(\ell)$ детерміновано однозначно системою (3.10). Можемо тепер записати всі інші компоненти вектора ξ :

$$v(x) = \lambda u(x), \quad p = u(\ell_0) = z_2(\ell_0) u_1(0) + z_4(\ell_0) u_3(0), \quad q = \lambda p, \quad (3.13)$$

де функцію $u(x)$ задано в (3.11).

Таким чином, власними значеннями оператора A є розташовані на уявній вісі числа вигляду $\lambda_j = \pm i \sqrt{\frac{EI}{\rho}} \mu_j^2$, де $\{\mu_j\}_{j=1}^{\infty}$ — система розв'язків трансцендентного рівняння (3.9). Відповідні власні вектори знаходяться за формулами (3.11), (3.13). Цей крок завершує розв'язання спектральної задачі (3.1).

3.1.2. Аналіз частотного рівняння. Визначник матриці \mathcal{M} у рівнянні (3.9) допускає наступне асимптотичне представлення для $\mu \rightarrow +\infty$:

$$\det \mathcal{M} = \frac{m e^{\mu \ell}}{8 \rho \mu^5} (\Phi_0(\mu) + o(1)),$$

де

$$\Phi_0(\mu) = 2 \sin \mu(\ell - \ell_0) \sin \mu \ell_0 - \sin \mu \ell, \quad (3.14)$$

а члени вищого порядку малості при $\mu \rightarrow +\infty$ представляються функцією

$$\begin{aligned} \Phi_1(\mu) = 4 \left(1 - \frac{\kappa \rho}{mEI\mu^4} \right) e^{-\mu \ell} \left(\sin \mu(\ell - \ell_0) \sin \mu \ell_0 \sinh \mu \ell - \right. \\ \left. - \sinh \mu(\ell - \ell_0) \sinh \mu \ell_0 \sin \mu \ell \right) - \\ - \frac{8\rho}{m\mu} e^{-\mu \ell} \sinh \mu \ell \sin \mu \ell - 2 \sin \mu(\ell - \ell_0) \sin \mu \ell_0 + \sin \mu \ell. \end{aligned}$$

Нескладно перевірити, що

$$\begin{aligned} \Phi_1(\mu) = 2 \left[-e^{-2\mu \ell} + \frac{\kappa \rho}{mEI\mu^4} (e^{-2\mu \ell} - 1) \right] \sin \mu(\ell - \ell_0) \sin \mu \ell_0 + \\ + \left[\left(1 - \frac{\kappa \rho}{mEI\mu^4} \right) (e^{-2\mu \ell_0} + e^{-2\mu(\ell - \ell_0)} - e^{-2\mu \ell}) + \right. \\ \left. + \frac{\kappa \rho}{mEI\mu^4} - \frac{4\rho}{m\mu} (1 - e^{-2\mu \ell}) \right] \sin \mu \ell, \end{aligned}$$

тому $\lim_{\mu \rightarrow \infty} \Phi_1(\mu) = 0$. Отже, рівняння (3.9) еквівалентно рівнянню

$$\Phi_0(\mu) + \Phi_1(\mu) = 0 \quad (3.15)$$

за умови $\mu \neq 0$. Зауважимо, що розподіл нулів функції $\Phi_0(\mu)$ визначається лише довжинами ℓ та ℓ_0 . Далі покажемо, що система розв'язків $\{\mu_j\}_{j=1}^{\infty}$ рівняння (3.15) є достатньо точною апроксимацією системи розв'язків $\{\hat{\mu}_j\}_{j=1}^{\infty}$

рівняння

$$\Phi_0(\hat{\mu}) = 0 \quad (3.16)$$

для великих значень $\hat{\mu}$, $\mu > 0$.

Означення 3.1. Сумірними називаються два дійсних числа, якщо їхнє відношення є раціональним числом.

Означення 3.2. Найменшим спільним кратним додатних дійсних чисел a та b називається величина $\text{НСК}(a, b) = \min \left\{ z \in \mathbb{R} \mid \frac{z}{a}, \frac{z}{b} \in \mathbb{N} \right\}$, якщо мінімум існує. Найбільшим спільним дільником додатних дійсних чисел a та b називається число $\text{НСД}(a, b) = \max \left\{ z \in \mathbb{R} \mid \frac{a}{z}, \frac{b}{z} \in \mathbb{N} \right\}$, якщо максимум існує.

Твердження 3.3. Нехай величини ℓ_0 і ℓ сумірні. Тоді функція $\Phi_0(\mu)$, задана в (3.14), є періодичною з періодом $P = 2\pi \frac{\text{НСК}(\ell, |\ell - 2\ell_0|)}{\ell |\ell - 2\ell_0|} = \frac{2\pi}{\text{НСД}(\ell, |\ell - 2\ell_0|)}$ при $\ell \neq \ell_0$ та $P = \frac{2\pi}{\ell}$ при $\ell = 2\ell_0$.

Доведення. Функцію $\Phi_0(\mu)$ представимо у вигляді суми періодичних функцій: $\Phi_0(\mu) = \mathcal{F}_1(\mu) + \mathcal{F}_2(\mu)$, де

$$\mathcal{F}_1(\mu) = \cos \mu(\ell - 2\ell_0), \quad \mathcal{F}_2(\mu) = -(\cos \mu\ell + \sin \mu\ell).$$

Як відомо, необхідною і достатньою умовою періодичності функції $\Phi_0(\mu)$ є сумірність основних періодів $P_1 = \frac{2\pi}{|\ell - 2\ell_0|}$ і $P_2 = \frac{2\pi}{|\ell|}$ функцій \mathcal{F}_1 і \mathcal{F}_2 , відповідно. За припущенням ℓ_0 та ℓ сумірні. Нехай $\frac{\ell_0}{\ell} = \frac{p_1}{p_2} \in \mathbb{Q}$, де p_1 і p_2 — взаємно прості натуральні числа, при чому $p_2 \neq 2p_1$ ($\ell \neq 2\ell_0$). Очевидно, сумірними також є величини P_1 і P_2 , адже $\frac{P_1}{P_2} = \frac{p_2 - p_1}{p_2} \in \mathbb{Q}$. Значить, $\Phi_0(\mu)$ є періодичною функцією. Її основний період можна знайти як найменше спільне кратне періодів функцій \mathcal{F}_1 і \mathcal{F}_2 :

$$\begin{aligned} P &= \text{НСК}(P_1, P_2) = 2\pi \text{НСК}\left(\frac{1}{|\ell - 2\ell_0|}, \frac{1}{\ell}\right) = 2\pi \frac{\text{НСК}(|\ell - 2\ell_0|, \ell)}{\ell |\ell - 2\ell_0|} = \\ &= \frac{2\pi}{\text{НСД}(|\ell - 2\ell_0|, \ell)} = \frac{2\pi p_2}{\ell \text{НСД}(p_2, |p_2 - 2p_1|)}. \end{aligned}$$

У випадку, коли $\ell = 2\ell_0$, функція $\Phi_0(\mu)$ набуває вигляду $\Phi_0(\mu) = 1 - \cos \mu\ell - \sin \mu\ell i$, як нескладно бачити, має період $P = \frac{2\pi}{\ell}$. \square

Лема 3.1. *Припустимо, що числа ℓ_0 та ℓ сумірні. Нехай маємо корені $0 < \hat{\mu}_1 < \hat{\mu}_2 < \dots$ рівняння (3.16). Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться $L > 0$, таке, що для кожного $\hat{\mu}_j > L$ існує єдиний корінь $\mu_j \in \mathcal{I}_j = (\hat{\mu}_j - \varepsilon; \hat{\mu}_j + \varepsilon)$ рівняння (3.15).*

Сенс останнього твердження полягає в тому, що кожен корінь рівняння (3.15) розташовано у ε -околі відповідного кореня рівняння (3.16), і жоден з таких ε -околів не містить інших коренів рівняння (3.15). Крім того, важливо запевнитись у тому, що не існує “великих” коренів рівняння (3.15) поза вказаними ε -околами, про що стверджує наступна лема.

Лема 3.2. *Нехай виконано умови лем 3.1 та нехай $S = (L; +\infty) \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} (\mu_j - \varepsilon; \mu_j + \varepsilon)$. Тоді $\Phi_0(\mu) + \Phi_1(\mu) \neq 0$ для всіх $\mu \in S$.*

Доведення лем 3.1 та 3.2. У випадку, коли числа ℓ_0 та ℓ сумірні, функція $\Phi_0(\mu)$ є періодичною та має прості (кратності один) корені $0 < \hat{\mu}_1 < \hat{\mu}_2 < \dots$, при чому $\Phi'_0(\hat{\mu}_j) \neq 0$. Не втрачаючи загальності міркувань, припустимо, що число ε обрано достатньо малим, щоб $0 < \varepsilon < \frac{\hat{\mu}_{j+1} - \hat{\mu}_j}{2}$ (інтервали \mathcal{I}_j та \mathcal{I}_{j+1} не перетинаються) для всіх $j \geq 1$, та виконано нерівність

$$\inf_{\substack{|\mu - \hat{\mu}_j| \leq \varepsilon, \\ j \geq 1}} |\Phi'_0(\hat{\mu})| \geq K \quad (3.17)$$

з деякою константою $K > 0$.

Усі додатні корені рівняння $\Phi_0(\hat{\mu}) = 0$ містяться за побудовою в інтервалі $\mathcal{I} = \bigcup_{j \geq 1} \mathcal{I}_j$, отже, $\Phi_0(\mu) \neq 0$ при кожному $\mu \in S_0 = [0, +\infty) \setminus \mathcal{I}$. Враховуючи періодичність та неперервність функції Φ_0 , з теореми Вайєрштрасса про граничне значення заключаємо існування такого $\delta > 0$, що

$$|\Phi_0(\mu)| \geq \delta \quad \text{для всіх } \mu \in S_0. \quad (3.18)$$

З теореми Лагранжа про середнє значення випливає існування такого η ,

що

$$\Phi_0(\mu) = \Phi'_0(\eta)(\mu - \hat{\mu}_j), \quad (3.19)$$

де $\eta = \hat{\mu}_j + \Theta(\mu - \hat{\mu}_j)$, $\Theta \in (0, 1)$. Далі, (3.17) та (3.19) означають наступне:

$$|\Phi_0(\mu_j \pm \varepsilon)| \geq K\varepsilon \quad \text{та} \quad \Phi_0(\mu_j - \varepsilon)\Phi_0(\mu_j + \varepsilon) < 0 \quad \text{для всіх} \quad j = 1, 2, \dots \quad (3.20)$$

Оскільки $\Phi_1(\mu) \rightarrow 0$ та $\Phi'_1(\mu) \rightarrow 0$ при $\mu \rightarrow +\infty$, можемо обрати таке $L > 0$, що

$$|\Phi_1(\mu)| < \min\{K\varepsilon, \delta\} \quad \text{та} \quad |\Phi'_1(\mu)| < \frac{K}{2} \quad \text{для всіх} \quad \mu > L - \varepsilon. \quad (3.21)$$

З (3.20) та (3.21) випливає, що неперервна функція $\Phi(\mu) = \Phi_0(\mu) + \Phi_1(\mu)$ приймає протилежні за знаком значення на аргументах $\hat{\mu}_j \pm \varepsilon$ при $\hat{\mu}_j > L$. Згідно з теоремою про проміжне значення існує таке $\mu_j \in \mathcal{I}_j$, що $\Phi(\mu_j) = 0$.

Єдиність кореня μ_j в інтервалі \mathcal{I}_j можна довести від супротивного. Нехай обрано $\mu_j^* \in \mathcal{I}_j$, таке, що $\Phi_0(\mu_j^*) = -\Phi_1(\mu_j^*)$, при чому $\mu_j^* \neq \mu_j$. З одного боку, інтегральне представлення

$$\Phi_0(\mu_j^*) = \Phi_0(\mu_j) + \int_{\mu_j}^{\mu_j^*} \Phi'_0(\zeta) d\zeta, \quad \Phi_1(\mu_j^*) = \Phi_1(\mu_j) + \int_{\mu_j}^{\mu_j^*} \Phi'_1(\zeta) d\zeta$$

разом з умовою $\Phi_0(\mu_j) = -\Phi_1(\mu_j)$ дають

$$\int_{\mu_j}^{\mu_j^*} (\Phi'_0(\zeta) + \Phi'_1(\zeta)) d\zeta = 0. \quad (3.22)$$

З іншого боку, нерівності (3.17) та (3.21) означають наступне:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mu_j}^{\mu_j^*} (\Phi'_0(\zeta) + \Phi'_1(\zeta)) d\zeta \right| &\geq |\mu_j - \mu_j^*| \inf_{\zeta \in \mathcal{I}_j} |\Phi'_0(\zeta) + \Phi'_1(\zeta)| \geq \\ &\geq |\mu_j - \mu_j^*| \left(\inf_{\zeta \in \mathcal{I}_j} |\Phi'_0(\zeta)| - \sup_{\zeta \in \mathcal{I}_j} |\Phi'_1(\zeta)| \right) \geq \frac{K |\mu_j - \mu_j^*|}{2} > 0, \end{aligned}$$

що протиречить рівності (3.22). Отже, μ_j — єдиний нуль функції $\Phi(\mu)$ на інтервалі \mathcal{I}_j , що завершує доведення лема 3.1.

Враховуючи (3.18) та (3.21), маємо $|\Phi_0(\mu)| > |\Phi_1(\mu)|$ для всіх $\mu \in S_0$ та

$\mu > L$. Останнє передбачає твердження леми 3.2. \square

3.1.3. Результати чисельного моделювання. Припустимо, відомі перші N додатних коренів $0 < \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_N$ частотного рівняння (3.9). Тоді відповідні власні значення λ_j задачі (3.1) та модальні частоти ν_j в Гц можна обчислити за наступними формулами:

$$\lambda_j = i \sqrt{\frac{EI}{\rho}} \mu_j^2, \quad \nu_j = \frac{\sqrt{EI}}{2\pi \sqrt{\rho}} \mu_j^2, \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

Задля верифікації наближень μ_j розв'язками скороченого рівняння (3.16) було пораховано чисельно корені $\hat{\mu}_j$ трансцендентного рівняння $\Phi_0(\hat{\mu}) = 0$ та корені рівняння (3.9), а також відповідні частоти $\hat{\nu}_j = \frac{\sqrt{EI}}{2\pi \sqrt{\rho}} \hat{\mu}_j^2$ та ν_j , $j = \overline{1, 22}$. Результати обчислень наведені в таблиці 3.1. В процесі підрахунків використовувалися наступні значення механічних параметрів:

$$\begin{aligned} \ell &= 1.875 \text{ м}, & \ell_0 &= 1.4 \text{ м}, & \rho &= 2660 \cdot 2.25 \cdot 10^{-4} \text{ кг/м}, \\ E &= 7.1 \cdot 10^{10} \text{ Па}, & I &= 1.6875 \cdot 10^{-10} \text{ м}^4, & & (3.23) \\ m &= 0.045 \text{ кг}, & \kappa &= 2630 \text{ Н/м}. \end{aligned}$$

Наведені вище значення механічних параметрів відповідають конфігурації експериментальної установки Інституту механіки та мехатроніки Технічного університету Відня (Institute of Mechanics and Mechatronics of the Vienna University of Technology), яку описано в роботі [24].

Зауваження 3.1. Період функції $\Phi_0(\mu)$ для описаної шарнірно опертої балки становить 80π .

Цікаво зауважити, що скорочене частотне рівняння (3.16) має додатковий додатний корінь $\hat{\mu}_0 = 1.0322$, якому на відповідає жоден з коренів рівняння (3.9), натомість є корінь μ_3 рівняння (3.9) в той час як рівняння (3.16) не має коренів на відповідному інтервалі. Такі невідповідності було виявлено лише для низьких частот; спостерігається зменшення похибки обчислень зі зростанням j , тобто для великих значень μ відповідність між розв'язками частотних рівнянь (3.9) та (3.16) достатньо точна, що перед-

Таблиця 3.1

Модальні частоти за наведених у (3.23) значень параметрів

j	$\hat{\mu}_j$	μ_j	$\hat{\nu}_j$	ν_j
1	2.630	2.488	4.925	4.408
2	4.733	4.250	15.950	12.864
3		5.252		19.642
4	6.700	6.702	31.967	31.987
5	7.695	8.342	42.163	49.555
6	9.352	9.932	62.275	70.246
7	11.458	11.663	93.481	96.864
8	13.396	13.403	127.789	127.916
9	14.361	14.935	146.865	158.840
10	16.074	16.525	183.987	194.454
11	18.182	18.340	235.414	239.507

j	$\hat{\mu}_j$	μ_j	$\hat{\nu}_j$	ν_j
12	20.087	20.102	287.333	287.737
13	21.032	21.567	314.985	331.210
14	22.797	23.170	370.077	382.271
15	24.907	25.033	441.739	446.220
16	26.774	26.798	510.459	511.373
17	27.707	28.206	546.661	566.511
18	29.520	29.834	620.560	633.810
19	31.631	31.733	712.446	717.065
20	33.455	33.491	797.019	798.729
21	34.387	34.850	842.039	864.852
22	36.244	36.511	935.445	949.288

бачено лемами 3.1 та 3.2 і видно з таблиці 3.1. Було проведене порівняння цих результатів із вимірюваннями, отриманими під час роботи зі згаданою вище експериментальною установкою. Деякі з модальних частот були виявлені авторами роботи [24] шляхом знаходження локальних максимумів величини перетворення Фур'є перехідних характеристик: $\nu_1 = 4.80$ Гц, $\nu_2 = 14.42$ Гц, $\nu_4 = 30.38$ Гц, $\nu_6 = 65.76$ Гц, $\nu_8 = 120.44$ Гц. Ці отримані експериментально частоти (нумерація відповідає прийнятій для таблиці 3.1) демонструють задовільне співпадіння з частотами, отриманими чисельно і наведеними в таблиці 3.1.

В окремому випадку $\ell = 2\ell_0$, коли шейкер закріплено посередині балки, нескладно отримати явний вираз для знаходження додатних коренів трансцендентного рівняння (3.16):

$$\hat{\mu}_j = \frac{\pi}{\ell} \left(\left\{ \frac{j}{2} \right\} + 2 \left[\frac{j}{2} \right] \right), \quad j = 1, 2, \dots \quad (3.24)$$

Тут фігурними та квадратними дужками позначаються відповідно дробова та ціла частини виразу $\frac{j}{2}$.

Наслідок 3.1. Формула (3.24) та лема 3.1 і 3.2 демонструють, що

спектральні параметри μ_j зростають лінійно зі зростанням j . Це означає, що модальні частоти ν_j і власні значення λ_j задачі (3.1) у розглянутому випадку зростають квадратично зі зростанням j для великих j .

Розподіл μ_j та $\hat{\mu}_j$ з урахуванням механічних параметрів (3.23) проілюстровано на рис. 3.1.

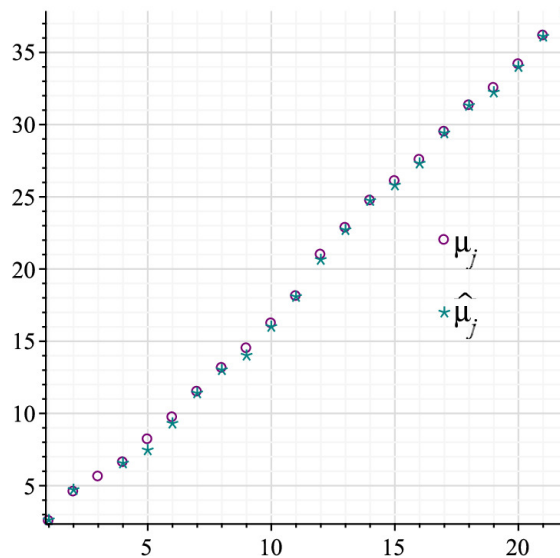


Рис. 3.1: Спектральні параметри μ_j та $\hat{\mu}_j$, $j = \overline{1, 22}$

Функція $u_j(x)$ вигляду (3.11) трактується як j -та власна мода коливань, оскільки описує поперечне зміщення балки, відповідне спектральному параметру μ_j . Тому для ілюстрації поведінки власних векторів $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$ задачі (3.1) на рис. 3.2 та 3.3 наводяться графіки компонент $u(x)$ перших чотирьох ($N = 4$) власних векторів для обох розглянутих варіантів розташування шейкера: у точках $\ell_0 = 1.4$ м на рис. 3.2 та $\ell_0 = \ell/2$ на рис. 3.3, відповідно. Умову (3.12) виконано для всіх $\mu = \mu_j$, тому кожен вектор ξ_j визначено однозначно з точністю до нормування. На обох рисунках функції $u_j(x)$ пронормовано в сенсі L^2 -норми на відрізку $[0, \ell]$.

Викладені в розділі 3.1.2 результати разом з умовою лінійного зростання (3.24) узагальнюють наявні відомості про асимптотичні властивості власних значень класичної задачі про коливання балки Ейлера–Бернуллі [77, Глава 4] на випадок приєднаної точкової маси.

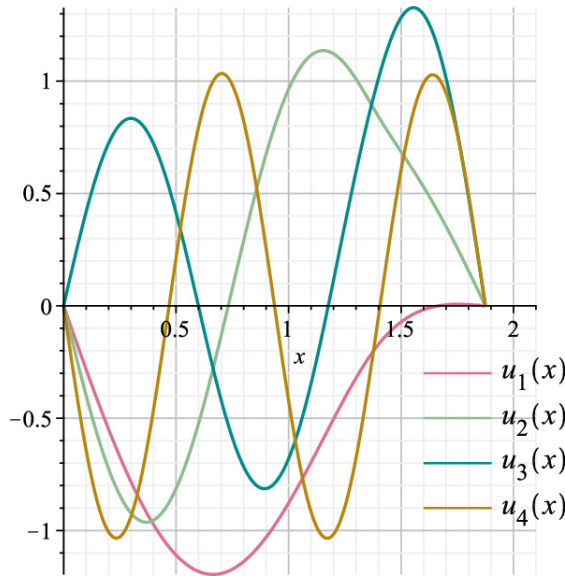


Рис. 3.2: Власні форми коливань
для $\ell_0 = 1.4$ м

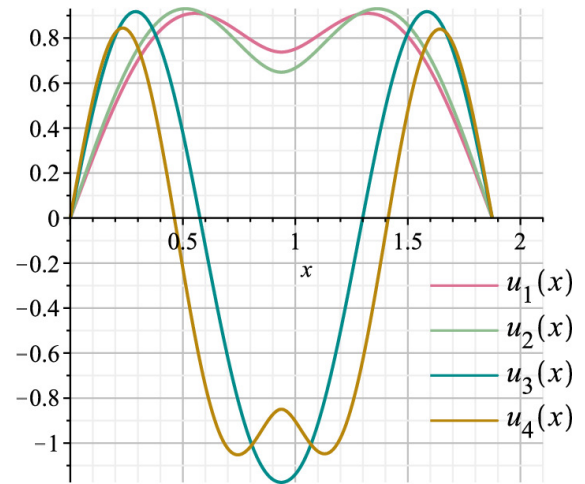


Рис. 3.3: Власні форми коливань
для $\ell_0 = \ell/2$

3.2. Властивості спектра оператора A

3.2.1. Базис гільбертового простору.

Лема 3.3. *Оператор $A^{-1} : X \rightarrow X$, який задано в (2.33), є компактним відображенням.*

Доведення. Розглянемо простір $X' = H^3 \times H^1 \times \mathbb{R}^2$ зі стандартним скалярним добутком

$$\begin{aligned} \langle \xi_1, \xi_2 \rangle_{X'} = & \int_0^{\ell} (u_1''' u_2''' + u_1'' u_2'' + u_1' u_2' + u_1 u_2) dx + \\ & + \int_0^{\ell} (v_1' v_2' + v_1 v_2) dx + p_1 p_2 + q_1 q_2 \quad (3.25) \end{aligned}$$

і доведемо оцінку норми

$$\|A^{-1}\xi\|_{X'}^2 \leq \Lambda \|\xi\|_X^2 \quad (3.26)$$

з деякою константою $\Lambda > 0$, де

$$\|A^{-1}\xi\|_{X'}^2 = \int_0^\ell ((a'''(\xi))^2 + (a''(\xi))^2 + (a'(\xi))^2 + a^2(\xi)) dx + \\ + \int_0^\ell ((u'(x))^2 + u^2(x)) dx + \left(\ell_0 B_1 + \ell_0^3 B_2 - \frac{\rho}{6EI} \int_0^{\ell_0} (\ell_0 - s)^2 v(s) ds \right)^2 + p^2,$$

$a(\xi)$ задано в (2.34), $B_i(\xi) = \sum_{z=1}^4 \bar{N}_{iz} \Gamma_z(\xi)$, $i = \overline{1,4}$, із $\Gamma_z(\xi)$, заданими в (2.31). Використовуючи нерівність Коші–Буняковського–Шварца та нерівності (2.38), (2.39), (2.35), можна отримати оцінку (3.26) із додатною константою $\Lambda = \max \left\{ \frac{\ell^2}{2EI} (\mathbf{c} + 1), \frac{1}{z}, \frac{C_1}{\rho}, 16\rho^2 m C_2 \right\}$, де \mathbf{c} – константа Пуанкаре з нерівності (2.37),

$$C_1 = 4\ell_0 \left[\left(1 + \ell_0 + \frac{\ell_0^2}{3} \right) \check{N}_1 + \left(18 + 6\ell_0^2 + \ell_0^4 \left(\frac{9}{5} + \ell_0 + \frac{\ell_0^2}{7} \right) \right) \check{N}_2 \right] + \\ + 4(\ell - \ell_0) \left[\left(1 + \frac{1}{3}(\ell - \ell_0)^2 \right) \check{N}_3 + \right. \\ \left. + \left(18 + 6(\ell - \ell_0)^2 + \frac{9}{5}(\ell - \ell_0)^4 + \frac{1}{7}(\ell - \ell_0)^6 \right) \check{N}_4 \right] + \\ + \left(\frac{\rho}{EI} \right)^2 \ell^2 \left[1 + \frac{\ell^2}{3} \left(1 + \frac{\ell^2}{10} + \frac{\ell^2}{168} \right) + \frac{1}{180} \frac{\ell_0^5}{\ell^2} \right], \\ C_2 = \ell_0 \left[\left(1 + \ell_0 + \frac{\ell_0^2}{3} \right) \bar{N}_{14}^2 + \left(18 + 6\ell_0^2 + \ell_0^4 \left(\frac{9}{5} + \ell_0 + \frac{\ell_0^2}{7} \right) \right) \bar{N}_{24}^2 \right] + \\ + (\ell - \ell_0) \left[\left(1 + \frac{1}{3}(\ell - \ell_0)^2 \right) \bar{N}_{34}^2 + \right. \\ \left. + \left(18 + 6(\ell - \ell_0)^2 + \frac{9}{5}(\ell - \ell_0)^4 + \frac{1}{7}(\ell - \ell_0)^6 \right) \bar{N}_{44}^2 \right],$$

числа \check{N}_i задано в (2.36), а \bar{N}_{ij} – елементи матриці, оберненої до N , яку записано в (2.32).

Таким чином, відображення $A^{-1} : X \rightarrow X'$ є обмеженим. Згідно з теоремами Соболева $X' \Subset X$ (простір X' є компактно вкладеним у простір X), тому відображення $A^{-1} : X \rightarrow X$ є компактним. \square

Безпосередньою підстановкою відповідних операндів скалярного добутку нескладно переконатись у справедливості для всіх $\xi_1, \xi_2 \in X$ наступної

рівності: $\langle A^{-1}\xi_1, \xi_2 \rangle_X = -\langle \xi_1, A^{-1}\xi_2 \rangle_X$. Таким чином, оператор A^{-1} є ко-симетричним. Відтак, $A^{-1} : X \rightarrow X$ є нормальним оператором. Згідно з [114, Наслідок 3.2.9], у просторі X існує ортонормований базис, який складається з власних векторів оператора A^{-1} . Враховуючи співпадіння множин власних векторів операторів A та A^{-1} , маємо наступний наслідок.

Наслідок 3.2. *Нехай $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – власні вектори оператора A . Тоді система $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ є базисом простору X .*

3.2.2. Лінійна незалежність системи експоненціальних функцій.

Означення 3.3. [137, с.382] Послідовність векторів $\{g_j\}$ гільбертового простору називатимемо ω -лінійно незалежною, якщо рівність $\sum_{j=1}^{\infty} c_j g_j = 0$ можлива лише для нульових коефіцієнтів c_j .

Для доведення асимптотичної стійкості стану рівноваги динамічної системи (2.19) необхідно переконатись у тому, що система функцій $\{e^{\lambda_j t}\}_{j=1}^{\infty}$, де λ_j – власні значення оператора A , є ω -лінійно незалежною у просторі $L^2(0, \tau)$ для деякого $\tau > 0$.

Означення 3.4. ([48, с. 54]) Послідовність $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ елементів гільбертового простору називається мінімальною, якщо жоден з елементів f_n , $n \in \mathbb{N}$, не належить замиканню лінійної оболонки $S_n = \{f_j \mid j \in \mathbb{N}, j \neq n\}$.

Зауважимо, що будь-яка мінімальна система функцій є ω -лінійно незалежною.

Лема 3.4. *Нехай μ_j є коренями частотного рівняння (3.9) й серед μ_j немає кратних коренів. Якщо відношення $\frac{\ell_0}{\ell}$ є раціональним числом, то система функцій $\{e^{\lambda_j t}\}_{j=1}^{\infty}$ є ω -лінійно незалежною в $L^2(0, \tau)$ для всіх $\tau > 0$.*

Доведення. Функція Φ_0 є аналітичною. Оскільки $\Phi_0 \neq \text{const}$, множина $\{\mu \in [0, +\infty) \mid \Phi_0(\mu) = 0\}$ є цілком незв'язною. Умова $\frac{\ell_0}{\ell} = \frac{p_1}{p_2} \in \mathbb{Q}$ гаран-

тує, що функція Φ_0 є періодичною. Нехай P — її основний період. Формулу для обчислення P наведено у твердженні 3.3. Нехай на періоді $[0, P]$ міститься k коренів рівняння (3.16). Розглянемо функцію $\hat{Q}(x) = \max \{ n \in \mathbb{N} \mid \hat{\mu}_n^2 < x \}$ — кількість коренів $\hat{\mu}_n$ на $[0, \sqrt{x})$. На проміжку $[0, \sqrt{x})$ міститься $\left[\frac{\sqrt{x}}{P} \right]$ повних періодів¹, на яких розташовано $\left[\frac{\sqrt{x}}{P} \right] \cdot k$ коренів рівняння (3.16). Тому нескладно отримати двосторонню оцінку: $\left[\frac{\sqrt{x}}{P} \right] \cdot k \leq \hat{Q}(x) \leq \left(\left[\frac{\sqrt{x}}{P} \right] + 1 \right) \cdot k$. Кількість коренів $\hat{\mu}_n$ характеристичного рівняння на довільному проміжку $[y, y+z)$ можна оцінити зверху наступним чином: $\hat{Q}(y+z) - \hat{Q}(y) \leq k \left(\frac{\sqrt{y+z}}{P} - \frac{\sqrt{y}}{P} + 2 \right)$. Тому

$$\begin{aligned} \limsup_{y \rightarrow \infty} \limsup_{z \rightarrow \infty} \frac{\hat{Q}(y+z) - \hat{Q}(y)}{z} &= \\ &= \limsup_{y \rightarrow \infty} \limsup_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z} \cdot \frac{k}{P} (\sqrt{y+z} - \sqrt{y} + 2P) = 0. \end{aligned}$$

Розглянемо тепер функцію $Q(x) = \max \{ n \in \mathbb{N} \mid \mu_n^2 < x \}$, де μ_n — корені рівняння (3.15). В силу наближеності μ_n до $\hat{\mu}_n$ (лема 3.1) функція $Q(x)$ відрізняється від $\hat{Q}(x)$ не більше ніж на одиницю для великих n . А саме,

$$Q = \begin{cases} \hat{Q}(x), & \text{якщо } x < \mu_n^2 < \hat{\mu}_n^2, \text{ або } x > \hat{\mu}_n^2 > \mu_n^2, \\ & \text{або } x < \hat{\mu}_n^2 < \mu_n^2, \text{ або } x > \mu_n^2 > \hat{\mu}_n^2, \\ \hat{Q}(x) + 1, & \text{якщо } \mu_n^2 < x < \hat{\mu}_n^2, \\ \hat{Q}(x) - 1, & \text{якщо } \hat{\mu}_n^2 < x < \mu_n^2, \end{cases}$$

Виконано оцінку $Q(x) \leq \hat{Q}(x) + 1$, тому $Q(y+z) - Q(y) \leq \hat{Q}(y+z) - \hat{Q}(y) + 2$ та $\limsup_{y \rightarrow \infty} \limsup_{z \rightarrow \infty} \frac{Q(y+z) - Q(y)}{z} = 0$.

Згідно з теоремою 1.2.17 [48], система функцій $\{e^{\lambda_j t}\}_{j=1}^{\infty}$ є мінімальною в просторі $L^2(0, \tau)$, $\forall \tau > 0$. Таким чином, доведено ω -лінійну незалежність функцій $\{e^{\lambda_j t}\}_{j=1}^{\infty}$. \square

¹Квадратними дужками позначено цілу частину частки.

3.3. Передкомпактність траєкторій замкненої системи

Введемо до розгляду афінне відображення $\tilde{A}_M : D(\tilde{A}) \rightarrow X$, яке співпадає з оператором \tilde{A} , заданим у (2.11), (2.21) при цьому всі керування M_j вважатимемо сталими параметрами:

$$\tilde{A}_M : \xi = \begin{pmatrix} u \\ v \\ p \\ q \end{pmatrix} \mapsto \tilde{A}_M \xi = \begin{pmatrix} v \\ -\frac{EI}{\rho} u^{(4)} + \frac{1}{\rho} \sum_{j=1}^k \psi_j''(x) M_j \\ q \\ \frac{EI}{m} \left(u'''(\ell_0 - 0) - u'''(\ell_0 + 0) \right) - \frac{\varkappa}{m} p - \frac{\alpha_0}{m} q \end{pmatrix},$$

де $M_j = \text{const}$, $j = \overline{1, k}$. Для такого відображення зі сталим керуванням побудуємо відображення $(I - \lambda \tilde{A}_M)^{-1} : X \rightarrow X$ при деякому $\lambda > 0$.

Лема 3.5. *Існує таке $\lambda > 0$, що відображення $(I - \lambda \tilde{A}_M)^{-1}$ коректно визначено у просторі X .*

Доведення. Для побудови оберненого до $I - \lambda \tilde{A}_M$ відображення розв'яжемо рівняння

$$(I - \lambda \tilde{A}_M) \xi = \hat{\xi}, \quad \lambda > 0, \quad (3.27)$$

з умовами (2.13) та (2.14), відносно вектора $\xi \in X$ для довільного $\hat{\xi} \in X$. Запишемо (3.27) у вигляді системи

$$u(x) - \lambda v(x) = \hat{u}(x), \quad (3.28)$$

$$v(x) + \frac{EI}{\rho} \lambda u^{(4)}(x) - \frac{\lambda}{\rho} \sum_{j=1}^k \psi_j''(x) M_j = \hat{v}(x), \quad (3.29)$$

$$p - \lambda q = \hat{p}, \quad (3.30)$$

$$q - \frac{EI}{m} \lambda \left(u'''(\ell_0 - 0) - u'''(\ell_0 + 0) \right) + \frac{\varkappa}{m} \lambda p + \frac{\alpha_0}{m} q = \hat{q} \quad (3.31)$$

та, підставивши вираз $v(x) = \frac{1}{\lambda} (u(x) - \hat{u}(x))$ у (3.29), будемо шукати $u(x)$ як розв'язок диференціального рівняння четвертого порядку

$$u^{(4)}(x) + 4\eta^4 u(x) = \gamma(\hat{\xi}(x)), \quad (3.32)$$

де $\eta = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt[4]{\frac{\rho}{\lambda^2 EI}}$, $\gamma(\hat{\xi}(x)) = \frac{1}{EI} \sum_{j=1}^k \psi_j''(x) M_j + \kappa(\hat{\xi}(x))$, при чому

$\check{\kappa}(\hat{\xi}(x)) = 4\eta^4(\hat{u}(x) + \lambda\hat{v}(x))$. Позначимо $u_0(x) = u(x)$, $u_1(x) = u'(x)$, $u_2(x) = u''(x)$, $u_3(x) = u'''(x)$, $U(x) = (u_0(x), u_1(x), u_2(x), u_3(x))^T$ і запишемо рівняння (3.32) як систему чотирьох рівнянь першого порядку у матричному вигляді:

$$\frac{d}{dx} U(x) = NU(x) + \Gamma(\hat{\xi}(x)), \quad (3.33)$$

де $N = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 1} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ -4\eta^4 & \mathbf{0}_{1 \times 3} \end{pmatrix}$, $\Gamma(\hat{\xi}(x)) = (0, 0, 0, \gamma(\hat{\xi}(x)))^T$. Крайові умови (2.13)

для рівняння (3.33) набувають вигляду

$$u_0(0) = u_0(\ell) = 0, \quad u_2(0) = u_2(\ell) = 0, \quad (3.34)$$

а умови інтерфейсу (2.14) — такого вигляду:

$$u_n(\ell_0 - 0) - u_n(\ell_0 + 0) = 0, \quad n = \overline{0, 2}, \quad p = u_0(\ell_0). \quad (3.35)$$

Загальний розв'язок рівняння (3.33) можна отримати за допомогою матричної експоненти:

$$U(x) = \begin{cases} e^{xN}U(0) + \int_0^x e^{(x-s)N} \Gamma(\hat{\xi}(s)) ds, & x \leq \ell_0, \\ e^{(x-\ell)N}U(0) - \int_x^\ell e^{(x-s)N} \Gamma(\hat{\xi}(s)) ds, & x > \ell_0. \end{cases} \quad (3.36)$$

Позначимо матричну експоненту як $G = (G_{ij}(x))_{i,j=1}^4 = e^{xN}$, а також $B_1 = u_1(0)$, $B_2 = u_3(0)$, $B_3 = u_1(\ell)$, $B_4 = u_3(\ell)$. Враховуючи крайові умови (3.34), представимо розв'язок (3.36) через елементи матриці G наступним чином:

$$u_{i-1}(x) = \begin{cases} G_{i2}(x)B_1 + G_{i4}(x)B_2 + \int_0^x G_{i4}(x-s) \gamma(\hat{\xi}(s)) ds, & x \leq \ell_0, \\ G_{i2}(x-\ell)B_3 + G_{i4}(x-\ell)B_4 - \int_x^\ell G_{i4}(x-s) \gamma(\hat{\xi}(s)) ds, & x > \ell_0, \end{cases} \quad (3.37)$$

$i = \overline{1, 4}$. Елементи G_{ij} , $i, j = \overline{1, 4}$, матричної експоненти e^{xN} наведено в додатку А.

Для виключення констант інтегрування B_1, \dots, B_4 запишемо умови ін-

терфейсу (3.35) в такому вигляді:

$$\begin{aligned} G_{i2}(\ell_0) B_1 + G_{i4}(\ell_0) B_2 - G_{i2}(\ell_0 - \ell) B_3 - G_{i4}(\ell_0 - \ell) B_4 = \\ = - \int_0^\ell G_{i4}(\ell_0 - s) \gamma(\hat{\xi}(s)) ds, \quad i = \overline{1, 3}, \end{aligned}$$

а також рівняння (3.31) з урахуванням (3.30), підставляючи $p = u_0(\ell_0)$ та отримані у (3.37) вирази для $u_0(x)$, $u_1(x)$, $u_2(x)$, $u_3(x)$: $u_3(\ell_0 - 0) - u_3(\ell_0 + 0) - \kappa u_0(\ell_0) = \hat{\kappa}(\hat{\xi})$, або

$$\begin{aligned} (G_{42}(\ell_0) - \kappa G_{12}(\ell_0)) B_1 + (G_{44}(\ell_0) - \kappa G_{14}(\ell_0)) B_2 - G_{42}(\ell_0 - \ell) B_3 - \\ - G_{44}(\ell_0 - \ell) B_4 = - \int_0^\ell G_{44}(\ell_0 - s) \gamma(\hat{\xi}(s)) ds + \kappa \int_0^{\ell_0} G_{14}(\ell_0 - s) \gamma(\hat{\xi}(s)) ds + \hat{\kappa}(\hat{\xi}), \end{aligned}$$

де $\kappa = \frac{4\eta^4}{\rho} (\varkappa\lambda^2 + m + \alpha_0\lambda)$, $\hat{\kappa}(\hat{\xi}) = -\frac{4\eta^4}{\rho} ((m + \alpha_0\lambda)\hat{p} + \lambda\hat{q})$. Таким чином, отримано систему алгебраїчних рівнянь для обчислення B_1, \dots, B_4 , яка подається у матричному вигляді: $\tilde{N}(B_1, B_2, B_3, B_4)^T = (\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4)^T$, де

$$\tilde{N} = \begin{pmatrix} G_{12}(\ell_0) & G_{14}(\ell_0) & -G_{12}(\ell_0 - \ell) & -G_{14}(\ell_0 - \ell) \\ G_{22}(\ell_0) & G_{24}(\ell_0) & -G_{22}(\ell_0 - \ell) & -G_{24}(\ell_0 - \ell) \\ G_{32}(\ell_0) & G_{34}(\ell_0) & -G_{32}(\ell_0 - \ell) & -G_{34}(\ell_0 - \ell) \\ G_{42}(\ell_0) - \kappa G_{12}(\ell_0) & G_{44}(\ell_0) - \kappa G_{14}(\ell_0) & -G_{42}(\ell_0 - \ell) & -G_{44}(\ell_0 - \ell) \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_i = \Gamma_i(\hat{\xi}) = - \int_0^\ell G_{i4}(\ell_0 - s) \gamma(\hat{\xi}(s)) ds, \quad i = \overline{1, 3},$$

$$\Gamma_4 = \Gamma_4(\hat{\xi}) = - \int_0^\ell G_{44}(\ell_0 - s) \gamma(\hat{\xi}(s)) ds + \kappa \int_0^{\ell_0} G_{14}(\ell_0 - s) \gamma(\hat{\xi}(s)) ds + \hat{\kappa}(\hat{\xi}).$$

Визначник матриці \tilde{N} розкладається в ряд за степенями η при $\eta \rightarrow 0$ наступним чином: $\det \tilde{N} = -\frac{\ell}{3EI} \left(\varkappa \ell_0^2 (\ell_0^2 + \ell^2) + \ell (3EI - 2\varkappa \ell_0^3) \right) + \mathcal{O}(\eta^2)$.

Отже, існує достатньо велике $\lambda > 0$, для якого $\det \tilde{N} \neq 0$ і існує обернена до \tilde{N} матриця $\bar{\bar{N}} = (\bar{\bar{N}}_{ij})_{i,j=1}^4 = \tilde{N}^{-1}$. Так, параметри B_1, \dots, B_4

можна знайти у вигляді лінійних функціоналів $B_i = B_i(\hat{\xi}) = \sum_{z=1}^4 \bar{\bar{N}}_{iz} \Gamma_z(\hat{\xi})$, $i = \overline{1, 4}$. Підставляючи останні вирази у (3.37), можемо записати розв'язок

$u(x) = u_0(x)$ рівняння (3.32), а також функцію $v(x) = \frac{1}{\lambda}(u(x) - \hat{u}(x))$. Компоненту p знайдемо як $u_0(\ell_0)$, при цьому $q = \frac{1}{\lambda}(p - \hat{p})$. Попередньо зауважимо: оскільки $\psi_0(\ell_0) = 0$, то

$$\gamma(\hat{\xi}(\ell_0)) = \check{\kappa}(\hat{\xi}(\ell_0)) = 4\eta^4(\hat{u}(\ell_0) + \lambda\hat{v}(\ell_0)) = 4\eta^4(\hat{p} + \lambda\hat{q}).$$

Також обчислимо Γ_z в точці ℓ_0 :

$$\Gamma_z(\hat{\xi}(\ell_0)) = -4\eta^4(\hat{p} + \lambda\hat{q}) \int_0^{\ell} G_{z4}(\ell_0 - s) ds, \quad z = \overline{1, 3},$$

$$\Gamma_4(\hat{\xi}(\ell_0)) = 4\eta^4(\hat{p} + \lambda\hat{q}) \left(- \int_0^{\ell} G_{44}(\ell_0 - s) ds + \kappa \int_0^{\ell_0} G_{14}(\ell_0 - s) ds \right) + \hat{\kappa}(\hat{\xi}).$$

Тут члени, які містять елементи матричної експоненти, можна явно проінтегрувати. Позначимо $\check{G}_{z4} = \int_0^{\ell} G_{zx}(\ell_0 - s) ds$, $\check{G}_{14} = \int_0^{\ell_0} G_{14}(\ell_0 - s) ds$ та $\bar{G}_{z,1}(x) = G_{12}(x) \bar{N}_{1z} + G_{14}(x) \bar{N}_{2z}$, $\bar{G}_{z,2}(x) = G_{12}(x - \ell) \bar{N}_{3z} + G_{14}(x - \ell) \bar{N}_{4z}$, $z = \overline{1, 4}$. Тоді

$$p = -4\eta^4 \sum_{z=1}^4 \left((\hat{p} + \lambda\hat{q}) \left(\check{G}_{z4} - \check{G}_{14} \right) - \frac{1}{4\eta^4} \hat{\kappa}(\hat{\xi}) \right) \bar{G}_{z,1}(\ell_0) + 4\eta^4(\hat{p} + \lambda\hat{q}) \check{G}_{14}.$$

Таким чином, отримано розв'язок $\xi = \xi(\hat{\xi}(x))$ рівняння (3.27). Відображення $(I - \lambda\tilde{A}_M)^{-1} : X \rightarrow X$ побудовано у вигляді

$$(I - \lambda\tilde{A}_M)^{-1} : \xi = (u(x), v(x), p, q)^T \mapsto \mathcal{R}\xi = (\mathcal{R}_1\xi, \mathcal{R}_2\xi, \mathcal{R}_3\xi, \mathcal{R}_4\xi)^T$$

із компонентами

$$\mathcal{R}_1\xi = \begin{cases} \sum_{z=1}^4 \bar{G}_{z,1}(x) \Gamma_z(\xi) + \int_0^x G_{14}(x-s) \gamma(\xi(s)) ds, & x \leq \ell_0, \\ \sum_{z=1}^4 \bar{G}_{z,2}(x) \Gamma_z(\xi) - \int_x^{\ell} G_{14}(x-s) \gamma(\xi(s)) ds, & x > \ell_0, \end{cases}$$

$$\mathcal{R}_2\xi = \frac{1}{\lambda}(\mathcal{R}_1\xi - u(x)), \quad \mathcal{R}_4\xi = \frac{1}{\lambda}(\mathcal{R}_3\xi - p),$$

$$\mathcal{R}_3\xi = -4\eta^4 \sum_{z=1}^4 \left((p + \lambda q) \left(\check{G}_{z4} - \check{G}_{14} \right) - \frac{\hat{\kappa}(\xi)}{4\eta^4} \right) \bar{G}_{z,1}(\ell_0) + 4\eta^4(p + \lambda q) \check{G}_{14}.$$

□

Тепер побудуємо резольвенту $R(\lambda; \tilde{A})$ оператора зі зворотним зв'язком.

Теорема 3.1. Резольвенту $R(\lambda; \tilde{A})$ оператора \tilde{A} коректно визначено у просторі X для деякого $\lambda > 0$.

Доведення. Для побудови резольвенти оператора \tilde{A} виключимо з $\mathcal{R}\xi$ константи M_j , $j = \overline{1, k}$, підставивши $v(x) = \mathcal{R}_2\xi$ у формулу (2.17). В результаті підстановки отримаємо систему рівнянь такого вигляду:

$$M_\nu + \sum_{j=1}^k a_{\nu j} M_j = b_\nu(\xi), \quad \nu = \overline{1, k}, \quad (3.38)$$

де вирази $a_{\nu j}$ є константами, що їх наведено в додатку А, а $b_\nu(\xi)$ мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned} b_\nu(\xi) = & -\frac{\alpha_\nu}{\lambda} \left\{ -\sum_{z=1}^4 \left[\int_0^{\ell_0} \psi''_\nu(x) \bar{G}_{z,1}(x) dx + \int_{\ell_0}^{\ell} \psi''_\nu(x) \bar{G}_{z,2}(x) dx \right] \cdot \int_0^{\ell} \check{\kappa}(\xi(s)) G_{z4}(\ell_0 - s) ds + \right. \\ & + \left[\kappa \int_0^{\ell} \check{\kappa}(\xi(s)) G_{14}(\ell_0 - s) ds + \hat{\kappa}(\xi) \right] \cdot \left(\int_0^{\ell_0} \psi''_\nu(x) \bar{G}_{4,1}(x) dx + \int_{\ell_0}^{\ell} \psi''_\nu(x) \bar{G}_{4,2}(x) dx \right) + \\ & \left. + \int_0^{\ell_0} \psi''_\nu(x) \int_0^x \check{\kappa}(\xi(s)) G_{14}(x - s) ds dx - \int_{\ell_0}^{\ell} \psi''_\nu(x) \int_x^{\ell} \check{\kappa}(\xi(s)) G_{14}(x - s) ds dx + \int_0^{\ell} \psi''_\nu(x) u(x) dx \right\}. \end{aligned}$$

Матриця коефіцієнтів неоднорідної системи (3.38) представляється як $\mathcal{N} = \mathbf{I}_{k \times k} + (a_{ij})_{i,j=1}^k$. Її визначник допускає розкладання в ряд за степенями η при $\eta \rightarrow 0$: $\det \mathcal{N} = 1 + \mathcal{O}(\eta^2)$. Значить, для достатньо великих $\lambda > 0$ система (3.38) має єдиний розв'язок $M_j(\xi) = \sum_{\nu=1}^k \bar{N}_{j\nu} b_\nu(\xi)$, $j = \overline{1, k}$. Тут $\bar{N}_{j\nu}$ — елементи матриці, оберненої до \mathcal{N} , $j, \nu = \overline{1, k}$. Позначимо

$$\bar{F}_{jz}(\xi) = \left(\int_0^{\ell} \psi''_j(s) G_{z4}(\ell_0 - s) ds - \kappa \int_0^{\ell_0} \psi''_j(s) G_{14}(\ell_0 - s) ds \right) M_j(\xi) - \hat{\kappa}(\xi),$$

$j = \overline{1, k}$, $z = \overline{1, 4}$, і запишемо резольвенту $R(\lambda; \tilde{A})$:

$$R(\lambda; \tilde{A}) : \xi = (u(x), v(x), p, q)^T \in X \mapsto (R_1\xi, R_2\xi, R_3\xi, R_4\xi)^T \in X, \quad (3.39)$$

де

$$R_1\xi = \begin{cases} -\frac{1}{EI} \sum_{j=1}^k \left(\sum_{z=1}^4 \bar{G}_{z,1}(x) \bar{F}_{jz}(\xi) - M_j(\xi) \int_0^x \psi_j''(s) G_{14}(x-s) ds \right), & x \leq \ell_0, \\ -\frac{1}{EI} \sum_{j=1}^k \left(\sum_{z=1}^4 \bar{G}_{z,2}(x) \bar{F}_{jz}(\xi) + M_j(\xi) \int_x^{\ell} \psi_j''(s) G_{14}(x-s) ds \right), & x > \ell_0, \end{cases}$$

$$R_3\xi = -4\eta^4 \left(\sum_{z=1}^4 \left((p + \lambda q) (\tilde{G}_{z4} - \check{G}_{14}) - \frac{\hat{\kappa}(\xi)}{4\eta^4} \right) \bar{G}_{z,1}(\ell_0) - (p + \lambda q) \check{G}_{14} \right),$$

$$R_2\xi = \frac{1}{\lambda} (R_1\xi - u(x)), \quad R_4\xi = \frac{1}{\lambda} (R_3\xi - p).$$

□

Теорема 3.2. *Нехай оператор \tilde{A} з областю визначення (2.11) задано співвідношеннями (2.21). Тоді резольвента $R(\lambda; \tilde{A}) : X \rightarrow X$ оператора \tilde{A} , яку задано формулою (3.39), є компактним оператором.*

Доведення. Розглянемо гільбертів простір $X' = H^3 \times H^2 \times \mathbb{R}^2 \in X$ зі стандартним скалярним добутком (3.25) і покажемо, що лінійний оператор $R(\lambda; \tilde{A}) : X' \rightarrow X$ є обмеженим. Позначимо $\hat{\kappa}^* = \max \left\{ \left(\frac{8\eta^4(m+\alpha_0\lambda)}{\rho} \right)^2, \left(\frac{8\eta^4\lambda}{\rho} \right)^2 \right\}$, $\kappa_{jz}^* = \max \left\{ 2 \int_0^{\ell} G_{z4}^2(\ell_0 - s) ds \cdot \int_0^{\ell} (\psi_j''(s))^2 ds, 4\kappa^2 \int_0^{\ell_0} G_{14}^2(\ell_0 - s) ds \cdot \int_0^{\ell_0} (\psi_j''(s))^2 ds \right\}$, $j = \overline{1, k}$, $z = \overline{1, 4}$. За допомогою нерівностей Коші–Буняковського–Шварца та (2.22) оцінимо вирази $\bar{F}_{jz}(\xi)$, $j = \overline{1, k}$, $z = \overline{1, 4}$, наступним чином:

$$\begin{aligned} \bar{F}_{jz}^2(\xi) &= \left(M_j(\xi) \int_0^{\ell} G_{z4}(\ell_0 - s) \psi_j''(s) ds - \kappa M_j(\xi) \int_0^{\ell_0} G_{14}(\ell_0 - s) \psi_j''(s) ds - \hat{\kappa}(\xi) \right)^2 \leq \\ &\leq 2M_j^2(\xi) \int_0^{\ell} G_{z4}^2(\ell_0 - s) ds \cdot \int_0^{\ell} (\psi_j''(s))^2 ds + \hat{\kappa}^*(p^2 + q^2) + \\ &+ 4\kappa^2 M_j^2(\xi) \int_0^{\ell_0} G_{14}^2(\ell_0 - s) ds \cdot \int_0^{\ell_0} (\psi_j''(s))^2 ds \leq \kappa_{jz}^* M_j^2(\xi) + \hat{\kappa}^*(p^2 + q^2). \end{aligned}$$

Далі, позначаючи

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{z,n}(x) &= \left(\frac{d^n}{dx^n} G_{12}(x) \right)^2 \bar{N}_{1z}^2 + \left(\frac{d^n}{dx^n} G_{14}(x) \right)^2 \bar{N}_{2z}^2 + \\ &+ \left(\frac{d^n}{dx^n} G_{12}(x - \ell) \right)^2 \bar{N}_{3z}^2 + \left(\frac{d^n}{dx^n} G_{14}(x - \ell) \right)^2 \bar{N}_{4z}^2, \quad n = \overline{0, 3}, \end{aligned}$$

і застосовуючи (2.22) та нерівність Коші–Буняковського–Шварца, отримаємо наступні оцінки для $R_1\xi$ та її похідних²:

$$\int_0^\ell \left(\frac{d^n}{dx^n} R_1\xi \right)^2 dx \leq \frac{4k^*}{(EI)^2} \left[\sum_{j=1}^k M_j^2(\xi) \int_0^\ell \left(4 \sum_{z=1}^4 \kappa_{jz}^* \mathcal{F}_{z,n}(x) + \int_0^\ell \left(G_{14}^{(n)}(x-s) \right)^2 ds \cdot \int_0^\ell (\psi_j''(s))^2 ds \right) dx + 4\hat{\kappa}^* k \sum_{z=1}^4 \int_0^\ell \mathcal{F}_{z,n}(x) dx \cdot (p^2 + q^2) \right], \quad (3.40)$$

$n = \overline{0, 3}$. Застосовуючи також нерівності (2.37) та (2.38), отримаємо аналогічні оцінки для $R_2\xi$ та її похідної:

$$\int_0^\ell (R_2\xi)^2 dx \leq \frac{8k^*}{(\lambda EI)^2} \left[\sum_{j=1}^k M_j^2(\xi) \int_0^\ell \left(4 \sum_{z=1}^4 \kappa_{jz}^* \mathcal{F}_{z,0}(x) + \int_0^\ell G_{14}^2(x-s) ds \cdot \int_0^\ell (\psi_j''(s))^2 ds \right) dx + 4\hat{\kappa}^* k \sum_{z=1}^4 \int_0^\ell \mathcal{F}_{z,0}(x) dx \cdot (p^2 + q^2) \right] + c \frac{\ell^2}{\lambda^2} \int_0^\ell (u''(x))^2 dx, \quad (3.41)$$

$$\int_0^\ell \left(\frac{d}{dx} R_2\xi \right)^2 dx \leq \frac{8k^*}{(\lambda EI)^2} \left[\sum_{j=1}^k M_j^2(\xi) \int_0^\ell \left(4 \sum_{z=1}^4 \kappa_{jz}^* \mathcal{F}_{z,1}(x) + \int_0^\ell (G'_{14}(x-s))^2 ds \cdot \int_0^\ell (\psi_j''(s))^2 ds \right) dx + 4\hat{\kappa}^* k \sum_{z=1}^4 \int_0^\ell \mathcal{F}_{z,1}(x) dx \cdot (p^2 + q^2) \right] + \frac{\ell^2}{\lambda^2} \int_0^\ell (u''(x))^2 dx. \quad (3.42)$$

Тепер введемо позначення $\hat{\kappa}_* = \max \left\{ \left(\frac{4(m+\alpha_0\lambda)}{\rho} \right)^2, \left(\frac{4\lambda}{\rho} \right)^2 \right\}$ і запишемо оцінки для інших компонент $R(\lambda; \tilde{A})$:

$$\varkappa (R_3\xi)^2 \leq H_1 p^2 + H_2 q^2, \quad m (R_3\xi)^2 \leq H_3 p^2 + H_4 q^2, \quad (3.43)$$

²У додатку А наводяться деталі щодо обчислення похідних виразів $R_1\xi$, $R_2\xi$, $R_3\xi$, $R_4\xi$ за допомогою формули Ляйбніца диференціювання інтегралу зі змінними межами інтегрування від функції двох змінних.

де

$$\begin{aligned}
H_1 &= 64 \varkappa \eta^8 \left(8 \sum_{z=1}^4 \bar{G}_{z,1}^2(\ell_0) \left(\tilde{G}_{z4} - \check{G}_{14} \right)^2 + 32\hat{\kappa}_* + \check{G}_{14}^2 \right), \\
H_2 &= 64 \varkappa \eta^8 \left(8\lambda^2 \sum_{z=1}^4 \bar{G}_{z,1}^2(\ell_0) \left(\tilde{G}_{z4} - \check{G}_{14} \right)^2 + 32\hat{\kappa}_* + \lambda^2 \check{G}_{14}^2 \right), \\
H_3 &= \frac{2m}{\lambda^2} \left(64 \eta^8 \left[8 \sum_{z=1}^4 \bar{G}_{z,1}^2(\ell_0) \left(\tilde{G}_{z4} - \check{G}_{14} \right)^2 + 32\hat{\kappa}_* + \check{G}_{14}^2 \right] + 1 \right), \\
H_4 &= 2m \left(\frac{8\eta^4}{\lambda} \right)^2 \left[8\lambda^2 \sum_{z=1}^4 \bar{G}_{z,1}^2(\ell_0) \left(\tilde{G}_{z4} - \check{G}_{14} \right)^2 + 32\hat{\kappa}_* + \lambda^2 \check{G}_{14}^2 \right].
\end{aligned}$$

Залишається отримати оцінки виразів $M_j^2(\xi)$:

$$M_j^2(\xi) = \left(\sum_{\nu=1}^k \bar{N}_{j\nu} b_\nu(\xi) \right)^2 \leq k^* \sum_{\nu=1}^k \bar{N}_{j\nu}^2 b_\nu^2(\xi), \quad j = \overline{1, k}. \quad (3.44)$$

Тут $k^* = 2^{\left\lceil \frac{k+1}{2} \right\rceil}$. Зауважимо, що елементи матриці $\bar{N}_{j\nu}$ не залежать від ξ , тому достатньо оцінити зверху вирази $b_\nu^2(\xi)$, $\nu = \overline{1, k}$. Застосовуючи техніку, аналогічну до попередніх міркувань, можна отримати такі нерівності:

$$b_\nu^2(\xi) \leq \dot{H}_\nu \int_0^\ell (u''(x))^2 dx + \dot{H}_\nu \int_0^\ell v^2(x) dx + \frac{8\alpha_\nu^2}{\lambda^2} \acute{\kappa}_\nu (p^2 + q^2), \quad (3.45)$$

де

$$\begin{aligned}
\dot{H}_\nu &= c \left(\frac{2\alpha_\nu \ell}{\lambda} \right)^2 \left(\left(64 \eta^8 \ell_0 \int_0^\ell \int_0^\ell G_{14}^2(x-s) ds dx + 1 \right) \cdot \int_0^\ell (\psi_\nu''(x))^2 dx + 64 \eta^8 \check{H}_\nu \right), \\
\dot{H}_\nu &= 2 (16 \alpha_\nu \eta^4)^2 \left(\check{H}_\nu + \ell_0 \int_0^\ell (\psi_\nu''(x))^2 dx \cdot \int_0^\ell \int_0^\ell G_{14}^2(x-s) ds dx \right), \\
\acute{\kappa}_\nu &= \max \left\{ 2 \left(\frac{8\check{H}_{4,\nu}\eta^4}{\rho} (m + \alpha_0 \lambda) \right)^2, 2 \left(\frac{8\check{H}_{4,\nu}\eta^4 \lambda}{\rho} \right)^2 \right\},
\end{aligned}$$

при чому \mathbf{c} — константа Пуанкаре з нерівності (2.37),

$$\begin{aligned} \check{H}_\nu &= 2 \sum_{z=1}^4 \int_0^\ell G_{z4}^2(\ell_0 - s) ds \check{H}_{z,\nu}^2 + \kappa^2 \check{H}_{4,\nu}^2 \int_0^\ell G_{14}^2(\ell_0 - s) ds, \\ \check{H}_{z,\nu} &= \int_0^{\ell_0} \psi_\nu''(x) \bar{G}_{z,1}(x) dx + \int_{\ell_0}^\ell \psi_\nu''(x) \bar{G}_{z,2}(x) dx, \quad z = \overline{1,4}. \end{aligned}$$

Підставляючи оцінки (3.44), (3.45) у (3.40)–(3.43), бачимо, що існує константа $\Lambda > 0$, така, що виконано нерівність $\|R\xi\|_{X'}^2 \leq \Lambda \|\xi\|_X^2$. Цей факт доводить обмеженість резольвенти $R(\lambda; \tilde{A})$ як відображення з X' в X . Оскільки, згідно з теоремами Соболева, $X' \Subset X$, оператор $R(\lambda; \tilde{A}) : X \rightarrow X$, заданий в (3.39), є компактним. \square

Оскільки резольвента оператора \tilde{A} є компактною, згідно з теоремою Дафермоса–Слемрода [19], отримано наступний наслідок.

Наслідок 3.3. *Кожна траєкторія замкненої системи (2.19) є передкомпактною множиною у просторі X .*

3.4. Асимптотична поведінка траєкторій замкненої системи

Достатні умови асимптотичної стійкості стану рівноваги системи з пружною балкою і твердим тілом сформульовані у вигляді наступної теореми.

Теорема 3.3. *Нехай $\{\xi_i = (u_i, v_i, p_i, q_i)^T\}_{i \in \mathbb{N}}$ — власні вектори оператора A та для кожного $i \in \mathbb{N}$ виконано $v_i(\ell_0) \neq 0$ або $\int_0^\ell \psi_j''(x) v_i(x) dx \neq 0$ для деякого $j \in \{1, \dots, k\}$. Тоді розв'язок $\xi = 0$ системи (2.19) є асимптотично стійким.*

Фактично, припущення $\int_0^\ell \psi_j''(x) v_i(x) dx \neq 0$ для деякого $j \in \{1, \dots, k\}$ означає, що j -й п'єзоактуатор не розташований у вузлі i -ї власної форми коливань балки.

Доведення. Спираючись на принцип інваріантності [77, Теорема 3.64], достатньо довести, що множина $Z = \{\dot{V}(\xi) = 0\}$, де $V(\xi)$ — функціонал

Ляпунова вигляду (2.54), не містить нетривіальних траєкторій замкненої системи. Нехай $\xi(t)$ — розв'язок (2.19) і нехай $\xi(t) \in Z$, $\forall t \geq 0$. Легко перевірити, що керування зі зворотним зв'язком y на множині Z вироджується в нульовий вектор. Це означає, що розв'язок $\xi(t)$ задовольняє наступне рівняння на множині Z :

$$\dot{\xi} = A\xi. \quad (3.46)$$

З огляду на наслідок 3.2 система власних векторів $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ оператора A є базисом простору X . Розкладемо функцію $\xi(t)$ в ряд за $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$:

$$\xi(t) = \sum_{i=1}^{\infty} r_i(t) \xi_i, \quad (3.47)$$

тут r_i — коефіцієнти розкладання за базисом, які залежать від t . Підставляючи розклад (3.47) у рівняння (3.46) і враховуючи рівність $A\xi_i = \lambda_i \xi_i$, де λ_i — власні значення оператора A , $i = 1, 2, \dots$, отримуємо наступне: $\sum_{i=1}^{\infty} \dot{r}_i(t) \xi_i = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i r_i(t) \xi_i$. В силу єдиності розкладу функції за базисом, маємо рівняння $\dot{r}_i(t) = \lambda_i r_i(t)$ із розв'язком $r_i(t) = r_i^0 e^{\lambda_i t}$, де $r_i^0 = r_i(0)$.

Оскільки $\xi \in Z$,

$$\int_0^{\ell} \psi_j''(x) v(x) dx = 0, \quad j = \overline{1, k}. \quad (3.48)$$

Запишемо окремо розклад компоненти $v(x)$ фазового вектора за тим же базисом $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$:

$$v(x) = \sum_{i=1}^{\infty} r_i(t) v_i(x) = \sum_{i=1}^{\infty} r_i^0 e^{\lambda_i t} v_i(x). \quad (3.49)$$

Підставляючи (3.49) у (3.48), отримуємо лінійну комбінацію функцій $e^{\lambda_i t}$, яка дорівнює нулю. Згідно з лемою 3.4, функції $e^{\lambda_i t}$, $i \in \mathbb{N}$, є ω -лінійно незалежними, тому всі коефіцієнти лінійної комбінації дорівнюють нулеві: $r_i^0 \int_0^{\ell} \psi_j''(x) v_i(x) dx = 0$, $i \in \mathbb{N}$. Якщо виконано умову $\int_0^{\ell} \psi_j''(x) v_i(x) dx \neq 0$, то $r_i^0 = 0$, $\forall i \in \mathbb{N}$, що призводить до $\xi(t) \equiv 0$. Розкладаючи аналогічним чином компоненту $q = v(\ell_0)$ фазового вектора за базисом $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$, отри-

муємо $q = \sum_{i=1}^{\infty} r_i^0 e^{\lambda_i t} v_i(\ell_0)$, звідки за виконання умови $v_i(\ell_0) \neq 0$ для всіх $i \in \mathbb{N}$ впливає $r_i^0 = 0$ в силу ω -лінійної незалежності системи $e^{\lambda_i t}$, $i \in \mathbb{N}$ (лема 3.4). Таким чином, множина Z не містить жодної траєкторії системи (2.19), окрім тривіальної, якщо для кожного $i \in \mathbb{N}$ виконано хоча б одну з умов: $v_i(\ell_0) \neq 0$ або $\int_0^{\ell} \psi_j''(x) v_i(x) dx \neq 0$ для деякого $j \in \{1, \dots, k\}$. Згідно з принципом інваріантності ЛаСалля [77, Теорема 3.64], тривіальний розв'язок системи, що розглядається, є асимптотично стійким. \square

Висновки до розділу 3

У розділі 3 досліджено спектральні властивості оператора A . Отримано характеристичне рівняння і аналітично досліджено асимптотичні властивості власних частот коливань пружної балки. Ці результати проілюстровано за допомогою чисельного моделювання.

Досліджено властивості оберненого до A оператора і побудовано базис гільбертового простору у вигляді власних значень оператора A .

В результаті аналізу асимптотичної поведінки власних значень $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ оператора A доведено ω -лінійну незалежність системи експоненціальних функцій $\{e^{\lambda_n t}\}_{n=1}^{\infty}$.

Побудовано резольвенту диференціального оператора зі зворотним зв'язком. Для неї отримано оцінку норми і доведено компактність. На основі теореми Дафермоса–Слемрода показано передкомпактність траєкторій замкненої системи.

Отримано достатні умови асимптотичної стійкості тривіального стану рівноваги замкненої системи. Асимптотичну стійкість доведено на основі принципу інваріантності ЛаСалля.

Результати, отримані у розділі 3, опубліковано у статтях [42] та [41].

РОЗДІЛ 4

СИНТЕЗ ДИНАМІЧНОГО СПОСТЕРІГАЧА ДЛЯ МОДЕЛІ ПРУЖНОЇ СИСТЕМИ

У попередніх розділах було досліджено задачу стабілізації зі зворотним зв'язком за станом для нескінченновимірної системи. Було запропоновано керування, яке забезпечує сильну асимптотичну стійкість стану рівноваги. У цьому розділі дослідження задач стійкості поширюється на проблему спостереження стану системи з виходом. Метою є вирішення питання, чи можна асимптотично відновити вектор стану виходячи з інформації про вхідні та вихідні сигнали системи. Припускається, що описану вище балкову систему оснащено п'єзоелектричними сенсорами, які розташовано у зонах прикріплення п'єзоактуаторів з протилежного боку балки. Сенсори дозволяють отримувати вихідну інформацію про рух окремих точок механічної системи.

4.1. Побудова спостерігача для скінченновимірної моделі пружної балки з приєднаною масою та розподіленими сенсорами

У цьому підрозділі досліджується задача спостереження для скінченновимірного наближення моделі пружної балки.

4.1.1. Спектральна задача для шарнірно опертої балки з точковою масою. Розглянемо однорідну задачу (2.4)–(2.6) з вимкненим керуванням $F_0 = 0$, $M_1 = M_2 = \dots = M_k = 0$.

Нехай $C' = C^2[0, \ell] \cap C^4([0, \ell] \setminus \{\ell_0\})$. Підставимо $w(x, t) = W(x)q(t)$ в (2.4)–(2.6) і отримаємо диференціальне рівняння $\ddot{q}(t) = -\lambda q(t)$ та

спектральну задачу:

$$\begin{aligned} \frac{d^4}{dx^4} W(x) &= \lambda \frac{\rho}{EI} W(x), \quad x \in (0, \ell) \setminus \{\ell_0\}, \\ W(0) = W(\ell) = 0, \quad W''(0) = W''(\ell) = 0, \quad W(\cdot) &\in C', \\ W'''(\ell_0 - 0) - W'''(\ell_0 + 0) &= \frac{\varkappa - \lambda m}{EI} W(\ell_0). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Власні функції наведеної задачі мають вигляд

$$W(x) = \begin{cases} C_1 \sin(\mu x) + C_2 \sinh(\mu x), & x \leq \ell_0, \\ B_1 \sin(\mu(x - \ell)) + B_2 \sinh(\mu(x - \ell)), & x > \ell_0, \end{cases}$$

де $\mu = \left(\frac{\lambda \rho}{EI}\right)^{1/4}$, а константи C_1, C_2, B_1, B_2 можна знайти, розв'язавши систему лінійних алгебраїчних рівнянь $\mathcal{M}(C_1, C_2, B_1, B_2)^T = 0$ з матрицею

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \sin \mu \ell_0 & -\sinh \mu \ell_0 & -\sin \mu(\ell_0 - \ell) & \sinh \mu(\ell_0 - \ell) \\ \sin \mu \ell_0 & \sinh \mu \ell_0 & -\sin \mu(\ell_0 - \ell) & -\sinh \mu(\ell_0 - \ell) \\ \cos \mu \ell_0 & \cosh \mu \ell_0 & -\cos \mu(\ell_0 - \ell) & -\cosh \mu(\ell_0 - \ell) \\ \kappa_1(\mu) & \kappa_2(\mu) & -\cos \mu(\ell_0 - \ell) & \cosh \mu(\ell_0 - \ell) \end{pmatrix},$$

де $\kappa_1(\mu) = \frac{\varkappa - \lambda m}{EI\mu^3} \sin \mu \ell_0 + \cos \mu \ell_0$, $\kappa_2(\mu) = \frac{\varkappa - \lambda m}{EI\mu^3} \sinh \mu \ell_0 - \cosh \mu \ell_0$. Власні значення λ спектральної задачі (4.1) можна знайти як розв'язки наступного характеристичного рівняння

$$\det \mathcal{M} = 0. \quad (4.2)$$

Рівняння (4.2) співпадає з (3.9) з точністю до позначення спектрального параметра.

Нехай $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ — власні значення задачі (4.1), $W_1(x), W_2(x), \dots$ — відповідні власні функції. У просторі $H = H^1(0, \ell)$ задамо білінійну форму

$$\langle W_i, W_j \rangle_H = \int_0^\ell \rho W_i(x) W_j(x) dx + m W_i(\ell_0) W_j(\ell_0) \quad (4.3)$$

та відповідну квадратичну форму $\|W_j\|_H^2 = \langle W_j, W_j \rangle_H$. Усі власні значення задачі (4.1) розподілені вздовж додатної дійсної піввісі; власні функції, що відповідають різним власним значенням, є взаємно ортогональними.

Доведення цих тверджень міститься у наступних двох лемах.

Лема 4.1. Якщо $\lambda_i \neq \lambda_j$, то $\langle W_i, W_j \rangle_H = 0$.

Доведення. Інтегрування частинами виразу $\int_0^\ell W_i''(x) W_j''(x) dx$ з урахуванням умов інтерфейсу $W_j'''(\ell_0 - 0) - W_j'''(\ell_0 + 0) = \frac{\varkappa - \lambda m}{EI} W_j(\ell_0)$, призводить до $\int_0^\ell W_j(x) \frac{d^4}{dx^4} W_i(x) dx + \frac{\lambda_i m - \varkappa}{EI} W_i(\ell_0) W_j(\ell_0)$ з одного боку та до $\int_0^\ell W_i(x) \frac{d^4}{dx^4} W_j(x) dx + \frac{\lambda_j m - \varkappa}{EI} W_i(\ell_0) W_j(\ell_0)$ з іншого боку. Обчисливши різницю між цими двома виразами, маємо

$$\int_0^\ell \left(W_j(x) \frac{d^4}{dx^4} W_i(x) - W_i(x) \frac{d^4}{dx^4} W_j(x) \right) dx + \frac{m}{EI} (\lambda_i - \lambda_j) W_i(\ell_0) W_j(\ell_0) = 0.$$

Оскільки обидві функції $W_i(x)$ та $W_j(x)$ задовольняють (4.1), то $(\lambda_i - \lambda_j) \langle W_i, W_j \rangle_H = 0$, що призводить до $\langle W_i, W_j \rangle_H = 0$ для $\lambda_i \neq \lambda_j$. \square

Лема 4.2. Кожне власне значення спектральної задачі (4.1) є невід'ємним дійсним числом.

Доведення. Розглянемо диференціальний оператор $\mathcal{L} : D(\mathcal{L}) \rightarrow \tilde{H}$, заданий наступним чином:

$$\zeta = \begin{pmatrix} u(x) \\ p \end{pmatrix} \mapsto \mathcal{L} \zeta = \begin{pmatrix} \frac{EI}{\rho} u^{(4)}(x) \\ \frac{\varkappa}{m} p - \frac{EI}{m} (u'''(\ell_0 - 0) - u'''(\ell_0 + 0)) \end{pmatrix},$$

з областю визначення

$$D(\mathcal{L}) = \left\{ \zeta \in H^2(0, \ell) \cup H^4(0, \ell_0) \cup H^4(\ell_0, \ell) \times \mathbb{R} : \begin{array}{l} u(0) = u(\ell) = 0, \quad u''(0) = u''(\ell) = 0, \\ u''(\ell_0 - 0) = u''(\ell_0 + 0), \quad p = u(\ell_0) \end{array} \right\} \subset \tilde{H}$$

і значеннями у просторі $\tilde{H} = L^2(0, \ell) \times \mathbb{R}$. Тоді задачу (4.1) можна записати як спектральну задачу для оператора \mathcal{L} : $\mathcal{L} \zeta = \lambda \zeta$. Запишемо білінійну форму (4.3) в термінах елементів простору \tilde{H} :

$$\langle \zeta_i, \zeta_j \rangle_{\tilde{H}} = \left\langle \begin{pmatrix} u_i \\ p_i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_j \\ p_j \end{pmatrix} \right\rangle_{\tilde{H}} = \int_0^\ell \rho u_i(x) u_j(x) dx + m p_i p_j. \quad (4.4)$$

Безпосередньою підстановкою відповідних операндів нескладно перевіри-

ти, що $\langle \mathcal{L}\zeta_i, \zeta_j \rangle_{\tilde{H}} = \int_0^\ell EI u_i^{(4)}(x) u_j(x) dx + \varkappa p_i p_j - EI \left(u_i'''(\ell_0 - 0) - u_i'''(\ell_0 + 0) \right) p_j$

та $\langle \zeta_i, \mathcal{L}\zeta_j \rangle_{\tilde{H}} = \int_0^\ell EI u_i(x) u_j^{(4)}(x) dx + \varkappa p_i p_j - EI \left(u_j'''(\ell_0 - 0) - u_j'''(\ell_0 + 0) \right) p_i$.

Інтегрування частинами з урахуванням умов інтерфейсу призводить до $\langle \mathcal{L}\zeta_i, \zeta_j \rangle_{\tilde{H}} = \langle \zeta_i, \mathcal{L}\zeta_j \rangle_{\tilde{H}}$. Крім того, легко перевірити виконання для всіх

$\zeta \in D(\mathcal{L})$ наступних співвідношень: $\langle \zeta, \mathcal{L}\zeta \rangle_{\tilde{H}} = \int_0^\ell EI (u''(x))^2 dx + \varkappa p^2 \geq 0$.

Таким чином, \mathcal{L} є додатним самоспряженим оператором відносно білінійної форми $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\tilde{H}}$, заданої формулою (4.4), тому власні значення \mathcal{L} є дійсними невід'ємними числами. \square

4.1.2. Метод Гальоркіна для шарнірно опертої балки з приєднаною масою. Зафіксуємо довільне ціле число $N \geq 1$ і спроектуємо однорідну задачу (2.4)–(2.6) на лінійну оболонку N власних функцій спектральної задачі (4.1). Розглянемо скінченний набір власних значень $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ і відповідних власних функцій $W_1(x), W_2(x), \dots, W_N(x)$ задачі (4.1). Підставимо

$$w(x, t) = \sum_{j=1}^N W_j(x) q_j(t) \quad (4.5)$$

у варіаційну форму рівнянь руху (2.3), припускаючи, що (2.3) виконано для всіх $\delta w(\cdot, t) \in \text{span} \{W_1, W_2, \dots, W_N\}$, $t \geq 0$. В результаті отримаємо наближену за Гальоркіним систему диференціальних рівнянь відносно $q_1(t), \dots, q_N(t)$:

$$\ddot{q}_j + \lambda_j q_j = \frac{W_j(\ell_0)}{\|W_j\|_H^2} u_0 + \frac{1}{\|W_j\|_H^2} \sum_{i=1}^k \left(u_i \int_0^\ell \psi_i(x) W_j''(x) dx \right), \quad j = \overline{1, N}, \quad (4.6)$$

де $u_0 = F_0$, $u_i = M_i$, $i = \overline{1, k}$. Систему N диференціальних рівнянь другого порядку (4.6) можна записати як систему $2N$ рівнянь першого порядку у векторному вигляді:

$$\dot{z} = Az + Bu. \quad (4.7)$$

Тут $z = (q_1, p_1, \dots, q_N, p_N)^T \in \mathbb{R}^{2N}$ — вектор стану, $\dot{q}_j = p_j$, $j = \overline{1, N}$, $u = (u_0, u_1, \dots, u_k)^T \in \mathbb{R}^{k+1}$ — керування, $A = \text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_N)$ — блочно-діагональна матриця із квадратними блоками вигляду $A_j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda_j & 0 \end{pmatrix}$, $j = \overline{1, N}$, а елементи матриці коефіцієнтів керування $B = (B_0, \dots, B_k)$, де $B_\iota = (0, b_{1\iota}, \dots, 0, b_{N\iota})^T$, $\iota = \overline{0, k}$, задаються наступними співвідношеннями:

$$b_{j0} = \frac{W_j(\ell_0)}{\|W_j\|_H^2}, \quad b_{ji} = \frac{1}{\|W_j\|_H^2} \int_0^\ell \psi_i(x) W_j''(x) dx, \quad j = \overline{1, N}, \quad i = \overline{1, k}.$$

4.1.3. Спостережуваність системи з виходом. Побудуємо спостерігач типу Луенбергера [73, 74]. Припустимо, що стан $w(x, t)$ пружної балки можна оцінювати завдяки вимірюванням $r + 1$ сенсорів, розташованих у точках $x = \ell_0, \ell_1, \dots, \ell_r$. Сенсор у точці ℓ_0 забезпечує вимірювання зсуву $y_0(t) = w(\ell_0, t)$ як функції часу. Припускаємо також, що п'єзoeлектричні сенсори в точках $x = \ell_1, \dots, \ell_r$ забезпечують вимірювання значень функцій

$$y_s(t) = w''(\ell_s, t), \quad s = \overline{0, r} \quad (4.8)$$

як вихідні дані моделі (2.4)–(2.6). Тоді, оскільки представлення (4.5) використовується для отримання системи Гальоркіна (4.7), запишемо (4.8) в термінах функцій $q_1(t), \dots, q_N(t)$ у вигляді $y_s(t) \approx \sum_{j=1}^N W_j''(\ell_s) q_j(t)$, $s = \overline{1, r}$. Таким чином, припустимо, що для системи (4.7) доступні такі вихідні дані:

$$y = Cz \in \mathbb{R}^{r+1}, \quad (4.9)$$

де $C = (C_1, \mathbf{0}, \dots, C_N, \mathbf{0})$, $C_j = (c_{0j}, c_{1j}, \dots, c_{rj})^T$, $\mathbf{0}$ — нульова матриця розмірності $(r+1) \times 1$, при цьому $c_{0j} = W_j(\ell_0)$, $c_{sj} = W_j''(\ell_s)$, $s = \overline{1, r}$, $j = \overline{1, N}$.

Теорема 4.1. *Нехай маємо набір різних власних значень $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ спектральної задачі (4.1) та нехай для кожного $j = \overline{1, N}$ існує таке $s \in \{0, \dots, r\}$, що $c_{sj} \neq 0$. Тоді система (4.7) з виходом (4.9) є спостережуваною.*

Доведення. Доведення цієї леми зводиться до перевірки рангової умови спостережуваності Калмана [40], а саме до перевірки рівності $\text{rank } K = 2N$ для матриці $K = (C, CA, \dots, CA^{2N-1})^T$. Належними перестановками строк і стовпців матриця K приводиться до блочного вигляду

$$\begin{pmatrix} K_0 & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots \\ K_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & K_0 \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & K_r \end{pmatrix}, \quad \text{де } K_s = \begin{pmatrix} c_{s1} & \dots & c_{sN} \\ -\lambda_1 c_{s1} & \dots & -\lambda_N c_{sN} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -\lambda_1^{N-1} c_{s1} & \dots & -\lambda_N^{N-1} c_{sN} \end{pmatrix}, \quad s = \overline{0, r},$$

$\mathbf{0}$ — нульова матриця відповідної розмірності. Кожен з блоків K_s є матрицею типу Вандермонда, чий визначник можна обчислити за формулою $\det K_s = \prod_{i=1}^N c_{si} \prod_{1 \leq j < n \leq N} (\lambda_n - \lambda_j)$, $s = \overline{0, r}$. Згідно з припущенням теореми, прямокутний блок $(K_0^T \dots K_r^T)^T$ містить ненульовий мінор порядку N . Тому $\text{rank } K = 2N$, і система (4.7), (4.9) є спостережуваною за критерієм Калмана. \square

Для системи з виходом (4.7), (4.9) побудуємо динамічний спостерігач у вигляді

$$\dot{\tilde{z}}(t) = (A - FC)\tilde{z}(t) + Bu(t) + Fy(t), \quad (4.10)$$

де $F = (F_0, \dots, F_r)$, $F_s = (f_{1s}, 0, \dots, f_{Ns}, 0)^T$, $s = \overline{0, r}$.

Задача побудови спостерігача для системи з виходом (4.7), (4.9) полягає у знаходженні такої матриці F , що розв'язки системи (4.7) збігаються до розв'язків системи (4.10) для довільного керування $u \in L^\infty(0, +\infty)$ і довільних початкових умов $z(0), \tilde{z}(0) \in \mathbb{R}^{2N}$. Ця задача зводиться до знаходження такої матриці F , що матриця $A - FC$ є гурвіцевою, тобто множина її власних значень міститься у відкритій лівій комплексній півплощині. Наступна теорема надає спосіб обчислення елементів матриці F .

Теорема 4.2. *Нехай $\lambda_j > 0$ та $|c_{0j}| + |c_{1j}| + \dots + |c_{rj}| \neq 0$ для всіх $j = \overline{1, N}$. Якщо $f_{js} = \gamma_s \frac{c_{sj}}{\lambda_j \|W_j\|_H^2}$, $j = \overline{1, N}$, $s = \overline{0, r}$, де $\gamma_s > 0$ — до-*

вільні константи, то для всіх $z(0) \in \mathbb{R}^{2N}$, $\tilde{z}(0) \in \mathbb{R}^{2N}$ та $u \in L^\infty(0, \infty)$ відповідні розв'язки $z(t)$ та $\tilde{z}(t)$ системи (4.7), (4.9) та системи (4.10) задовольняють умову

$$\|z(t) - \tilde{z}(t)\|_{\mathbb{R}^{2N}} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \rightarrow +\infty. \quad (4.11)$$

Доведення. Будемо обчислювати похибку спостережень як різницю між векторами стану вихідної системи та спостерігача: $e(t) = z(t) - \tilde{z}(t) = (\Delta_1, \delta_1, \dots, \Delta_N, \delta_N)^T$. Для опису динаміки похибки віднімемо (4.10) від (4.7) та отримаємо

$$\dot{e} = (A - FC)e. \quad (4.12)$$

Збіжність спостерігача означає, що похибка $e(t)$ прямує до нуля при $t \rightarrow +\infty$. Тому досліджуватимемо на стійкість розв'язок $e(t) = 0$ рівняння (4.12). Розглянемо додатно визначену квадратичну форму $2\mathcal{W}(e) = \sum_{j=1}^N \|W_j\|_H^2 (\delta_j^2 + \lambda_j \Delta_j^2)$ та обчислимо її похідну за часом вздовж траєкторій системи (4.12):

$$\dot{\mathcal{W}}(e) = - \sum_{s=1}^r \sum_{j=1}^N \|W_j\|_H^2 \lambda_j \Delta_j f_{js} \cdot \sum_{i=1}^N C_{si} \Delta_i = - \sum_{s=1}^r \gamma_s \left(\sum_{j=1}^N C_{sj} \Delta_j \right)^2.$$

Оскільки $\gamma_s > 0$, бачимо, що $\dot{\mathcal{W}}(e) \leq 0$. Таким чином, $\mathcal{W}(e)$ є функцією Ляпунова для системи (4.12). Згідно з теоремою Ляпунова, тривіальний розв'язок системи (4.12) є стійким.

Перевіримо, чи система (4.12) допускає нетривіальні траєкторії на множині $Z = \left\{ e \in \mathbb{R}^{2N} \mid \dot{\mathcal{W}}(e) = 0 \right\}$. Оскільки $\gamma_s > 0$ для всіх $s = \overline{0, r}$, то-

тожність $\dot{\mathcal{W}}(e) \equiv 0$ означає $\sum_{j=1}^N C_{sj} \Delta_j(t) \equiv 0$, або, в матричній формі,

$$Ce(t) \equiv 0, \quad (4.13)$$

що, в свою чергу, призводить до рівності нулю похідних $\frac{d^n}{dt^n} Ce(t)$ для всіх $n = 0, 1, \dots$. З огляду на (4.13), система (4.12) на множині Z зводиться до

$$\dot{e}(t) = Ae(t). \quad (4.14)$$

Обчислюючи похідні $Ce(t)$ до $(2N - 1)$ -ї вздовж траєкторій системи (4.14),

отримаємо $2N$ рівностей вигляду $\frac{d^n}{dt^n} Ce(t) = CA^n e(t)$, $n = 0, 1, \dots, 2N-1$. Таким чином, компоненти вектора $e(t)$ задовольняють наступну систему алгебраїчних рівнянь:

$$CA^n e(t) = 0, \quad n = 0, 1, \dots, 2N-1. \quad (4.15)$$

Оскільки система (4.7), (4.9) є спостережуваною в силу теореми 4.1, система (4.15) допускає лише тривіальні розв'язки $e(t) \equiv 0$. Отже, множина Z не містить нетривіальних траєкторій системи (4.12). Згідно з теоремою Барбашина–Красовського, тривіальний розв'язок системи (4.12) є асимптотично стійким. \square

Зауваження 4.1. У розглянутому випадку рівняння похибки спостережень (4.12) є лінійним, тому виконання отриманих умов асимптотичної стійкості забезпечує глобальну експоненціальну збіжність у (4.11).

4.1.4. Результати чисельного моделювання. Проілюструємо поведінку траєкторій системи з керуванням (4.7), (4.9) та динамічного спостерігача (4.10) за допомогою чисельного моделювання для $N = 6$ мод коливань. Комп'ютерні обчислення проведені з урахуванням механічних параметрів, заданих у (3.23). У розрахунках передбачається, що модель рухається під дією періодичної сили $F_0 = \sin 4t$, а в якості вихідних сигналів розглядається поперечне переміщення балки в точці $x = \ell_0$, тобто припускається, що п'єзоактуатори вимкнені, а вихідні сигнали п'єзосенсорів не враховуються. Крім того, для чисельних розрахунків обрано параметр підсилення спостерігача $\gamma_1 = 3$ і початкові умови $\tilde{z}(0) = 0$, $q_i(0) = 0.1$, $p_i(0) = 0.1$, $i = \overline{1, N}$.

На рис. 4.1 представлено загальну зважену похибку $\|e(t)\|^2 = \frac{\kappa}{2} \sum_{j=1}^N (\Delta_j(t))^2 + \frac{m}{2} \sum_{j=1}^N (\delta_j(t))^2$, тоді як графіки високочастотної компоненти похибки спостереження зображено на рис. 4.2 та 4.3. Наведені часові графіки ілюструють збіжність запропонованого спостерігача для розглянутої багатовимірної моделі.

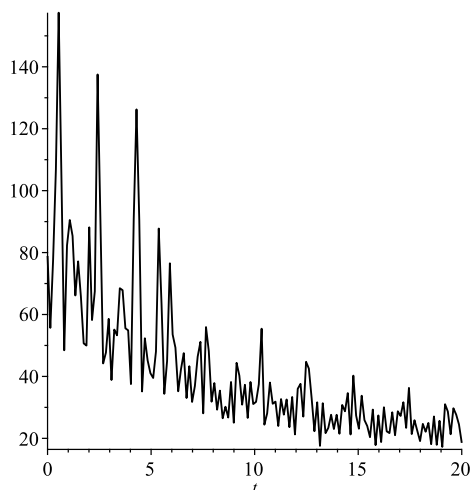
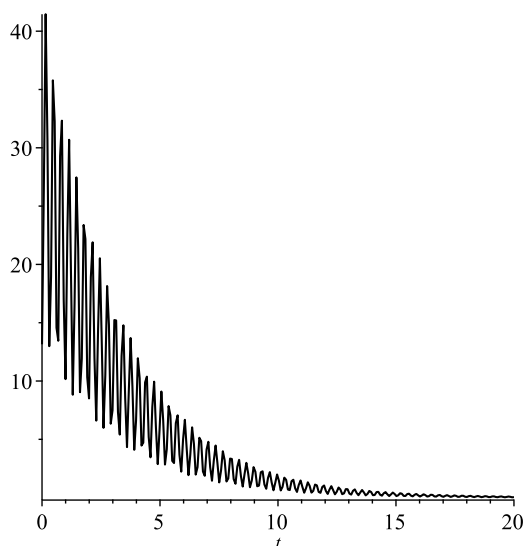
Рис. 4.1: Графік функції $\|e(t)\|^2$ 

Рис. 4.2: Графік функції

$$\frac{\kappa}{2}(\Delta_N(t))^2 + \frac{m}{2}(\delta_N(t))^2$$

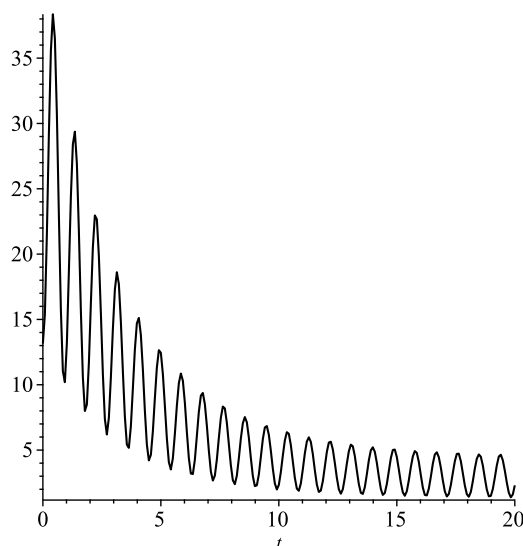


Рис. 4.3: Графік функції

$$\frac{\kappa}{2}(q_N(t) - \bar{q}_N(t))^2 + \frac{m}{2}(p_N(t) - \bar{p}_N(t))^2$$

4.2. Синтез спостерігача для класу нескінченновимірних коливальних пружних систем

У цьому підрозділі досліджується задача спостереження для класу пружних механічних систем у нескінченновимірному просторі. Даний результат є узагальненням отриманого в підрозділі 4.1 алгоритму побудови спостерігача, який було запропоновано для скінченновимірних наближень

задачі про коливання пружної балки з твердим тілом.

4.2.1. Нескінченновимірна система керування з виходом.

Введемо у розгляд простір $H = \ell^2 \times \ell^2$, де ℓ^2 — простір дійсних послідовностей $\{a_n\}_{n=1}^\infty$, для яких $\sum_{n=1}^\infty a_n^2 < \infty$. Розглянемо нескінченновимірну систему з керуванням та виходом:

$$\dot{z} = Az + Bu, \quad z \in H, \quad u \in \mathbb{R}^{k+1}, \quad (4.16)$$

$$y = Cz, \quad y \in \mathbb{R}^r, \quad k, r \in \mathbb{N}. \quad (4.17)$$

Вектор стану $z = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$ складається з компонент $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots)^T \in \ell^2$ та $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots)^T \in \ell^2$. Керування $u = (u_0, u_1, \dots, u_k)^T$ і вихід $y = (y_1, \dots, y_r)^T$ є скінченновимірними векторами.

Наступна формула задає скалярний добуток у дійсному гільбертовому просторі H , успадкований від стандартного скалярного добутку простору ℓ^2 : $\left\langle \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{\xi} \\ \tilde{\eta} \end{pmatrix} \right\rangle_H = \sum_{j=1}^\infty (\xi_j \tilde{\xi}_j + \eta_j \tilde{\eta}_j)$. Оператори $A : D(A) \rightarrow H$, $B : \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow H$, $C : H \rightarrow \mathbb{R}^r$ визначаються в термінах ξ - та η -компонент вектора $z \in H$ таким чином: $A : z = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \mapsto Az = \begin{pmatrix} \Omega \eta \\ -\Omega \xi \end{pmatrix}$, $Bu = \begin{pmatrix} 0 \\ B_1 u \end{pmatrix}$, $Cz = C_1 \xi$, де $\Omega = \text{diag}(\omega_1, \omega_2, \dots)$, а оператори $B_1 : \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow \ell^2$, $C_1 : \ell^2 \rightarrow \mathbb{R}^r$ задані наступним чином: $B_1 = (\check{B}_0, \dots, \check{B}_k)$, $\check{B}_i = (b_{1i}, b_{2i}, \dots)^T$, $i = \overline{0, k}$, $C_1 = (\check{C}_1, \check{C}_2, \dots)$, $\check{C}_j = (c_{1j}, \dots, c_{rj})^T$, $j \in \mathbb{N}$. При цьому $\sum_{j=1}^\infty b_{ji}^2 < \infty$,

$\sum_{j=1}^\infty c_{sj}^2 < \infty$, $s = \overline{1, r}$. Так, $D(A) = \left\{ z = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \in H \mid \sum_{j=1}^\infty \omega_j^2 (\xi_j^2 + \eta_j^2) < \infty \right\}$.

Будемо в подальшому припускати, що відображення A має суто уявний спектр, тому накладемо на діагональні елементи ω_j оператора Ω наступне припущення.

Припущення 4.1. Елементи ω_j оператора Ω є додатними дійсними числами, такими, що $0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_n < \dots$.

Система (4.16) являє собою операторну форму широкого класу мате-

матичних моделей керованих гнучких конструкцій. Далі буде розглянуто окремий випадок системи (4.16), отриманої в результаті модального аналізу коливань гнучкої балки з приєднаною точковою масою, описаної в розділі 2. Буде показано, що припущення 4.1 виконується для цієї моделі в силу властивостей інфінітезимального генератора.

Теорема 4.3. *Нехай виконано припущення 4.1. Тоді оператор A є інфінітезимальним генератором C_0 -напівгрупи $\{e^{tA}\}_{t \geq 0}$ у просторі H .*

Доведення. Доведемо, що оператор A є щільно визначеним в H . Зауважимо: якщо $z \in H$, то для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $N > 0$, що

$$\sum_{j=N+1}^{\infty} (\xi_j^2 + \eta_j^2) < \varepsilon. \quad (4.18)$$

Розглянемо такий вектор $\begin{pmatrix} \tilde{\xi} \\ \tilde{\eta} \end{pmatrix} \in D(A)$, для якого $\tilde{\xi}_j = \xi_j$, $\tilde{\eta}_j = \eta_j$, $\forall j = \overline{1, N}$, а $\tilde{\xi}_j = 0$, $\tilde{\eta}_j = 0$, $\forall j \geq N + 1$. В силу (4.18),

$$\left\| \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tilde{\xi} \\ \tilde{\eta} \end{pmatrix} \right\|_H = \left(\sum_{j=N+1}^{\infty} (\xi_j^2 + \eta_j^2) \right)^{1/2} < \varepsilon.$$

Отже, у довільно малому ε -околі будь-якого елементу H знайдеться елемент $D(A)$. Тобто, область визначення оператора A є щільною в H .

Для довільного $z \in D(A)$ маємо $\langle Az, z \rangle_H = \sum_{j=1}^{\infty} (\omega_j \eta_j \xi_j - \omega_j \xi_j \eta_j) \equiv 0$, отже виконується нерівність

$$\langle Az, z \rangle_H + \langle z, Az \rangle_H \leq 0 \quad (4.19)$$

для всіх $z \in D(A)$. Відповідно до означення 1.16, відображення A є дисипативним. Побудуємо обернений до A оператор A^{-1} . Для цього розв'яжемо рівняння

$$Az = \hat{z} \quad (4.20)$$

відносно $z \in D(A)$ для довільного $\hat{z} \in H$. Рівняння (4.20) являє собою

систему рівнянь

$$\begin{aligned}\omega_j \eta_j &= \hat{\xi}_j, \\ \omega_j \xi_j &= \hat{\eta}_j,\end{aligned}\quad j = 1, 2, \dots$$

із розв'язком $\xi_j = -\frac{1}{\omega_j} \hat{\eta}_j$, $\eta_j = \frac{1}{\omega_j} \hat{\xi}_j$, $j = 1, 2, \dots$. Таким чином, оператор $A^{-1} : H \rightarrow H$ можна задати у вигляді $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\tilde{A}_1 \\ \tilde{A}_1 & 0 \end{pmatrix}$, де $\tilde{A}_1 = \text{diag} \left(\frac{1}{\omega_1}, \frac{1}{\omega_2}, \dots \right)$. Нескладно перевірити, що

$$\|A^{-1}z\|_H^2 = \left\| \left(-\frac{\eta_1}{\omega_1}, -\frac{\eta_2}{\omega_2}, \dots, \frac{\xi_1}{\omega_1}, \frac{\xi_2}{\omega_2}, \dots \right)^T \right\|_H^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_j^2} (\xi_j^2 + \eta_j^2).$$

Згідно з припущенням 4.1, $\{\omega_j\}_{j=1}^{\infty}$ — зростаюча послідовність, тому виконано наступну оцінку: $\|A^{-1}z\|_H^2 \leq \frac{1}{\omega_1^2} \|z\|_H^2$, $\forall z \in H$, тобто A^{-1} є обмеженим відображенням. Таким чином доведено, що оператор A є замкненим в H .

Побудуємо резольвенту $R(\lambda; A)$ оператора A для деякого $\lambda > 0$. Для цього розв'яжемо рівняння

$$(I - \lambda A)z = \hat{z}, \quad \lambda > 0 \quad (4.21)$$

відносно $z \in D(A)$ для довільного $\hat{z} \in H$. Тут, як зазначалося раніше, символом I позначається тотожне відображення.

Рівняння (4.21) можна записати у вигляді системи рівнянь

$$\begin{aligned}\xi_j - \lambda \omega_j \eta_j &= \hat{\xi}_j, \\ \eta_j + \lambda \omega_j \xi_j &= \hat{\eta}_j,\end{aligned}\quad j = 1, 2, \dots,$$

чийм розв'язком є

$$\begin{aligned}\xi_j &= \frac{1}{1 + \lambda^2 \omega_j^2} \hat{\xi}_j + \frac{\lambda \omega_j}{1 + \lambda^2 \omega_j^2} \hat{\eta}_j, \\ \eta_j &= -\frac{\lambda \omega_j}{1 + \lambda^2 \omega_j^2} \hat{\xi}_j + \frac{1}{1 + \lambda^2 \omega_j^2} \hat{\eta}_j,\end{aligned}\quad j = 1, 2, \dots$$

Таким чином, резольвенту $R(\lambda; A)$ можна записати як оператор

$$R(\lambda; A) = (I - \lambda A)^{-1} = \begin{pmatrix} R_1 & R_2 \\ -R_2 & R_1 \end{pmatrix} : H \rightarrow H, \text{ заданий компонентами}$$

$$R_1 = \text{diag} \left(\frac{1}{\lambda^2 \omega_j^2 + 1}, j = 1, 2, \dots \right), \quad R_2 = \text{diag} \left(\frac{\lambda \omega_j}{\lambda^2 \omega_j^2 + 1}, j = 1, 2, \dots \right)$$

для деякого $\lambda > 0$.

Оскільки відображення $z \mapsto R(\lambda; A)(z)$ визначено для довільного $z \in H$, область значень $I - \lambda A$ співпадає з H . Тобто, за означенням 1.17, оператор A є максимальним. Крім того, в силу (4.19), відповідно до означення 1.17, оператор A є m -дисипативним.

Отже, доведено, що $A : D(A) \rightarrow H$ є щільно визначеним, m -дисипативним і замкненим. Звідси випливає, що цей оператор задовольняє умови теореми Люмера–Філліпса і таким чином є генератором C_0 -напівгрупи у гільбертовому просторі H . \square

4.2.2. Синтез спостерігача. Для системи (4.16), (4.17) побудуємо спостерігач типу Луенбергера у вигляді наступної системи:

$$\dot{\tilde{z}}(t) = (A - FC)\tilde{z}(t) + Bu(t) + Fy(t), \quad (4.22)$$

такої, що для довільних початкових умов $z(0)$, $\tilde{z}(0) \in H$ та будь-якого припустимого керування $u : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^{k+1}$ відповідні розв'язки $z(t)$ та $\tilde{z}(t)$ систем (4.16), (4.17) та (4.22) задовольняють умову

$$\|z(t) - \tilde{z}(t)\|_H \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \rightarrow +\infty. \quad (4.23)$$

Для побудови спостерігача у формі (4.22) необхідно задати оператор $F : \mathbb{R}^r \rightarrow H$ вигляду $F = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$ з компонентами $f, g : \mathbb{R}^r \rightarrow \ell^2$, що визначаються матрицями $f = (f_{js})$, $g = (g_{js})$, $j \in \mathbb{N}$, $s = \overline{1, r}$. Пропонується визначити елементи відображення F наступним чином:

$$f_{js} = \gamma_s c_{sj}, \quad g_{js} = 0, \quad s = \overline{1, r}, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (4.24)$$

де $\gamma_s > 0$ — параметри підсилення спостерігача. Нижче буде показано, що за такого вибору компонентів F виконано умову (4.23).

4.2.3. Динаміка похибки спостерігача. Розглянемо похибку спостережень як різницю між відповідними розв'язками рівнянь (4.16) і (4.22): $e(t) = z(t) - \tilde{z}(t)$. Віднімаючи покомпонентно рівняння (4.22) від рівняння (4.16) та враховуючи (4.17), отримуємо динаміку похибки наступного вигляду:

$$\dot{e}(t) = (A - FC)e(t). \quad (4.25)$$

Зауважимо, що умова (4.23) еквівалентна умові $\|e(t)\|_H \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, де $e(t)$ — розв'язок системи (4.25).

4.2.4. Передкомпактність траєкторій. Для доведення асимптотичної стійкості нульової похибки важливу роль відіграє властивість передкомпактності траєкторій системи (4.25). Згідно з результатами, викладеними у роботі [19], передкомпактними є траєкторії в тому числі тих систем, які задаються генератором напівгрупи з компактною резольвентою. Тому дослідження цієї властивості вимагає побудови резольвенти оператора, записаного в правій частині (4.25).

Припущення 4.2. Ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_i^2}$ збігається.

Теорема 4.4. *Нехай виконано припущення 4.1, 4.2. Тоді резольвенту $R(\lambda; A - FC)$ коректно визначено у просторі H для деякого $\lambda > 0$.*

Доведення. Позначимо $e(t) = \begin{pmatrix} \Delta \\ \delta \end{pmatrix}$, де $\Delta = (\Delta_1, \Delta_2, \dots)^T$, $\delta = (\delta_1, \delta_2, \dots)^T$.

Також позначимо $\tilde{A} = A - FC$. Для того, щоб побудувати резольвенту $R(\lambda; \tilde{A})$ оператора \tilde{A} , розв'яжемо рівняння

$$(\tilde{A} - \lambda I) \begin{pmatrix} \Delta \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\Delta} \\ \hat{\delta} \end{pmatrix} \quad (4.26)$$

відносно $\begin{pmatrix} \Delta \\ \delta \end{pmatrix} \in H$ для довільного $\begin{pmatrix} \hat{\Delta} \\ \hat{\delta} \end{pmatrix} \in H$ і деякого $\lambda > 0$. Розглянемо матрицю $M = (M_{sp})_{s,p=1}^r = \lambda \gamma_p \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_{si} c_{pi}}{\lambda^2 + \omega_i^2} + \delta_{sp}$ та позначимо обернену до неї матрицю як $M^{-1} = (M_{sp}^{-1})_{s,p=1}^r$. Тут δ_{sp} використовується у значенні

символу Кронекера. Зауважимо, що для достатньо малих $\lambda > 0$ матриця M є малим збуренням тотожної матриці, тому існує обернена матриця M^{-1} , для якої виконано оцінку $\|M^{-1}\| \leq 1 + \mathcal{O}(\lambda)$ при $\lambda \rightarrow 0$. Розв'язок рівняння (4.26) запишемо наступним чином:

$$\begin{aligned} \Delta_j &= -\frac{1}{\lambda^2 + \omega_j^2} \left(\lambda \hat{\Delta}_j + \omega_j \hat{\delta}_j + \lambda \sum_{s=1}^r \gamma_s c_{sj} \phi_s \right), \\ \delta_j &= \frac{1}{\lambda^2 + \omega_j^2} \left(\omega_j \hat{\Delta}_j - \lambda \hat{\delta}_j + \omega_j \sum_{s=1}^r \gamma_s c_{sj} \phi_s \right). \end{aligned} \quad (4.27)$$

Параметри ϕ_s , $s = \overline{1, r}$, можна отримати з рівності $(\phi_1, \dots, \phi_r)^T = M^{-1} \check{M}$, де $\check{M} = -\text{colon} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_{si}}{\lambda^2 + \omega_i^2} (\lambda \hat{\Delta}_i + \omega_i \hat{\delta}_i) \right)$, $s = \overline{1, r}$. Таким чином, $\phi_s = -\sum_{p=1}^r M_{sp}^{-1} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_{pi}}{\lambda^2 + \omega_i^2} (\lambda \hat{\Delta}_i + \omega_i \hat{\delta}_i)$, $s = \overline{1, r}$. Припущення 4.2 гарантує збіжність рядів у попередній формулі.

Резольвента $R(\lambda; \tilde{A}) : H \rightarrow H$ задається матрицею $\begin{pmatrix} R^1 & R^2 \\ R^3 & R^4 \end{pmatrix}$ із компонентами наступного вигляду:

$$\begin{aligned} R_{ji}^1 &= \frac{\lambda}{\lambda^2 + \omega_j^2} \left(\frac{\lambda}{\lambda^2 + \omega_i^2} \sum_{s,p=1}^r \gamma_s M_{sp}^{-1} c_{sj} c_{pi} - \delta_{ji} \right), & R_{ji}^3 &= -\frac{\omega_j}{\lambda} R_{ji}^1, \\ R_{ji}^2 &= \frac{1}{\lambda^2 + \omega_j^2} \left(\frac{\lambda \omega_i}{\lambda^2 + \omega_j^2} \sum_{s,p=1}^r \gamma_s M_{sp}^{-1} c_{sj} c_{pi} - \omega_j \delta_{ji} \right), \\ R_{ji}^4 &= -\frac{1}{\lambda^2 + \omega_j^2} \left(\frac{\omega_j \omega_i}{\lambda^2 + \omega_i^2} \sum_{s,p=1}^r \gamma_s M_{sp}^{-1} c_{sj} c_{pi} + \lambda \delta_{ji} \right), & j, i &\in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Оскільки наведені вище формули задають розв'язок рівняння (4.26) із довільною правою частиною з простору H , то область визначення побудованої таким чином резольвенти є весь простір H . \square

Теорема 4.5. *Якщо виконано припущення 4.2, то кожна додатна напівтраєкторія $\{e(t)\}_{t \geq 0}$ системи (4.25) є передкомпактною в H .*

Доведення. Доведемо компактність відображення $R(\lambda; \tilde{A})$. З цією метою розглянемо норму Гільберта–Шмідта оператора $(a_{ij}) = R(\lambda; \tilde{A})$, яка задається наступним чином: $\|a_{ij}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (a_{ij})^2}$. Застосувавши нерівність

Коші–Буняковського–Шварца, отримаємо таку оцінку:

$$\|R(\lambda; \tilde{A})\|^2 \leq 2 \sum_{j,i=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_j^2} \left(\frac{1}{\omega_i^2} \left(\sum_{s,p=1}^r \gamma_s M_{sp}^{-1} c_{sj} c_{pi} \right)^2 + 2 \right). \quad (4.28)$$

Оскільки $|M_{sp}^{-1}| \leq \|M^{-1}\|$, оцінка (4.28) виразу $\|R(\lambda; \tilde{A})\|^2$ справджується, якщо c_{sj} та ω_j задовольняють умову збіжності ряду $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_i^2}$ для всіх $s = \overline{1, r}$, $j = 1, 2, \dots$. Таким чином показано, що норма Гільберта–Шмідта резольвенти є скінченною. Звідси випливає, що $R(\lambda; \tilde{A}) : H \rightarrow H$ є компактним оператором. Оскільки резольвента $R(\lambda; \tilde{A}) = (\tilde{A} - \lambda I)^{-1}$ є компактною для деякого $\lambda > 0$, додатні траєкторії системи (4.25) є передкомпактними в H в силу теореми Дафермоса–Слемрода [19]. \square

4.2.5. Асимптотична стійкість. Основним результатом даного підрозділу є наступна теорема про асимптотичну стійкість тривіального розв'язку рівняння похибки спостерігача.

Теорема 4.6. *Нехай компоненти оператора F у (4.22) визначаються формулами (4.24) та нехай виконано наступні умови:*

- (i) $0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_n < \dots$;
- (ii) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_i^2} < \infty$;
- (iii) *єдиною інваріантною підмножиною множини $\text{Ker } C$ відносно напівгрупи $\{e^{tA}\}_{t \geq 0}$ є одноточкова множина $\{0\}$;*
- (iv) *для кожного $j \in \mathbb{N}$ існує таке $s = \overline{1, r}$, що*

$$c_{sj} \neq 0. \quad (4.29)$$

Тоді розв'язок $e(t) = 0$ рівняння (4.25) є асимптотично стійким.

Доведення. В якості функції Ляпунова розглянемо наступну додатно-визначену квадратичну форму в H : $\mathcal{W}(e) = \sum_{j=1}^{\infty} (\Delta_j^2 + \delta_j^2)$ та обчислимо її похідну за часом вздовж траєкторій системи (4.25):

$$\dot{\mathcal{W}}(e) = -2 \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{s=1}^r c_{si} \Delta_i (f_{js} \Delta_j + g_{js} \delta_j).$$

Якщо f_{js} та g_{js} задані формулами (4.24), то

$$\dot{W}(e) = -2 \sum_{s=1}^r \gamma_s \left(\sum_{j=1}^{\infty} c_{sj} \Delta_j \right)^2 \leq 0 \text{ для всіх } \begin{pmatrix} \Delta \\ \delta \end{pmatrix} \in D(A).$$

Згідно з теоремою Ляпунова про стійкість, стан рівноваги $e(t) \equiv 0$ системи (4.25) є стійким.

Для доведення асимптотичної стійкості розглянемо множину $Z = \left\{ e \mid \dot{W}(e) \equiv 0 \right\}$, де $e(t)$ — розв'язок системи (4.25). З рівності

$$Ce(t) = 0 \tag{4.30}$$

та структури множини Z випливає, що $Z = \text{Ker } C$. Умова (iii) таким чином являє собою умову теореми ЛаСалля [77, Теорема 3.64], згідно з якою тривіальний розв'язок динаміки похибки (4.25) є асимптотично стійким. \square

4.2.6. Коливання пружної балки. Система (4.16) може розглядатися як математична модель широкого класу коливальних процесів. Задачу про коливання пружної балки з масою, наведену в розділі 2, можна записати у діагональному вигляді (4.16). Для цього побудуємо координатну форму рівнянь руху із застосуванням проєкцій на нескінченновимірний многовид, утворений у вигляді лінійної оболонки власних функцій відповідної спектральної задачі. В такому випадку діагональні елементи відображення A визначатимуться через відповідні власні значення.

Аналогічно до міркувань, представлених у підрозділі 4.1.1, розділимо змінні в однорідній частині варіаційної форми (2.3) наступним чином: $w(x, t) = q(t) W(x)$, та отримаємо спектральну задачу такого вигляду:

$$\begin{aligned} \frac{d^4}{dx^4} W(x) &= \omega^2 \frac{\rho}{EI} W(x), \quad x \in (0, \ell) \setminus \{\ell_0\}, \\ W(0) = W(\ell) = 0, \quad W''(0) = W''(\ell) = 0, \quad W(\cdot) &\in C^2[0, \ell], \\ W'''(\ell_0 - 0) - W'''(\ell_0 + 0) &= \frac{\varkappa - \omega^2 m}{EI} W(\ell_0). \end{aligned} \tag{4.31}$$

Зауважимо, що задача (4.31) є аналогічною до (4.1) з власними значеннями у вигляді квадратів діагональних елементів відображення Ω . Тому

характеристичне рівняння задачі (4.31) має вигляд

$$\Phi(\omega) = 0, \quad (4.32)$$

де

$$\begin{aligned} \Phi(\omega) = \frac{m}{4\mu\rho} & \left((\cosh \mu(\ell - 2\ell_0) - \cosh \mu\ell) \sin \mu\ell \right. \\ & \left. + (\cos \mu(\ell - 2\ell_0) - \cos \mu\ell) \sinh \mu\ell \right) - \frac{\sin \mu\ell \sinh \mu\ell}{\mu^2} \\ & + \frac{\varkappa}{4EI\mu^5} \left((\cosh \mu\ell - \cosh \mu(\ell - 2\ell_0)) \sin \mu\ell \right. \\ & \left. - (\cos \mu(\ell - 2\ell_0) + \cos \mu\ell) \sinh \mu\ell \right), \quad \mu = \left(\frac{\rho}{EI} \omega^2 \right)^{1/4}. \end{aligned}$$

Згідно з наслідком 3.1, числа ω_j утворюють строго зростаючу послідовність додатних дійсних чисел, тобто виконано умову 4.1. Крім того, в силу асимптотичних властивостей ω_j^2 , досліджених у розділі 3, спираючись на лему 3.4, можемо заключити наступне.

Твердження 4.1. *Нехай ω_j — розв'язки рівняння (4.32), $j = 1, 2, \dots$. Тоді система функцій $\{e^{\pm i\omega_j t}\}_{j=1}^{\infty}$ є ω -лінійно незалежною у $L^2(0, \tau)$ для всіх $\tau > 0$.*

Розглядатимемо функції $W_j(x)$ у просторі Соболева $H^1(0, \ell)$, в якому коректно визначено білінійну форму

$$\langle W_i, W_j \rangle_{\tilde{H}} = \int_0^{\ell} \rho W_i(x) W_j(x) dx + m W_i(\ell_0) W_j(\ell_0) \quad (4.33)$$

та відповідну квадратичну форму $\|W_j\|_{\tilde{H}}^2 = \langle W_j, W_j \rangle_{\tilde{H}}$. Власні функції $W_j(x)$, $j \in \mathbb{N}$ утворюють ω -лінійно незалежну ортогональну (лема 4.1) систему відповідно до (4.33). Візьмемо власні функції $W_1(x), W_2(x), \dots$, що відповідають власним значенням $\omega_1^2, \omega_2^2, \dots$, і розглянемо нескінченно-вимірний лінійний многовид $\mathcal{S} = \text{span} \{W_1(x), W_2(x), \dots\}$. Розглядатимемо (2.3) з w , $\delta w \in \mathcal{S}$, а саме $w(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} q_i W_i(x)$, $\delta w(x, t) = W_j(x)$. Тут $q_i = q_i(t)$ — коефіцієнти лінійної комбінації. Після інтегрування частинами з урахуванням ортогональності власних функцій, отримаємо наступну

нескінченновимірну систему диференціальних рівнянь:

$$\ddot{q}_j + \omega_j^2 q_j = \frac{W_j(\ell_0)}{\|W_j\|_{\tilde{H}}^2} u_0 + \frac{1}{\|W_j\|_{\tilde{H}}^2} \sum_{i=1}^k u_i \int_0^\ell \psi_i(x) W_j''(x) dx, \quad j = 1, 2, \dots \quad (4.34)$$

Система (4.34) в такій інтерпретації являє собою ортогональну проєкцію рівнянь руху описаної в розділі 2 пружної балки з твердим тілом на нескінченновимірний лінійний многовид \mathcal{S} . У цьому контексті ми розглядаємо дані c_{sj} як параметри вихідних сигналів, що надходять від сенсорів, розташованих у точках $x = \ell_s$ балки, при чому $c_{1j} = W_j(\ell_0)$ та $c_{sj} = W_j''(\ell_{s-1})$, $s = \overline{2, r}$, $j = 1, 2, \dots$. Керування u_0 розглядається як сила, прикладена до шейкера у точці $x = \ell_0$, а u_1, \dots, u_k — як керуючі впливи k п'єзоелектричних актуаторів, $b_{j0} = \frac{W_j(\ell_0)}{\|W_j\|_{\tilde{H}}^2}$, $b_{jp} = \frac{1}{\|W_j\|_{\tilde{H}}^2} \int_0^\ell \psi_p(x) W_j''(x) dx$, $p = \overline{1, k}$, $j = 1, 2, \dots$. Далі позначимо $\xi_j = \omega_j q_j$ та $\eta_j = \dot{q}_j$, відповідно, $j = 1, 2, \dots$, та припустимо $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots)^T \in \ell^2$, $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots)^T \in \ell^2$, в результаті чого отримуємо систему звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, записану в абстрактній формі (4.16)–(4.17). Тепер твердження теореми 4.6 можна перенести на розглянуту гібридну систему.

Теорема 4.7. *Нехай компоненти $\omega_1, \omega_2, \dots$ оператора A у (4.16) є розв'язками рівняння (4.32), та нехай оператор F у (4.25) визначено формулами (4.24) з довільними додатними параметрами γ_s , $s = \overline{1, r}$. Якщо для кожного $j = 1, 2, \dots$ існує таке $s = \overline{1, r}$, що виконано (4.29), то тривіальний розв'язок $e(t) = 0$ системи (4.25) є асимптотично стійким.*

Доведення. Замість покрокового доведення, покажемо ключові відмінності цього випадку від теореми 4.6. Тут ми не маємо у своєму розпорядженні вимоги, щоб єдиним інваріантним підпростором $\text{Ker } C$ була множина $\{e(t) \equiv 0\}$ (припущення 4.1).

Зауважимо, що система (4.25) вироджується на $\text{Ker } C$ у наступну:

$$\dot{e}(t) = A e(t). \quad (4.35)$$

Задамо початкові умови

$$e(0) = e_0 \in H. \quad (4.36)$$

Внаслідок теореми 4.3 задачу Коші (4.35), (4.36) поставлено коректно у просторі H . Її загальний розв'язок можна записати наступним чином:

$$e(t) = e^{tA} e_0. \quad (4.37)$$

Підстановка (4.37) у (4.30) призводить до $Ce^{tA} e_0 \equiv 0$, або

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_{sj} (\xi_j(0) \cos \omega_j t + \eta_j(0) \sin \omega_j t) = 0, \quad s = \overline{1, r}. \quad (4.38)$$

Згідно з твердженням 4.1, система функцій $\{\cos \omega_j t, \sin \omega_j t\}_{j=1}^{\infty}$ є ω -лінійно незалежною у $L^2(0, \tau)$ для довільного $\tau > 0$, оскільки ω_j задовольняють рівняння (4.32). Враховуючи умову (4.29), властивість (4.38) виконано тільки для $\xi_j(0) = 0, \eta_j(0) = 0, \forall j = 1, 2, \dots$, тобто для $e_0 \equiv 0$. Таким чином, єдиним розв'язком системи (4.35) на $\text{Ker } C$ є тривіальний розв'язок. Отже, єдиною інваріантною підмножиною множини $\text{Ker } C$ відносно напівгрупи $\{e^{tA}\}_{t \geq 0}$ є точка $e = 0$. Бачимо, що припущення 4.1 виконано в даному випадку завдяки асимптотичному розподілу власних значень. Так, умови теореми 4.6 виконано, що дозволяє зробити висновок про асимптотичну стійкість тривіальної похибки спостережень. \square

4.2.7. Результати обчислень. Результати, отримані для прикладу моделі гнучкої балки з масою, можна проілюструвати за допомогою чисельних експериментів. Для ілюстрації динаміки похибки спостерігача наведемо результати чисельного інтегрування скінченновимірних наближень систем (4.16)–(4.17), (4.22) та (4.25) з індексами координат $j = \overline{1, N}$, де N – задане натуральне число, з початковими умовами $\Delta_j(0) = \delta_j(0) = \frac{1}{j \omega_j}$.

Позначимо через $e_N(t)$ розв'язок відповідної (4.25) скінченновимірної системи з $j = \overline{1, N}$ та будемо обчислювати його евклідову норму за формулою $\|e_N(t)\| = \sqrt{\sum_{j=1}^N (\Delta_j^2 + \delta_j^2)}$. Нижче наведено результати чисельного

моделювання гнучкої балки довжини $\ell = 1,875$ м із твердим тілом, прикріпленим у точці $\ell_0 = 1,378$ м. Цей вибір механічних параметрів відповідає моделі, описаній у [24]. Передбачається, що вихідні дані забезпечуються чотирма п'єзоелектричними датчиками, розташованими у точках $\ell_1 = 0,075$ м, $\ell_2 = 0,716$ м, $\ell_3 = 1,128$ м та $\ell_4 = 1,555$ м. Чисельне інтегрування виконано для скінченновимірної динаміки похибки з режимами вібрації $N = 16$ та $N = 40$.

На рисунках 4.4 та 4.5 зображено, відповідно, $\|e_{16}\|^2$ та $\|e_{40}\|^2$ з параметрами підсилення $\gamma_i = 0,8$, $\gamma_i = 6$ та $\gamma_i = 12$ для $i = \overline{0,4}$; на рис. 4.6 — перші шість модальних відхилень $\Delta_i(t)$ з параметрами підсилення спостерігача $\gamma_i = 6$, $i = \overline{1,6}$.

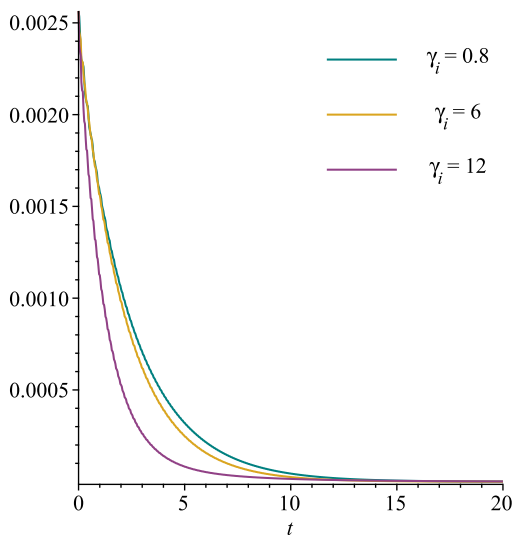


Рис. 4.4: Графік зміни $\|e_{16}\|^2$
з часом

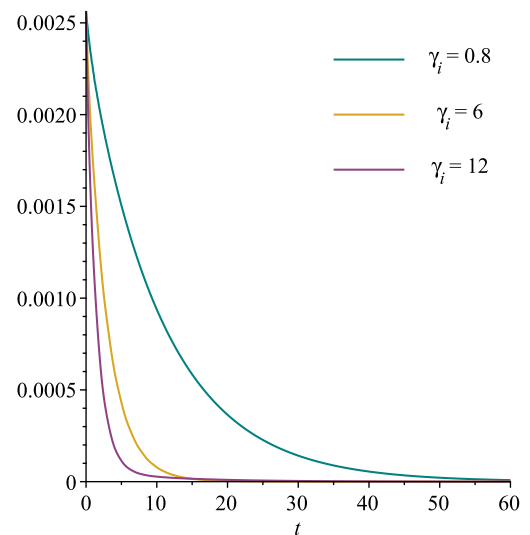


Рис. 4.5: Графік зміни $\|e_{40}\|^2$
з часом

Як бачимо, результати чисельного моделювання ілюструють експоненціальну збіжність динаміки скінченновимірної похибки. Також видно, що розв'язки системи більшої розмірності ($N = 40$) спадають повільніше, ніж розв'язки з $N = 16$ для великих значень t .

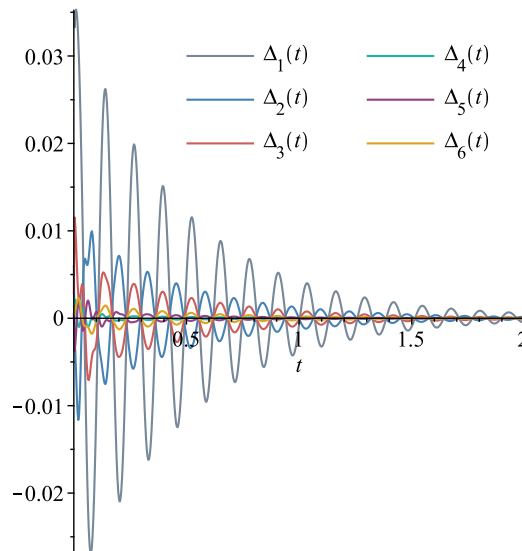


Рис. 4.6: Графіки компонент $\Delta_1(t), \dots, \Delta_6(t)$

Висновки до розділу 4

У розділі 4 розв'язано задачу спостереження для двох класів лінійних динамічних систем. Підрозділ 4.1 присвячено дослідженню спостережуваності скінченновимірної системи, отриманої на основі модального аналізу коливань пружної балки з твердою масою, описаної в розділі 2. У підрозділі 4.2 розглянуто клас нескінченновимірних систем керування з вихідними даними в гамільтоновій формі з узагальненими координатами. Проаналізовано властивості інфінітезимального генератора, який описує досліджувану систему.

Запропоновано явну схему синтезу спостерігача типу Луенбергера для обох розглянутих систем і доведено, що похибка спостерігача асимптотично прямує до нуля за достатньо загальних припущень.

Для системи у нескінченновимірному просторі отримано достатні умови існування резольвенти. Доведено, що розглянутий оператор породжує сильно неперервну напівгрупу операторів у гільбертовому просторі. Запропонований спостерігач враховує вхідну дію і допускає довільно великі вхідні сигнали. Він також допускає необмежені виходи як функції часу.

На основі принципу інваріантності отримано достатні умови збіжності побудованого спостерігача. Результат застосовано до моделі пружної балки, приєднаної до системи з зосередженими та розподіленими актуаторами. У розглянутому прикладі пружної балки параметри, необхідні для побудови спостерігача, ефективно обчислюються в термінах власних значень і власних функцій відповідної спектральної задачі. Згасання похибки спостереження з часом проілюстровано за допомогою чисельного моделювання скінченновимірних апроксимацій динаміки спостерігача.

Результати, викладені в розділі 4, опубліковано в роботах [122] та [123].

РОЗДІЛ 5

НАБЛИЖЕНІ РОЗВ'ЯЗКИ РІВНЯННЯ КОЛИВАНЬ КОНСОЛЬНОЇ ПРУЖНОЇ БАЛКИ

У попередньому розділі розглядалися рівняння Гальоркіна для шарнірно опертої балки з зосередженими та розподіленими керуючими впливами. В загальному вигляді питання про збіжність методу Гальоркіна для пружних систем потребує додаткового вивчення. У цьому розділі наводиться дослідження методу Гальоркіна для рівнянь руху консольно закріпленої пружної балки.

5.1. Рівняння коливань консольної пружної балки

Як і в попередніх розділах, вважатимемо, що функція $w(x, t)$ описує поперечне переміщення точки балки з координатою $x \in [0; \ell]$ в момент часу $t \geq 0$. Розглянемо неоднорідне диференціальне рівняння

$$\ddot{w}(x, t) + a^2 w^{(4)}(x, t) = f(x, t), \quad (5.1)$$

де функція $f \in L^2(D)$ описує зовнішній силовий вплив, $D = [0, \ell] \times [0, T]$, a^2 — коефіцієнт жорсткості балки. Передбачається, що кінець із координатою $x = 0$ балки жорстко закріплений, а кінець із координатою $x = \ell$ вільний. Тобто, функція $w(x, t)$ задовольняє крайові умови

$$w \Big|_{x=0} = w' \Big|_{x=0} = 0, \quad w'' \Big|_{x=\ell} = w''' \Big|_{x=\ell} = 0, \quad (5.2)$$

а також початкові умови

$$w \Big|_{t=0} = \varphi(x), \quad \dot{w} \Big|_{t=0} = \psi(x), \quad (5.3)$$

де $\varphi \in \overset{\circ}{H}^2(0, \ell) = \{ \varphi \in H^2(0, \ell) \mid \varphi(0) = \varphi'(0) = 0 \}$, $\psi \in L^2(0, \ell)$.

Функцію $w(x, t) \in H^2(D)$ будемо називати узагальненим розв'язком за-

дачі (5.1)–(5.3), якщо для неї виконано умови $w(0, t) = w'(0, t) = 0$ та інтегральну тотожність

$$\int_0^\ell \int_0^T (w''(x, t) v''(x, t) - \dot{w}(x, t) \dot{v}(x, t)) dt dx = \int_0^\ell \int_0^T f(x, t) v(x, t) dt dx \quad (5.4)$$

для будь-якої пробної функції $v(x, t) \in \widehat{H}^2(D)$, де

$$\widehat{H}^2(D) = \left\{ v \in H^2(D) \mid v \Big|_{t=0} = v \Big|_{t=T} = 0, \quad v \Big|_{x=0} = v' \Big|_{x=0} = 0 \right\}.$$

Для наближеного розв'язання задачі (5.1)–(5.3) звернемося до методу Гальоркіна. Припустимо, що маємо сімейство функцій $v_j \in H^2(0, \ell)$, які задовольняють крайові умови $v_j(0) = 0$, $v_j'(0) = 0$, $j = 1, 2, \dots$. Зафіксуємо число $m \in \mathbb{N}$ і розглянемо скінченновимірний лінійний многовид $V_m = \text{span} \{v_1, \dots, v_m\} \subset L^2(0, \ell)$. Розв'язок задачі (5.1)–(5.3) будемо шукати у вигляді

$$w_m(x, t) = \sum_{j=1}^m c_j(t) v_j(x), \quad (5.5)$$

де $c_j \in H^2(0, T)$, $\forall j = \overline{1, m}$.

Функцію $w_m(x, t)$ будемо називати наближенням за Гальоркіним розв'язком порядку m задачі (5.1)–(5.3), якщо виконано інтегральну тотожність

$$\int_0^\ell \int_0^T (a^2 w_m''(x, t) v''(x, t) - \dot{w}_m(x, t) \dot{v}(x, t)) dt dx = \int_0^\ell \int_0^T f(x, t) v(x, t) dt dx$$

для будь-якої пробної функції вигляду $v(x, t) = v_j(x) q(t)$, $j = \overline{1, m}$, де $q \in C^1[0, T]$, $q(0) = q(T) = 0$.

5.2. Спектральна задача для консольної пружної балки

Для розв'язання задачі (5.1)–(5.3) методом Гальоркіна побудуємо систему функцій $v_1(x), v_2(x), \dots$, які задовольняють умови $v_j(0) = v_j'(0) = 0$, $j = 1, 2, \dots$. Нехай $c(t) \in C^2[0, T]$, $v(x) \in C^4[0, \ell]$ та нехай $w(x, t) = c(t)v(x)$

є частковим розв'язком наступної однорідної задачі:

$$\ddot{w} + a^2 w^{(4)} = 0,$$

$$w \Big|_{x=0} = w' \Big|_{x=0} = 0, \quad w'' \Big|_{x=\ell} = w''' \Big|_{x=\ell} = 0.$$

Тоді $\frac{\ddot{c}(t)}{a^2 c(t)} = \frac{v^{(4)}(x)}{v(x)} = \lambda = \text{const}$, звідки маємо спектральну задачу для $v(x)$:

$$\begin{cases} v^{(4)}(x) = \lambda v(x), & x \in (0, \ell), \\ v(0) = v'(0) = v''(\ell) = v'''(\ell) = 0. \end{cases} \quad (5.6)$$

Задамо лінійний диференціальний оператор $A : D(A) \rightarrow L^2(0, \ell)$ наступним чином: $Av(x) = v^{(4)}(x)$, і запишемо задачу (5.6) в операторному вигляді:

$$Av(x) = \lambda v(x), \quad x \in [0, \ell],$$

$$D(A) = \{ v \in H^4(0, \ell) \mid v(0) = v'(0) = v''(\ell) = v'''(\ell) = 0 \}.$$

Існує обернений оператор $A^{-1} : L^2(0, \ell) \rightarrow L^2(0, \ell)$,

$$A^{-1}v(x) = \int_0^x \int_0^y \int_\tau^\ell \int_z^\ell v(\xi) \, d\xi \, dz \, d\tau \, dy.$$

Нескладно перевірити, що A^{-1} — самоспряжений оператор.

Лема 5.1. *Оператор A^{-1} є цілком неперервним.*

Доведення. З нерівності Коші–Буняковського–Шварца маємо

$$\left(\int_x^\ell v(\xi) \, d\xi \right)^2 \leq \int_x^\ell d\xi \int_x^\ell v^2(\xi) \, d\xi = (\ell - x) \|v\|_{L^2(x, \ell)}^2 \leq \ell \|v\|_{L^2(0, \ell)}^2 \quad (5.7)$$

для всіх $v \in L^2(0, \ell)$.

Нехай $\{v_n(x)\}_{n=1}^\infty$ є обмеженою в $L^2(0, \ell)$ послідовністю. Розглянемо інтегральний оператор $A_1 : L^2(0, \ell) \rightarrow L^2(0, \ell)$, який задамо наступним чином: $A_1 v_n = \int_x^\ell v_n(\xi) \, d\xi$. Використовуючи нерівність (5.7), оцінимо норму $\|A_1 v_n\|$ у просторі $L^2(0, \ell)$:

$$\|A_1 v_n\|_{L^2(0, \ell)}^2 = \int_0^\ell \left(\int_x^\ell v_n(\xi) \, d\xi \right)^2 dx \leq \int_0^\ell \ell \|v_n\|_{L^2(0, \ell)}^2 dx = \ell^2 \|v_n\|_{L^2(0, \ell)}^2. \quad (5.8)$$

Застосовуючи (5.8), отримаємо аналогічну оцінку у просторі $H^1(0, \ell)$:

$$\|A_1 v_n\|_{H^1(0, \ell)}^2 = \|A_1 v_n\|_{L^2(0, \ell)}^2 + \|v_n\|_{L^2(0, \ell)}^2 \leq (\ell^2 + 1) \|v_n\|_{L^2(0, \ell)}^2. \quad (5.9)$$

Розглянемо оператор $A_2 : L^2(0, \ell) \rightarrow L^2(0, \ell)$, який діє за формулою $A_2 v_n = A_1(A_1 v_n) = \int_0^\ell \int_x^\ell v_n(\xi) d\xi dz$ і оцінимо норму $\|A_2 v_n\|$ у просторі $H^1(0, \ell)$, використовуючи отриману оцінку (5.9):

$$\|A_2 v_n\|_{H^1(0, \ell)}^2 \leq (\ell^2 + 1) \|A_1 v_n\|_{L^2(0, \ell)}^2 \leq \ell^2 (\ell^2 + 1) \|v_n\|_{L^2(0, \ell)}^2.$$

Розглянемо тепер оператор $A_3 : L^2(0, \ell) \rightarrow L^2(0, \ell)$, який задано формулою $A_3 v_n = A_1(A_2 v_n) = \int_0^\ell \int_0^\tau \int_x^\ell v_n(\xi) d\xi dz d\tau$. Скориставшись нерівностями (5.8) та (5.9), отримаємо

$$\begin{aligned} \|A_3 v_n\|_{H^1(0, \ell)}^2 &\leq (\ell^2 + 1) \|A_2 v_n\|_{L^2(0, \ell)}^2 \leq \\ &\leq \ell^2 (\ell^2 + 1) \|A_1 v_n\|_{L^2(0, \ell)}^2 \leq \ell^4 (\ell^2 + 1) \|v_n\|_{L^2(0, \ell)}^2. \end{aligned}$$

Нарешті, розглянемо оператор $A_4 : L^2(0, \ell) \rightarrow L^2(0, \ell)$, заданий наступним чином: $A_4 v_n = A_1(A_3 v_n) = \int_0^\ell \int_0^y \int_0^\tau \int_x^\ell v_n(\xi) d\xi dz d\tau dy$. Зауважимо, що $A_4 v_n = A^{-1} v_n$. Застосуємо (5.8) та (5.9) для оцінки норми $\|A_4 v_n\|$ у просторі $H^1(0, \ell)$:

$$\begin{aligned} \|A_4 v_n\|_{H^1(0, \ell)}^2 &\leq (\ell^2 + 1) \|A_3 v_n\|_{L^2(0, \ell)}^2 \leq \ell^2 (\ell^2 + 1) \|A_2 v_n\|_{L^2(0, \ell)}^2 \leq \\ &\leq \ell^4 (\ell^2 + 1) \|A_1 v_n\|_{L^2(0, \ell)}^2 \leq \ell^6 (\ell^2 + 1) \|v_n\|_{L^2(0, \ell)}^2 \end{aligned}$$

та у просторі $H^4(0, \ell)$:

$$\begin{aligned} \|A_4 v_n\|_{H^4(0, \ell)}^2 &= \|A_4 v_n\|_{L^2(0, \ell)}^2 + \|A_3 v_n\|_{L^2(0, \ell)}^2 + \|A_2 v_n\|_{L^2(0, \ell)}^2 + \\ &+ \|A_1 v_n\|_{L^2(0, \ell)}^2 + \|v_n\|_{L^2(0, \ell)}^2 \leq C \|v_n\|_{L^2(0, \ell)}^2, \end{aligned}$$

де $C = \ell^8 + \ell^6 + \ell^4 + \ell^2 + 1 > 0$.

Отже, $\|A^{-1} v_n\|_{H^4(0, \ell)}^2 \leq C \|v_n\|_{L^2(0, \ell)}^2$, тобто оператор A^{-1} переводить обмежену в $L^2(0, \ell)$ послідовність в обмежену в $H^4(0, \ell)$ послідовність, а обмежена в $H^4(0, \ell)$ множина є передкомпактною в $L^2(0, \ell)$. Таким чином, оператор A^{-1} переводить обмежену в $L^2(0, \ell)$ множину в передкомпактну множину в $L^2(0, \ell)$. Отже, оператор A^{-1} є цілком неперервним. \square

Згідно з теоремою Гільберта–Шмідта, власні функції

$$v_1(x), v_2(x), \dots \quad (5.10)$$

цілком неперервного самоспряженого оператора A^{-1} утворюють ортогональний базис простору $L^2(0, \ell)$. Розглянемо звуження оберненого оператора, $A^{-1} : H^2(0, \ell) \rightarrow H^2(0, \ell)$. Аналогічно наведеним вище міркуванням, його власні функції утворюють ортогональний базис у просторі $H^2(0, \ell)$, а з побудови A^{-1} вони співпадають з (5.10). Система функцій (5.10) є ω -лінійно незалежною, повною в $\overset{\circ}{H}^2(0, \ell)$. Крім того, $v_j''(\ell) = v_j'''(\ell) = 0$, $\forall j = 1, 2, \dots$. Множини власних функцій операторів A та A^{-1} співпадають, тому систему функцій (5.10) будемо шукати як власні функції задачі (5.6).

Власні значення λ_j оператора A є коренями трансцендентного рівняння

$$\cos(\sqrt[4]{\lambda_j} \ell) \cosh(\sqrt[4]{\lambda_j} \ell) = -1. \quad (5.11)$$

Позначимо $\mu_j = \sqrt[4]{\lambda_j}$ і запишемо власні функції у такому вигляді:

$$v_j(x) = -\frac{v_j''(0)}{2\mu_j^2} (\cos(\mu_j x) - \cosh(\mu_j x)) - \frac{v_j'''(0)}{2\mu_j^3} (\sin(\mu_j x) - \sinh(\mu_j x)), \quad (5.12)$$

при цьому $v_j''(0) = \frac{1}{\mu_j} \cdot \frac{\cos(\mu_j \ell) + \cosh(\mu_j \ell)}{\sin(\mu_j \ell) - \sinh(\mu_j \ell)} v_j'''(0)$.

Задамо у просторі $\overset{\circ}{H}^2(0, \ell)$ білінійну форму $\langle f, g \rangle_{\overset{\circ}{H}^2(0, \ell)} = \int_0^\ell f''(x) g''(x) dx$ та оберемо константи $v_j'''(0)$ таким чином, щоб $\langle v_j, v_j \rangle_{\overset{\circ}{H}^2(0, \ell)} = 1$, $\forall j = 1, 2, \dots$. Так, власні значення $\{\lambda_j\}_{j=1}^\infty$ задачі (5.6) можна знайти як розв'язки рівняння (5.11), а $\{v_j(x)\}_{j=1}^\infty$ — відповідні власні функції вигляду (5.12).

5.3. Рівняння відносно коефіцієнтів системи Гальоркіна

Спроекуємо початкові функції $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ на V_m :

$$\varphi^m(x) = \sum_{j=1}^m \frac{\langle \varphi, v_j \rangle_{L^2(0, \ell)}}{\|v_j\|_{L^2(0, \ell)}^2} \cdot v_j(x) = \sum_{j=1}^m \varphi_j v_j(x),$$

$$\psi^m(x) = \sum_{j=1}^m \frac{\langle \psi, v_j \rangle_{L^2(0,\ell)}}{\|v_j\|_{L^2(0,\ell)}^2} \cdot v_j(x) = \sum_{j=1}^m \psi_j v_j(x),$$

тоді

$$w_m(x, 0) = \sum_{j=1}^m c_j(0) v_j(x) = \sum_{j=1}^m \varphi_j v_j(x), \quad (5.13)$$

$$\dot{w}_m(x, 0) = \sum_{j=1}^m \dot{c}_j(0) v_j(x) = \sum_{j=1}^m \psi_j v_j(x), \quad (5.14)$$

звідки $c_j(0) = \varphi_j$ та $\dot{c}_j(0) = \psi_j$.

Нехай $q(t)$ — деяка функція простору $\mathring{H}^2(0, T)$. В інтегральній тотожності (5.4) візьмемо $v(x, t) = v_j(x) q(t)$ в якості пробної функції (тут $v_j(x)$ — одна з власних функцій спектральної задачі (5.6)):

$$\int_0^\ell \int_0^T \left(a^2 w_m''(x, t) v_j''(x) q(t) - \dot{w}_m v_j \dot{q}(t) \right) dt dx = \int_0^\ell \int_0^T f(x, t) v_j(x) q(t) dt dx.$$

Інтегрування частинами призводить до

$$\int_0^T q(t) \left(\int_0^\ell \left(a^2 w_m^{(4)}(x, t) + \ddot{w}_m(x, t) - f(x, t) \right) v_j(x) dx \right) dt = 0, \quad \forall q \in \mathring{H}^2(0, T).$$

Згідно з основною лемою варіаційного числення,

$$\int_0^\ell \left(a^2 w_m^{(4)}(x, t) + \ddot{w}_m(x, t) \right) v_j(x) dx = \int_0^\ell f(x, t) v_j(x) dx$$

для майже всіх $t \in [0, T]$. Запишемо інтегральну тотожність (5.4) у наступному вигляді:

$$\int_0^\ell \left(\ddot{w}_m(x, t) + a^2 w_m^{(4)}(x, t) \right) v_j(x) dx = \int_0^\ell f(x, t) v_j(x) dx, \quad j = \overline{1, m}, \quad (5.15)$$

для майже всіх $t \in [0, T]$. Будемо шукати такі функції $c_j(t)$, $j = \overline{1, m}$, що виконано (5.15) та початкові умови (5.13), (5.14). Підставимо (5.5) в (5.15) і отримаємо лінійну відносно функцій $c_1(t), \dots, c_m(t)$ систему звичайних диференціальних рівнянь другого порядку зі сталими коефіцієнтами:

$$\sum_{s=1}^m \left(\ddot{c}_s(t) \langle v_s, v_j \rangle_{L^2(0,\ell)} + a^2 c_s(t) \langle v_s, v_j \rangle_{\mathring{H}^2(0,\ell)} \right) = f_j(t), \quad j = \overline{1, m}, \quad (5.16)$$

де $f_j(t) = \int_0^\ell f(x, t) v_j(x) dx \in L^2(0, T)$. Оскільки власні функції, що відповідають різним власним значенням оператора A , ортогональні, то система рівнянь (5.16) має вигляд:

$$\ddot{c}_j(t) \|v_j\|_{L^2(0, \ell)}^2 + a^2 c_j(t) \|v_j\|_{H^2(0, \ell)}^2 = f_j(t), \quad j = \overline{1, m}. \quad (5.17)$$

Задамо матрицю $\tilde{A} = \text{diag} \left(\|v_j\|_{L^2}^2, j = \overline{1, m} \right)$ і запишемо (5.17) у матричному вигляді:

$$\tilde{A} \left(\ddot{c}_1(t), \dots, \ddot{c}_m(t) \right)^T + a^2 \left(c_1(t), \dots, c_m(t) \right)^T = \left(f_1(t), \dots, f_m(t) \right)^T.$$

Нехай $C(t) = \left(\dot{c}_1(t), \dots, \dot{c}_m(t), c_1(t), \dots, c_m(t) \right)^T$, $A = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & -a^2 \tilde{A}^{-1} \\ \hline \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{array} \right)$,

$F(t) = \left(\tilde{A}^{-1} \mid \mathbf{0} \right) \cdot \left(f_1(t), \dots, f_m(t) \mid \mathbf{0} \right)^T$, де \mathbf{I} і $\mathbf{0}$ — одинична і нульова матриці відповідної розмірності, тоді задача (5.17), (5.13), (5.14) еквівалентна наступній:

$$\begin{aligned} \dot{C}(t) &= A C(t) + F(t), \\ C(0) &= \left(\psi_1, \dots, \psi_m, \varphi_1, \dots, \varphi_m \right)^T. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Оскільки $f \in L^2(D)$, то $F(t) \in L^2(0, T)$, звідки випливає приналежність $\int_0^t F(\tau) d\tau \in C[0, T]$. Задачу (5.18) замінимо еквівалентною їй системою інтегральних рівнянь

$$C(t) = \int_0^t A C(\tau) d\tau + \int_0^t F(\tau) d\tau. \quad (5.19)$$

Можна довести (див. [28]), що існує єдиний розв'язок системи (5.19). Тотожність (5.15) помножимо на $\dot{c}_j(t)$, проінтегруємо на проміжку $(0, \tau)$, де $\tau \in [0, T]$, та просумуємо за $j = \overline{1, m}$. В результаті отримаємо

$$\int_0^\tau \int_0^\ell \left(\ddot{w}_m(x, t) + a^2 w_m^{(4)}(x, t) \right) \dot{w}_m(x, t) dx dt = \int_0^\tau \int_0^\ell f(x, t) \dot{w}_m(x, t) dx dt.$$

Використовуючи тотожності

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 w_m}{\partial x^4} \cdot \frac{\partial w_m}{\partial t} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 w_m}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial w_m}{\partial t} \right) - 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w_m}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w_m}{\partial x \partial t} \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\left(\frac{\partial^2 w_m}{\partial x^2} \right)^2 \right) \quad \text{та} \quad \frac{\partial^2 w_m}{\partial t^2} \cdot \frac{\partial w_m}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\left(\frac{\partial w_m}{\partial t} \right)^2 \right), \end{aligned}$$

отримаємо співвідношення

$$\begin{aligned} &\int_0^\tau \int_0^\ell \left(\ddot{w}_m(x, t) + a^2 w_m^{(4)}(x, t) \right) \dot{w}_m(x, t) \, dx \, dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_{D_\tau} \left((\dot{w}_m(x, t))^2 + (a \cdot w_m''(x, t))^2 \right) \, dx - \frac{1}{2} \int_0^\ell \left(a^2 \cdot (\varphi^m(x))'' + (\psi^m(x))^2 \right) \, dx, \end{aligned}$$

де $D_\tau = \{x \in (0, \ell), t = \tau\}$.

5.4. Збіжність послідовності наближених розв'язків до узагальненого розв'язку

Для функцій $w_1(x, t), w_2(x, t), \dots$ справедливий наступний результат про збіжність методу Гальоркіна.

Теорема 5.1. *Нехай $\varphi \in \dot{H}^2(0, \ell)$, $\psi \in L^2(0, \ell)$ та нехай $w_m(x, t)$ — послідовність наближених за Гальоркіним розв'язків задачі (5.1)–(5.3), $m \in \mathbb{N}$. Тоді існує підпослідовність $w_{m_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} w$, де $w(x, t)$ є узагальненим розв'язком задачі (5.1)–(5.3).*

Доведення. У просторі $\widehat{H}^2(D)$ задамо квадратичну форму $\|w\|_{\widehat{H}^2(D)}^2 = \int_0^\ell \int_0^T \left((\dot{w})^2 + a^2 (w'')^2 \right) \, dt \, dx$, тоді

$$\begin{aligned} &2 \int_0^T \int_0^\tau \int_0^\ell \left(\frac{\partial^2 w_m}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 w_m}{\partial t^4} \right) \frac{\partial w_m}{\partial t} \, dx \, dt \, d\tau = \\ &= \|w_m\|_{\widehat{H}^2(D)}^2 - T \int_0^\ell \left(a^2 \frac{d^2}{dx^2} \varphi^m(x) + (\psi^m(x))^2 \right) \, dx. \end{aligned}$$

Розглянемо енергетичну функцію $\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} \int_0^\ell (\dot{w}_m^2 + a^2 (w_m'')^2) dx$. Зауважимо, що

$$\|\dot{w}_m\|_{L^2(0,\ell)}^2 = \int_0^\ell (\dot{w}_m)^2 dx \leq 2 \mathcal{E}(t) \quad (5.20)$$

та

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \int_0^\ell (\dot{w}_m \cdot \ddot{w}_m + a^2 w_m'' (\dot{w}_m)'') dx = \int_0^\ell \dot{w}_m \cdot f(x, t) dx.$$

В силу нерівності Коші–Буняковського–Шварца та (5.20),

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} \leq \left\| \frac{\partial w_m}{\partial t} \right\|_{L^2(0,\ell)} \cdot \|f\|_{L^2(0,\ell)} \leq \sqrt{2 \mathcal{E}(t)} \cdot \|f\|_{L^2(0,\ell)}. \quad (5.21)$$

Позначимо $\sqrt{2 \mathcal{E}(t)} \cdot \|f\|_{L^2(0,\ell)} = \Phi(t)$ і запишемо рівняння порівняння для (5.21): $\dot{\mathcal{E}}(t) = \Phi(t) \sqrt{\mathcal{E}(t)}$, звідки $\sqrt{\mathcal{E}(t)} = \sqrt{\mathcal{E}(0)} + \frac{1}{2} \int_0^t \Phi(\tau) d\tau$, де

$$\mathcal{E}(0) = \frac{1}{2} \int_0^\ell \left(\left(\dot{w}_m \Big|_{t=0} \right)^2 + a^2 \left(w_m'' \Big|_{t=0} \right)^2 \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^\ell \left((\psi(x))^2 + a^2 (\varphi''(x))^2 \right) dx.$$

Згідно з [169, Теорема 4.1],

$$\mathcal{E}(t) \leq \left(\sqrt{\mathcal{E}(0)} + \frac{1}{2} \int_0^t \Phi(\tau) d\tau \right)^2, \quad (5.22)$$

що означає рівномірну обмеженість функції $\mathcal{E}(t)$ за m . Зауважимо, що $\|w_m\|_{\widehat{H}^2(D)}^2 = \int_0^T \mathcal{E}(t) dt$. Отже, послідовність функцій $\{w_m\}_{m=1}^\infty$ обмежена за нормою. Оскільки сильно обмежена множина у гільбертовому просторі є слабо компактною, то в $\{w_m\}_{m=1}^\infty$ існує слабо збіжна підпослідовність. Не обмежуючи загальності міркувань, позначимо її $\{w_m\}_{m=1}^\infty$, тоді $w_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} w$ слабо у просторі $\widehat{H}^2(D)$, при цьому w — шуканий загальний розв'язок задачі (5.1)–(5.3). Для доведення цього факту необхідно перевірити для $w(x, t)$ виконання інтегральної тотожності (5.4), у якій в якості пробної функції візьмемо

$$v(x, t) = v_j(x) q(t), \quad (5.23)$$

де $v_j(x)$ — одна з власних функцій задачі (5.6), $j = \overline{1, m}$, а функція

$q(t) \in C^1[0, T]$ задовольняє умову $q(0) = q(T) = 0$. Згідно з побудовою w_m ,

$$\int_0^\ell \int_0^T (a^2 w_m'' v'' - \dot{w}_m \dot{v} - f v) dt dx = 0, \quad \forall m \geq j. \quad (5.24)$$

Запишемо умову слабкої збіжності:

$$\int_0^\ell \int_0^T (a^2 w_m'' v'' - \dot{w}_m \dot{v} - f v) dt dx \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \int_0^\ell \int_0^T (a^2 w'' v'' - \dot{w} \dot{v} - f v) dt dx. \quad (5.25)$$

Отже, згідно з (5.24) та (5.25), $\int_0^\ell \int_0^T (a^2 w'' v'' - \dot{w} \dot{v} - f v) dt dx = 0$, що означає виконання (5.4) для $w(x, t)$.

Покажемо, що множина M , яка складається з лінійних комбінацій функцій вигляду (5.23), є всюди щільною в $\widehat{H}^2(D)$. Для цього візьмемо всюди щільну в $\widehat{H}^2(D)$ множину, яка складається з неперервних у прямокутнику D функцій $\eta(x, t)$, які дорівнюють нулеві на межі прямокутника, і покажемо, що будь-яку функцію η можна апроксимувати у метриці простору $H^2(D)$ функціями з M , тобто $\|v_n - \eta\|_{H^2(D)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, де $v_n \in M$. Функції $\eta(x, t) \in C^2(D)$ та $\dot{\eta}(x, t) \in C^1(D)$ можна розкласти в ряди Фур'є за системою функцій (5.10):

$$\eta(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k(t) v_k(x), \quad \dot{\eta}(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \dot{\eta}_k(t) v_k(x). \quad (5.26)$$

Оскільки для фіксованого $t \in [0, T]$ функції $\eta(\cdot, t)$ та $\dot{\eta}(\cdot, t)$ належать до простору $\mathring{H}^2(0, \ell)$, то їхні ряди Фур'є збігаються до них у метриці $\mathring{H}^2(0, \ell)$.

Зауважимо, що частинна сума $\eta^N = \sum_{k=1}^N \eta_k(t) v_k(x)$ першого з рядів (5.26) є елементом множини M , $\dot{\eta} - \dot{\eta}^N \in \mathring{H}^2(0, \ell)$. Згідно з нерівністю Стеклова

$$\|\dot{\eta} - \dot{\eta}^N\|_{L^2(0, \ell)}^2 \leq C \|\dot{\eta} - \dot{\eta}^N\|_{\mathring{H}^2(0, \ell)}^2, \quad C > 0,$$

звідки згідно з рівністю Парсеваля

$$\begin{aligned} \|\dot{\eta} - \dot{\eta}^N\|_{L^2(0, \ell)}^2 + \|\eta - \eta^N\|_{\mathring{H}^2(0, \ell)}^2 &\leq C \|\dot{\eta} - \dot{\eta}^N\|_{\mathring{H}^2(0, \ell)}^2 + \|\eta - \eta^N\|_{\mathring{H}^2(0, \ell)}^2 = \\ &= \sum_{k=n+1}^{\infty} C(\dot{\eta}_k)^2 + \eta_k^2 \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

отже,

$$\begin{aligned} \|\eta - \eta^N\|_{\hat{H}^2(D)}^2 &= \int_0^\ell \int_0^T \left((\dot{\eta} - \dot{\eta}^N)^2 + a^2 (\eta'' - (\eta^N)'')^2 \right) dt dx = \\ &= \int_0^T \left(\|\dot{\eta} - \dot{\eta}^N\|_{L^2(0,\ell)}^2 + a^2 \|\eta - \eta^N\|_{\dot{H}^2(0,\ell)}^2 \right) dt \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

звідки $\|\eta - \eta^N\|_{\hat{H}^2(D)}^2 \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$. \square

Зауваження 5.1. Важливим етапом доведення теореми 5.1 є отримання оцінки енергії на розв'язках (5.22). Оскільки ця оцінка є рівномірною за m , формула (5.22) може бути використана під час дослідження наближених за Гальоркіним розв'язків будь-якого порядку.

5.5. Результати чисельного моделювання

На рисунках 5.1 та 5.2 представлено результати чисельного інтегрування системи звичайних диференціальних рівнянь (5.17), що відповідають наближеним розв'язкам початково-крайової задачі (5.1)–(5.3) у момент часу $t=2$ с для таких значень механічних параметрів: довжина балки $\ell=1$ м, коефіцієнт $a^2=100 \frac{\text{Нм}^3}{\text{кг}}$, що характерно, наприклад, для алюмінієвої балки з круговим перетином діаметра приблизно 5.5 мм. Нехай початкова швидкість $\dot{w}(x,0) = \psi(x)$ дорівнює нулю. Оберемо початкову функцію $w(x,0) = \varphi(x)$ з умови рівноваги балки у полі сили тяжіння g : $a^2 \varphi^{(4)}(x) = -g$, звідки $\varphi(x) = -\frac{g}{24a^2} (x^2 - 4\ell x + 6\ell^2)x^2$. Зовнішні сили, які діють на балку, можна представити у вигляді функції $f(x,t) = -g + u(t) \chi_{[\ell-h, \ell]}(x)$, де $\chi_{[\ell-h, \ell]}(x)$ – індикатор відрізка $[\ell-h, \ell]$, $u(t) = 2.5g(1 - e^{-\kappa t})$ – керування; $u(t)$ має фізичну розмірність прискорення. Така функція $f(x,t)$ відповідає балці, до вільного кінця якої на відріжку довжини h прикладена керуюча сила, яка спрямована вертикально вгору і при $t \rightarrow +\infty$ ця сила компенсує вагу балки. У розрахунках обрані значення параметрів $\kappa=1$, $h=0,1$ м.

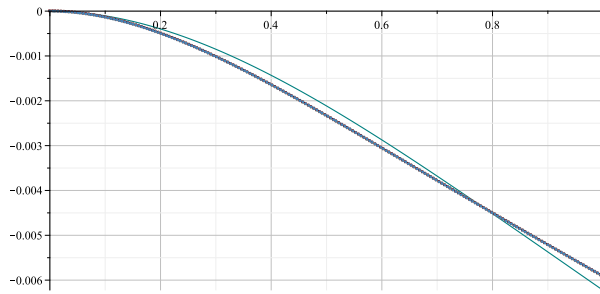


Рис. 5.1: Форма прогину консольної балки при $t = 2$ с

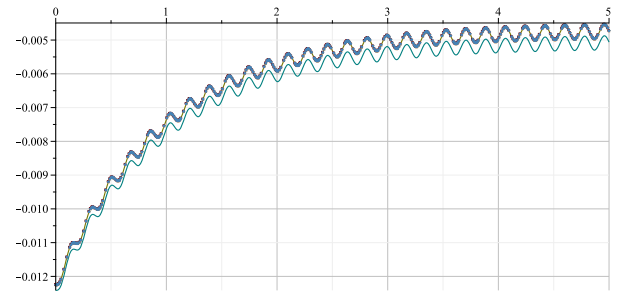


Рис. 5.2: Графіки функцій $w_m(\ell, t)$

На рис. 5.1 представлено графіки функцій $w_m(x, 2)$ при $x \in [0, \ell]$, на рис. 5.2 — графіки функцій $w_m(\ell, t)$ при $t \in [0, 5]$, $m = \overline{1, 6}$. З рисунків можна бачити, що наближені за Гальоркіним розв'язки достатньо близькі до нуля для всіх $x \in [0, \ell]$. При цьому графіки функцій $w_2(x, 2), \dots, w_6(x, 2)$ практично співпадають, як і графіки функцій $w_2(\ell, t), \dots, w_6(\ell, t)$, що ілюструє швидку збіжність методу Гальоркіна для задачі (5.1)–(5.3).

Висновки до розділу 5

У розділі 5 досліджено математичну модель руху консольно закріпленої пружної балки. Запропоновано спосіб знаходження наближеного розв'язку відповідної початково-крайової задачі для диференціального рівняння з частинними похідними четвертого порядку на основі методу Гальоркіна. Для цього розглянуто відповідну спектральну задачу і побудовано базис у просторі Соболева. Задачу про коливання балки спроектовано на скінченновимірний многовид, побудований у вигляді лінійної оболонки базисних функцій. Досліджено систему диференціальних рівнянь на коефіцієнти лінійних комбінацій. Доведено збіжність методу Гальоркіна для розглянутої задачі. Результат проілюстровано за допомогою чисельного моделювання.

Результати, отримані в розділі 5, опубліковано у статті [143].

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі розв'язано задачі асимптотичної стабілізації та спостереження для гібридної механічної системи, яка містить пружні та абсолютно тверді елементи.

Запропоновано функціонали керування зі зворотним зв'язком для стабілізації моделі шарнірно опертої пружної балки з твердим тілом. Доведено коректність задачі Коші для рівняння руху пружної механічної системи. Встановлено асимптотичну стійкість замкненої системи зі зворотним зв'язком за допомогою прямого методу Ляпунова та принципу інваріантності ЛаСалля. Вперше описано асимптотичні властивості розподілу власних частот для моделі пружної балки з приєднаною масою на пружинній підвісці. Запропоновано конструктивний синтез спостерігача типу Луенберґера для системи керування з виходом. Доведено збіжність запропонованих спостерігачів у скінченновимірному та нескінченновимірному випадках на основі аналізу стійкості розв'язків системи відносно похибок. Доведено збіжність методу Гальоркіна для задачі про коливання консольно закріпленої пружної балки з керуючим впливом.

Отримані результати вказують на можливість практичного застосування розроблених методів у різних інженерних та технічних галузях, а також відкривають перспективи для подальших досліджень у сфері теорії керування рухом нескінченновимірних пружних механічних систем.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Agrawal, B.N., Treanor, K.E.: Shape control of a beam using piezoelectric actuators. *Smart Materials and Structures* **8**(6), 729–740 (1999). DOI 10.1088/0964-1726/8/6/303
2. Ahmed-Ali, T., Giri, F., Krstic, M., Kahelras, M.: PDE based observer design for nonlinear systems with large output delay. *Systems & Control Letters* **113**, 1–8 (2018). DOI 10.1016/j.sysconle.2018.01.001
3. Apalara, T.A.: On the stability of a thermoelastic laminated beam. *Acta Mathematica Scientia* **39**, 1517–1524 (2019). DOI 10.1007/s10473-019-0604-9
4. Apalara, T.A., Raposo, C.A., Nonato, C.A.S.: Exponential stability for laminated beams with a frictional damping. *Archiv der Mathematik* **114**, 471–480 (2020). DOI 10.1007/s00013-019-01427-1
5. Arnold, V.I.: *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, 2nd ed. edn. Graduate Texts in Mathematics. Springer, New York, NY (2013). DOI 10.1007/978-1-4757-2063-1. Originally published by Nauka, Moscow, 1974
6. Balas, M.J.: Modal control of certain flexible dynamic systems. *SIAM Journal on Control and Optimization* **16**(3), 450–462 (1978). DOI 10.1137/0316030
7. Balemi, S.: Partial-order reduction of observers for linear systems. *IFAC Proceedings Volumes* **41**(2), 7723–7728 (2008). DOI 10.3182/20080706-5-KR-1001.01306
8. Berdichevsky, V.: *Variational Principles of Continuum Mechanics*. Springer, Berlin, Heidelberg (2009). DOI 10.1007/978-3-540-88467-5
9. Brauer, U., Leugering, G.: On boundary observability estimates for semi-discretizations of a dynamic network of elastic strings. *Control and*

- Cybernetics **28**(3), 421–447 (1999)
10. Brockett, R.W.: Finite dimensional linear systems. Electronic & Electrical Engineering Research Studies. Wiley (1970)
 11. Butkovsky, A.G., Egorov, A.I., Lurie, K.A.: Optimal control of distributed systems (a survey of soviet publications). SIAM Journal on Control **6**(3), 437–476 (1968). DOI 10.1137/0306029
 12. Castro, C.: Asymptotic analysis and control of a hybrid system composed by two vibrating strings connected by a point mass. ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations **2**, 231–280 (1997). DOI 10.1051/cocv:1997108
 13. Castro, C., Zuazua, E.: Boundary controllability of a hybrid system consisting in two flexible beams connected by a point mass. SIAM Journal on Control and Optimization **36**(5), 1576–1595 (1998). DOI 10.1137/S0363012997316378
 14. Castro, C., Zuazua, E.: Exact boundary controllability of two Euler–Bernoulli beams connected by a point mass. Mathematical and Computer Modelling **32**(9), 955–969 (2000). DOI 10.1016/S0895-7177(00)00182-5
 15. Chen, G., Delfour, M.C., Krall, A., Payre, G.: Modeling, stabilization and control of serially connected beams. SIAM Journal on Control and Optimization **25**(3), 526–546 (1987). DOI 10.1137/0325029
 16. Coron, J.M.: Control and nonlinearity. 136. American Mathematical Soc. (2007)
 17. Curtain, R.F., Pritchard, A.J.: Semigroup theory, pp. 105–111. Springer, Berlin, Heidelberg (1978). DOI 10.1007/BFb0006763
 18. Curtain, R.F., Zwart, H.: An Introduction to Infinite-Dimensional Linear Systems Theory, *Texts in Applied Mathematics*, vol. 21, 1 edn. Springer, New York, NY (2012). DOI 10.1007/978-1-4612-4224-6
 19. Dafermos, C.M., Slemrod, M.: Asymptotic behavior of nonlinear contraction semigroups. Journal of Functional Analysis **13**(1), 97–106 (1973). DOI

- 10.1016/0022-1236(73)90069-4
20. Dáger, R., Zuazua, E.: Wave propagation, observation and control in 1-d flexible multi-structures, *Mathématiques et Applications*, vol. 50. Springer Science & Business Media (2006). DOI 10.1007/3-540-37726-3
 21. Daltin, D.C., Bueno, Á.M., Balthazar, J.M., Serni, P.J.A., Barbosa, R.: State observer applied to position and vibration control using flexible link manipulator. In: J.M. Balthazar (ed.) *Vibration Engineering and Technology of Machinery*, pp. 281–297. Springer International Publishing, Cham (2021). DOI 10.1007/978-3-030-60694-7_18
 22. Delfour, M.C., Mitter, S.K.: Controllability and observability for infinite-dimensional systems. *SIAM Journal on Control* **10**(2), 329–333 (1972). DOI 10.1137/0310024
 23. Demetriou, M.A., Ito, K.: Adaptive observers for a class of infinite dimensional systems. *IFAC Proceedings Volumes* **29**(1), 5346–5350 (1996). DOI 10.1016/S1474-6670(17)58531-6
 24. Dullinger, C., Schirrer, A., Kozek, M.: Advanced control education: optimal & robust mimo control of a flexible beam setup. pp. 9019–9025. Elsevier (2014). DOI 10.3182/20140824-6-ZA-1003.02201
 25. Dunford, N., Schwartz, J.T.: *Linear Operators. Part I: General theory*, *Pure and applied mathematics*, vol. VII (1988)
 26. Fattorini, H.O.: On complete controllability of linear systems. *Journal of Differential Equations* **3**(3), 391–402 (1967). DOI 10.1016/0022-0396(67)90039-3
 27. Fernández-Cara, E., Zuazua, E.: Control theory: History, mathematical achievements and perspectives. *Boletín de la Sociedad Española de Matemática Aplicada* (26), 79–140 (2003)
 28. Filippov, A.F.: *Differential equations with discontinuous righthand sides: control systems*, 1 edn. Mathematics and its Applications. Springer Dordrecht (1988). DOI 10.1007/978-94-015-7793-9

29. Goldstein, H., Pool, C., Safko, J.: Classical mechanics, 3rd edition edn. Pearson Education (2002)
30. Grosh, K., Pinsky, P.M.: Design of galerkin generalized least squares methods for Timoshenko beams. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **132**(1-2), 1–16 (1996). DOI 10.1016/0045-7825(96)01002-X
31. Guo, B.Z.: Riesz basis property and exponential stability of controlled Euler–Bernoulli beam equations with variable coefficients. *SIAM Journal on Control and Optimization* **40**(6), 1905–1923 (2002). DOI 10.1137/S0363012900372519
32. Guo, L.Z., Guo, Y.Z., Billings, S.A., Coca, D.: Approximate observability of infinite dimensional bilinear systems using a Volterra series expansion. *Systems & Control Letters* **75**, 20–26 (2015). DOI 10.1016/j.sysconle.2014.11.002
33. Hamilton, W.: Report of the 4-th meeting of the british association for the advancement of science pp. 513–518 (1835)
34. Hansen, S., Zuazua, E.: Exact controllability and stabilization of a vibrating string with an interior point mass. *SIAM Journal on Control and Optimization* **33**(5), 1357–1391 (1995). DOI 10.1137/S0363012993248347
35. He, W., Ge, S.S.: Dynamic modeling and vibration control of a flexible satellite. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems* **51**(2), 1422–1431 (2015). DOI 10.1109/TAES.2014.130804
36. Jacob, B., Zwart, H.: Exact observability of diagonal systems with a finite-dimensional output operator. *Systems & Control Letters* **43**(2), 101–109 (2001). DOI 10.1016/S0167-6911(00)00117-1
37. Jacob, B., Zwart, H.: Exact observability of diagonal systems with a one-dimensional output operator. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science* **11**(6), 1277–1283 (2001)

38. Judicael, D., Barbulescu, A.: Theoretical observers for infinite dimensional skew-symmetric systems. *Analele științifice ale Universității “Ovidius” Constanța. Seria Matematică* **28**(1), 135–150 (2020). DOI 10.2478/auom-2020-0010
39. Kálmán, R.E.: On the general theory of control systems. *IFAC Proceedings Volumes* **1**(1), 491–502 (1960). DOI 10.1016/S1474-6670(17)70094-8
40. Kálmán, R.E.: Mathematical description of linear dynamical systems. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, Series A: Control* **1**(2), 152–192 (1963). DOI 10.1137/0301010
41. Kalosha J. I., Zuyev A. L.: Asymptotic stabilization of a flexible beam with an attached mass. *Ukrainian Mathematical Journal* **73**(10), 1537–1550 (2022). DOI 10.1007/s11253-022-02012-6
42. Kalosha, J., Zuyev, A., Benner, P.: On the eigenvalue distribution for a beam with attached masses. In: G. Sklyar, A. Zuyev (eds.) *Stabilization of Distributed Parameter Systems: Design Methods and Applications, SEMA SIMAI Springer Series*, vol. 2, pp. 43–56. Springer International Publishing, Cham (2021). DOI 10.1007/978-3-030-61742-4_3
43. Kalosha, J.I., Zuyev, A.L.: Finite-dimensional model of the beam oscillations with distributed and lumped controls. In: *Proceedings of the International Conference on Differential Equations, Mathematical Physics and Applications (DEMPH-A-2017)*, pp. 30–31. Bohdan Khmelnytsky national university of Cherkasy, Cherkasy, Ukraine, October 17 – 19 (2017)
44. Khasawneh, F.A., Segalman, D.: Exact and numerically stable expressions for Euler–Bernoulli and Timoshenko beam modes. *Applied Acoustics* **151**, 215–228 (2019). DOI 10.1016/j.apacoust.2019.03.015
45. Komkov, V.: Optimal control theory for thin plates, *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 253, pp. 119–209. Springer, Berlin, Heidelberg (1972). DOI 10.1007/BFb0058909
46. Komornik, V., Loreti, P.: *Fourier series in control theory*, 1 edn. Spri-

- nger Monographs in Mathematics. Springer, New York, NY (2005). DOI 10.1007/b139040
47. Korobov V. I., Krabs, W., Sklyar G. M.: On the solvability of trigonometric moment problems arising in the problem of controllability of rotating beams. In: K.H. Hoffmann, I. Lasiecka, G. Leugering, J. Sprekels, F. Tröltzsch (eds.) *Optimal Control of Complex Structures, ISNM International Series of Numerical Mathematics*, vol. 139, pp. 145–156. Birkhäuser, Basel (2001). DOI 10.1007/978-3-0348-8148-7_12
 48. Krabs, W.: On moment theory and controllability of one-dimensional vibrating systems and heating processes. Springer, Berlin, Heidelberg (1992). DOI 10.1007/BFb0039515
 49. Krall, A.M.: Asymptotic stability of the Euler–Bernoulli beam with boundary control. *Journal of mathematical analysis and applications* **137**(1), 288–295 (1989). DOI 10.1016/0022-247X(89)90289-8
 50. Kratz, W.: Characterization of strong observability and construction of an observer. *Linear Algebra and its Applications* **221**, 31–40 (1995). DOI 10.1016/0024-3795(93)00221-K
 51. Kratz, W., Liebscher, D.: A local characterization of observability. *Linear Algebra and its Applications* **269**(1), 115–137 (1998). DOI 10.1016/S0024-3795(97)00061-X
 52. Krstic, M., Guo, B.Z., Balogh, A., Smyshlyaev, A.: Control of a tip-force destabilized shear beam by observer-based boundary feedback. *SIAM journal on control and optimization* **47**(2), 553–574 (2008). DOI 10.1137/060676969
 53. Kucher Julia I., Zuyev Alexander L.: Stabilization of a flexible beam with distributed actuators. In: *Proceedings of the International Conference “The Twenty Third Crimea Autumn Mathematical School-Symposium” (KROMSh)*, p. 81. Taurida national V. Vernadsky university, Crimea, Ukraine, September 17 – 29 (2012)

54. Kucher, J., Zuyev, A.: Limit behavior of the trajectories for the problem of vibrations of a beam–mass system under the action of distributed and lumped controls. In: Proceedings of the Crimean International Math. Conf. “KMMK–2013”. Taurida national V. Vernadsky university, Sudak, Ukraine, September 22 – October 4 (2013)
55. Kucher, J., Zuyev, A.: Asymptotic stability analysis of the Euler–Bernoulli beam model. In: Proceedings of the International V. Skorobohatko Mathematical Conference, p. 86. Pidstryhach institute for applied problems of mechanics and mathematics of NAS of Ukraine, Drohobych, Ukraine, August 25 – 28 (2015)
56. Kucher, J., Zuyev, L.: Stabilization of a flexible beam with a shaker and piezoelectric actuators. In: Proceedings of the 16th International Conference “Dynamical System Modelling and Stability Investigation” (DSMSI), p. 336. Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine, May 29 – 31 (2013)
57. Lagnese, J.E.: Boundary stabilization of thin plates. Studies in Applied and Numerical Mathematics. SIAM (1989). DOI 10.1137/1.9781611970821
58. Lagnese, J.E., Leugering, G.: Dynamic domain decomposition in approximate and exact boundary control in problems of transmission for wave equations. SIAM Journal on Control and Optimization **38**(2), 503–537 (2000). DOI 10.1137/S0363012998333530
59. Lagnese, J.E., Leugering, G., Schmidt, E.J.P.G.: On the analysis and control of hyperbolic systems associated with vibrating networks. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics **124**(1), 77–104 (1994). DOI 10.1017/S0308210500029206
60. Lagnese, J.E., Leugering, G., Schmidt, E.J.P.G.: Modeling, analysis and control of dynamic elastic multi-link structures, 1 edn. Systems & Control: Foundations & Applications. Birkh”auser, Boston, MA (2012). DOI

- 10.1007/978-1-4612-0273-8
61. Lamei, A., Hayatdavoodi, M.: On motion analysis and elastic response of floating offshore wind turbines. *Journal of Ocean Engineering and Marine Energy* **6**, 71–90 (2020). DOI 10.1007/s40722-019-00159-2
 62. LaSalle, J.P.: Stability theory and invariance principles. In: *Dynamical systems*, vol. 1, pp. 211–222. Academic Press (1976)
 63. Lasiecka, I., Triggiani, R.: Control Theory for Partial Differential Equations. Continuous and Approximation Theories. *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge (2000)
 64. Le Gorrec, Y., Zwart, H., Ramirez, H.: Asymptotic stability of an Euler–Bernoulli beam coupled to non-linear spring-damper systems. *IFAC-papersonline* **50**(1), 5580–5585 (2017). DOI 10.1016/j.ifacol.2017.08.1102
 65. Lee, E.B., Markus, L.: *Foundations of optimal control theory*, vol. 87. Wiley, New York, NY (1967)
 66. Levine, W.S.: *The Control Handbook* (three volume set), 2 edn. CRC press (2011). DOI 10.1201/9781315218694
 67. Liao, M., Wang, G., Gao, Z., Zhao, Y., Li, R.: Mathematical modelling and dynamic analysis of an offshore drilling riser. *Shock and Vibration* **2020**, 1–13 (2020)
 68. Lions, J.L.: Optimal control of systems governed by partial differential equations, *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*, vol. 170, 1 edn. Springer (1971)
 69. Liu, J., Guo, B.Z.: A novel semi-discrete scheme preserving uniformly exponential stability for an Euler–Bernoulli beam. *Systems & Control Letters* **134**, 1–10 (2019). DOI 10.1016/j.sysconle.2019.104518
 70. Liu, S., Li, Y.: Dynamic modeling and infinite-dimensional observer-based control for manipulation of flexible beam by a multi-link robot. *Complex*

- & Intelligent Systems **9**(3), 3249–3260 (2023). DOI 10.1007/s40747-022-00920-5
71. Liu, W., Luan, Y., Liu, Y., Li, G.: Well-posedness and asymptotic stability to a laminated beam in thermoelasticity of type III. *Mathematical Methods in the Applied Sciences* **43**(6), 3148–3166 (2020). DOI 10.1002/mma.6108
 72. Liu, Z., Liu, J., Wang, L.: Disturbance observer based attitude control for flexible spacecraft with input magnitude and rate constraints. *Aerospace Science and Technology* **72**, 486–492 (2018). DOI 10.1016/j.ast.2017.11.036
 73. Luenberger, D.G.: Observing the state of a linear system. *IEEE transactions on military electronics* **8**(2), 74–80 (1964). DOI 10.1109/TME.1964.4323124
 74. Luenberger, D.G.: Observers for multivariable systems. *IEEE transactions on automatic control* **11**(2), 190–197 (1966). DOI 10.1109/TAC.1966.1098323
 75. Luenberger, D.G.: An introduction to observers. *IEEE Transactions on automatic control* **16**(6), 596–602 (1971). DOI 10.1109/TAC.1971.1099826
 76. Lumer, G., Phillips, R.S.: Dissipative operators in a Banach space. *Pacific J. Math.* **11**, 679–698 (1961)
 77. Luo, Z.H., Guo, B.Z., Morgül, Ö.: *Stability and Stabilization of Infinite Dimensional Systems with Applications*. Springer-Verlag, London (1999)
 78. Macia, F., Zuazua, E.: On the lack of observability for wave equations: a Gaussian beam approach. *Asymptotic Analysis* **32**(1), 1–26 (2002)
 79. Mattioni, A., Toledo, J., Le Gorrec, Y.: Observer based nonlinear control of a rotating flexible beam. *IFAC-PapersOnLine* **53**(2), 7479–7484 (2020). DOI 10.1016/j.ifacol.2020.12.1306
 80. Mazko, A.G.: Positive and monotone systems in a partially ordered space. *Ukrainian Mathematical Journal* **55**(2), 199–211 (2003). DOI

- 10.1023/A:1025460111682
81. Mazko, A.G.: Robust output feedback stabilization and optimization of control systems. *Nonlinear Dynamics and Systems Theory* **17**(1), 42–59 (2017)
 82. Morgül, Ö.: Control and stabilization of a flexible beam attached to a rigid body. *International Journal of Control* **51**(1), 11–31 (1990). DOI 10.1080/00207179008934048
 83. Morgül, Ö.: Boundary control of a Timoshenko beam attached to a rigid body: planar motion. *International journal of control* **54**(4), 763–791 (1991). DOI 10.1080/00207179108934185
 84. Mustafa, M.I.: On the stabilization of viscoelastic laminated beams with interfacial slip. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik* **69**, 1–14 (2018). DOI 10.1007/s00033-018-0928-7
 85. Odhner, L.U., Dollar, A.M.: The smooth curvature model: An efficient representation of Euler–Bernoulli flexures as robot joints. *IEEE Transactions on Robotics* **28**(4), 761–772 (2012). DOI 10.1109/TRO.2012.2193232
 86. Oostveen, J.: Strongly stabilizable distributed parameter systems. *Frontiers in Applied Mathematics*. Society for Industrial and Applied Mathematics (2000). DOI 10.1137/1.9780898719864
 87. Ostrogradsky, M.: Mémoires sur les équations différentielles, relatives au problème des isopérimètres. *Mem. Acad. St. Petersburg* **6**(4), 385–517 (1850)
 88. Palomba, I., Richiedei, D., Trevisani, A.: Reduced-order observers for nonlinear state estimation in flexible multibody systems. *Shock and Vibration* **2018**, 1–12 (2018). DOI 10.1155/2018/6538737
 89. Pazy, A.: Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, *Applied mathematical sciences*, vol. 44. Springer-Verlag, New York, NY (2012)

90. Perrusquía, A.: Solution of the linear quadratic regulator problem of black box linear systems using reinforcement learning. *Information Sciences* **595**, 364–377 (2022). DOI 10.1016/j.ins.2022.03.004
91. Phillips, R.S.: Dissipative operators and hyperbolic systems of partial differential equations. *Transactions of the American Mathematical Society* **90**(2), 193–254 (1959). DOI 10.2307/1993202
92. Ramirez, H., Zwart, H., Le Gorrec, Y.: Stabilization of infinite dimensional port-Hamiltonian systems by nonlinear dynamic boundary control. *Automatica* **85**, 61–69 (2017). DOI 10.1016/j.automatica.2017.07.045
93. Rouche, N., Habets, P., Laloy, M.: Stability theory by Liapunov's direct method, *Applied Mathematical Sciences*, vol. 4. Springer, New York, NY (1977). DOI 10.1007/978-1-4684-9362-7
94. Russell, D.L.: Nonharmonic Fourier series in the control theory of distributed parameter systems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **18**(3), 542–560 (1967). DOI 10.1016/0022-247X(67)90045-5
95. Russell, D.L.: Controllability and stabilizability theory for linear partial differential equations: recent progress and open questions. *Siam Review* **20**(4), 639–739 (1978). DOI 10.1137/1020095
96. Russell, D.L., Weiss, G.: A general necessary condition for exact observability. *SIAM Journal on Control and Optimization* **32**(1), 1–23 (1994). DOI 10.1137/S036301299119795X
97. Shah, U.H., Hong, K.S.: Active vibration control of a flexible rod moving in water: Application to nuclear refueling machines. *Automatica* **93**, 231–243 (2018). DOI 10.1016/j.automatica.2018.03.048
98. Shifman, J.J.: Lyapunov functions and the control of the Euler–Bernoulli beam. *International Journal of Control* **57**(4), 971–990 (1993). DOI 10.1080/00207179308934423
99. Shubov, M., Shubov, V.: Stability of a flexible structure with destabilizing boundary conditions. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical*

- cal, *Physical and Engineering Sciences* **472**(2191), 1–22 (2016). DOI 10.1098/rspa.2016.0109
100. Shubov, M.A.: Location of eigenmodes of Euler–Bernoulli beam model under fully non-dissipative boundary conditions. *Proceedings of the Royal Society* **475**(2231), 1–20 (2019). DOI 10.1098/rspa.2019.0544
101. Shubov, M.A., Kindrat, L.P.: Spectral analysis of the Euler–Bernoulli beam model with fully nonconservative feedback matrix. *Mathematical Methods in the Applied Sciences* **41**(12), 4691–4713 (2018). DOI 10.1002/mma.4922
102. Shubov, M.A., Kindrat, L.P.: Asymptotics of the eigenmodes and stability of an elastic structure with general feedback matrix. *IMA Journal of Applied Mathematics* **84**(5), 873–911 (2019). DOI 10.1093/imamat/hxz019
103. Sklyar, G., Zuyev, A. (eds.): *Stabilization of Distributed Parameter Systems: Design Methods and Applications*, 1 edn. SEMA SIMAI Springer Series. Springer, Cham (2021). DOI 10.1007/978-3-030-61742-4
104. Slemrod, M.: The linear stabilization problem in Hilbert space. *Journal of Functional Analysis* **11**(3), 334–345 (1972). DOI 10.1016/0022-1236(72)90073-0
105. Slemrod, M.: Stabilization of boundary control systems. *Journal of differential equations* **22**(2), 402–415 (1976). DOI 10.1016/0022-0396(76)90036-X
106. Sontag, E.D.: *Mathematical control theory: deterministic finite dimensional systems*, 2 edn. Texts in Applied Mathematics. Springer, New York, NY (1998). DOI 10.1007/978-1-4612-0577-7
107. Terrell, W.J.: Some fundamental control theory i: controllability, observability, and duality. *The American Mathematical Monthly* **106**(8), 705–719 (1999). DOI 10.1080/00029890.1999.12005110
108. Walsh, A., Forbes, J.R.: Modeling and control of flexible telescoping manipulators. *IEEE Transactions on Robotics* **31**(4), 936–947 (2015). DOI

- 10.1109/TRO.2015.2441473
109. Wang, J., Li, Q.: Active vibration control methods of axially moving materials – a review. *Journal of Vibration and Control* **10**(4), 475–491 (2004). DOI 10.1177/1077546304035605
 110. Willems, J.C., Polderman, J.W.: Introduction to mathematical systems theory: a behavioral approach, *Texts in Applied Mathematics*, vol. 26. Springer, New York, NY (1997). DOI 10.1007/978-1-4757-2953-5
 111. Yang K. Y., W.J.M.: Pointwise feedback stabilization of an Euler–Bernoulli beam in observations with time delay. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations* **25**(4), 1–23 (2019). DOI 10.1051/cocv/2017080
 112. Zerrik, E.H., Castillo, O.: Stabilization of infinite dimensional systems. *Studies in Systems, Decision and Control*. Springer, Cham (2021). DOI 10.1007/978-3-030-68600-0
 113. Zheng, G., Bejarano, F.J., Perruquetti, W., Richard, J.P.: Unknown input observer for linear time-delay systems. *Automatica* **61**, 35–43 (2015). DOI 10.1016/j.automatica.2015.07.029
 114. Zimmer, R.J.: Essential results of functional analysis. *Chicago lectures in mathematics*. The University of Chicago, Chicago and London (1990). DOI 10.2307/3620295
 115. Zuazua, E.: Propagation, observation, and control of waves approximated by finite difference methods. *SIAM review* **47**(2), 197–243 (2005). DOI 10.1137/S0036144503432862
 116. Zuev, A.: Partial asymptotic stability of abstract differential equations. *Ukrainian Mathematical Journal* **58**(5), 709–717 (2006). DOI 10.1007/s11253-006-0096-3
 117. Zuyev, A.: Application of control Lyapunov functions technique for partial stabilization. In: *Proceedings of the 2001 IEEE International*

- Conference on Control Applications, pp. 509–513. IEEE (2001). DOI 10.1109/CCA.2001.973917
118. Zuyev, A.: Partial stabilization of a rigid body with several elastic beams. *IFAC Proceedings Volumes* **35**(1), 139–144 (2002). DOI 10.3182/20020721-6-ES-1901.00273
119. Zuyev, A.: Partial asymptotic stabilization of nonlinear distributed parameter systems. *Automatica* **41**(1), 1–10 (2005). DOI 10.1016/j.automatica.2004.08.009
120. Zuyev, A.: Feedback stabilization of a system of rigid bodies with a flexible beam. In: *Robot Motion and Control 2009*, pp. 69–81. Springer (2009). DOI 10.1007/978-1-84882-985-5_7
121. Zuyev, A.: Partial stabilization and control of distributed parameter systems with elastic elements. *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. Springer, Cham (2015). DOI 10.1007/978-3-319-11532-0
122. Zuyev, A., Kalosha, J.: Observer design for a flexible structure with distributed and point sensors. *Proceedings of the Institute of Applied Mathematics and Mechanics of NAS of Ukraine* **35**(2), 125–136 (2021). DOI 10.37069/1683-4720-2021-35-9
123. Zuyev, A., Kalosha, J.: A dynamic observer for a class of infinite-dimensional vibrating flexible structures. In: *2023 European Control Conference (ECC)*, pp. 200–205. IEEE, Bucharest (2023). DOI 10.23919/ECC57647.2023.10178223
124. Zuyev, A., Sawodny, O.: Stabilization of a flexible manipulator model with passive joints. *IFAC Proceedings Volumes* **38**(1), 784–789 (2005). DOI 10.3182/20050703-6-CZ-1902.00531
125. Zuyev, A., Sawodny, O.: Observer design for a flexible manipulator model with a payload. In: *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 4490–4495. IEEE (2006). DOI 10.1109/CDC.2006.376770

126. Zuyev, A., Sawodny, O.: Stabilization and observability of a rotating Timoshenko beam model. *Mathematical Problems in Engineering* **2007**, 1–19 (2007). DOI 10.1155/2007/57238
127. Zuyev, A.L.: Modeling of a spatial flexible manipulator with telescoping. *Proceedings of the Institute of Applied Mathematics and Mechanics (Tr. Inst. Prikl. Mat. Mekh.)* **10**, 51–58 (2005)
128. Zuyev, A.L., Kucher, J.I.: Asymptotic distribution of the spectral parameter in the stabilization problem for a beam system. In: *Proceedings of the XVII International Conference “Dynamical Systems Modelling and Stability Investigation” (DSMSI)*, p. 103. Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine, May 27 – 29 (2015)
129. Zuyev A. L., Masharova J. I.: Application of Galerkin’s method for the Euler–Bernoulli beam model. In: *Proceedings of the 11th International Conference “Stability, Control and Rigid Bodies Dynamics” (ICSCD)*, p. 144. IAMM NASU, Donetsk, Ukraine, June 8 – 12 (2011)
130. Барбашин, Е.А.: Введение в теорию устойчивости. Наука, Москва (1967)
131. Барбашин, Е.А.: Функции Ляпунова. Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., Москва (1970)
132. Барбашин, Е.А., Красовский, Н.Н.: Об устойчивости движения в целом. In: *Докл. АН СССР*, vol. 86, pp. 453–456 (1952)
133. Бердичевский, В.Л.: Вариационные принципы механики сплошной среды. Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., Москва (1983)
134. Галёркин, Б.Г.: Стержни и пластинки. Ряды в некоторых вопросах упругого равновесия стержней и пластинок. *Вестник инженеров* **1** (1915)
135. Гантмахер, Ф.Р.: Лекции по аналитической механике. Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., Москва (1966)

136. Гельфанд, И.М., Фомин, С.В.: Вариационное исчисление. Гос. изд-во физ.-мат. лит., Москва (1961)
137. Гохберг, И.Ц., Крейн, М.Г.: Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит. (1965)
138. Демидович, Б.П.: Лекции по математической теории устойчивости. Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., Москва (1967)
139. Добронравов, В.В., Никитин, Н.Н.: Курс теоретической механики. Высшая школа, Москва (1983)
140. Зубов, В.И.: Методы А. М. Ляпунова и их применение. Издательство Ленинградского университета (1957)
141. Зубов, В.И.: Лекции по теории управления. Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., Москва (1975)
142. Зуев А. Л., Калоша Ю. И.: Приближённое решение задачи об управляемых колебаниях балки с точечной массой. In: Proceedings of the International Conference “Dynamical Systems Modelling and Stability Investigation” (DSMSI–2017), p. 51. Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine, May 24 – 26 (2017)
143. Зуев А. Л., Кучер Ю. И.: Сходимость последовательности приближенных решений динамических уравнений упругой балки. Труды ИПММ НАН Украины **23**, 86–99 (2011)
144. Зуев А. Л., Кучер Ю. И.: Стабилизация модели упругой балки с распределенными и сосредоточенными управляющими воздействиями. Динамические системы **31**(3), 25–35 (2013)
145. Зуев А. Л., Кучер Ю. И.: Устойчивость упругой балочной системы с распределенными и сосредоточенным управлением. In: Proceedings of the International Mathematical Conference “The Boundary Problems, the Theory of Functions and Their Applications” dedicated to the 75th bi-

- rthday of Academician A.M. Samoilenko, p. 17. DSPU, Sloviansk, Ukraine, June 12 – 14 (2013)
146. Калоша Ю. І., Зуєв О. Л.: Асимптотична стійкість моделі пружної балки з приєднаною масою. In: Proceedings of the International Conference of Young Mathematicians, p. 133. Institute of mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine, June 3 – 5 (2021)
147. Калоша, Ю., Зуєв, О.: Асимптотичний розподіл власних частот коливань пружної балки з приєднаною масою. In: Proceedings of The Conference of Young Scientists “Pidstryhach Readings — 2021”. Pidstryhach institute for applied problems of mechanics and mathematics of NAS of Ukraine, Lviv, Ukraine, May 26 – 28 (2021)
148. Калоша, Ю., Зуєв, О.: Спостерігач Луенбергера для пружної балки з точковою масою. In: Proceedings of The Conference of Young Scientists “Pidstryhach Readings — 2022”. Pidstryhach institute for applied problems of mechanics and mathematics of NAS of Ukraine, Lviv, Ukraine, May 25 – 27 (2022)
149. Калоша, Ю., Зуєв, О.: Спостерігач Луенбергера для моделі пружної балки у гамільтоновій формі. In: Proceedings of the International Scientific Conference “Current Problems of Mechanics and Mathematics – 2023”. Pidstryhach institute for applied problems of mechanics and mathematics of NAS of Ukraine, Lviv, Ukraine, May 23 – 25 (2023)
150. Канторович, Л.В., Акилов, Г.П.: Функциональный анализ, 3-е изд. Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит. (1984)
151. Колмогоров, А.Н., Фомин, С.В.: Элементы теории функций и функционального анализа, 2-е изд. (1968)
152. Красовский, Н.Н.: Некоторые задачи теории устойчивости движения. Государственное издательство физико-математической литературы, Москва (1959)
153. Крейн, С.Г.: Функциональный анализ. Наука, Москва (1964)

154. Крейн, С.Г.: Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. Наука, Москва (1967)
155. Кучер, Ю.І.: Асимптотична поведінка власних значень інфінітезимального генератора напівгрупи в задачі стабілізації пружної балки. In: Proceedings of the International Conference of Young Mathematicians, p. 105. Institute of mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine, June 3 – 6 (2015)
156. Ла-Салль, Ж., Лефшец, С.: Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. Мир, Москва (1964)
157. Лурье, А.И.: Аналитическая механика. ГИФМЛ, Москва (1961)
158. Ляпунов, А.М.: Общая задача об устойчивости движения. Гос. изд. технико-теоретической литературы, Москва – Ленинград (1950)
159. Ляпунов, А.М.: Лекции по теоретической механике. Наукова думка, Киев (1982)
160. Малкин, И.Г.: Теория устойчивости движения. Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., Москва (1966)
161. Михайлов, В.П.: Дифференциальные уравнения в частных производных. Наука, Москва (1976)
162. Михлин, С.Г.: Вариационные методы в математической физике. Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., Москва (1970)
163. Набиуллин, М.К.: Стационарные движения и устойчивость упругих спутников. Наука, Новосибирск (1990)
164. Пуанкаре, А.: О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. Гос. изд. технико-теоретической литературы, Москва – Ленинград (1947)
165. Смирнов, В.И., Крылов, В.И., Канторович, Л.В.: Вариационное исчисление. Изд-во “Кубуч”, Ленинград (1933)
166. Тимошенко, С.П.: Колебания в инженерном деле. Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., Москва (1967)

167. Тимошенко, С.П.: Статические и динамические проблемы теории упругости. Наукова думка, Киев (1975)
168. Треногин, В.А.: Функциональный анализ. Наука, Москва (1980)
169. Хартман, Ф.: Обыкновенные дифференциальные уравнения. Мир, Москва (1970)
170. Хорошун, А.С.: Про побудову керування, що забезпечує бажану траєкторію руху одноланкового маніпулятора із пружним зчленуванням. Допов. Нац. акад. наук Укр. **1**, 33–38 (2021)
171. Шестаков, А.А.: Обобщенный прямой метод Ляпунова для систем с распределенными параметрами. Наука, Москва (1990)
172. Эйлер, Л.: Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума, либо минимума или решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле. Государственное технико-теоретическое издательство, Москва – Ленинград (1934)
173. Эльсгольц, Л.Э.: Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. Наука, Москва (1969)

Додаток А
Допоміжні обчислення

До розділу 3.3, Теорема 3.1. Коефіцієнти $a_{\nu j}$ системи (3.38).

$$a_{\nu j} = \frac{\alpha_{\nu}}{\lambda EI} \left\{ - \sum_{z=1}^4 \left[\int_0^{\ell_0} \psi_{\nu}''(x) \bar{G}_{z,1}(x) dx + \int_{\ell_0}^{\ell} \psi_{\nu}''(x) \bar{G}_{z,2}(x) dx \right] \cdot \int_0^{\ell} \psi_j''(s) G_{z4}(\ell_0 - s) ds + \right. \\ \left. + \kappa \left[\int_0^{\ell_0} \psi_{\nu}''(x) \bar{G}_{4,1}(x) dx + \int_{\ell_0}^{\ell} \psi_{\nu}''(x) \bar{G}_{4,2}(x) dx \right] \cdot \int_0^{\ell_0} \psi_j''(s) G_{14}(\ell_0 - s) ds + \right. \\ \left. + \int_0^{\ell_0} \psi_{\nu}''(x) \int_0^x \psi_j''(s) G_{14}(x - s) ds dx - \int_{\ell_0}^{\ell} \psi_{\nu}''(x) \int_x^{\ell} \psi_j''(s) G_{14}(x - s) ds dx \right\}.$$

До розділу 3.3, Теорема 3.2. Диференціювання виразів $R_1\xi$, $R_2\xi$, $R_3\xi$, $R_4\xi$ резольвенти оператора з керуванням. Зазначимо, що

$$\frac{d}{dx} G_{14}(x) = \frac{1}{2\eta^2} \sin(\eta x) \sinh(\eta x) \\ \text{та} \quad \frac{d^2}{dx^2} G_{14}(x) = \frac{1}{2\eta} (\cos(\eta x) \sinh(\eta x) + \sin(\eta x) \cosh(\eta x)),$$

тому $G_{14}(0) = G'_{14}(0) = G''_{14}(0) = 0$. Використовуючи формулу Ляйбніца

$$\frac{d}{dx} \left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(x, s) ds \right) = f(x, b(x))b'(x) - f(x, a(x))a'(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{d}{dx} (f(x, s)) ds,$$

обчислимо наступні похідні:

$$\frac{d}{dx} \int_0^x G_{14}(x - s) \psi_j''(s) ds = \int_0^x G'_{14}(x - s) \psi_j''(s) ds,$$

$$\frac{d}{dx} \int_x^{\ell} G_{14}(x - s) \psi_j''(s) ds = \int_x^{\ell} G'_{14}(x - s) \psi_j''(s) ds,$$

$$\frac{d}{dx} \int_0^x G'_{14}(x - s) \psi_j''(s) ds = \int_0^x G''_{14}(x - s) \psi_j''(s) ds,$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \int_x^\ell G'_{14}(x-s)\psi_j''(s) ds &= \int_x^\ell G''_{14}(x-s)\psi_j''(s) ds, \\ \frac{d}{dx} \int_0^x G''_{14}(x-s)\psi_j''(s) ds &= \int_0^x G'''_{14}(x-s)\psi_j''(s) ds, \\ \frac{d}{dx} \int_x^\ell G''_{14}(x-s)\psi_j''(s) ds &= \int_x^\ell G'''_{14}(x-s)\psi_j''(s) ds.\end{aligned}$$

Тоді похідні елементів резольвенти $R(\lambda, \tilde{A})$ набувають наступного вигляду:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} R_1 \xi &= \begin{cases} -\frac{1}{EI} \sum_{j=1}^k \left(\sum_{z=1}^4 \bar{G}'_{z,1}(x) \bar{F}_{jz}(\xi) - M_j(\xi) \int_0^x G'_{14}(x-s)\psi_j''(s) ds \right), & x \leq \ell_0, \\ -\frac{1}{EI} \sum_{j=1}^k \left(\sum_{z=1}^4 \bar{G}'_{z,2}(x) \bar{F}_{jz}(\xi) + M_j(\xi) \int_x^\ell G'_{14}(x-s)\psi_j''(s) ds \right), & x > \ell_0, \end{cases} \\ \frac{d^2}{dx^2} R_1 \xi &= \begin{cases} -\frac{1}{EI} \sum_{j=1}^k \left(\sum_{z=1}^4 \bar{G}''_{z,1}(x) \bar{F}_{jz}(\xi) - M_j(\xi) \int_0^x G''_{14}(x-s)\psi_j''(s) ds \right), & x \leq \ell_0, \\ -\frac{1}{EI} \sum_{j=1}^k \left(\sum_{z=1}^4 \bar{G}''_{z,2}(x) \bar{F}_{jz}(\xi) + M_j(\xi) \int_x^\ell G''_{14}(x-s)\psi_j''(s) ds \right), & x > \ell_0, \end{cases} \\ \frac{d^3}{dx^3} R_1 \xi &= \begin{cases} -\frac{1}{EI} \sum_{j=1}^k \left(\sum_{z=1}^4 \bar{G}'''_{z,1}(x) \bar{F}_{jz}(\xi) - M_j(\xi) \int_0^x G'''_{14}(x-s)\psi_j''(s) ds \right), & x \leq \ell_0, \\ -\frac{1}{EI} \sum_{j=1}^k \left(\sum_{z=1}^4 \bar{G}'''_{z,2}(x) \bar{F}_{jz}(\xi) + M_j(\xi) \int_x^\ell G'''_{14}(x-s)\psi_j''(s) ds \right), & x > \ell_0, \end{cases} \\ \frac{d}{dx} R_2 \xi &= \frac{1}{\lambda} \left(\frac{d}{dx} R_1 \xi - u'(x) \right).\end{aligned}$$

До розділу 3.3, Теорема 3.5. Елементи матричної експоненти.

$$\begin{aligned}G_{11} &= G_{22} = G_{33} = G_{44} = \cos(\eta x) \cosh(\eta x), \\ G_{12} &= G_{23} = G_{34} = \frac{1}{2\eta} (\sin(\eta x) \cosh(\eta x) + \cos(\eta x) \sinh(\eta x)), \\ G_{13} &= G_{24} = \frac{1}{2\eta^2} \sin(\eta x) \sinh(\eta x), \\ G_{14} &= \frac{1}{4\eta^3} (\sin(\eta x) \cosh(\eta x) - \cos(\eta x) \sinh(\eta x)), \\ G_{21} &= G_{32} = G_{43} = \eta (\cos(\eta x) \sinh(\eta x) - \sin(\eta x) \cosh(\eta x)),\end{aligned}$$

$$G_{31} = G_{42} = -2\eta^2 \sin(\eta x) \sinh(\eta x),$$

$$G_{41} = -2\eta^3 (\sin(\eta x) \cosh(\eta x) + \cos(\eta x) \sinh(\eta x)),$$

Ілюстративні матеріали. Нижче наводяться схематичні представлення послідовності досліджень до розділів 2, 3.

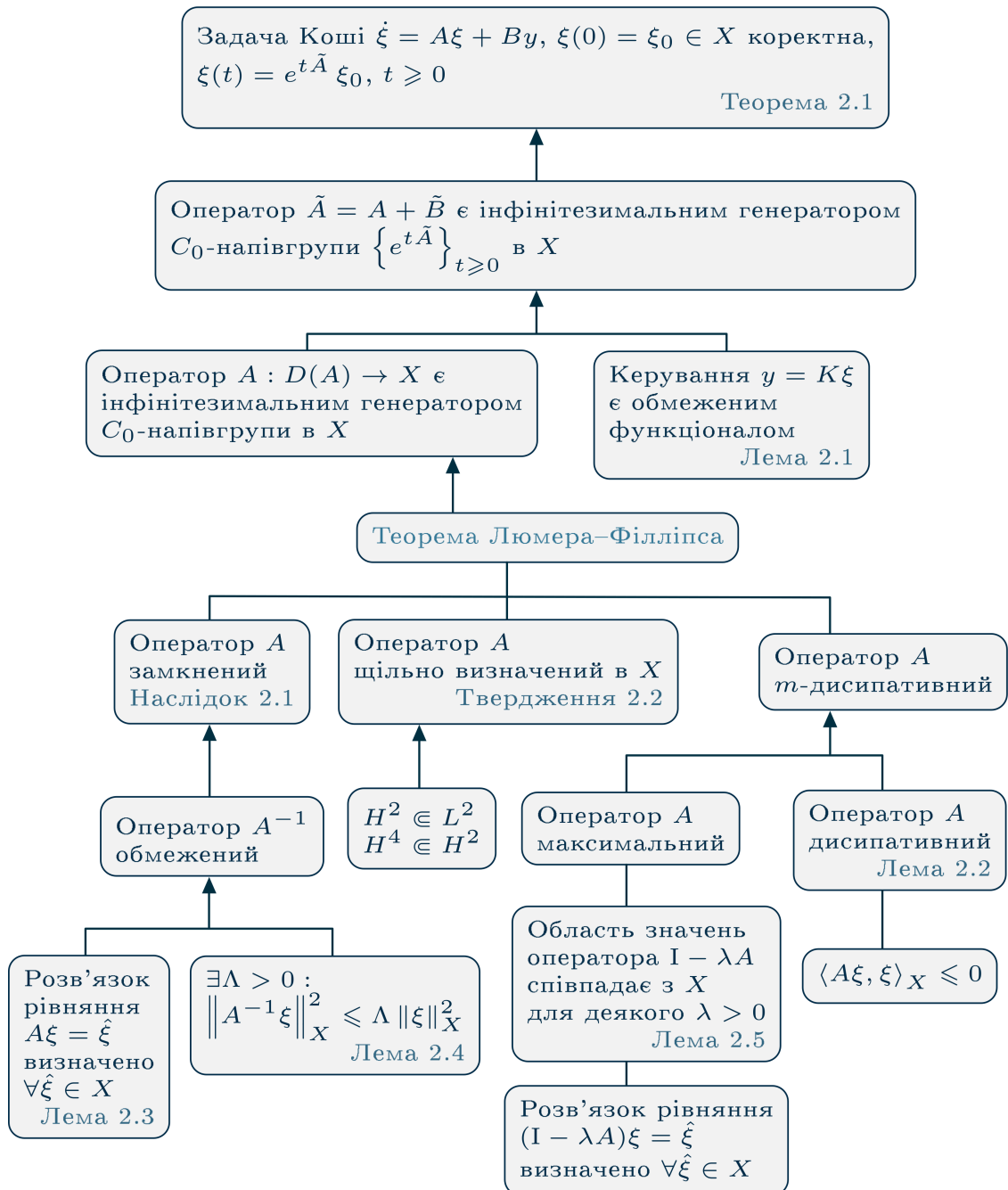


Рис. А.1: Схема доведення коректності задачі Коші (2.52), (2.53)

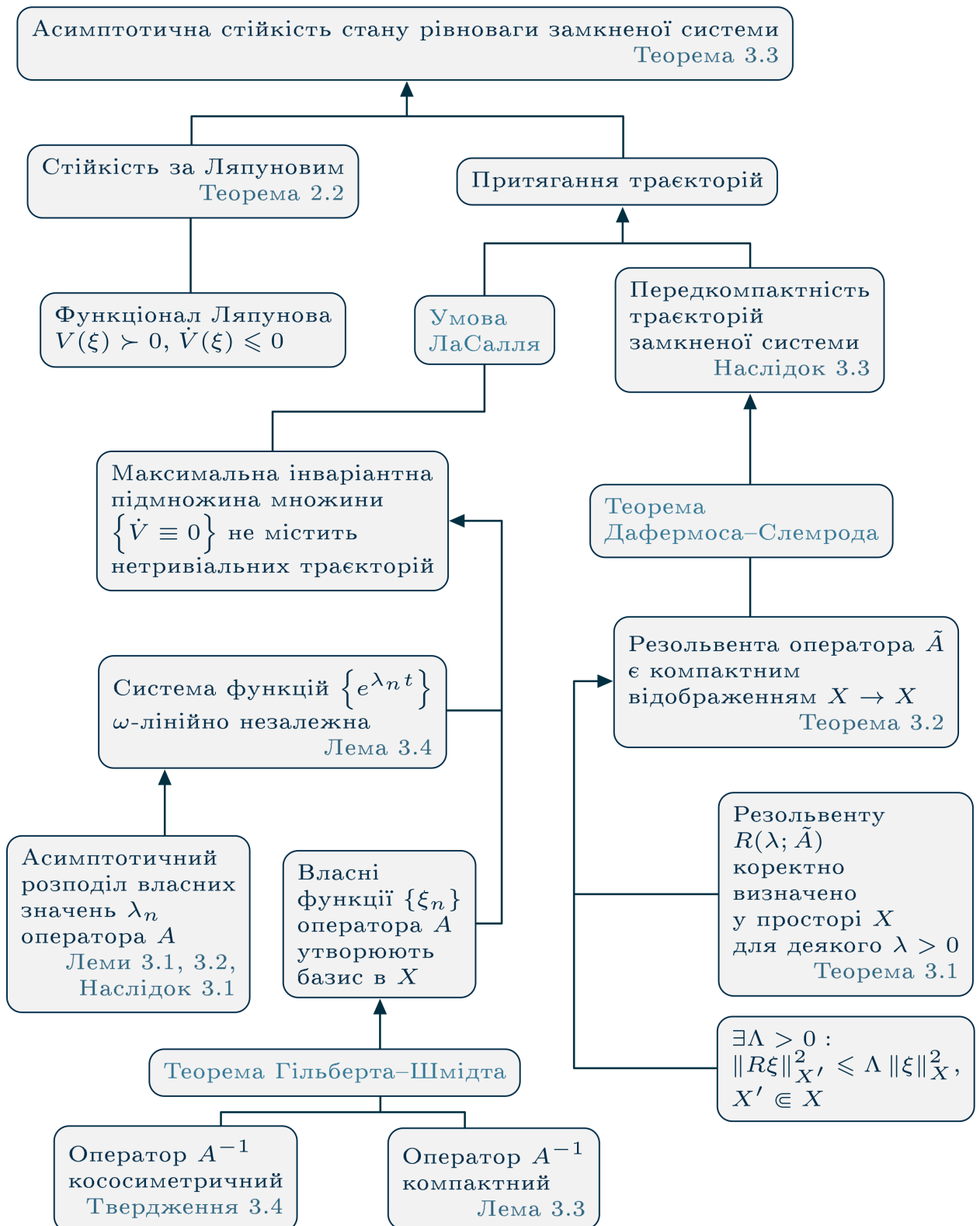


Рис. А.2: Схема доведення асимптотичної стійкості стану рівноваги замкненої системи (2.19)

Додаток Б

**Список публікацій здобувачки за темою дисертації
та відомості про апробацію результатів дисертації**

Б.1. Список публікацій здобувачки за темою дисертації

1. Kalosha J. I., Zuyev A. L.: Asymptotic stabilization of a flexible beam with an attached mass. *Ukrainian Mathematical Journal* **73**(10), 1537–1550 (2022). DOI 10.1007/s11253-022-02012-6
2. Kalosha, J., Zuyev, A., Benner, P.: On the eigenvalue distribution for a beam with attached masses. In: G. Sklyar, A. Zuyev (eds.) *Stabilization of Distributed Parameter Systems: Design Methods and Applications, SEMA SIMAI Springer Series*, vol. 2, pp. 43–56. Springer International Publishing, Cham (2021). DOI 10.1007/978-3-030-61742-4_3
3. Kalosha, J.I., Zuyev, A.L.: Finite-dimensional model of the beam oscillations with distributed and lumped controls. In: *Proceedings of the International Conference on Differential Equations, Mathematical Physics and Applications (DEMPHA–2017)*, pp. 30–31. Bohdan Khmelnytsky national university of Cherkasy, Cherkasy, Ukraine, October 17 – 19 (2017)
4. Kucher Julia I., Zuyev Alexander L.: Stabilization of a flexible beam with distributed actuators. In: *Proceedings of the International Conference “The Twenty Third Crimea Autumn Mathematical School-Symposium” (KROMSh)*, p. 81. Taurida national V. Vernadsky university, Crimea, Ukraine, September 17 – 29 (2012)
5. Kucher, J., Zuyev, A.: Limit behavior of the trajectories for the problem of vibrations of a beam–mass system under the action of distributed and lumped controls. In: *Proceedings of the Crimean International Math. Conf.*

- “KMMK–2013”. Taurida national V. Vernadsky university, Sudak, Ukraine, September 22 – October 4 (2013)
6. Kucher, J., Zuyev, A.: Asymptotic stability analysis of the Euler–Bernoulli beam model. In: Proceedings of the International V. Skorobohatko Mathematical Conference, p. 86. Pidstryhach institute for applied problems of mechanics and mathematics of NAS of Ukraine, Drohobych, Ukraine, August 25 – 28 (2015)
 7. Kucher, J., Zuyev, L.: Stabilization of a flexible beam with a shaker and piezoelectric actuators. In: Proceedings of the 16th International Conference “Dynamical System Modelling and Stability Investigation” (DSMSI), p. 336. Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine, May 29 – 31 (2013)
 8. Zuyev, A., Kalosha, J.: Observer design for a flexible structure with distributed and point sensors. Proceedings of the Institute of Applied Mathematics and Mechanics of NAS of Ukraine **35**(2), 125–136 (2021). DOI 10.37069/1683-4720-2021-35-9
 9. Zuyev, A., Kalosha, J.: A dynamic observer for a class of infinite-dimensional vibrating flexible structures. In: 2023 European Control Conference (ECC), pp. 200–205. IEEE, Bucharest (2023). DOI 10.23919/ECC57647.2023.10178223
 10. Zuyev, A.L., Kucher, J.I.: Asymptotic distribution of the spectral parameter in the stabilization problem for a beam system. In: Proceedings of the XVII International Conference “Dynamical Systems Modelling and Stability Investigation” (DSMSI), p. 103. Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine, May 27 – 29 (2015)
 11. Zuyev A. L., Masharova J. I.: Application of Galerkin’s method for the Euler–Bernoulli beam model. In: Proceedings of the 11th International Conference “Stability, Control and Rigid Bodies Dynamics” (ICSCD), p. 144. IAMM NASU, Donetsk, Ukraine, June 8 – 12 (2011)

12. Зуев А. Л., Калоша Ю. И.: Приближённое решение задачи об управляемых колебаниях балки с точечной массой. In: Proceedings of the International Conference “Dynamical Systems Modelling and Stability Investigation” (DSMSI–2017), p. 51. Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine, May 24 – 26 (2017)
13. Зуев А. Л., Кучер Ю. И.: Сходимость последовательности приближенных решений динамических уравнений упругой балки. Труды ИПММ НАН Украины **23**, 86–99 (2011)
14. Зуев А. Л., Кучер Ю. И.: Стабилизация модели упругой балки с распределенными и сосредоточенными управляющими воздействиями. Динамические системы **31**(3), 25–35 (2013)
15. Зуев А. Л., Кучер Ю. И.: Устойчивость упругой балочной системы с распределенными и сосредоточенным управлением. In: Proceedings of the International Mathematical Conference “The Boundary Problems, the Theory of Functions and Their Applications” dedicated to the 75th birthday of Academician A.M. Samoilenko, p. 17. DSPU, Sloviansk, Ukraine, June 12 – 14 (2013)
16. Калоша Ю. И., Зуев О. Л.: Асимптотична стійкість моделі пружної балки з приєднаною масою. In: Proceedings of the International Conference of Young Mathematicians, p. 133. Institute of mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine, June 3 – 5 (2021)
17. Калоша, Ю., Зуев, О.: Асимптотичний розподіл власних частот коливань пружної балки з приєднаною масою. In: Proceedings of The Conference of Young Scientists “Pidstryhach Readings – 2021”. Pidstryhach institute for applied problems of mechanics and mathematics of NAS of Ukraine, Lviv, Ukraine, May 26 – 28 (2021)
18. Калоша, Ю., Зуев, О.: Спостерігач Луенбергера для пружної балки з точковою масою. In: Proceedings of The Conference of Young Scientists “Pidstryhach Readings – 2022”. Pidstryhach institute for applied problems

- of mechanics and mathematics of NAS of Ukraine, Lviv, Ukraine, May 25 – 27 (2022)
19. Калоша, Ю., Зуєв, О.: Спостерегаіч Луенбергера для моделі пружної балки у гамільтоновій формі. In: Proceedings of the International Scientific Conference “Current Problems of Mechanics and Mathematics – 2023”. Pidstryhach institute for applied problems of mechanics and mathematics of NAS of Ukraine, Lviv, Ukraine, May 23 – 25 (2023)
 20. Кучер, Ю.І.: Асимптотична поведінка власних значень інфінітезимального генератора напівгрупи в задачі стабілізації пружної балки. In: Proceedings of the International Conference of Young Mathematicians, p. 105. Institute of mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine, June 3 – 6 (2015)

Б.2. Відомості про апробацію результатів дисертації

Основні результати дослідження доповідалися на наукових конференціях різного рівня та наукових семінарах. Це такі конференції:

- 11th International Conference “Stability, Control and Rigid Bodies Dynamics” (ICSCD), Donetsk, Ukraine, June 8 – 12, 2011.
- International Conference “The Twenty Third Crimea Autumn Mathematical School-Symposium” (KROMSh), Crimea, Ukraine, September 17 – 29, 2012.
- International Mathematical Conference “The Boundary Problems, the Theory of Functions and Their Applications” dedicated to the 75th birthday of Academician A.M. Samoilenko, Sloviansk, Ukraine, June 12 – 14, 2013.
- 16th International Conference “Dynamical System Modelling and Stability Investigation” (DSMSI), Kyiv, Ukraine, May 29–31, 2013.
- Crimean International Math. Conf. “KMMK–2013”, Sudak, Ukraine, September 22 – October 4, 2013.

- XVII International Conference “Dynamical Systems Modelling and Stability Investigation” (DSMSI), Kyiv, Ukraine, May 27 – 29, 2015.
- International V. Skorobohatko Mathematical Conference, Drohobych, Ukraine, August 25 – 28, 2015.
- International Conference of Young Mathematicians, Kyiv, Ukraine, June 3 – 6, 2015.
- International Conference on Differential Equations, Mathematical Physics and Applications (DEMPHA–2017), Cherkasy, Ukraine, October 17 – 19, 2017.
- International Conference “Dynamical Systems Modelling and Stability Investigation” (DSMSI–2017), Kyiv, Ukraine, May 24 – 26, 2017.
- International Conference of Young Mathematicians, Kyiv, Ukraine, June 3 – 5, 2021.
- The Conference of Young Scientists “Pidstryhach Readings — 2021”, Lviv, Ukraine, May 26 – 28, 2021.
- The Conference of Young Scientists “Pidstryhach Readings — 2022”, Lviv, Ukraine, May 25 – 27, 2022.
- International Scientific Conference “Current Problems of Mechanics and Mathematics – 2023”, Lviv, Ukraine, May 23 – 25, 2023.
- European Control Conference (ECC23), Bucharest, Romania, June 13 – 16, 2023.

Семінари:

- Семінар відділу прикладної механіки Інституту прикладної математики і механіки Національної академії наук України (2011–2023).
- Семінар молодих вчених Інституту прикладної математики і механіки Національної академії наук України (2016–2023).
- Семінари в Інституті механіки і мехатроніки Технічного університету Відня (Австрія) в рамках проекту міжнародної наукової співпраці “Control, stability and model reduction of hybrid systems with elastic components” (2011–2012).
- Seminar of Biomathematics and Game Theory Group at University of Warsaw, Faculty of Mathematics, Informatics and Mechanics, Warsaw, Poland (2022).
- Open seminar on partial differential equations at The Faculty of Mathematics and Information Science, Warsaw University of Technology, Warsaw, Poland (2022).
- Seminar at The Institute of Mathematics, Polish Academy of Sciences, Warsaw, Poland (2022).
- Seminar at The Max Planck Institute for Dynamics of Complex Technical Systems, Computational Methods in Systems and Control Theory Group (CSC Seminar), Magdeburg, Germany (2022).
- Seminar at the Institute of Mathematics, Kassel University, Kassel, Germany. Presentation “Asymptotic Stabilization of the Flexible Beam Oscillations” (2022).
- Розширений семінар відділу прикладної механіки Інституту прикладної математики і механіки Національної академії наук України (17.11.2023).
- Семінар кафедри прикладної математики Харківського національного університету ім. В. Н. Каразіна (21.11.2023).
- Семінар відділу математичних проблем механіки та теорії керування Інституту математики Національної академії наук України (23.11.2023).