Національна академія наук України
Інститут математики

Калоша Юлія Ігорівна

УДК 531.36, 531.39, 517.977

Керування багаточастотними коливаннями гібридних механічних систем

01.02.01 — теоретична механіка

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ — 2024

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Інституті прикладної математики і механіки НАН України.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор, член-кореспондент НАН України
ЗУЄВ Олександр Леонідович,
Інститут прикладної математики і механіки НАН України, завідувач відділу прикладної механіки.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор
МАЗКО Олексій Григорович,
Інститут математики НАН України, провідний науковий співробітник відділу математичних проблем механіки та теорії керування;

доктор фізико-математичних наук
ХОРОШУН Анатолій Сергійович,
Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, провідний науковий співробітник відділу стійкості процесів.

Захист відбудеться «28» травня 2024 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.04 Інституту математики НАН України за адресою: 01024, Київ-4, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розісланий «18» квітня 2024 р.

В.о. вченого секретаря
спеціалізованої вченої ради Степан СОСНИЦЬКИЙ

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Гібридні механічні системи, які складаються з абсолютно твердих і деформівних тіл, є широко розповсюдженими у сучасній техніці. До цього класу систем відносяться роботи-маніпулятори з пружними ланками, супутники з гнучкими антенами і панелями сонячних батарей, підйомні крани з пружними стрілами та протяжними тросовими зв'язками тощо. Математичне моделювання таких об'єктів призводить до необхідності дослідження коливань в системах керування, які описуються сукупністю диференціальних рівнянь з частинними похідними та рівнянь Лагранжа відносно узагальнених координат. Одним з актуальних напрямків такого дослідження є обґрунтування скінченновимірних наближених методів синтезу керувань, які базуються на розв'язанні задач оптимального керування та планування руху. Гасіння коливань також є важливою проблемою при дослідженні різного роду механічних систем із розподіленими параметрами. Тому виникає необхідність у розробці методів стабілізації для складних систем такого типу.

Повний стан динамічної системи часто виявляється недоступним для прямого вимірювання в багатьох прикладних задачах. Проте для деяких систем можна вимірювати вихідні сигнали у вигляді певних компонент фазового вектора як функцій часу. Для оптимального керування та стабілізації стає важливим оцінити стан, використовуючи спостереження обмеженої кількості вихідних даних системи. Тому виникає потреба у відновленні повного вектора стану за наявності неповної інформації виходу. В цьому полягає задача спостереження, яка розглядається в дисертації.

Дослідження в напрямках теорії стійкості руху та математичної теорії керування системами з розподіленими параметрами проводяться у школах J.-L. Lions, J.-M. Coron, M. Balas, H. Fattorini, R. Curtain, H. Zwart, B. Jacob, E. Zuazua, Z. H. Luo, B.-Z. Guo, W. Krabs, G. Sklyar, D. L. Russell, I. Lasiecka, J. E. Lagnese, G. Leugering, В. І. Коробова, О. Г. Мазка, А. А. Мартинюка та ін. У дисертаційній роботі одержано нові науково обґрунтовані розв'язки задач керованої стабілізації та синтезу динамічних спостерігачів для моделей гібридної механічної системи із розподіленими параметрами, що складає внесок у розвиток методів теорії керування рухом та теорії стійкості в механіці.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами, грантами. Дослідження, результати яких викладено у дисертаційній роботі, виконувалися в рамках таких науково-дослідних робіт в Інституті прикладної математики і механіки Національної академії наук України:

- Керування, стійкість та редукція моделей гібридних систем з еластичними компонентами (проєкт міжнародної науково-технічної співпраці, партнер з досліджень: Інститут механіки і мехатроніки Технічного університету м. Відень, Австрія), 0111U007275, 2011–2012 рр.
- Розробка конструктивних методів теорії керування і стійкості із застосуванням до задач машинобудування, 0111U000483, 2012 р.
- Керування моделями мехатронних систем із застосуванням до задач навігації космічних апаратів і стабілізації робототехнічних комплексів, 0112U000029, 2012–2016 рр.
- Задачі синтезу керування для нелінійних систем з багатомасштабною динамікою, 0116U007161, 2016–2017 рр.
- Аналітичні методи дослідження задач стійкості і керування рухом нелінійних механічних систем, 0018U006265, 2018–2019 рр.
- Стабілізація траєкторій динамічних систем з гібридними керуваннями та проблеми апроксимації розв'язків неавтономних граничних задач, 0119U103214, 2019 р.
- Керування та аналіз нелінійної динаміки коливальних механічних систем і процесів масопереносу, 0116U002033, 2020 р.
- Задачі розподіленого керування та ідентифікації багатокомпонентних механічних систем, 0121U100219, 2021–2023 рр.
- Сучасні методи теорії крайових задач та їх застосування до проблем математичної фізики і механіки, 0122U000594, 2022 р.
- Grant EFDS-FL2-08 of the found The European Federation of Academies of Sciences and Humanities (ALLEA), 2023 р.

Мета і завдання дослідження. *Об'єктом дослідження* є математичні моделі керованих коливань гібридних механічних систем з пружною балкою та твердим тілом. *Предметом дослідження* є задачі стійкості, стабілізації та спостереження моделей керованих гібридних механічних систем. *Метою дослідження* є розвиток методів синтезу функцій керування зі зворотним зв'язком для механічних систем з розподіленими параметрами. *Завданням дослідження* є розв'язання задач асимптотичної стабілізації та спостереження для гібридної системи з пружними та твердими елементами.

Методи дослідження. У дисертаційній роботі використовуються методи аналітичної механіки і математичної теорії керування. Математичну модель руху гібридної системи, яка представляється в дисертаційній роботі, отримано із застосуванням варіаційного принципу Гамільтона–Остроградського. Керування зі зворотним зв'язком побудовано на основі прямого методу Ляпунова, за допомогою якого також доведено стійкість стану рівноваги системи. Задачу, записану в операторній формі, досліджено на коректність за допомогою теорії C_0-напівгруп у нескінченновимірних гільбертових просторах. Умови асимптотичної стійкості отримано на основі принципу інваріантності ЛаСалля, при цьому передкомпактність траєкторій доведено із застосуванням теореми Дафермоса–Слемрода. Задачу спостереження розв'язано методом побудови спостерігача Луенбергера. Для скінченновимірної системи цей підхід передбачає перевірку рангової умови Калмана. Аналіз асимптотичної поведінки похибки запропонованого спостерігача базується на теоремі ЛаСалля.

Наукова новизна. У дисертації представлено нову математичну модель руху гібридної механічної системи, яка складається з пружної балки, розподілених п'єзоелектричних актуаторів та твердого тіла, приєднаного в точці. Вперше запропоновано закон керування у вигляді зворотного зв'язку, який гарантує асимптотичну стійкість стану рівноваги розглянутої системи. Проаналізовано асимптотичний розподіл власних частот коливань розглянутої балкової системи. Запропоновано новий спосіб побудови спостерігача для такої моделі.

Практичне значення отриманих результатів. Результати дисертаційної роботи носять в основному теоретичний характер. Потенційними сферами практичного застосування може бути імплементація одержаних методів синтезу керування зі зворотним зв'язком і системи-спостерігача в інженерні конструкції, які містять роботизовані маніпулятори з гнучкими ланками чи опорами, а також у космічні апарати з частинами, які можуть бути змодельованими у вигляді пружних балок. Крім того, запропоноване в роботі активне керування може бути у перспективі впроваджено для гасіння вібрацій у підвісках роботизованих транспортних засобів.

Особистий внесок здобувачки. Усі результати, що представляються в дисертації, отримані здобувачкою у співавторстві з науковим керівником професором О. Л. Зуєвим. Керівникові належать постановки задач, вибір методів дослідження і обговорення одержаних результатів. Здобувачці належать доведення всіх результатів, розгляд прикладів і проведення чисельних розрахунків.

Апробація матеріалів дисертації. Основні результати дослідження доповідалися на наукових конференціях різного рівня та наукових семінарах. Це такі конференції:

- 11th International Conference "Stability, Control and Rigid Bodies Dynamics" (ICSCD), Donetsk, Ukraine, June 8 – 12, 2011.
- International Conference "The Twenty Third Crimea Autumn Mathematical School-Symposium" (KROMSh), Crimea, Ukraine, September 17 – 29, 2012.
- International Mathematical Conference "The Boundary Problems, the Theory of Functions and Their Applications" dedicated to the 75th birthday of Academician A.M. Samoilenko, Sloviansk, Ukraine, June 12 – 14, 2013.
- 16th International Conference "Dynamical System Modelling and Stability Investigation" (DSMSI), Kyiv, Ukraine, May 29–31, 2013.
- Crimean International Math. Conf. "KMMK–2013", Sudak, Ukraine, September 22 – October 4, 2013.
- XVII International Conference "Dynamical Systems Modelling and Stability Investigation" (DSMSI), Kyiv, Ukraine, May 27 – 29, 2015.
- International V. Skorobohatko Mathematical Conference, Drohobych, Ukraine, August 25 – 28, 2015.
- International Conference of Young Mathematicians, Kyiv, Ukraine, June 3 – 6, 2015.
- International Conference on Differential Equations, Mathematical Physics and Applications (DEMPhA–2017), Cherkasy, Ukraine, October 17 – 19, 2017.
- International Conference "Dynamical Systems Modelling and Stability Investigation" (DSMSI–2017), Kyiv, Ukraine, May 24 – 26, 2017.

- International Conference of Young Mathematicians, Kyiv, Ukraine, June 3 – 5, 2021.
- The Conference of Young Scientists "Pidstryhach Readings — 2021", Lviv, Ukraine, May 26 – 28, 2021.
- The Conference of Young Scientists "Pidstryhach Readings — 2022", Lviv, Ukraine, May 25 – 27, 2022.
- International Scientific Conference "Current Problems of Mechanics and Mathematics – 2023", Lviv, Ukraine, May 23 – 25, 2023.
- European Control Conference (ECC23), Bucharest, Romania, June 13 – 16, 2023.

Семінари:

- Семінар відділу прикладної механіки Інституту прикладної математики і механіки Національної академії наук України (2011–2023).
- Семінар молодих вчених Інституту прикладної математики і механіки Національної академії наук України (2016–2023).
- Семінари в Інституті механіки і мехатроніки Технічного університету Відня (Австрія) в рамках проєкту міжнародної наукової співпраці "Control, stability and model reduction of hybrid systems with elastic components" (2011–2012).
- Seminar of Biomathematics and Game Theory Group at University of Warsaw, Faculty of Mathematics, Informatics and Mechanics, Warsaw, Poland (2022).
- Open seminar on partial differential equations at The Faculty of Mathematics and Information Science, Warsaw University of Technology, Warsaw, Poland (2022).
- Seminar at The Institute of Mathematics, Polish Academy of Sciences, Warsaw, Poland (2022).
- Seminar at The Max Planck Institute for Dynamics of Complex Technical Systems, Computational Methods in Systems and Control Theory Group (CSC Seminar), Magdeburg, Germany (2022).
- Seminar at the Institute of Mathematics, Kassel University, Kassel, Germany. Presentation "Asymptotic Stabilization of the Flexible Beam Oscillations" (2022).
- Розширений семінар відділу прикладної механіки Інституту прикладної математики і механіки Національної академії наук України (17.11.2023).

- Семінар кафедри прикладної математики Харківського національного університету ім. В. Н. Каразіна (21.11.2023).
- Семінар відділу математичних проблем механіки та теорії керування Інституту математики Національної академії наук України (23.11.2023).

Публікації. Основні результати дисертаційного дослідження опубліковано у статтях [1]—[6] та додатково висвітлено у тезах доповідей [7]—[20]. Результати другого розділу дисертації опубліковано у статті [2]. Результати, представлені у третьому розділі, опубліковано у статтях [5] та [3]. Результати, викладені в розділі 4, опубліковано в роботах [4] та [6]. Результати п'ятого розділу дисертації опубліковано у статті [1]. Публікації [4, 1, 2] відповідають вимогам до публікації результатів дисертаційних робіт у фахових виданнях із фізико-математичних наук. Статті [5, 3, 6] проіндексовано в міжнародних наукометричних базах даних Web of Science і Scopus.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається з анотації українською та англійською мовами, вступу, п'яти розділів, розділених на підрозділи, заключної частини, списку використаних джерел і двох додатків. Загальний обсяг дисертації складає 165 сторінок. Список використаних джерел (173 посилання включно з роботами здобувачки), список публікацій здобувачки (6 статей і 14 тез конференцій), відомості про апробацію результатів і додаток займають 29 сторінок (з них 2 сторінки — ілюстративні матеріали у додатку А).

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **першому розділі** дисертації наводиться огляд літератури та методики досліджень. Результати власного наукового дослідження за темою дисертації викладено у **розділах 2 – 5.**

У **розділах 2 – 4** розглядається гібридна механічна система, яка складається з шарнірно опертої пружної балки та твердого тіла. До балки довжини ℓ приєднано k п'єзоелектричних актуаторів, за допомогою яких реалізується розподілений керуючий вплив. Нехай вісь x спрямовано вздовж центральної лінії балки, яка знаходиться у стані рівноваги. Функція $w(x,t)$ описує поперечне переміщення точки балки з координатою $x \in [0, \ell]$ в момент часу t. У точці $\ell_0 \in (0, \ell)$ до балки за допомогою пружинної підвіски приєднано тверде тіло, до якого прикладено силу керування F_0. Дію j-го п'єзоактуатора описано за допомогою згинального моменту M_j та структурної функції ψ_j, яка має компактний носій і описує розташування актуатора. Передбачається, що всі актуатори відокремлені від кінцевих точок балки та від точки приєднання твердої маси: $\operatorname{supp} \psi_j \cap \{0, \ell_0, \ell\} = \varnothing$, $j = \overline{1, k}$. Механічна система має такі характеристики: ρ — густина балки, E — модуль Юнга, I — момент інерції поперечного перетину балки, m — маса приєднаного твердого тіла, $\varkappa$ — жорсткість пружини. Усі зазначені параметри вважаються додатними сталими.

Рівняння руху системи отримано на основі варіаційного принципу Гамільтона–Остроградського у вигляді рівняння Ейлера–Бернуллі з крайовими умовами та умовами інтерфейсу у точці приєднання твердого тіла:

$$\rho\, \ddot{w}(x,t) + EI\, w^{(4)}(x,t) = \sum_{j=1}^{k} \psi_j''(x) M_j, \quad x \in [0, \ell] \setminus \{\ell_0\}, \tag{1}$$

$$w\Big|_{x=0} = w\Big|_{x=\ell} = 0, \quad w''\Big|_{x=0} = w''\Big|_{x=\ell} = 0, \tag{2}$$

$$(m\ddot{w} + \varkappa w)\Big|_{x=\ell_0} = EI \left(w'''\Big|_{x=\ell_0-0} - w'''\Big|_{x=\ell_0+0} \right) + F_0. \tag{3}$$

В якості фазового простору введемо гільбертів простір $X = \overset{\circ}{H}{}^2(0,\ell) \times L^2(0,\ell) \times \mathbb{R}^2$, елементами якого є вектори $\xi = (u(\cdot),\, v(\cdot),\, p,\, q)^T$. Скалярний добуток векторів $\xi_1 = (u_1(\cdot), v_1(\cdot), p_1, q_1)^T$ і $\xi_2 = (u_2(\cdot), v_2(\cdot), p_2, q_2)^T$ задано формулою:

$$\langle \xi_1, \xi_2 \rangle_X = \int_0^{\ell} \big(EI\, u_1''(x)\, u_2''(x) + \rho\, v_1(x)\, v_2(x) \big)\, \mathrm{d}x + \varkappa\, p_1\, p_2 + m\, q_1\, q_2.$$

Для подальшого дослідження задачі (1) – (3) запишемо абстрактне диференціальне рівняння

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, \xi(t) = A\xi(t) + By(t), \tag{4}$$

де $A : D(A) \to X$ — лінійний диференціальний оператор четвертого порядку з областю визначення

$$D(A)=\left\{\begin{array}{c}(u,\,v,\,p,\,q)^T\in X:\\ u\Big|_{x\in[0,\ell_0]}\in H^4(0,\ell_0),\quad u\Big|_{x\in(\ell_0,\ell]}\in H^4(\ell_0,\ell),\\ u''(0)=u''(\ell)=0,\quad u''(\ell_0-0)=u''(\ell_0+0),\\ v\in \overset{\circ}{H}{}^2(0,\ell),\qquad p=u(\ell_0),\ q=v(\ell_0)\end{array}\right\}\subset X,$$

який діє за правилом $A:\xi\in D(A)\mapsto A\xi\in X$,

$$A\xi=\left(v,\ \ -\frac{EI}{\rho}u^{(4)},\ \ q,\ \ \frac{1}{m}(EI\,L-\varkappa p)\right)^T,$$

$L=u'''(\ell_0-0)-u'''(\ell_0+0)$, $y=(F_0,M_1,\dots,M_k)^T$ — вектор керування, $B:\mathbb{R}^{k+1}\to X$ — відображення, задане матрицею $B=(\tilde B_0,\tilde B_1,\dots,\tilde B_k)$, $\tilde B_0=\left(0,0,0,\frac{1}{m}\right)^T$, $\tilde B_j=\left(0,\frac{1}{\rho}\psi_j'',0,0\right)^T$, $j=\overline{1,k}$. Якщо $w(x,t)$ є класичним розв'язком задачі (1)–(3) з припустимим керуванням $y(t)$ на проміжку $t\in[0,\tau]$, то легко бачити, що $\xi(t)=(w(\cdot,t),\dot w(\cdot,t),w(\ell_0,t),\dot w(\ell_0,t))^T$ задовольняє рівняння (4). Тому рівняння (4) вважатимемо абстрактною формою запису задачі (1)–(3).

У **розділі 2** задано закон керування зі зворотним зв'язком $y=K\xi$, де лінійний функціонал $K:X\to\mathbb{R}^{k+1}$ дається формулою:

$$K:\xi=(u,v,p,q)^T\mapsto K\xi=-(\alpha_0 q,\ P_1,\dots,\ P_k)^T, \tag{5}$$

де $P_j=\alpha_j\int\limits_0^\ell\psi_j''(x)v(x)\,\mathrm{d}x$, $j=\overline{1,k}$, з довільними додатними параметрами регулювання $\alpha_0,\,\alpha_1,\dots,\alpha_k$. Доведено, що відображення (5) є обмеженим лінійним функціоналом. Предметом дослідження є стійкість нульового стану рівноваги замкненої системи вигляду

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\xi(t)=\tilde A\xi(t), \tag{6}$$

де оператор

$$\tilde A:\xi\mapsto\tilde A\xi=A\xi+BK\xi \tag{7}$$

має область визначення $D(\tilde A)=D(A)$.

Доведено, що оператор A є щільно визначеним та m-дисипативним. Згідно з теоремою Люмера–Філліпса, оператор A є інфінітезимальним генератором стискаючої C_0-напівгрупи операторів у просторі X. Оскільки оператор $\tilde{A}$ є обмеженим збуренням оператора A, оператор $\tilde{A}$ також є інфінітезимальним генератором стискаючої C_0-напівгрупи операторів в X. Це доводить коректність задачі Коші для системи (6).

Стійкість стану рівноваги розглянутої системи з керуванням доведено на основі прямого методу Ляпунова. Для цього обрано функціонал Ляпунова

$$2V = \int\limits_0^\ell \left(\rho v^2(x) + EI(u''(x))^2\right) \mathrm{d}x + mq^2 + \varkappa p^2 = \|\xi\|_X^2 \tag{8}$$

у вигляді повної енергії системи і показано, що його похідна за часом на траєкторіях замкненої системи є знаковід'ємним функціоналом.

Теорема 1. *Нехай оператор $\tilde{A} : D(\tilde{A}) \to X$ задано формулою (7). Розв'язок $\xi = 0$ рівняння (6) є сильно (за нормою простору X) стійким за Ляпуновим.*

Розділ 3 присвячено дослідженню асимптотичної стійкості стану рівноваги замкненої системи (6). Доведено, що оператор A є кососиметричним, його власні значення є суто уявними комплексними числами. Розглянуто спектральну задачу

$$A\xi = \lambda \xi, \quad \xi \in D(A), \tag{9}$$

де $\lambda = i\,\omega$, $\omega \in \mathbb{R}$, звідки отримано характеристичне рівняння

$$\det \mathcal{M} = 0, \tag{10}$$

де $\mu = \left(\frac{\rho}{EI}\,\omega^2\right)^{1/4}$ — спектральний параметр,

$$\det \mathcal{M} \;=\; \frac{m\,EI\,\mu^4 - \varkappa\,\rho}{2\,\rho\,EI\,\mu^5} \Big(\sin \mu(\ell - \ell_0)\, \sin \mu\ell_0\, \sinh \mu\ell - \\ - \sinh \mu(\ell - \ell_0)\, \sinh \mu\ell_0\, \sin \mu\ell\Big) - \frac{1}{\mu^2}\, \sinh \mu\ell\, \sin \mu\ell.$$

Матриця $\mathcal{M}$ розміру 4×4 відповідає системі лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів розкладу власних функцій за функціями Крилова.

Важливим результатом дисертаційної роботи є аналіз асимптотичного розподілу коренів частотного рівняння (10), для якого отримано асимптотичне представлення для $\mu \to +\infty$:

$$\det \mathcal{M} = \frac{m\, e^{\mu\ell}}{8\,\rho\,\mu^5}\big(\Phi_0(\mu) + o(1)\big),$$

де головна частина представляється у вигляді періодичної функції $\Phi_0(\mu) = 2\sin\mu(\ell-\ell_0)\sin\mu\ell_0 - \sin\mu\ell$. Доведено, що корені $\mu_j > 0$ рівняння (10) для $j \to \infty$ є близькими до коренів $\hat{\mu}_j > 0$ урізаного частотного рівняння

$$\Phi_0(\hat{\mu}) = 0. \tag{11}$$

Лема 1. *Припустимо, що числа ℓ_0 та ℓ сумірні. Нехай маємо корені $0 < \hat{\mu}_1 < \hat{\mu}_2 < \dots$ рівняння* (11). *Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться $L > 0$, таке, що для кожного $\hat{\mu}_j > L$ існує єдиний корінь $\mu_j \in \mathcal{I}_j = (\hat{\mu}_j - \varepsilon;\ \hat{\mu}_j + \varepsilon)$ рівняння* (10).

Нехай $S = (L; +\infty) \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} (\mu_j - \varepsilon;\ \mu_j + \varepsilon)$. Тоді $\det \mathcal{M} \neq 0$ для всіх $\mu \in S$.

Встановлено, що власні значення λ_j задачі (9) і модальні частоти коливань балки зростають квадратично зі зростанням j для великих j. Цей результат проілюстровано за допомогою чисельного моделювання.

Іншою важливою властивістю оператора A є те, що система його власних векторів утворює базис простору X.

Наслідок 1. *Нехай $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — власні вектори оператора A. Тоді система $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ є базисом простору X.*

Для доведення цього факту побудовано обернений до A оператор $A^{-1} : X \to X$ і показано його кососиметричність та компактність.

Ще одним важливим результатом роботи є доведення ω-лінійної незалежності системи експоненціальних функцій $\left\{e^{\lambda_j t}\right\}_{j=1}^{\infty}$, де λ_j — власні значення оператора A. Цей результат отримано на основі аналізу властивостей частотного рівняння (10).

Лема 2. *Нехай μ_j є коренями частотного рівняння* (10) *й серед μ_j немає кратних коренів. Якщо відношення $\frac{\ell_0}{\ell}$ є раціональним числом, то система функцій $\left\{e^{\lambda_j t}\right\}_{j=1}^{\infty}$ є ω-лінійно незалежною в $L^2(0,\tau)$ для всіх $\tau > 0$.*

Крім того, побудовано у явному вигляді резольвенту оператора $\tilde{A}$. Показано, що компоненти відображення $(\mathrm{I} - \lambda\tilde{A})^{-1} : X \to X$ є лінійними обмеженими функціоналами вектора ξ для деякого $\lambda > 0$. Отримано оцінку норми і доведено компактність побудованої резольвенти. Згідно з теоремою Дафермоса–Слемрода це гарантує передкомпактність траєкторій замкненої системи.

Достатні умови асимптотичної стійкості стану рівноваги системи з пружною балкою і твердим тілом представляють основний результат **розділу 3.**

Теорема 2. *Нехай* $\left\{\xi_i = (u_i, v_i, p_i, q_i)^T\right\}_{i\in\mathbb{N}}$ *— власні вектори оператора* A *та для кожного* $i \in \mathbb{N}$ *виконано* $v_i(\ell_0) \neq 0$ *або* $\int\limits_0^\ell \psi_j''(x)\, v_i(x)\,\mathrm{d}x \neq 0$ *для деякого* $j \in \{1, \ldots, k\}$*. Тоді розв'язок* $\xi = 0$ *системи* (6) *є асимптотично стійким.*

Доведення цього результату базується на принципі інваріантності ЛаСалля. Доведено, що множина $Z = \left\{ \xi \;\middle|\; \dot{V} = 0 \right\}$ не містить нетривіальних траєкторій замкненої системи. Тут V — функціонал Ляпунова вигляду (8).

У **розділі 4** розглядається задача спостереження. Припускається, що описану вище балкову систему оснащено п'єзоелектричними сенсорами, які розташовано у зонах прикріплення п'єзоактуаторів з протилежного боку балки. Сенсори дозволяють отримувати вихідну інформацію про рух окремих точок механічної системи. Для запису рівнянь руху у формі з узагальненими координатами розглядається спектральна задача, яку отримано розділенням змінних у однорідних рівняннях (1)–(3). Наближений розв'язок системи (1)–(3) представляється у вигляді $w(x,t) = \sum\limits_{j=1}^{N} W_j(x)\, q_j(t)$, де $N \geqslant 1$ — задане ціле число, що характеризує кількість ступенів волі наближеної моделі, $W_j(x)$ — власні функції спектральної задачі, а для визначення коефіцієнтів $q_j(t)$ отримано систему звичайних диференціальних рівнянь другого порядку

$$\ddot{q}_j + \lambda_j\, q_j = \frac{W_j(\ell_0)}{\|W_j\|_H^2}\, u_0 + \frac{1}{\|W_j\|_H^2} \sum_{i=1}^{k} \left(u_i \int\limits_0^\ell \psi_i(x)\, W_j''(x)\,\mathrm{d}x \right), \quad j = \overline{1,N},$$

де $u_0 = F_0$, $u_i = M_i$, $i = \overline{1,k}$. Тут λ_j — власні значення спектральної задачі. Останню систему представлено у векторному вигляді

$$\dot{z} = Az + Bu, \tag{12}$$

де $z = (q_1, p_1, \ldots, q_N, p_N)^T \in \mathbb{R}^{2N}$ — вектор стану, $\dot{q}_j = p_j$, $j = \overline{1, N}$, $u = (u_0, u_1, \ldots, u_k)^T \in \mathbb{R}^{k+1}$ — керування, $A = \operatorname{diag}(A_1, A_2, \ldots, A_N)$ — блочно-діагональна матриця із квадратними блоками вигляду $A_j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda_j & 0 \end{pmatrix}$, а елементи матриці коефіцієнтів керування $B = (B_0, \ldots, B_k)$, де $B_\iota = (0, b_{1\iota}, \ldots, 0, b_{N\iota})^T$, $\iota = \overline{0, k}$, задаються наступними співвідношеннями:

$$b_{j0} = \frac{W_j(\ell_0)}{\|W_j\|_H^2}, \quad b_{ji} = \frac{1}{\|W_j\|_H^2} \int_0^\ell \psi_i(x)\, W_j''(x)\, \mathrm{d}x, \quad j = \overline{1, N}, \quad i = \overline{1, k}.$$

Припускається, що для системи (12) доступні такі вихідні дані:

$$y = Cz \in \mathbb{R}^{r+1}, \tag{13}$$

де $C = (C_1, \mathbf{0}, \ldots, C_N, \mathbf{0})$, $C_j = (c_{0j}, c_{1j}, \ldots, c_{rj})^T$, $\mathbf{0}$ — нульова матриця розмірності $(r+1) \times 1$, при цьому $c_{0j} = W_j(\ell_0)$, $c_{sj} = W_j''(\ell_s)$, $s = \overline{1, r}$, $j = \overline{1, N}$.

На основі рангового критерію Калмана встановлено умови спостережуваності скінченновимірної системи з виходом. Для системи з виходом (12), (13) побудовано динамічний спостерігач у вигляді

$$\dot{\tilde{z}}(t) = (A - FC)\tilde{z}(t) + Bu(t) + Fy(t), \tag{14}$$

де $F = (F_0, \ldots, F_r)$, $F_s = (f_{1s}, 0, \ldots, f_{Ns}, 0)^T$, $s = \overline{0, r}$.

Теорема 3. *Нехай $\lambda_j > 0$ та $|c_{0j}| + |c_{1j}| + \ldots + |c_{rj}| \neq 0$ для всіх $j = \overline{1, N}$. Якщо $f_{js} = \gamma_s \frac{c_{sj}}{\lambda_j \|W_j\|_H^2}$, $j = \overline{1, N}$, $s = \overline{0, r}$, де $\gamma_s > 0$ — довільні константи, то для всіх $z(0) \in \mathbb{R}^{2N}$, $\tilde{z}(0) \in \mathbb{R}^{2N}$ та $u \in L^\infty(0, \infty)$ відповідні розв'язки $z(t)$ та $\tilde{z}(t)$ систем (12)–(13) та (14) задовольняють умову $\|z(t) - \tilde{z}(t)\|_{\mathbb{R}^{2N}} \to 0$ при $t \to +\infty$.*

Цей результат про збіжність спостерігача для скінченновимірної моделі доведено на основі теореми Барбашина–Красовського і проілюстровано графічно.

Далі схему синтезу динамічного спостерігача узагальнено на клас нескінченновимірних лінійних систем керування з виходом, які задаються у гамільтоновій формі

$$\dot z = Az + Bu, \quad z \in H = \ell^2 \times \ell^2, \quad u \in \mathbb{R}^{k+1}, \tag{15}$$

$$y = Cz, \quad y \in \mathbb{R}^r, \quad k, r \in \mathbb{N}. \tag{16}$$

При цьому вектор стану $z = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$ складається з компонент $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots)^T \in \ell^2$ та $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots)^T \in \ell^2$. Керування $u = (u_0,\, u_1, \dots, u_k)^T$ та вихід $y = (y_1, \dots, y_r)^T$ є скінченновимірними векторами. Оператори $A : D(A) \to H,\;\; B : \mathbb{R}^{k+1} \to H,\;\; C : H \to \mathbb{R}^r$ визначаються в термінах ξ- та η-компонент вектора $z \in H$ наступним чином:

$$A : z = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \mapsto Az = \begin{pmatrix} \Omega\eta \\ -\Omega\xi \end{pmatrix}, \quad Bu = \begin{pmatrix} 0 \\ B_1 u \end{pmatrix}, \quad Cz = C_1\, \xi,$$

де $\Omega = \mathrm{diag}(\omega_1,\, \omega_2, \dots)$, а оператори $B_1 : \mathbb{R}^{k+1} \to \ell^2$, $C_1 : \ell^2 \to \mathbb{R}^r$ задані таким чином: $B_1 = (\breve B_0, \dots, \breve B_k)$, $\breve B_i = (b_{1i}, b_{2i}, \dots)^T$, $i = \overline{0, k}$, $C_1 = (\breve C_1, \breve C_2, \dots)$, $\breve C_j = (c_{1j}, \dots, c_{rj})^T$, $j \in \mathbb{N}$. При цьому $\sum\limits_{j=1}^{\infty} b_{ji}^2 < \infty$, $\sum\limits_{j=1}^{\infty} c_{sj}^2 < \infty$, $\;s = \overline{1, r}$. Так, $D(A) = \left\{ z \in H \;\middle|\; \sum\limits_{j=1}^{\infty} \omega_j^2\, \left(\xi_j^2 + \eta_j^2\right) < \infty \right\}$.

Припущення 1. Елементи ω_j оператора Ω є додатними дійсними числами, такими, що $0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_n < \dots$.

На основі теореми Люмера–Філліпса доведено коректність задачі Коші для рівняння (15).

Теорема 4. *Нехай виконано припущення 1. Тоді оператор A є інфінітезимальним генератором C_0-напівгрупи $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geqslant 0}$ у просторі H.*

Для системи (15), (16) побудовано спостерігач типу Луенбергера у вигляді наступної системи:

$$\dot{\tilde z}(t) = (A - FC)\tilde z(t) + Bu(t) + Fy(t), \tag{17}$$

такої, що для довільних початкових умов $z(0)$, $\tilde z(0) \in H$ та будь-якого припустимого керування $u : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^{k+1}$ відповідні розв'язки $z(t)$ та $\tilde z(t)$ систем (15)–(16) та (17) задовольняють умову

$$\|z(t) - \tilde z(t)\|_H \to 0 \quad \text{при} \quad t \to +\infty.$$

Для цього задано оператор $F : \mathbb{R}^r \to H$ вигляду $F = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$ з компонентами $f,\ g : \mathbb{R}^r \to \ell^2$, що визначаються матрицями $f = (f_{js})$, $g = (g_{js})$, $j \in \mathbb{N}$, $s = \overline{1,r}$. Елементи відображення F визначаються таким чином:

$$f_{js} = \gamma_s\, c_{sj}, \quad g_{js} = 0, \quad s = \overline{1,r}, \quad j = 1, 2, \dots\,, \tag{18}$$

де $\gamma_s > 0$ — параметри підсилення спостерігача.

Для доведення збіжності спостерігача (17) розглянуто динаміку похибки $e(t) = z(t) - \tilde{z}(t)$:

$$\dot{e}(t) = (A - FC)\, e(t). \tag{19}$$

Припущення 2. Ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{1}{\omega_i^2}$ збігається.

Передкомпактність траєкторій системи (19) доведено на основі теореми Дафермоса–Слемрода, для чого побудовано резольвенту оператора $A - FC$ і показано її компактність за умови виконання припущення 2. На основі прямого методу Ляпунова доведено стійкість тривіального розв'язку системи (19). На основі принципу інваріантності ЛаСалля доведено асимптотичну стійкість тривіального розв'язку системи (19).

Теорема 5. *Нехай компоненти оператора F у* (17) *визначаються формулами* (18) *та нехай виконано припущення 1, 2 і наступні умови:*
(i) єдиною інваріантною підмножиною множини $\operatorname{Ker} C$ *відносно напівгрупи* $\left\{e^{tA}\right\}_{t \geqslant 0}$ *є одноточкова множина* $\{0\}$;
(ii) для кожного $j \in \mathbb{N}$ існує таке $s = \overline{1,r}$, що $c_{sj} \neq 0$.
Тоді тривіальний розв'язок $e(t) = 0$ рівняння (19) *є асимптотично стійким.*

Цей результат застосовано до моделі шарнірно опертої пружної балки з твердим тілом, описаної вище. Для цього рівняння руху гібридної системи представлено у формі (15), (16), при чому діагональними елементами ω_j, $j \in \mathbb{N}$, блоків Ω оператора A є квадрати власних значень задачі (9). Показано, що для даної системи достатні умови асимптотичної стійкості похибки спостерігача можуть бути послаблені. Зокрема, припущення 1 та 2 випливають з властивостей асимптотичного розподілу коренів рівняння (10), а умова *(i)* **теореми 5** є наслідком умови *(ii)* та доведеної у **розділі 3** ω-лінійної незалежності системи експоненціальних функцій $e^{\pm i\,\omega_j t}$. Результат про збіжність спостерігача Луенбергера для розглянутої моделі пружної балки з твердим тілом проілюстровано за допомогою чисельного моделювання, де графічно представлено спадання норми похибки спостерігача.

Розділ 5 присвячено дослідженню рівняння коливань консольно закріпленої пружної балки з керуванням

$$\begin{aligned} &\ddot{w}(x,t) + a^2\, w^{(4)}(x,t) = f(x,t), \\ &w\Big|_{x=0} = w'\Big|_{x=0} = 0, \qquad w''\Big|_{x=\ell} = w'''\Big|_{x=\ell} = 0, \\ &w\Big|_{t=0} = \varphi(x), \quad \dot{w}\Big|_{t=0} = \psi(x), \end{aligned} \tag{20}$$

$w \in H^2\big([0,\ell]\times[0,T]\big)$, $\quad f \in L^2\big([0,\ell]\times[0,T]\big)$,

$\varphi \in \overset{\circ}{H}{}^2(0,\ell) = \big\{\, \varphi \in H^2(0,\ell) \;\big|\; \varphi(0) = \varphi'(0) = 0 \,\big\}$, $\quad \psi \in L^2(0,\ell)$.
Тут a^2 — коефіцієнт жорсткості балки, функція f описує зовнішній силовий вплив.

У роботі запропоновано спосіб побудови системи наближених розв'язків задачі (20). Для цього використовується метод Гальоркіна. Наближений за Гальоркіним розв'язок w_m представляється у вигляді $w_m(x,t) = \sum\limits_{j=1}^{m} c_j(t)\, v_j(x)$, де в якості лінійно незалежної системи функцій $v_j \in H^2(0,\ell)$ обрано власні функції відповідної спектральної задачі. Отримано систему диференціальних рівнянь для визначення коефіцієнтів $c_j \in H^2(0,T)$:

$$\ddot{c}_j(t)\ \|v_j\|^2_{L^2(0,\ell)} + a^2\, c_j(t)\ \|v_j\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^2(0,\ell)} = f_j(t), \quad j = \overline{1,m}.$$

Основним результатом даного розділу дисертації є доведення теореми про збіжність методу Гальоркіна для моделі консольно закріпленої пружної балки.

Теорема 6. *Нехай $\varphi \in \overset{\circ}{H}{}^2(0,\ell)$, $\psi \in L^2\,(0,\ell)$ та нехай $w_m(x,t)$ — послідовність наближених за Гальоркіним розв'язків задачі (20), $m \in \mathbb{N}$. Тоді існує підпослідовність $w_{m_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} w$, де $w(x,t)$ є узагальненим розв'язком задачі (20).*

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі розв'язано задачі асимптотичної стабілізації та спостереження для гібридної механічної системи, яка містить пружні та абсолютно тверді елементи.

Запропоновано функціонали керування зі зворотним зв'язком для стабілізації моделі шарнірно опертої пружної балки з твердим тілом. Доведено коректність задачі Коші для рівняння руху пружної механічної системи. Встановлено асимптотичну стійкість замкненої системи зі зворотним зв'язком за допомогою прямого методу Ляпунова та принципу інваріантності ЛаСалля. Вперше описано асимптотичні властивості розподілу власних частот для моделі пружної балки з приєднаною масою на пружинній підвісці. Запропоновано конструктивний синтез спостерігача типу Луенбергера для системи керування з виходом. Доведено збіжність запропонованих спостерігачів у скінченновимірному та нескінченновимірному випадках на основі аналізу стійкості розв'язків системи відносно похибок. Крім того, доведено збіжність методу Гальоркіна для задачі про коливання консольно закріпленої пружної балки з керуючим впливом.

Отримані результати вказують на можливості практичного застосування розроблених методів у різних інженерних та технічних галузях, а також відкривають перспективи для подальших досліджень у сфері теорії керування рухом нескінченновимірних пружних механічних систем.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Зуев А.Л., Кучер Ю.И.: Сходимость последовательности приближенных решений динамических уравнений упругой балки. Труды ИПММ НАН Украины **23**, 86–99 (2011)
2. Зуев А.Л., Кучер Ю.И.: Стабилизация модели упругой балки с распределенными и сосредоточенными управляющими воздействиями. Динамические системы **31**(3), 25–35 (2013)
3. Kalosha, J., Zuyev, A., Benner, P.: On the eigenvalue distribution for a beam with attached masses. In: G. Sklyar, A. Zuyev (eds.) Stabilization of Distributed Parameter Systems: Design Methods

and Applications, *SEMA SIMAI Springer Series*, vol. 2, pp. 43–56. Springer International Publishing, Cham (2021). DOI: 10.1007/978-3-030-61742-4_3

4. Zuyev, A., Kalosha, J.: Observer design for a flexible structure with distributed and point sensors. Proceedings of the Institute of Applied Mathematics and Mechanics of NAS of Ukraine **35**(2), 125–136 (2021). DOI: 10.37069/1683-4720-2021-35-9
5. Kalosha J.I., Zuyev A.L.: Asymptotic stabilization of a flexible beam with an attached mass. Ukrainian Mathematical Journal **73**(10), 1537–1550 (2022). DOI: 10.1007/s11253-022-02012-6
6. Zuyev, A., Kalosha, J.: A dynamic observer for a class of infinite–dimensional vibrating flexible structures. In: 2023 European Control Conference (ECC), pp. 200–205. IEEE, Bucharest (2023). DOI: 10.23919/ECC57647.2023.10178223
7. A.L. Zuyev, J.I. Masharova: Application of Galerkin's method for the Euler–Bernoulli beam model. In: Proceedings of the 11th International Conference "Stability, Control and Rigid Bodies Dynamics" (ICSCD), p. 144. IAMM NASU, Donetsk, Ukraine (June 8 – 12, 2011)
8. Julia I. Kucher, Alexander L. Zuyev: Stabilization of a Flexible Beam With Distributed Actuators. In: Proceedings of the International Conference "The Twenty Third Crimea Autumn Mathematical School-Symposium" (KROMSh), p. 81. Taurida national V. Vernadsky university, Crimea, Ukraine (September, 17 – 29, 2012)
9. Зуев А.Л., Кучер Ю.И.: Устойчивость упругой балочной системы с распределенными и сосредоточенным управлениями. In: Proceedings of the International Mathematical Conference "The Boundary Problems, the Theory of Functions and Their Applications" dedicated to the 75th birthday of Academician A.M. Samoilenko, p. 17. DSPU, Sloviansk, Ukraine (June 12 – 14, 2013)
10. Kucher J., Zuyev L.: Stabilization of a Flexible Beam with a Shaker and Piezoelectric Actuators. In: Proceedings of the 16th International Conference "Dynamical System Modelling and Stability Investigation" (DSMSI), p. 336. Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine (May 29 – 31, 2013)

11. Kucher Julia, Zuyev Alexander: Limit behavior of the trajectories for the problem of vibrations of a beam–mass system under the action of distributed and lumped controls. In: Proceedings of the Crimean International Math. Conf. "KMMK–2013". Taurida national V. Vernadsky university, Sudak, Ukraine (September 22 – October 4, 2013)
12. Alexander L. Zuyev, Julia I. Kucher: Asymptotic distribution of the spectral parameter in the stabilization problem for a beam system. In: Proceedings of the XVII International Conference "Dynamical Systems Modelling and Stability Investigation" (DSMSI), p. 103. Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine (May 27 – 29, 2015)
13. Julia Kucher, Alexander Zuyev: Asymptotic stability analysis of the Euler–Bernoulli beam model. In: Proceedings of the International V. Skorobohatko Mathematical Conference, p. 86. Pidstryhach institute for applied problems of mechanics and mathematics of NAS of Ukraine, Drohobych, Ukraine (August 25 – 28, 2015)
14. Кучер Ю.І.: Асимптотична поведінка власних значень інфінітезимального генератора напівгрупи в задачі стабілізації пружної балки. In: Proceedings of the International Conference of Young Mathematicians, p. 105. Institute of mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine (June 3 – 6, 2015)
15. Julia I. Kalosha, Alexander L. Zuyev: Finite-dimensional Model of the Beam Oscillations with Distributed and Lumped Controls. In: Proceedings of the International Conference on Differential Equations, Mathematical Physics and Applications (DEMPhA–2017), pp. 30–31. Bohdan Khmelnytsky national university of Cherkasy, Cherkasy, Ukraine (October 17 – 19, 2017)
16. Зуев А.Л., Калоша Ю.И.: Приближённое решение задачи об управляемых колебаниях балки с точечной массой. In: Proceedings of the International Conference "Dynamical Systems Modelling and Stability Investigation" (DSMSI–2017), p. 51. Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine (May 24 – 26, 2017)
17. Ю.І. Калоша, О.Л. Зуєв: Асимптотична стійкість моделі пружної балки з приєднаною масою. In: Proceedings of the International Conference of Young Mathematicians, p. 133. Institute of mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine (June 3 – 5, 2021)

18. Юлія Калоша, Олександр Зуєв: Асимптотичний розподіл власних частот коливань пружної балки з приєднаною масою. In: Proceedings of The Conference of Young Scientists "Pidstryhach Readings — 2021". Pidstryhach institute for applied problems of mechanics and mathematics of NAS of Ukraine, Lviv, Ukraine (May 26 – 28, 2021)
19. Юлія Калоша, Олександр Зуєв: Спостерігач Луенбергера для пружної балки з точковою масою. In: Proceedings of The Conference of Young Scientists "Pidstryhach Readings — 2022". Pidstryhach institute for applied problems of mechanics and mathematics of NAS of Ukraine, Lviv, Ukraine (May 25 – 27, 2022)
20. Юлія Калоша, Олександр Зуєв: Спостерігаїч Луенбергера для моделі пружної балки у гамільтоновій формі. In: Proceedings of the International Scientific Conference "Current Problems of Mechanics and Mathematics – 2023". Pidstryhach institute for applied problems of mechanics and mathematics of NAS of Ukraine, Lviv, Ukraine (May 23 – 25, 2023)

АНОТАЦІЇ

Калоша Ю. І. Керування багаточастотними коливаннями гібридних механічних систем. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.02.01 — теоретична механіка. — Інститут математики НАН України, Київ, 2024.

Дисертаційну роботу присвячено дослідженню задач керованої стабілізації і спостереження для гібридної механічної системи у вигляді пружної балки з приєднаною масою на пружинній підвісці. Балка знаходиться під впливом зосередженої сили керування та розподілених п'єзоелектричних приводів (актуаторів). Ця мехатронна установка в математичному сенсі являє собою керовану динамічну систему з нескінченною кількістю ступенів волі. Математичну модель руху отримано на основі варіаційного принципу Гамільтона–Остроградського у вигляді крайової задачі для рівняння Ейлера–Бернуллі. Для дослідження стійкості отримане рівняння руху записано у вигляді абстрактного диференціального рівняння в опера-

торній формі у гільбертовому просторі. Запропоновано керування зі зворотним зв'язком у вигляді обмеженого лінійного оператора, яке забезпечує асимптотичну стійкість стану рівноваги. На основі теореми Люмера–Філліпса доведено коректність задачі Коші для системи з керуванням. На основі прямого методу Ляпунова доведено стійкість стану рівноваги замкненої системи. Отримано частотне рівняння і досліджено асимптотичний розподіл власних частот коливань балки. Наведено достатні умови асимптотичної стійкості стану рівноваги замкненої системи. Одним з ключових результатів роботи є побудова резольвенти для оператора зі зворотним зв'язком і доведення компактності резольвенти. На основі принципу інваріантності ЛаСалля доведено асимптотичну стійкість стану рівноваги замкненої системи.

Також досліджено задачу спостереження для системи керування з виходом. Запропоновано явний аналітичний підхід для побудови динамічного спостерігача типу Луенбергера для класу моделей гнучких конструкцій. Показано, що запропонована система-спостерігач дозволяє асимптотично відновити стан системи за наявності обмеженої інформації про вихідний сигнал.

Крім того, розглянуто модель руху консольно закріпленої пружної балки з керуванням. Запропоновано спосіб побудови системи наближених розв'язків на основі методу Гальоркіна і доведено збіжність методу Гальоркіна для розглянутої системи.

Ключові слова: гібридна механічна система, балка Ейлера–Бернуллі, динамічна система, фазовий простір, сильно неперервна напівгрупа операторів, інфінітезимальний генератор, стан рівноваги механічної системи, керування зі зворотним зв'язком, функція Ляпунова, стійкість за Ляпуновим, асимптотична стійкість, принцип інваріантності, спостерігач Луенбергера, метод Гальоркіна.

Kalosha J. I. Control of multi-frequency oscillations of hybrid mechanical systems. — Qualification scientific work in the form of manuscript.

Thesis for candidate of physical and mathematical sciences degree in speciality 01.02.01 — analytical mechanics. — Institute of Mathematics NAS Ukraine, Kyiv, 2024.

The dissertation is devoted to the study of controlled stabilization and observation problems for a hybrid mechanical system in the form of a flexible beam with an absolutely rigid body attached by a spring-mass system. The beam is controlled by a lumped force and distributed piezoelectric actuators. In the mathematical sense, the mechatronic installation is a controlled dynamical system with an infinite number of degrees of freedom. The mathematical model of motion is obtained on the basis of the Hamilton–Ostrogradsky variational principle in the form of a boundary value problem for the Euler–Bernoulli equation. To study the stability, the obtained equation of motion is presented in the form of an abstract differential equation in the operator form in Hilbert space. A feedback control in the form of a bounded linear operator is proposed, which ensures asymptotic stability of the equilibrium. The well-posedness of the Cauchy problem for the system with control is proved on the basis of the Lumer–Phillips theorem. The stability of the equilibrium of a closed–loop system is proved based on Lyapunov's direct method. The frequency equation is derived and the asymptotic distribution of the eigenfrequencies of the beam oscillations is investigated. Sufficient conditions for the asymptotic stability of the equilibrium of the closed–loop system are obtained. One of the key results of the work is the construction of a resolvent for the feedback operator and the proof of the compactness of the resolvent. Based on the LaSalle invariance principle, the asymptotic stability of the equilibrium of the closed–loop system is proved.

Moreover, the observation problem for a control system with an output is studied. An explicit analytical approach is proposed for constructing a dynamic Luenberger-type observer for a class of flexible structure models. It is shown that the proposed observer allows to asymptotically reconstruct the system state operating by limited output information.

Furthermore, the model of motion of a cantilever flexible beam with control is considered. A system of approximate solutions is obtained based on the Galerkin method. The convergence of the Galerkin method for the considered system is proved.

Key words: hybrid mechanical system, Euler–Bernoulli beam, dynamical system, phase space, strongly continuous semigroup of operators, infinitesimal generator, equilibrium of a mechanical system, feedback control, the Lyapunov function, Lyapunov's stability, asymptotic stability, invariance principle, the Luenberger observer, the Galerkin method.

Підписано до друку 10.04.2024 р. Формат 60 × 84/16.
Папір офсетний. Гарнітура Times.
Наклад 100 прим. Зам. № 044.
Віддруковано з оригіналів

Вид-во Українського державного університету
імені Михайла Драгоманова
01601, м.Київ-30, вул. Пирогова, 9
Свідоцтво про реєстрацію № 1101 від 29.10.2002.
(044) 239-30-26.