Інститут математики
Національна академія наук України

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

**Мороз Микола Петрович**

УДК 511.7+517.5

**Дисертація**

# Функції з фрактальними властивостями, пов'язані з представленнями чисел рядами Енгеля та Остроградського–Серпінського–Пірса

111 — Математика
Математика та статистика

Подається на здобуття наукового ступеня
доктора філософії

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

______________ М. П. Мороз

Науковий керівник: **Працьовитий Микола Вікторович**,
доктор фізико-математичних наук, професор

Київ — 2023

# АНОТАЦІЯ

*Мороз М. П.* Функції з фрактальними властивостями, пов'язані з представленнями чисел рядами Енгеля та Остроградського–Серпінського–Пірса. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 — Математика. — Інститут математики НАН України, Київ, 2023.

Дисертаційне дослідження виконане на межі конструктивної теорії функцій з локально складною структурою та фрактальними властивостями, теорії кодування дійсних чисел засобами нескінченного алфавіту, метричної та ймовірнісної теорії чисел, і частково торкається теорії динамічних систем. Воно присвячене спеціальним функціям, що визначені в термінах представлення дійсних чисел рядами Остроградського–Серпінського–Пірса, Енгеля, а також рядами Перрона, що є узагальненням рядів Енгеля, Люрота, Сильвестера. Важливою складовою роботи є цілісна теорія кодування дійсних чисел засобами нескінченного алфавіту, що ґрунтується на розкладах чисел в ряди Перрона. Метрична теорія динамічних систем у роботі представлена розв'язком аналогу задачі Гауса–Кузьміна (яка стосувалась елементарних ланцюгових дробів) для різницевих зображень чисел рядами Енгеля та Перрона.

Дана робота є продовженням досліджень різних систем кодування дійсних чисел засобами нескінченного алфавіту і об'єктів, з ними пов'язаних, які здійснювали:

1) Gauss C.F., Кузьмін Р.О., Хінчин А.Я. (елементарні ланцюгові дроби);

2) Працьовитий М.В., Лещинський О.Л., Торбін Г.М., Нікіфоров Р.О. ($Q_\infty$-зображення);
3) Erdős P., Rényi A., Galambos J., Knopfmacher A., Knopfmacher J., Працьовитий М.В., Гетьман Б.І., Барановський О.М. (ряди Енгеля);
4) Остроградський М.В., Sierpiński W., Pierce T.A., Shallit J.O., Працьовитий М.В., Барановський О.М., Торбін Г.М. (ряди Остроградського–Серпінського–Пірса);
5) Lüroth J., Жихарєва Ю.І., Хворостіна Ю.В. (додатні та знакозмінні ряди Люрота);
6) Sylvester J.J., Erdős P., Rényi A. (ряди Сильвестера);
7) Perron O. (ряди Перрона).

Традиційними для систем кодування (зображень) чисел є питання про:

1) існування та єдиність зображення;
2) тополого-метричні властивості циліндричних множин;
3) асимптотичні частоти цифр зображення;
4) нормальні властивості зображень;
5) тополого-метричну структуру множин з умовами на вживання цифр у зображеннях;
6) властивості динамічної системи, породженої оператором лівостороннього зсуву цифр зображення.

Дисертація складається з анотації українською та англійською мовами, переліку скорочень та умовних позначень, вступу, трьох розділів, що розбиті на підрозділи, висновків до розділів та загальних висновків, списку використаних джерел та одного додатку, що містить список публікацій автора та відомості про апробацію результатів дослідження.

Основними об'єктами дослідження є: проєктори одного зображення в інше; випадкові величини, пов'язані з рядами Остроградського–Серпінського–Пірса та Енгеля; перетворення простору зображень; динамічні системи, породжені операторами лівостороннього зсуву цифр зображень чисел.

Перший розділ має оглядовий характер. У ньому розглянуто основи тополого-метричних теорій представлення та зображення дійсних чисел рядами Остроградського–Серпінського–Пірса ($O$-зображення), Енгеля ($E$-зображення), Люрота, Сильвестера, елементарними ланцюговими дробами тощо. Здійснено огляд результатів, що стосуються даних систем представлень чисел, зокрема властивостей зображень чисел, що виконуються для майже всіх чисел в розумінні міри Лебега (нормальних властивостей чисел). Також наведено концептуально важливі для даної роботи факти з теорії нескінченних добутків, теорії функцій дійсної змінної, теорії ймовірностей та ін.

Другий розділ присвячений функціям зі складною локальною структурою, що визначені в термінах зображення дійсних чисел рядами Енгеля та Остроградського–Серпінського–Пірса. У підрозділі 2.1 розглянуто проєктор $O$-зображення в $E$-зображення — функцію $f\colon (0;1)\setminus\mathbb{Q} \to (0;1]$ таку, що $O$-зображення аргумента $x$ рівне $E$-зображенню значення функції $f(x)$, тобто

$$f(x) = f(\Delta^O_{q_1q_2\ldots}) = \Delta^E_{q_1q_2\ldots}.$$

Встановлено, що проєктор ніде не монотонний, має неусувні розриви першого роду у раціональних точках та неперервний у ірраціональних точках, а також є майже скрізь недиференційовним по множині ірраціональних чисел. Вивчено множину значень проєктора та знайдено функцію розподілу його значень. Підрозділи 2.2 та 2.3 присвячені функціям, що визначені за допомогою функціональних рядів, в яких фігурують відповідно цифри $O$-зображення та $E$-зображення аргументу. Ці функції є узагальненнями функції, яку розглядав J.O. Shallit для рядів Остроградського–Серпінського–Пірса. У цих підрозділах встановлено вимірність цих функцій, вивчено структуру множини розбіжності відповідних функціональних рядів, зокрема доведено, що вона є континуальною всюди щільною множиною нульової міри Лебега. Також обчислено математичні сподівання та дисперсії розподілів значень цих функцій. У підрозділі 2.4 розглянуто оператор лівостороннього зсуву цифр $\omega$ різницевого представлення чисел рядами Енгеля. Для нього розв'язано задачу, що є аналогом класичної задачі Гауса–Кузьміна для елементарних ланцюгових дробів, а саме для послідовності множин $E_n(a) = \{x\colon x \in (0;1), \omega^n(x) < a\}$, де $a$ — фіксований параметр з $(0;1]$, доведено, що $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda(E_n(a)) = 1$, де $\lambda$ — міра Лебега.

Третій розділ присвячений представленню та зображенню дійсних чисел з $(0;1]$ рядами Перрона:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_0 r_1 \cdots r_n}{(p_1-1)p_1(p_2-1)p_2\cdots(p_n-1)p_n p_{n+1}} \ ,$$

де $(r_n)_{n=0}^{\infty}$ — довільна послідовність натуральних чисел, $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ — послідовність натуральних чисел така, що $p_n \geqslant r_{n-1}+1$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Ряд Перрона є:

1) рядом Енгеля при $r_n = p_n - 1$, $r_0 = 1$;
2) модифікованим рядом Енгеля при $r_n = p_n$, $r_0 = 1$;
3) рядом Люрота при $r_n \equiv 1$, $r_0 = 1$;
4) рядом Сильвестера при $r_n = (p_n-1)p_n$, $r_0 = 1$.

Різницевою формою ряду Перрона називатимемо ряд:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_0 r_1 \cdots r_n}{(r_0+g_1-1)(r_0+g_1)\cdots(r_{n-1}+g_n-1)(r_{n-1}+g_n)(r_n+g_{n+1})},$$

де $g_n = p_n - r_{n-1}$ та $g_n \in \mathbb{N}$. Основний результат цього розділу — тополого-метрична теорія представлення та зображення чисел рядами Перрона в стандартній ($P$-зображення) та різницевій ($\overline{P}$-зображення) формах. У підрозділах 3.2 та 3.3 на основі рядів Перрона створено нескінченні класи $P$ та $\overline{P}$-зображень із відносно простими тополого-метричними властивостями. Зокрема обґрунтовано існування та єдиність $P$ та $\overline{P}$-зображень для всіх чисел з $(0;1]$, з'ясовано структуру циліндричних множин та знайдено формули для обчислення їхньої міри Лебега. Також визначено достатні умови раціональності та ірраціональності числа за його $P$-зображенням. Важливою частиною третього розділу є підрозділ 3.5, у якому знайдено нормальні властивості різних підкласів $\overline{P}$-зображень, тобто властивості, якими володіють майже всіх числа з $(0; 1]$ (в розумінні міри Лебега). Знайдено достатні умови, при яких для майже всіх чисел з $(0; 1]$ існують асимптотичні частоти кожної цифри їхнього $\overline{P}$-зображення і при цьому ці частоти рівні для майже всіх $x \in (0; 1]$. Також цей підрозділ містить приклади конкретних $\overline{P}$-зображень, до яких застосовано раніше доведені теореми та визначено їхні нормальні властивості. Підрозділ 3.4 присвячено функціям, що визначені в термінах $\overline{P}$-зображення — проєкторам одного $\overline{P}$-зображення в інше та деяким перетворенням простору $\overline{P}$-зображень чисел. Ці функції вивчено на предмет неперервності, монотонності, диференційовності. Зокрема знайдено умови, за яких ці функції є сингулярними. У підрозділі 3.6 розв'язано аналог задачі Гауса–Кузьміна для деяких підкласів $\overline{P}$-зображень.

*Ключові слова*: Ряд Енгеля, ряд Остроградського–Серпінського–Пірса, ряд Перрона, ряд Люрота, ряд Сильвестера, задача Гауса–Кузьміна, сингулярна функція, ніде не монотонна функція, ніде не диференційовна функція, сингулярний розподіл ймовірностей, нормальна властивість чисел, асимптотична частота цифри, оператор лівостороннього зсуву цифр зображення, проєктор одного зображення в інше.

## ABSTRACT

*Moroz M. P.* Functions with fractal properties related to representations of numbers by Engel and Ostrogradsky–Sierpinski–Pierce series. — Qualification scientific work in the form of manuscript.

Thesis for doctor of philosophy degree in speciality 111 — Mathematics. — Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Kyiv, 2023.

The thesis belongs to the field of constructive theory of real functions with locally complicated structure and fractal properties, theory of encoding of real numbers using an infinite alphabet, metric and probability theory of numbers, and partly appertains to the theory of dynamical systems. It is devoted to special functions defined in terms of representation of real numbers by Engel and Ostrogradsky–Sierpiński–Pierce series, as well as Perron series, which is a generalization of Engel, Lüroth, and Sylvester series. An important component of the thesis is a comprehensive theory of encoding of real numbers using an infinite alphabet, which is based on the representation of numbers by Perron series. The metric theory of dynamical systems in the thesis is represented by the solution of an analogue of the Gauss–Kuzmin problem (which concerned elementary continued fractions) for difference representations of numbers by Engel and Perron series.

This work is a continuation of research into various coding systems of real numbers using an infinite alphabet and objects related to them, which were carried out by

1) Gauss C.F., Kuzmin R.O., Khinchin A.Ya. (elementary continued fraction);
2) Pratsiovytyi M.V., Leshchynskyi O.L., Torbin G.M., Nikiforov R.O.

($Q_\infty$-representation);

3) Erdős P., Rényi A., Galambos J., Knopfmacher A., Knopfmacher J., Pratsiovytyi M.V., Hetman B.I., Baranovskyi O.M. (Engel series);
4) Ostrogradsky M.V., Sierpiński W., Pierce T.A., Shallit J.O., Pratsiovytyi M.V., Baranovskyi O.M., Torbin G.M. (Ostrogradsky–Sierpinski–Pierce series);
5) Lüroth J., Zhykharyeva Yu.I., Khvorostina Yu.V. (positive and alternating Lüroth series);
6) Sylvester J.J., Erdős P., Rényi A. (Sylvester series);
7) Perron O. (Perron series).

Traditional for systems of coding (representation) of numbers are questions about

1) the existence and unity of the representation;
2) the topological and metric properties of cylindrical set;
3) the asymptotic frequencies of digits;
4) the normal properties of representation;
5) the topological and metric structure of set with conditions for the use of numbers in representation;
6) the properties of the dynamic system generated by the left-shift operator of digits.

The thesis consists of the abstract in Ukrainian and in English, a list of notations, introduction, three chapters, divided into sections, conclusions for each chapter and general conclusions, bibliography, and one appendix containing the list of publications and information on the approbation of the research results.

The main objects of the research are projectors of one representation into another representation, random variables associated with Ostrogradsky–Sierpiński–Pierce and Engel series, transformation of space of representations, dynamical systems generated by left-shift operators of digits.

The first chapter is an overview. It examines the basics of topological-metric theories of representation of real numbers by Ostrogradsky–Sierpiński–Pierce ($O$-representation), Engel ($E$-representation), Lüroth, Sylvester series, elementary continued fractions, etc. An overview is provided of the results related to these systems of number representations, in particular the properties of number representations that hold for almost all numbers in the sense of the Lebesgue measure (known as normal properties of numbers). Furthermore, this chapter presents conceptually significant facts derived from the theory of infinite products, the theory of real functions, probability theory, and other related fields.

The second chapter is devoted to functions with a complex local structure, defined in terms of representations of real numbers by Engel and Ostrogradsky–Sierpiński–Pierce series. Subsection (2.1) considers the projector of $O$-representation into $E$-representation — the function $f\colon (0;1)\backslash\mathbb{Q} \to (0;1]$ such that $O$-representation of the argument $x$ is equal to $E$-representation of the value of the function $f(x)$, i.e.

$$f(x) = f(\Delta^{O}_{q_1 q_2 \ldots}) = \Delta^{E}_{q_1 q_2 \ldots}.$$

It is established that the projector is nowhere monotonic function, has jump discontinuity at rational points, but is continuous at irrational points and almost everywhere non-differentiable at the set of irrational numbers. The set of values of the projector was studied and the distribution function of its values was found. Sections 2.2 and 2.3 are devoted to functions defined by means of functional series, which contain the numbers $O$-representation and $E$-representation of the argument, respectively. These functions are generalizations of the function considered by J.O. Shallit for Ostrogradsky–Sierpiński–Pierce series. It is established that these functions are measurable. The structure of the set on which these functional series diverge is examined, specifically establishing that it is continual and everywhere dense set of Lebesgue measure zero. The expected value and variance of the value distributions for these functions were also computed. Sections 2.4 deals with the left-shift operator $\omega$ of the difference representation of numbers by Engel series. The operator is utilized to solve a problem analogous to the classical Gauss–Kuzmin problem for elementary continued fractions, namely for the sequence of sets $E_n(a) = \{x\colon x \in (0;1), \omega^n(x) < a\}$, where $a \in (0;1]$ is a fixed parameter, it is proved that $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda(E_n(a)) = 1$, where $\lambda$ is Lebesgue measure.

The third chapter is devoted to the representation of real numbers from $(0;1]$ by Perron series:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_0 r_1 \cdots r_n}{(p_1-1)p_1(p_2-1)p_2\cdots(p_n-1)p_n p_{n+1}},$$

where $(r_n)_{n=0}^{\infty}$ is any sequence of natural numbers, $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ is sequence of natural numbers such that $p_n \geqslant r_{n-1}+1$ for all $n \in \mathbb{N}$. Perron series is

1) Engel series if $r_n = p_n - 1$, $r_0 = 1$;
2) modified Engel series if $r_n = p_n$, $r_0 = 1$;
3) Lüroth series if $r_n \equiv 1$, $r_0 = 1$;
4) Sylvester series if $r_n = (p_n-1)p_n$, $r_0 = 1$.

The difference form of the Perron series is the series

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_0 r_1 \cdots r_n}{(r_0+g_1-1)(r_0+g_1)\cdots(r_{n-1}+g_n-1)(r_{n-1}+g_n)(r_n+g_{n+1})},$$

where $g_n = p_n - r_{n-1}$ and $g_n \in \mathbb{N}$. The main result of this chapter is a topological-metric theory of the representation of numbers by Perron series in standard ($P$-representation ) and difference ($\overline{P}$-representation) forms. In sections 3.2 and 3.3, it is demonstrated how to construct an infinite class of $P$ and $\overline{P}$-representation based on Perron series, which have relatively simple topological and metric properties. In particular, the existence and uniqueness of $P$ and $\overline{P}$-representation for all numbers from $(0;1]$ were substantiated, the structure of cylindrical sets was clarified, formulas for calculating of cylindrical sets Lebesgue measure were found. Sufficient conditions for the rationality and irrationality of a number by its $P$-representation are also defined. An important part of the third chapter is section 3.5, in which the normal properties of various subclasses of $\overline{P}$-representation are found, namely the properties possessed by almost all numbers from $(0;1]$ (in the sense of the Lebesgue measure). Sufficient conditions were also discovered under which, for almost all numbers from $(0;1]$, there exist asymptotic frequencies for each digit in their $\overline{P}$-representations, and these frequencies are the same for almost all $x \in (0;1]$. Additionally, this section provides examples of specific $\overline{P}$-representations, to which previously established theorems were applied, enabling the determination of their normal properties. Section 3.4 is dedicated to functions defined in terms of $\overline{P}$-representation. It explores the projectors of $\overline{P}$-representation into another $\overline{P}$-representation, as well as certain transformations within the space of $\overline{P}$-representations. These functions were investigated for continuity, monotonicity, and differentiability. In particular, the conditions under which these functions are singular have been found. In subsection 3.6, an analogue of the Gauss-Kuzmin problem is solved for some subclasses of $\overline{P}$-representations.

*Key words*: Engel series, Ostrogradsky–Sierpiński–Pierce series, Perron series, Lüroth series, Sylvester series, Gauss–Kuzmin problem, singular function, nowhere monotonic function, nowhere differentiable function, singular distribution, normal properties of numbers, asymptotic frequency of a digit, left-shift operators of digits, projector of one representation into another representation.

# СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ


1[a]. Мороз М.П. Проектор $\Delta^O$-зображення чисел в $\Delta^E$-зображення // Зб. Праць Ін-ту матем. НАН України. 2017. Т. 14. № 4. С. 49–64. https://trim.imath.kiev.ua/index.php/trim/article/view/404.

2[a]. Мороз М.П. Числові характеристики випадкової величини, пов'язаної з представленням дійсних чисел рядами Остроградського-Серпінського-Пірса // Зб. Праць Ін-ту матем. НАН України. 2019. Т. 16. № 3. С. 160–173.
https://trim.imath.kiev.ua/index.php/trim/article/view/514.

3[a]. Мороз М.П. Числові характеристики випадкової величини, пов'язаної з представленням дійсних чисел рядами Енгеля // Український математичний журнал. 2020. Т. 72. № 5. С. 658–666.
https://doi.org/10.37863/umzh.v72i5.2284.
*Переклад англійською мовою:*
Moroz M.P. Numerical Characteristics of a Random Variable Related to the Engel Expansions of Real Numbers. Ukr Math J **72**, 759–770 (2020).
https://doi.org/10.1007/s11253-020-01825-7.

4[a]. Мороз М.П. Задача Гаусса–Кузьміна для різницевого зображення дійсних чисел рядами Енгеля // Український математичний журнал. 2022. Т. 74. № 7. С. 1004–1008.
https://doi.org/10.37863/umzh.v74i7.7159.
*Переклад англійською мовою:*
Moroz M.P. Gauss–Kuzmin Problem for the Difference Engel-Series Representation of Real Numbers. Ukr Math J **74**, 1149–1154 (2022).
https://doi.org/10.1007/s11253-022-02126-x.

5[a]. Мороз М.П. Зображення дійсних чисел рядами Перрона, їхня геометрія та деякі застосування // Нелінійні коливання. 2023. Т. 26. № 2. С.246–260. https://doi.org/10.37863/nosc.v26i2.1417.

6[a]. Мороз М.П. Нормальні властивості чисел у термінах їхнього зображення рядами Перрона // Український математичний журнал. 2023. Т. 75. № 7. С. 920–932. https://doi.org/10.37863/umzh.v75i7.7503.

7[a]. Мороз М.П. Про розподіл значень однієї ніде не монотонної та майже скрізь недиференційовної функції // Тези доповідей Шостої Всеукраїнської наукової конференції молодих вчених з математики і фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання», Київ, 2017.

8[a]. Мороз М.П. Про одну випадкову величину, визначену в термінах представлення дійсних чисел рядами Енгеля // Тези доповідей Восьмої Всеукраїнської наукової конференції молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання», Київ, 2019.

9[a]. Мороз М.П. Задача Гаусса–Кузьміна для різницевого представлення дійсних чисел рядами Енгеля // Тези доповідей Міжнародної конференції «Теорія наближення функцій та її застосування», присвяченої 80-річчю з дня народження члена-кореспондента НАН України, професора О.І. Степанця (1942–2007), Луцьк, 2022.

10[a]. Мороз М.П. Зображення дійсних чисел рядами Перрона // Тези доповідей Всеукраїнської науково-практичної конференції «Актуальні проблеми фізики, математики, інформатики та методики їх навчання», присвяченої 90-річчю від дня народження кандидата фізико-математичних наук, професора Горбачука Івана Тихоновича, Київ, 2023. https://enpuir.npu.edu.ua/handle/123456789/39397.

11[a]. Мороз М.П. Нормальні властивості чисел у термінах їхніх $\overline{P}$-зображень // Тези доповідей XXI Міжнародної науково–практичної

конференції «Шевченківська весна — 2023», Київ, 2023.
https://probability.knu.ua/shv2023/ShV_2023.pdf.

12[a]. Мороз М.П. Проєктор одного зображення чисел рядами Перрона ($\overline{P}$-зображення) в інше // Тези доповідей XI Всеукраїнської конференції молодих математиків, Київ, 2023.
https://matan.kpi.ua/public/files/2023/young-math-2023-abstracts.pdf.

13[a]. Мороз М.П. Зображення чисел рядами Перрона ($\overline{P}$-зображення) та частоти цифр у $\overline{P}$-зображеннях чисел // Тези доповідей Міжнародної конференції молодих математиків, Київ, 2023.
https://www.imath.kiev.ua/~young/youngconf2023/Abstracts_2023/PS/Moroz.pdf.

# ЗМІСТ

# ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ І УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

| | |
|---|---|
| $\mathbb{N}$ | — множина натуральних чисел |
| $\mathbb{N}_0$ | — множина цілих невід'ємних чисел |
| $\mathbb{Q}$ | — множина раціональних чисел |
| $\mathbb{R}$ | — множина дійсних чисел |
| $\lambda(M)$ | — міра Лебега множини $M$ |
| $\lvert E\rvert$ | — діаметр лінійної множини $E$, що є різницею $\sup E - \inf E$ |
| $\mathbf{P}(A)$ | — ймовірність події $A$ |
| $\mathbf{M}\xi$ | — математичне сподівання випадкової величини $\xi$ |
| $\mathbf{D}\xi$ | — дисперсія випадкової величини $\xi$ |
| $H_n$ | — $n$-не гармонічне число, рівне сумі $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ |
| $\Delta^O_{q_1(x)q_2(x)\ldots}$ | — $O$-зображення числа $x$ |
| $\Delta^E_{p_1(x)p_2(x)\ldots}$ | — $E$-зображення числа $x$ |
| $\Delta^{\overline{E}}_{g_1(x)g_2(x)\ldots}$ | — $\overline{E}$-зображення числа $x$ (різницева форма $E$-зображення) |
| $\Delta^P_{p_1(x)p_2(x)\ldots}$ | — $P$-зображення числа $x$ |
| $\Delta^{\overline{P}}_{g_1(x)g_2(x)\ldots}$ | — $\overline{P}$-зображення числа $x$ (різницева форма $P$-зображення) |
| $\Delta^O_{c_1\ldots c_m}$ | — $O$-циліндр рангу $m$ з основою $c_1\ldots c_m$ |
| $\Delta^E_{c_1\ldots c_m}$ | — $E$-циліндр рангу $m$ з основою $c_1\ldots c_m$ |
| $\Delta^P_{c_1\ldots c_m}$ | — $P$-циліндр рангу $m$ з основою $c_1\ldots c_m$ |
| $\Delta^{\overline{P}}_{c_1\ldots c_m}$ | — $\overline{P}$-циліндр рангу $m$ з основою $c_1\ldots c_m$ |

# ВСТУП

Дисертаційне дослідження виконане на межі конструктивної теорії функцій з фрактальними властивостями, метричної теорії чисел, теорії кодування дійсних чисел засобами нескінченного алфавіту. Передусім робота присвячена функціям зі складною локальною структурою (ніде не монотонні, ніде не диференційовні, сингулярні тощо), що визначені в термінах представлення дійсних чисел рядами Енгеля та Остроградського–Серпінського–Пірса. Окрему увагу приділено представленню дійсних чисел рядами Перрона, що є узагальненням рядів Енгеля, Люрота, Сильвестера, а також його застосуванню для конструювання та дослідження функцій.

**Обґрунтування вибору теми дослідження.** На сьогодні існує багато досліджень, присвячених математичним об'єктам зі складною локальною структурою: фрактальним множинам, ніде не монотонним, ніде не диференційовним та сингулярним функціям, сингулярним розподілам ймовірностей, динамічним системам з фрактальними атракторами. Одним із ефективних засобів задання (конструювання) та вивчення таких об'єктів є різні системи представлення чисел, наприклад у вигляді ряду, нескінченного добутку, ланцюгового дробу тощо.

Якщо ряд (нескінченний добуток, ланцюговий дріб), яким представлено число $x$, ототожнити з нескінченною послідовністю елементів деякого алфавіту $A \subset \mathbb{N}_0$, то таку послідовність називають зображенням числа $x$. Таким чином, під системою зображення чисел ми розуміємо відображення $A \times A \times \cdots \to \mathbb{R}$.

Особливий інтерес викликають системи зображення чисел з нескінченним алфавітом, зокрема коли $A = \mathbb{N}_0$. Такі системи зазвичай мають більш складну тополого-метричну структуру, ніж системи зображення чисел зі скінченним алфавітом. З одного боку, це породжує труднощі у вивченні математичних об'єктів, що з ними пов'язані. Проте з іншого боку, це значно урізноманітнює клас цих об'єктів та розширює клас задач, які стосовно них можна сформулювати та розв'язати. Відомими та широковживаними в цьому плані є системи представлення (зображення) дійсних чисел рядами Енегеля, Остроградського–Серпінського–Пірса, Сильвестера, знакододатними та знакозмінними рядами Люрота тощо.

Для різних систем зображення чисел природно виникає цілий клас функцій: функції лівостороннього та правостороннього зсувів цифр, проєктори з одного зображення в інше, перетворення простору зображень, зокрема перетворення, що зберігають хвости зображень, частоти цифр, фрактальні розмірності множин тощо. Такі функції часто володіють фрактальними властивостями: є ніде не монотонними, ніде не диференційновними, сингулярними, мають фрактальні множини рівнів, самоподібний графік тощо. Для систем зображення чисел зі скінченним алфавітом класичною є сингулярна функція Салема — проєктор двійкового зображення в $Q_2$-зображення. Проте випадок нескінченносимвольних зображень є більш складним як у топологічному, так і в метричному плані. Зокрема через те, що такі зображення, взагалі кажучи, не є самоподібними.

При дослідженні подібних об'єктів, що пов'язані з тим чи іншим зображенням, важливо встановити так звані нормальні властивості цих зображень — властивості, якими володіють зображення майже всіх чисел (в розумінні міри Лебега). Це можуть бути властивості, що пов'язані з кількістю тих чи інших цифр, що входять у зображення, асимптотичною частотою цифр, частотою комбінацій цифр, швидкістю росту послідовності цифр, середнім значенням цифр, значенням спеціальних функцій, визначених на просторі зображень тощо. Наприклад, для $s$-кового зображення такою властивістю є те, що для майже всіх дійсних чисел асимптотичні частоти всіх цифр рівні між собою та дорівнюють $\frac{1}{s}$. Подібні властивості дозволяють спростити доведення сингулярності функцій та розподілів ймовірностей, нуль-мірності числових множин тощо.

Виявляється, що вище згадані системи зображення чисел рядами Енгеля, Люрота та Сильвестера є частковими випадками більш загальної системи зображень чисел рядами Перрона:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_0 r_1 \cdots r_n}{(p_1 - 1)p_1(p_2 - 1)p_2 \cdots (p_n - 1)p_n p_{n+1}} ,$$

де $(r_n)_{n=0}^{\infty}$ — довільна послідовність натуральних чисел, $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ — послідовність натуральних чисел така, що $p_n \geqslant r_{n-1} + 1$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Кожне число $x \in (0; 1]$ має континуальну множину представлень рядом Перрона. В даній роботі нами запропоновано принцип, згідно з яким створено нескінченну множину систем представлень дійсних чисел, в межах кожної з яких довільне число $x \in (0; 1]$ має єдине представлення рядами Перрона.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами, грантами.** Робота виконана в межах досліджень математичних об'єктів зі складною локальною структурою, що проводяться на кафедрі вищої математики Українського державного університету імені Михайла Драгоманова та у лабораторії фрактального аналізу Інституту математики НАН України. Дослідження проводилося в межах таких науково-дослідних тем:

1) «Функції з фрактальними властивостями (множини рівнів та розподіли значень) і складні динамічні системи з ними пов'язані» (Державний реєстраційний номер 0121U000208);
2) «Статистика сингулярних розподілів ймовірностей і фрактальні неперервні функції випадкових величин» (Державний реєстраційний номер 0119U002582);
3) «Тополого-метричний і фрактальний аналіз функцій і динамічних систем» (Державний реєстраційний номер 0121U100499).

**Мета і завдання дослідження.**

*Мета дослідження:* дослідити фрактальні властивості деяких функцій, що пов'язані з представленнями дійсних чисел рядами Енгеля та Остроградського–Серпінського–Пірса, а також створити загальну теорію представлення та зображення чисел рядами Перрона, що є узагальненням рядів Енгеля, Люрота та Сильвестера.

*Об'єктами дослідження* є функції, що пов'язані з представленнями дійсних чисел рядами Енгеля та Остроградського–Серпінського–Пірса:

1) проєктор $O$-зображення в $E$-зображення:
$$f\left(\Delta^O_{q_1q_2\ldots}\right) = \Delta^E_{q_1q_2\ldots};$$
2) функції $\xi_n$ та $\psi_n$ такі, що
$$\xi_n\left(\Delta^O_{q_1q_2\ldots}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{q_k+n}, \qquad \psi_n\left(\Delta^E_{p_1p_2\ldots}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{p_k+n},$$
а також випадкові величини, що ними визначаються;
3) оператор лівостороннього зсуву цифр $\overline{E}$-зображення:
$$\omega\left(\Delta^{\overline{E}}_{g_1g_2\ldots}\right) = \Delta^{\overline{E}}_{g_2g_3\ldots},$$
а також динамічна система, що ним визначається.

Також *об'єктом дослідження* є представлення (зображення) дійсних чисел рядами Перрона та деякі функції, що з ним пов'язані:

1) проєктор одного $\overline{P}$-зображення в інше:
$$f\left(\Delta^{\overline{P_1}}_{g_1g_2\ldots}\right) = \Delta^{\overline{P_2}}_{g_1g_2\ldots};$$
2) перетворення простору $\overline{P}$-зображень, що визначені послідовністю перетворювачів цифр $\overline{P}$-зображення;
3) оператор лівостороннього зсуву цифр $\overline{P}$-зображення:
$$\omega_{\overline{P}}\left(\Delta^{\overline{P}}_{g_1g_2\ldots}\right) = \Delta^{\overline{P}}_{g_2g_3\ldots},$$
а також динамічна система, що ним визначається.

*Предмет дослідження:* структурні, диференціальні, фрактальні властивості функцій, а також тополого-метричні та нормальні властивості зображень чисел.

*Завдання дослідження:*

1) дослідити функції на предмет неперервності, монотонності, диференційовності, вимірності тощо;
2) дослідити розподіли значень функцій, зокрема обчислити їхні математичні сподівання та дисперсії;
3) створити загальну теорію представлення та зображення чисел рядами Перрона, які мають нульову надлишковість, зокрема встановити тополого-метричні властивості циліндричних множин та нормальні властивості зображень чисел.

**Методи дослідження.** У роботі використовувалися методи математичного аналізу, теорії міри та інтеграла Лебега, теорії функцій, теорії ймовірностей, метричної теорії чисел, фрактального аналізу.

**Наукова новизна отриманих результатів.**

1) Описано властивості проєктора $O$-зображення в $E$-зображення та множини його значень;
2) обчислено математичні сподівання та дисперсії випадкових величин, що пов'язані із представленнями дійсних чисел рядами Енгеля та Остроградського–Серпінського–Пірса;
3) розв'язано аналог задачі Гауса–Кузьміна для різницевого зображення чисел рядами Енгеля;
4) створено загальну теорію представлення (зображення) чисел рядами Перрона (в стандартній та різницевій формах) як узагальнення представлень чисел рядами Енгеля, Люрота, Сильвестера;
5) встановлено нормальні властивості зображень чисел рядами Перрона в різницевій формі, що пов'язані з кількістю цифр та їхньою

асимптотичною частотою в цих зображеннях;

6) вивчено диференціальні властивості проєктора одного $\overline{P}$-зображення в інше, зокрема знайдено достатні умови його сингулярності;
7) вивчено диференціальні властивості одного класу перетворень простору $\overline{P}$-зображень (функцій, що визначені перетворювачами цифр $\overline{P}$-зображення), зокрема знайдено достатні умови сингулярності таких перетворень.

**Практичне значення отриманих результатів.** Робота в основному має теоретичний характер. Отримані результати можуть бути використані для подальших досліджень, зокрема при розв'язанні задач для $P$ та $\overline{P}$-зображень, що аналогічні до вже розв'язаних задач для зображень чисел рядами Енгеля, Люрота, Сильвестера.

**Особистий внесок здобувача.** Всі результати дослідження, що винесені на захист, отримані автором самостійно.

**Апробація матеріалів дисертації.** Основні результати дослідження доповідалися на наукових конференціях різного рівня та наукових семінарах:

1) Шоста Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики і фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання» (Київ, 2017);
2) Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання» (Київ, 2019);
3) Міжнародна конференція «Теорія наближення функцій та її застосування», присвячена 80-річчю з дня народження члена-кореспондента НАН України, проф. О.І. Степанця (1942–2007) (Луцьк, 2022);
4) Всеукраїнська науково-практична конференція «Актуальні проблеми фізики, математики, інформатики та методики їх навчання»,

присвячена 90-річчю від дня народження кандидата фізико-математичних наук, проф. Горбачука Івана Тихоновича (Київ, 2023);

5) XXI Міжнародна науково-практична конференція «Шевченківська весна — 2023» (Київ, 2023);
6) XI Всеукраїнська конференція молодих математиків (Київ, 2023);
7) Міжнародна конференція молодих математиків (Київ, 2023);
8) семінар з фрактального аналізу відділу теорії динамічних систем та фрактального аналізу Інституту математики НАН України (керівник: доктор фіз.-мат. наук, проф. М.В. Працьовитий).

**Публікації.** Основні результати дисертаційної роботи опубліковано в 13 наукових працях. Серед них 6 статей [56, 59, 62, 65, 67, 68] у наукових виданнях, внесених до переліку наукових фахових видань України, з яких 2 статті [56, 67] у виданнях, що індексуються міжнародною наукометричною базою Scopus та належать до квартиля Q3 (відповідно до класифікації SCImago Journal and Country Rank). Сім робіт [57, 58, 60, 61, 63, 64, 66] — матеріали всеукраїнських та міжнародних конференцій.

**Структура та обсяг дисертації.** Дисертація складається зі вступу, трьох розділів, висновків до розділів та загальних висновків, списку використаних джерел (80 найменувань) та одного додатку, що містить список публікацій автора та відомості про апробацію результатів дослідження. Повний обсяг дисертації 145 сторінок, з них список літератури займає 8 сторінок, додаток - 4 сторінки.

**Подяка.** Автор висловлює безмежну вдячність своєму науковому керівнику, доктору фізико-математичних наук, професору **Працьовитому Миколі Вікторовичу** за понад десятирічне наукове наставництво, яке розпочалося ще в шкільні роки автора та в значній мірі сформувало його наукові інтереси.

# РОЗДІЛ 1
# ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ТА КОНЦЕПТУАЛЬНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Перший розділ має оглядовий характер. В ньому розглянуто основи тополого-метричних теорій зображення дійсних чисел засобами нескінченного алфавіту; здійснено огляд результатів, що стосуються таких систем зображення чисел (властивості циліндричних множин, асимптотичні властивості послідовностей цифр, фрактальні властивості множин з умовами на використання цифр тощо); наведено концептуально важливі для даної роботи факти з теорії нескінченних добутків, теорії функцій дійсної змінної, теорії ймовірностей та ін.

## 1.1. Системи кодування дійсних чисел засобами нескінченного алфавіту

**1.1.1. $Q_\infty$-зображення.** Нехай $Q = (q_0, q_1, \ldots)$ — довільний вектор, де $q_n > 0$ для кожного $n \in \mathbb{N}_0$ та $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q_n = 1$. Також нехай $\beta_0 = 0$ та $\beta_i = \sum\limits_{n=0}^{i-1} q_n$ для кожного $i \in \mathbb{N}$. У роботі [71, с. 87–89] Працьовитим М.В. показано, що кожне число $x \in [0; 1)$ можна єдиним чином представити у вигляді ряду

$$x = \beta_{\alpha_1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \beta_{\alpha_n} \prod_{k=1}^{n-1} q_{\alpha_k} \right) \equiv \Delta^{Q_\infty}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots}, \quad \alpha_i \in \mathbb{N}_0.$$

Такий розклад числа $x$ в ряд називають його $Q_\infty$-представленням, а скорочений (символічний) запис $\Delta^{Q_\infty}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots}$ — його $Q_\infty$-зображенням. Зауважимо, що при різних векторах $Q$ будемо мати різні $Q_\infty$-зображення.

### 1.1.2. Ряди Люрота.

**Означення 1.1** ([27, с. 118]). Рядом Люрота називається ряд

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1(p_1-1)p_2} + \cdots + \frac{1}{p_1(p_1-1)\cdots p_{n-1}(p_{n-1}-1)p_n} + \cdots ,$$

де $p_n \in \mathbb{N}$, $p_n \geqslant 2$ для кожного $n \in \mathbb{N}$.

У роботах [24, 27, 44] доведено, що сума кожного ряду Люрота є дійсним числом з $(0;1]$ і при цьому будь-яке число $x$ з $(0;1]$ можна єдиним чином представити у вигляді ряду Люрота. При цьому має місце наступна теорема.

**Теорема 1.1** ([27, с. 118]). *Сума ряду Люрота є раціональним числом тоді і тільки тоді, коли послідовність $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ є періодичною, починаючи з деякого місця.*

### 1.1.3. Ряди Енгеля.

**Означення 1.2** ([5, 27, 73]). Рядом Енгеля називається ряд

$$\frac{1}{p_1+1} + \frac{1}{(p_1+1)(p_2+1)} + \cdots + \frac{1}{(p_1+1)\cdots(p_n+1)} + \cdots , \tag{1.1}$$

де $p_n \in \mathbb{N}$, $p_{n+1} \geqslant p_n$ для кожного $n \in \mathbb{N}$.

У роботах [27, 73] доведено, що сума кожного ряду Енгеля є дійсним числом з $(0;1]$. При цьому будь-яке число $x$ з $(0;1]$ можна єдиним чином представити у вигляді ряду Енгеля, а саме існує єдина неспадна послідовність натуральних чисел $(p_n(x))_{n=1}^{\infty}$ така, що

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(p_1(x)+1)\cdots(p_n(x)+1)} \equiv \Delta^E_{p_1(x)p_2(x)\ldots}.$$

Скорочений (символічний) запис $\Delta^E_{p_1(x)p_2(x)\ldots}$ називають $E$-зображенням числа $x$, а натуральне число $p_n(x)$ називають $n$-ою $E$-цифрою числа $x$. Кожна $E$-цифра є коректно означеною функцією числа, що представлене у вигляді ряду Енгеля, в силу єдиності такого представлення.

**Теорема 1.2** ([27, с. 118]). *Сума ряду Енгеля є раціональним числом тоді і тільки тоді, коли послідовність $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ є стаціонарною, починаючи з деякого місця.*

**Означення 1.3** ([73, с. 109]). Циліндром рангу $m$ з основою $c_1 \ldots c_m$, що породжений представленням чисел рядами Енгеля, називають множину $\Delta^E_{c_1 \ldots c_m}$ всіх чисел виду $\Delta^E_{c_1 \ldots c_m \alpha_{m+1} \alpha_{m+2} \ldots}$, тобто

$$\Delta^E_{c_1 \ldots c_m} = \left\{x \in (0;1] \colon p_1(x) = c_1, \ldots, p_m(x) = c_m\right\}.$$

**Лема 1.1** ([73, с. 110]). *Кожен циліндр $\Delta^E_{c_1 \ldots c_m}$ є проміжком виду $(a;b]$, довжина та точні межі якого обчислюються за формулами*

$$\left|\Delta^E_{c_1 \ldots c_m}\right| = \frac{1}{(c_1+1)\cdots(c_m+1)c_m};$$

$$\inf \Delta^E_{c_1 \ldots c_m} = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{(c_1+1)\cdots(c_n+1)};$$

$$\sup \Delta^E_{c_1 \ldots c_m} = \inf \Delta^E_{c_1 \ldots c_m} + \left|\Delta^E_{c_1 \ldots c_m}\right|.$$

**Лема 1.2** ([73, с. 110]). *Якщо $\Delta^E_{a_1 \ldots a_m}$ та $\Delta^E_{b_1 \ldots b_n}$ — два різні циліндри, то можливі тільки два наступні випадки:*

— $\Delta^E_{a_1 \ldots a_m} \cap \Delta^E_{b_1 \ldots b_n} = \varnothing$, *якщо існує натуральне $k \leqslant \min\{m, n\}$ таке, що $a_i = b_i$ для всіх $i < k$ та $a_k \neq b_k$;*

— $\Delta^E_{b_1 \ldots b_n} \subset \Delta^E_{a_1 \ldots a_m}$, *якщо $n > m$ та $b_i = a_i$ для всіх $i \leqslant m$.*

**Наслідок 1.1.** *Для циліндрів $E$-зображення та їхніх довжин мають місце співвідношення:*

$$(0;1] = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Delta^E_i; \qquad \Delta^E_{p_1 \ldots p_n} = \bigcup_{i=p_n}^{\infty} \Delta^E_{p_1 \ldots p_n i};$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\Delta^E_i| = 1; \qquad |\Delta^E_{p_1 \ldots p_n}| = \sum_{i=p_n}^{\infty} |\Delta^E_{p_1 \ldots p_n i}|.$$

**Теорема 1.3** ([33, Theorem 6, p. 30]). *Для майже всіх $x \in (0;1]$ послідовність $(p_n(x))_{n=1}^{\infty}$ зростає, починаючи з деякого номера.*

**Теорема 1.4** ([33, p. 31]). *Міра Лебега множини чисел $x \in (0;1]$, для яких послідовність $(p_n(x))_{n=1}^{\infty}$ є зростаючою, рівна $\frac{1}{2}$.*

**Теорема 1.5** ([13, Corollary 6.19, p. 101]). *Якщо $(p_n(x))_{n=1}^{\infty}$ — послідовність цифр зображення числа $x$ рядом Енгеля, то рівність*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p_n(x)} = e$$

*виконується для майже всіх (у розумінні міри Лебега) чисел $x \in (0;1]$.*

**Теорема 1.6** ([21, Main Theorem, p. 1]). *Для кожного $\alpha \geqslant 1$ множина*

$$A_\alpha = \{x \in (0;1] : \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p_n(x)} = \alpha\}$$

*має розмірність Гаусдорфа рівну 1.*

**Означення 1.4.** Ряд Енгеля (1.1), записаний у вигляді

$$\frac{1}{2+g_1} + \frac{1}{(2+g_1)(2+g_1+g_2)} + \\ + \frac{1}{(2+g_1)(2+g_1+g_2)(2+g_1+g_2+g_3)} + \cdots, \quad (1.2)$$

де $g_1 = p_1 - 1$, $g_{n+1} = p_{n+1} - p_n$ для кожного $n \in \mathbb{N}$, називається різницевим представленням ряду Енгеля.

Зауважимо, що $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ може бути довільною послідовністю цілих невід'ємних чисел. Скорочений запис $\Delta^{\overline{E}}_{g_1g_2g_3\ldots}$ ряду (1.2) і його суми називається їх різницевим $\overline{E}$-зображенням.

**Теорема 1.7** ([51, Лема 4, Ознака порівняння чисел за їхніми $\overline{E}$-зображеннями]). *Нерівність $x < y$ має місце тоді і тільки тоді, коли існує число $m \in \mathbb{N}$ таке, що $g_m(x) > g_m(y)$ та $g_j(x) = g_j(y)$ для будь-якого $j \in \{1,\ldots,m-1\}$. В свою чергу числа $x$ та $y$ є рівними тоді і тільки тоді, коли $g_i(x) = g_i(y)$ для будь-якого $i \in \mathbb{N}$.*

**Наслідок 1.2** (Ознака порівняння чисел за їхніми $E$-зображеннями). *Нерівність $x < y$ має місце тоді і тільки тоді, коли існує число $m$ таке, що $p_m(x) > p_m(y)$ та $p_j(x) = p_j(y)$ для будь-якого $j \in \{1,\ldots,m-1\}$.*

### 1.1.4. Модифіковані ряди Енгеля.

**Означення 1.5** ([33, p. 31]). Модифікованим рядом Енгеля називається ряд

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{(p_1-1)p_2} + \cdots + \frac{1}{(p_1-1)\cdots(p_n-1)p_{n+1}} + \cdots ,$$

де $p_n \in \mathbb{N}$, $p_{n+1} > p_n \geqslant 2$ для кожного $n \in \mathbb{N}$.

У працях [27, 33] показано, що сума модифікованого ряду Енгеля є числом з $(0;1]$. При цьому кожне число з $(0;1]$ можна єдиним чином представити у вигляді модифікованого ряду Енгеля.

**Задача, що приводить до модифікованих рядів Енгеля (рекордні моменти випадкового процесу).** Нехай $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ — послідовність випадкових величин. Нехай $L_0 = 1$,

$$L_{n+1} = \min\{j : X_j > X_{L_n}, j > L_n\}, \text{ для всіх } n \geqslant 0.$$

Випадкові величини $L_n$, $n \in \mathbb{N}$, називаються верхніми рекордними моментами.

Нехай $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ — послідовність незалежних випадкових величин, що мають спільну неперервну функцію розподілу $F(x)$. Тоді, як зазначено в [35], розподіл випадкових величин $L_n$ не залежить від функції $F(x)$.

Нехай $Y$ — випадкова величина, що рівномірно розподілена на $(0;1]$, $p_n(Y)$ — $n$-й елемент розкладу випадкової величини $Y$ в модифікований ряд Енгеля. В роботі [35] показано, що випадкові величини $L_n$ та $p_n$ мають однаковий розподіл ймовірностей при кожному $n \in \mathbb{N}$.

### 1.1.5. Ряди Сильвестера.

**Означення 1.6** ([6, p. 24]). Рядом Сильвестера називається ряд

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_n} + \cdots ,$$

де $p_n \in \mathbb{N}$, $p_1 \geqslant 2$, $p_{n+1} \geqslant p_n(p_n - 1) + 1$ для кожного $n \in \mathbb{N}$.

У роботі [27] доведено, що сума кожного ряду Сильвестера є дійсним числом з $(0;1]$. При цьому будь-яке число $x$ з $(0;1]$ можна єдиним чином представити у вигляді ряду Сильвестера.

**Теорема 1.8** ([27, p. 119]). *Сума ряду Сильвестера є раціональним числом тоді і тільки тоді, коли для всіх $n$, починаючи з деякого місця, виконується рівність $p_{n+1} = p_n(p_n - 1) + 1$.*

### 1.1.6. Елементарні ланцюгові дроби.

**Означення 1.7** ([80, с. 7, с. 19]). Елементарним ланцюговим дробом називається вираз

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots}} \equiv [a_0; a_1, a_2, \ldots] \,,$$

де $a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_n \in \mathbb{N}$ для кожного $n \in \mathbb{N}$.

**Теорема 1.9** ([80, с. 25–28]). *Кожне ірраціональне число можна єдиним чином представити у вигляді елементарного ланцюгового дробу.*

**Теорема 1.10** ([80, с. 76–78]). *Для майже всіх чисел $x \in (0;1) \setminus \mathbb{Q}$ послідовність $(a_n(x))_{n=1}^{\infty}$ є необмеженою.*

**Теорема 1.11** ([80, Теорема 35, с. 104]). *Нехай $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ — невід'ємна функція, для якої існують константи $C, \delta > 0$ такі, що $f(r) < Cr^{\frac{1}{2}-\delta}$ для всіх $r \in \mathbb{N}$. Тоді для майже всіх чисел $x \in (0;1) \setminus \mathbb{Q}$ має місце рівність*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a_k\right) = \sum_{r=1}^{\infty} f(r) \frac{\lg\left(1 + \frac{1}{r(r+2)}\right)}{\lg 2}.$$

**Теорема 1.12** ([80, с. 110]). *Для майже всіх чисел $x \in (0;1) \setminus \mathbb{Q}$:*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1(x) \cdots a_n(x)} = K_0 = \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{j(j+2)}\right)^{\log_2 j} .$$

Число $K_0$ називається <u>константою Хінчина</u>.

**Теорема 1.13** ([80, с. 110]). *Для майже всіх чисел $x \in (0;1) \setminus \mathbb{Q}$ асимптотична частота $\nu_k(x)$ числа $k$ в послідовності $(a_n(x))_{n=1}^{\infty}$ однакова і дорівнює*

$$\nu_k(x) = \log_2 \left(1 + \frac{1}{k(k+2)}\right).$$

### 1.1.7. Ряди Остроградського–Серпінського–Пірса.

**Означення 1.8** ([48, с. 21]). Рядом Остроградського–Серпінського–Пірса називається ряд виду

$$\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_1 q_2} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{q_1 \cdots q_n} + \cdots ,$$

де $q_n \in \mathbb{N}$ та $q_{n+1} > q_n$ для кожного $n \in \mathbb{N}$.

**Теорема 1.14** ([48, с.22, с.144]). *Сума кожного ряду Остроградського–Серпінського–Пірса є ірраціональним числом з* $(0;1)$. *При цьому будь-яке ірраціональне число $x$ з $(0;1)$ можна єдиним чином представити у вигляді ряду Остроградського-Серпінського-Пірса, тобто існує єдина строго зростаюча послідовність натуральних чисел $(q_n(x))_{n=1}^{\infty}$ така, що*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{q_1(x) \ldots q_n(x)} \equiv \Delta^{O}_{q_1(x) q_2(x) \ldots}.$$

Скорочений (символічний) запис $\Delta^{O}_{q_1(x) q_2(x) \ldots}$ називають $O$-зображенням числа $x$, а натуральне число $q_n(x)$ називають $n$-ою $O$-цифрою числа $x$. Кожна $O$-цифра є коректно означеною функцією числа, що представлене у вигляді ряду Остроградського–Серпінського–Пірса в силу єдиності такого представлення.

**Наслідок 1.3** (Ознака порівняння чисел за їхніми $O$-зображеннями). *Нехай $x_1 = \Delta^{O}_{c_1 \ldots c_{n-1} a_n \ldots}$ та $x_2 = \Delta^{O}_{c_1 \ldots c_{n-1} b_n \ldots}$, причому $a_n < b_n$. Тоді*

— *якщо $n$ — непарне, то $x_1 > x_2$;*

— *якщо $n$ — парне, то $x_1 < x_2$.*

**Означення 1.9** ([48, с. 147]). Циліндром рангу $m$ з основою $c_1 \ldots c_m$, що породжений представленням чисел рядами Остроградського–Серпінського–

Пірса, називають множину $\Delta^O_{c_1\ldots c_m}$ всіх чисел виду $\Delta^O_{c_1\ldots c_m\alpha_{m+1}\alpha_{m+2}\ldots}$, тобто

$$\Delta^O_{c_1\ldots c_m} = \{x \in (0;1) \setminus \mathbb{Q}\colon q_1(x) = c_1, \ldots, q_m(x) = c_m\}.$$

**Лема 1.3** ([48, с. 150–151]). *Кожен циліндр $\Delta^O_{c_1\ldots c_m}$ є множиною виду $(a;b) \setminus \mathbb{Q}$, міра Лебега якої обчислюється за формулою*

$$\lambda\left(\Delta^O_{c_1\ldots c_m}\right) \equiv \left|\Delta^O_{c_1\ldots c_m}\right| = \frac{1}{c_1 \cdots c_m(c_m+1)}.$$

**Лема 1.4** ([48, с. 147]). *Якщо $m$ — парне, то:*

$$\inf \Delta^O_{c_1\ldots c_m} = \sum_{n=1}^{m} \frac{(-1)^{n-1}}{c_1 \cdots c_n};$$
$$\sup \Delta^O_{c_1\ldots c_m} = \inf \Delta^O_{c_1\ldots c_m} + \left|\Delta^O_{c_1\ldots c_m}\right|.$$

*Якщо $m$ — непарне, то:*

$$\sup \Delta^O_{c_1\ldots c_m} = \sum_{n=1}^{m} \frac{(-1)^{n-1}}{c_1 \cdots c_n};$$
$$\inf \Delta^O_{c_1\ldots c_m} = \sup \Delta^O_{c_1\ldots c_m} - \left|\Delta^O_{c_1\ldots c_m}\right|.$$

**Лема 1.5** ([48, с. 150–151]). *Якщо $\Delta^O_{a_1\ldots a_m}$ та $\Delta^O_{b_1\ldots b_n}$ — два різні циліндри, то можливі тільки два наступні випадки:*

— $\Delta^O_{a_1\ldots a_m} \cap \Delta^O_{b_1\ldots b_n} = \varnothing$, *якщо існує натуральне $k \leqslant \min\{m,n\}$ таке, що $a_i = b_i$ для всіх $i < k$ та $a_k \neq b_k$;*

— $\Delta^O_{b_1\ldots b_n} \subset \Delta^O_{a_1\ldots a_m}$, *якщо $n > m$ та $b_i = a_i$ для всіх $i \leqslant m$.*

**Наслідок 1.4.** *Для циліндрів $O$-зображення та їхніх довжин мають місце співвідношення:*

$$(0;1) \setminus \mathbb{Q} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Delta^O_i; \qquad \Delta^O_{q_1\ldots q_n} = \bigcup_{i=q_n+1}^{\infty} \Delta^O_{q_1\ldots q_n i};$$
$$\sum_{i=1}^{\infty} |\Delta^O_i| = 1; \qquad |\Delta^O_{q_1\ldots q_n}| = \sum_{i=q_n+1}^{\infty} |\Delta^O_{q_1\ldots q_n i}|.$$

**Наслідок 1.5.** *Нехай* $x_0 = \Delta^O_{q_1(x_0)q_2(x_0)\ldots}$ *та* $x = \Delta^O_{q_1(x)q_2(x)\ldots} \neq x_0$*, причому*

$$k(x; x_0) = \min\{n\colon q_n(x) \neq q_n(x_0)\}.$$

*Тоді* $x \to x_0 \Longleftrightarrow k(x; x_0) \to \infty$.

**Теорема 1.15** ([39, Theorem 16, p. 36]). *Для майже всіх* $x \in (0;1) \setminus \mathbb{Q}$ *елементи* $q_n(x)$ *розкладу* $x$ *в ряд Остроградського–Серпінського–Пірса задовольняють співвідношення*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{q_n(x)} = e.$$

**Теорема 1.16** ([39, Theorem 12, p. 32]). *Для майже всіх* $x \in (0;1) \setminus \mathbb{Q}$ *ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q_n(x)}$$

*є збіжним, причому математичне сподівання суми цього ряду рівне* 1. *Множина чисел* $x$*, для яких даний ряд розбіжний, є континуальною та щільною в* $(0;1)$.

## 1.2. Функції обмеженої варіації та сингулярні функції

**Теорема 1.17** ([69, Теорема 4, с. 199]). *Монотонна на відрізку функція майже крізь на цьому відрізку (в розумінні міри Лебега) має скінченну похідну.*

Нехай функція $f$ задана на відрізку $[a;b]$, а також

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

— деяке розбиття відрізка $[a;b]$.

**Означення 1.10** ([69, с. 202]). Варіацією функції $f$ на відрізку $[a;b]$ називається величина

$$\bigvee_a^b f \stackrel{\text{def}}{=} \sup \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|,$$

де sup береться по всеможливих розбиттях відрізка $[a;b]$.

Якщо $\bigvee\limits_a^b f < \infty$, то функція $f$ називається функцією обмеженої (скінченої) варіації.

**Теорема 1.18** ([69, Теорема 6, с. 205]). *Функція $f$ є функцією обмеженої варіації тоді і тільки тоді, коли вона може бути представлена у вигляді різниці двох зростаючих функцій.*

**Наслідок 1.6** ([69, с. 205]). *Функція обмеженої варіації, що визначена на відрізку, має майже скрізь на ньому скінченну похідну.*

**Означення 1.11** ([76, с. 385]). Функція обмеженої варіації, що відмінна від константи, називається сингулярною, якщо вона майже скрізь (в розумінні міри Лебега) має похідну рівну нулю.

**Теорема 1.19** ([76, с. 381–385, Критерій сингулярності функції]). *Функція обмеженої варіації $f$, відмінна від константи та визначена на відрізку $[a; b]$, є сингулярною тоді і тільки тоді, коли для довільного $\varepsilon > 0$ існує така система інтервалів $(a_k; b_k) \subset [a; b]$, $k = 1, 2, \ldots, n$, що одночасно виконуються нерівності*

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \varepsilon \qquad \text{та} \qquad \sum_{k=1}^{n}|f(b_k) - f(a_k)| > \bigvee_a^b f - \varepsilon.$$

**Теорема 1.20** ([69, Теореми 1–2, с. 248]). *Нехай $f(x)$ — функція обмеженої варіації, що визначена на відрізку $[a; b]$.*

1. *Тоді функція $f(x)$ єдиним чином може бути представлена у вигляді суми*

$$f(x) = \varphi(x) + r(x),$$

   *де $\varphi(x)$ — абсолютно неперервна функція така, що $\varphi(a) = f(a)$, а $r(x)$ — сингулярна функція (або нуль).*

2. *Якщо функція $f(x)$ зростає (спадає), то обидві її компоненти $\varphi(x)$ та $r(x)$ також зростають (спадають).*

## 1.3. Міра Лебега–Стілтьєса та сингулярність функції

**Означення 1.12** ([76, с. 426]). Нехай $\nu$ та $\mu$ — скінченні міри, визначені на відрізку $[a;b]$. Міра $\nu$ називається сингулярною (ортогональною) відносно міри $\mu$, якщо існує така множина $A \in \mathcal{H}$, що $\nu(A) = 0$ та $\mu(X \setminus A) = 0$.

Нехай $\mathcal{H}$ — $\sigma$-алгебра підмножнин піввідрізка $[a;b)$, що породжена піввідрізками $[x_1;x_2) \subset [a;b)$, $f$ — неспадна неперервна зліва функція, визначена на $[a;b]$, причому $f(a) = 0$, $\mu_f$ — міра Лебега–Стілтьєса, породжена функцією $f$ та визначена на $\mathcal{H}$. Відомо, що кожна міра $\mu$, визначена на $\mathcal{H}$, є мірою Лебега–Стілтьєса $\mu_f$, породженою деякою функцією $f$, що задовольняє вище згадані умови. Наступні факти встановлюють зв'язок між сингулярними функціями та сингулярними мірами.

**Теорема 1.21** ([76, с. 464]). *Нехай $\mu_f$ — міра Лебега–Стілтьєса, породжена функцією $f$. Тоді для того, щоб міра $\mu_f$ була сингулярною відносно міри Лебега $\lambda$, необхідно і достатньо, щоб функція $f$ була сингулярною.*

**Наслідок 1.7.** *Для того, щоб зростаюча функція $f$ була сингулярною на $[a;b] \subset \mathbb{R}$, необхідно і достатньо, щоб існувала така множина $A \subset [a;b]$, що $\lambda(A) = b - a$ та $\lambda(f(A)) = 0$.*

## 1.4. Ряди та нескінченні добутки

**Теорема 1.22** ([79, с. 265]). *Нехай дано два ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ та $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, де $a_n \geqslant 0$, $b_n > 0$ для кожного $n \in \mathbb{N}$, і при цьому існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$, де $0 < c < +\infty$. Тоді дані ряди одночасно збіжні або одночасно розбіжні.*

**Означення 1.13** ([79, с. 351]). Нескінченний добуток $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, де $a_n > 0$, називається збіжним, якщо існує відмінна від нуля границя $\lim\limits_{k\to\infty} \prod\limits_{n=1}^{k} a_n$.

**Лема 1.6** ([79, с. 353, Необхідна умова збіжності нескінченного добутку]). *Для того, щоб нескінченний добуток $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, де $a_n > 0$, був збіжним, необхідно, щоб $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.*

**Теорема 1.23** ([79, с. 355, Критерій збіжності нескінченного добутку]). *Для того, щоб нескінченний добуток* $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$, *де* $a_n > 0$, *був збіжним, необхідно і достатньо, щоб ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *був збіжним.*

**Теорема 1.24** ([79, с. 355, Критерій збіжності нескінченного добутку]). *Для того, щоб нескінченний добуток* $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-a_n)$, *де* $0 < a_n < 1$, *був збіжним, необхідно і достатньо, щоб ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *був збіжним.*

**Наслідок 1.8** (Достатня умова збіжності нескінченного добутку). *Для того, щоб нескінченний добуток* $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, *де* $a_n > 0$, *був збіжним, достатньо, щоб ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |1-a_n|$ *був збіжним.*

**Теорема 1.25** ([79, с. 356, Критерій розбіжності нескінченного добутку до нуля]). *Для того, щоб нескінченний добуток* $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, *де* $a_n > 0$, *був розбіжним до нуля, необхідно і достатньо, щоб* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln a_n = -\infty$.

### 1.5. Нормальні властивості чисел

**Означення 1.14.** Кажуть, що властивість дійсного числа є нормальною, якщо вона має місце для майже всіх (у розумінні міри Лебега) дійсних чисел (на деякому відрізку чи на всій числовій прямій).

Для доведення того, що деякі властивості є нормальними, важливими є лема Бореля–Кантеллі та посилений закон великих чисел.

Нехай $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ — довільна послідовність випадкових подій. Тоді подія

$$A = \limsup_{n\to\infty}(A_n) = \bigcap_{k=1}^{\infty}\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n\right)$$

складається з тих і тільки тих елементів простору $\Omega$, що містяться в нескінченній кількості подій з послідовності $(A_n)_{n=1}^{\infty}$. Іншими словами, подія $A$ полягає в тому, що події з послідовності $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ відбуваються нескінченно часто.

**Теорема 1.26** ([53, с. 119, Лема Бореля–Кантеллі]). *Нехай* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ *— ймовірнісний простір,* $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ *— довільна послідовність випадкових подій. Тоді*

1. *якщо ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_n)$ *збігається, то* $\mathbf{P}\left(\limsup\limits_{n\to\infty} A_n\right) = 0$*;*
2. *якщо події* $A_n$ *незалежні в сукупності та ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_n)$ *розбігається, то* $\mathbf{P}\left(\limsup\limits_{n\to\infty} A_n\right) = 1$*.*

**Означення 1.15** ([53, с. 121]). Кажуть, що для послідовності випадкових величин $(\xi_n)_{n=1}^{\infty}$ має місце посилений закон великих чисел, якщо послідовність їх частинних сум $S_n \equiv \xi_1 + \cdots + \xi_n$ задовольняє граничне співвідношення

$$\frac{S_n - \mathbf{M}S_n}{n} \longrightarrow 0 \quad \text{при } n \to \infty,$$

де під збіжністю розуміється збіжність майже напевне (з ймовірністю 1).

**Теорема 1.27** ([53, с. 12, Теорема Колмогорова про посилений закон великих чисел]). *Нехай* $(\xi_n)_{n=1}^{\infty}$ *— послідовність незалежних у сукупності випадкових величин така, що* $\mathbf{D}\xi_n < \infty$ *та* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{D}\xi_n}{n^2} < \infty$*. Тоді для цієї послідовності випадкових величин має місце посилений закон великих чисел.*

Нехай на вимірному просторі з мірою $(A, \mathfrak{A}, \mu)$ визначено послідовність функцій $f_n$. Для доведення того, що послідовність $f_n(x)$ майже скрізь (в розумінні міри $\mu$) на $A$ має скінченну границю, корисними є наступна теорема та наслідок з неї.

**Теорема 1.28** ([55, с. 303, Теорема Б. Леві]). *Нехай дано вимірний простір з мірою* $(A, \mathfrak{A}, \mu)$ *та послідовність інтегровних функцій* $f_n(x)\colon A \to \mathbb{R}$ *таких, що*

$$f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant \cdots \leqslant f_n(x) \leqslant \cdots$$

*та для яких існує таке число* $K \in \mathbb{R}$*, що* $\int\limits_A f_n(x)\,d\mu \leqslant K$, $\forall n \in \mathbb{N}$*. Тоді* *майже скрізь на $A$ існує скінченна границя*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x),$$

*причому функція $f(x)$ інтегровна на $A$ та*

$$\int\limits_A f_n(x)\, d\mu \to \int\limits_A f(x)\, d\mu.$$

**Наслідок 1.9** ([55, с. 305]). *Якщо $g_n(x) \geqslant 0$ та $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_A g_n(x)\, d\mu < +\infty$, то майже скрізь на $A$ збігається ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} g_n(x)$ та*

$$\int\limits_A \left( \sum_{k=1}^{\infty} g_n(x) \right) d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_A g_n(x)\, d\mu.$$

### 1.6. Задача Гауса–Кузьміна

Нехай $x = [0; a_1, a_2, \ldots]$ — представлення дійсного числа $x \in (0;1)$ у вигляді елементарного ланцюгового дробу, $\tau^n(x) = [0; a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots]$. Визначається множина $W_n(a) = \{x \colon x \in (0;1), \tau^n(x) < a\}$. Класична задача Гауса–Кузьміна полягає в знаходженні границі $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda\left(W_n(a)\right)$, де $\lambda$ — міра Лебега.

Дану задачу вперше сформулював Гаус в одному з листів до Лапласа [80, с. 90]. В ньому ж Гаус стверджував (без доведення), що

$$\lim_{n\to\infty} \lambda\left(W_n(a)\right) = \frac{\lg(1+a)}{\lg(2)}.$$

У 1928 році Р. Кузьмін [54] навів повне доведення цього твердження. У 1929 році, незалежно від Кузьміна, цю задачу розв'язав П. Леві [19].

Аналогічна задача для $\tilde{Q}_\infty$-зображення чисел була розв'язана Працьовитим М.В. у роботі [71].

**Теорема 1.29** ([71, с. 272]). *Нехай $x = \Delta^{\tilde{Q}_\infty}_{b_1 b_2 b_3 \ldots}$ — $\tilde{Q}_\infty$-зображення дійсного числа $x \in [0;1)$, $\omega^n(x) = \Delta^{\tilde{Q}_\infty}_{b_{n+1} b_{n+2} \ldots}$, $W'_n(a) = \{x \colon x \in [0;1), \omega^n(x) < a\}$. Тоді $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda\left(W'_n(a)\right) = a$.*

# РОЗДІЛ 2
# ОБ'ЄКТИ ЗІ СКЛАДНОЮ ЛОКАЛЬНОЮ СТРУКТУРОЮ, ЩО ПОВ'ЯЗАНІ З РЯДАМИ ОСТРОГРАДСЬКОГО–СЕРПІНСЬКОГО–ПІРСА ТА ЕНГЕЛЯ

Другий розділ присвячено математичним об'єктам (функціям, випадковим величинам, множинам, динамічним системам), що визначені в термінах представлення дійсних чисел рядами Остроградського–Серпінського–Пірса та рядами Енгеля. Зокрема для різницевого зображення дійсних чисел рядами Енгеля розв'язано задачу, що аналогічна до задачі Гауса–Кузьміна для елементарних ланцюгових дробів.

## 2.1. Проєктор $O$-зображення в $E$-зображення

**Означення 2.1.** Проєктором $O$-зображення в $E$-зображення будемо називати функцію $f\colon (0;1)\backslash\mathbb{Q} \to (0;1]$, визначену рівністю

$$f(x) = f\left(\Delta^O_{q_1(x)q_2(x)\ldots}\right) = \Delta^E_{q_1(x)q_2(x)\ldots}.$$

Дана функція є коректно визначеною, оскільки:

— кожне число $x \in (0;1)\backslash\mathbb{Q}$ має єдине $O$-зображення;

— для кожного числа $x \in (0;1)\backslash\mathbb{Q}$ послідовність натуральних чисел $(q_n(x))_{n=1}^{\infty}$ є зростаючою, а тому є послідовністю $E$-цифр деякого числа $y \in (0;1]$.

**2.1.1. Множина значень проєктора. Задача Альфреда Реньї.** Задача про міру Лебега множини значень проєктора $f$ відома під назвою задачі Альфреда Реньї [33, 41, 48], початково сформульованої і розв'язаної у ймовірнісних термінах [33]. Ми пропонуємо інший метод її розв'язання.

**Теорема 2.1.** *Множина $E_f$ значень проєктора $f$ є ніде не щільною множиною*

$$C = \{x : x = \Delta^E_{q_1(x)q_2(x)\ldots}, q_{n+1}(x) > q_n(x), n \in \mathbb{N}\}.$$

*Доведення.* Зрозуміло, що $E_f = C$, оскільки кожна зростаюча послідовність натуральних чисел $(q_n)_{n=1}^{\infty}$ є послідовністю $O$-цифр деякого числа, причому такі послідовності повністю вичерпують послідовності $O$-цифр.

Покажемо, що $E_f$ є ніде не щільною множиною. Розглянемо довільний інтервал $(a; b) \subset (0; 1)$. Згідно з наслідком 1.2, числа $a$ та $b$ мають $E$-зображення $\Delta^E_{q_1\ldots q_n a_1 a_2\ldots}$ та $\Delta^E_{q_1\ldots q_n b_1 b_2\ldots}$ відповідно, де $b_1 < a_1$, причому інтервалу $(a; b)$ повністю належить циліндр $\Delta^E_{q_1\ldots q_n b_1(b_2+1)(b_2+1)}$, що не містить жодної точки множини $E_f$. Отже, $E_f$ є ніде не щільною множиною. □

**Лема 2.1.** *Нехай*

$$M(k) = \sum_{q_1 < \cdots < q_n = k} \frac{1}{(q_1+1)\cdots(q_n+1)},$$

*де $k \in \mathbb{N}$, $(q_i)_{i=1}^{n}$ — довільна зростаюча послідовність натуральних чисел нефіксованої довжини, де $q_n = k$. Тоді для кожного $k$:*

$$M(k) = \frac{1}{2}.$$

*Доведення.* Дане твердження доведемо методом математичної індукції.

При $k = 1$ сума $M(1)$ містить один доданок $\frac{1}{2}$, тобто $M(1) = \frac{1}{2}$.

При $k = 2$ маємо:

$$M(2) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{2}.$$

Припустимо, що $M(t) = \frac{1}{2}$ для всіх натуральних $k \leqslant t$. Тоді при $k = t+1$ маємо:

$$M(t+1) = \frac{1}{t+2} + \frac{1}{t+2}\cdot(M(1) + M(2) + \cdots + M(t)) =$$
$$= \frac{1}{t+2} + \frac{1}{t+2}\cdot\frac{t}{2} = \frac{1}{2}.$$

Отже, при $k = t+1$ твердження також виконується. В силу принципу математичної індукції $M(k) = \frac{1}{2}$ для довільного $k \in \mathbb{N}$. □

**Теорема 2.2.** *Міра Лебега множини $E_f$ значень проєктора $f$ рівна* $\dfrac{1}{2}$.

*Доведення.* Знайдемо міру Лебега доповнення $\overline{E_f} = (0;1] \setminus E_f$. Зрозуміло, що $\overline{E_f}$ — це множина всіх таких чисел, $E$-зображення яких містить хоча б одну пару однакових послідовних цифр. Тому $\overline{E_f}$ є об'єднанням всіх циліндрів виду $\Delta^E_{ii}$ та $\Delta^E_{q_1\ldots q_n ii}$, де $q_1, \ldots, q_n, i$ — довільна скінченна зростаюча послідовність натуральних чисел, тобто

$$\overline{E_f} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Delta^E_{ii} \ \cup \bigcup_{q_1<\cdots<q_n<i} \Delta^E_{q_1\ldots q_n ii}.$$

Циліндри, що входить в об'єднання, попарно не перетинаються, тому міра Лебега їх об'єднання рівна сумі мір Лебега цих циліндрів:

$$\lambda\left(\overline{E_f}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \left|\Delta^E_{ii}\right| + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \sum_{q_1<\cdots<q_n=k} \left( \sum_{i=k+1}^{\infty} \left|\Delta^E_{q_1\ldots q_n ii}\right| \right)\right).$$

Для фіксованої зростаючої послідовності $q_1, \ldots, q_n$ натуральних чисел

$$\sum_{i=k+1}^{\infty} \left|\Delta^E_{q_1\ldots q_n ii}\right| = \frac{1}{(q_1+1)\cdots(q_n+1)} \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{(i+1)^2 i},$$

оскільки $\left|\Delta^E_{q_1\ldots q_n ii}\right| = \frac{1}{(q_1+1)\cdots(q_n+1)(i+1)^2 i}$.

При фіксованому $k$, враховуючи лему 2.1, отримуємо:

$$\begin{aligned} S(k) &= \sum_{q_1<\cdots<q_n=k} \left( \sum_{i=k+1}^{\infty} \left|\Delta^E_{q_1\ldots q_n ii}\right| \right) = \\ &= \sum_{q_1<\cdots<q_n=k} \left( \frac{1}{(q_1+1)\cdots(q_n+1)} \cdot \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{(i+1)^2 i} \right) = \\ &= \sum_{i=q_n+1}^{\infty} \frac{1}{(i+1)^2 i} \cdot \sum_{q_1<\cdots<q_n=k} \frac{1}{(q_1+1)\cdots(q_n+1)} = \\ &= \sum_{i=q_n+1}^{\infty} \frac{1}{(i+1)^2 i} \cdot M(k) = \frac{1}{2} \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{(i+1)^2 i}. \end{aligned}$$

Тоді міра Лебега множини $\overline{E_f}$ дорівнює

$$\lambda\left(\overline{E_f}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(i+1)^2 i} + \sum_{k=1}^{\infty} S(k) =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(i+1)^2 i} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{(i+1)^2 i} =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(i+1)^2 i} + \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{1}{3^2 \cdot 2} + \frac{2}{4^2 \cdot 3} + \frac{3}{5^2 \cdot 4} + \cdots \right) =$$

$$= \frac{1}{4} + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{(i+1)^2 i} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=2}^{\infty} \frac{i-1}{(i+1)^2 i} =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=2}^{\infty} \frac{i+1}{(i+1)^2 i} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{(i+1) i} = \frac{1}{2}.$$

Звідси слідує, що $\lambda\left(E_f\right) = 1 - \lambda\left(\overline{E_f}\right) = \frac{1}{2}$. □

### 2.1.2. Властивості проєктора.

**Теорема 2.3.** *Проєктор $f$ є ніде не монотонною функцією на всій області визначення.*

*Доведення.* Покажемо, що проєктор $f$ не є монотонним на жодній множині виду $(a;b) \setminus \mathbb{Q} \subset D_f$.

Розглянемо довільну множину виду $(a;b) \setminus \mathbb{Q} \subset D_f$, $x_1, x_2 \in (a;b) \setminus \mathbb{Q}$. Нехай $x_1 < x_2$. Тоді $x_1 = \Delta^O_{q_1 \ldots q_{n-1} a_n a_{n+1} \ldots}$ та $x_2 = \Delta^O_{q_1 \ldots q_{n-1} b_n b_{n+1} \ldots}$, причому $a_n \neq b_n$.

**Випадок 1**: $n$ — непарне. Тоді $a_n > b_n$. Розглянемо ірраціональне число $x^* = \Delta^O_{q_1 \ldots q_{n-1} a_n (a_{n+1}+1)(a_{n+1}+2) \ldots}$. Згідно з наслідком 1.3, $x_1 < x^* < x_2$. Розглянемо значення проєктора в точках $x_1, x_2, x^*$. Згідно з наслідком 1.2, число $f(x^*) = \Delta^E_{q_1 \ldots q_{n-1} a_n (a_{n+1}+1)(a_{n+1}+2) \ldots}$ менше за $f(x_1) = \Delta^E_{q_1 \ldots q_{n-1} a_n a_{n+1} \ldots}$ та $f(x_2) = \Delta^E_{q_1 \ldots q_{n-1} b_n b_{n+1} \ldots}$.

**Випадок 2**: $n$ — парне. Тоді $a_n < b_n$. Розглянемо ірраціональне число $x' = \Delta^O_{q_1 \ldots q_{n-1} b_n (b_{n+1}+1)(b_{n+1}+2) \ldots}$. Тоді $x_1 < x' < x_2$. Розглянемо значення проєктора в точках $x_1, x_2, x'$. Число $f(x') = \Delta^E_{q_1 \ldots q_{n-1} b_n (b_{n+1}+1)(b_{n+1}+2) \ldots}$ менше за $f(x_1) = \Delta^E_{q_1 \ldots q_{n-1} a_n a_{n+1} \ldots}$ та $f(x_2) = \Delta^E_{q_1 \ldots q_{n-1} b_n b_{n+1} \ldots}$.

Отже, проєктор $f$ не є монотонним на жодній з множин $(a;b) \setminus \mathbb{Q}$. □

Зауважимо, що функція $f$ має розриви в раціональних точках, оскільки не означена в них. Тому дослідимо її на неперервність і диференційовність по множині ірраціональних чисел.

**Теорема 2.4.** *Проєктор $f$ неперервний в кожній точці області визначення по множині ірраціональних чисел.*

*Доведення.* Нехай $x_0 = \Delta^O_{c_1c_2\ldots}$ — довільне фіксоване число з $(0;1) \setminus \mathbb{Q}$ і аргумент проєктора $x \to x_0$ по множині ірраціональних чисел. Умова $x \to x_0$ рівносильна умові $k(x;x_0) \to \infty$, де $k(x;x_0)$ — таке натуральне число, що $q_k(x) \neq c_k$, але $q_i(x) = c_i$ при всіх $i < k$ (наслідок 1.5). Звідси

$$|f(x_0) - f(x)| = \left|\Delta^E_{c_1\ldots c_{k-1}c_k\ldots} - \Delta^E_{c_1\ldots c_{k-1}q_k(x)\ldots}\right| < \left|\Delta^E_{c_1\ldots c_{k-1}}\right| \to 0$$

при $k \to \infty$. Отже, функція $f$ є неперервною по множині ірраціональних чисел в кожній точці області визначення. □

**Теорема 2.5.** *Проєктор $f$ має неусувні розриви першого роду в кожній раціональній точці інтервалу* $(0;1)$.

*Доведення.* У роботі [48] показано, що кожне раціональне число з $(0;1)$ має два представлення у вигляді частинних сум ряду Остроградського–Серпінського–Пірса:

$$\begin{aligned} x_r &= \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_1q_2} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{q_1\cdots q_n} = \\ &= \frac{1}{q_1} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{q_1\cdots q_{n-1}(q_n-1)} + \frac{(-1)^n}{q_1\cdots q_{n-1}(q_n-1)q_n}. \end{aligned}$$

Зокрема, в достатньо малому околі точки $x_r$ всі ірраціональні числа з одного боку від $x_r$ мають $O$-зображення виду $\Delta^O_{q_1\ldots q_na_{n+1}\ldots}$, а з іншого боку — виду $\Delta^O_{q_1\ldots q_{n-1}(q_n-1)q_nb_{n+2}\ldots}$. Тоді значення проєктора в цьому околі з одного боку від $x_r$ мають вигляд $\Delta^E_{q_1\ldots q_na_{n+1}\ldots}$, а з іншого боку мають вигляд $\Delta^E_{q_1\ldots q_{n-1}(q_n-1)q_nb_{n+2}\ldots}$.

Оскільки з $x \to x_r$ випливає, що $a_{n+1} \to +\infty$ та $b_{n+2} \to +\infty$, то значення проєктора $f$ з одного боку прямують до числа

$$\frac{1}{q_1+1} + \frac{1}{(q_1+1)(q_2+1)} + \cdots + \frac{1}{(q_1+1)\cdots(q_n+1)},$$

а з іншого боку до числа

$$\frac{1}{q_1+1}+\cdots+\frac{1}{(q_1+1)\cdots(q_{n-1}+1)q_n}+\frac{1}{(q_1+1)\cdots(q_{n-1}+1)q_n(q_n+1)}.$$

Зрозуміло, що ці числа не рівні між собою, а тому в раціональній точці $x_r$ має місце неусувний розрив першого роду. $\square$

**Теорема 2.6.** *Функція $f$ є недиференційовною майже скрізь (в розумінні міри Лебега) по множині ірраціональних чисел.*

*Доведення.* Проєктор $f$ є ніде не монотонною функцією. Тому якщо він в точці $x_0 \in D_f$ має скінченну похідну по множинні ірраціональних чисел, то вона може бути рівна тільки нулю.

Покажемо, що майже скрізь (в розумінні міри Лебега), похідна проєктора $f$ не рівна нулю. Для цього доведемо, що для майже всіх точок $x_0 \in D_f$ в довільному їхньому околі існує така точка $x^* \in D_f$, що

$$\left|\frac{f(x_0)-f(x^*)}{x_0-x^*}\right| > d = d(x_0) > 0.$$

Звідси буде слідувати, що проєктор $f$ недиференційовний майже скрізь на $D_f$ (в розумінні міри Лебега) по множині ірраціональних чисел.

Нехай $x_0 = \Delta^O_{c_1\ldots c_n c_{n+1}\ldots}$ — довільне фіксоване число, а $O$-зображення числа $x = \Delta^O_{c_1\ldots c_n a_{n+1}\ldots}$ відрізняється від $O$-зображення числа $x_0$, починаючи з $(n+1)$-ої $O$-цифри, тобто $a_{n+1} \neq c_{n+1}$.

Розглянемо відношення

$$\left|\frac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x}\right| = \left|\frac{\Delta^E_{c_1\ldots c_n c_{n+1}\ldots}-\Delta^E_{c_1\ldots c_n a_{n+1}\ldots}}{\Delta^O_{c_1\ldots c_n c_{n+1}\ldots}-\Delta^O_{c_1\ldots c_n a_{n+1}\ldots}}\right| =$$

$$= \frac{\frac{1}{(c_1+1)\cdots(c_n+1)}\left|\Delta^E_{c_{n+1}\ldots}-\Delta^E_{a_{n+1}\ldots}\right|}{\frac{1}{c_1\cdots c_n}\left|\Delta^O_{c_{n+1}\ldots}-\Delta^O_{a_{n+1}\ldots}\right|} =$$

$$= \frac{c_1\cdots c_n}{(c_1+1)\cdots(c_n+1)}\cdot\left|\frac{\Delta^E_{c_{n+1}\ldots}-\Delta^E_{a_{n+1}\ldots}}{\Delta^O_{c_{n+1}\ldots}-\Delta^O_{a_{n+1}\ldots}}\right|.$$

В околі точки $x_0$ візьмемо таку точку $x^* = \Delta^O_{c_1\ldots c_n a_{n+1}\ldots}$, що

$$a_{n+1} = (c_{n+1}+1)(c_{n+2}+1).$$

Оскільки $\Delta^E_{a_{n+1}a_{n+2}\ldots} \leqslant \frac{1}{a_{n+1}}$, то,

$$\Delta^E_{a_{n+1}a_{n+2}\ldots} \leqslant \frac{1}{(c_{n+1}+1)(c_{n+2}+1)}.$$

Звідси отримуємо оцінку

$$\Delta^E_{c_{n+1}\ldots} - \Delta^E_{a_{n+1}\ldots} \geqslant \left(\frac{1}{c_{n+1}+1} + \frac{1}{(c_{n+1}+1)(c_{n+2}+1)} + \cdots\right) - \\ - \frac{1}{(c_{n+1}+1)(c_{n+2}+1)} > \frac{1}{c_{n+1}+1}.$$

Оскільки $\Delta^O_{c_{n+1}c_{n+2}\ldots} < \frac{1}{c_{n+1}}$, то маємо оцінку

$$0 < \Delta^O_{c_{n+1}\ldots} - \Delta^O_{a_{n+1}\ldots} < \Delta^O_{c_{n+1}\ldots} < \frac{1}{c_{n+1}}.$$

Таким чином, отримуємо оцінку:

$$\frac{\Delta^E_{c_{n+1}\ldots} - \Delta^E_{a_{n+1}\ldots}}{\Delta^O_{c_{n+1}\ldots} - \Delta^O_{a_{n+1}\ldots}} > \frac{\frac{1}{c_{n+1}+1}}{\frac{1}{c_{n+1}}} = \frac{c_{n+1}}{c_{n+1}+1}.$$

Звідси

$$\left|\frac{f(x_0)-f(x^*)}{x_0-x^*}\right| > \frac{c_1\cdots c_n c_{n+1}}{(c_1+1)\cdots(c_n+1)(c_{n+1}+1)}.$$

В свою чергу,

$$\frac{c_1\cdots c_n c_{n+1}}{(c_1+1)\cdots(c_n+1)(c_{n+1}+1)} > \prod_{i=1}^{\infty}\frac{c_i}{c_i+1} = d(x_0),$$

де $d(x) = \prod\limits_{i=1}^{\infty}\frac{q_i(x)}{q_i(x)+1} = \prod\limits_{i=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{q_i(x)+1}\right)$. Остаточно отримуємо, що

$$\left|\frac{f(x_0)-f(x^*)}{x_0-x^*}\right| > d(x_0).$$

Покажемо, що $d(x) > 0$ майже скрізь на множині $(0;1)\backslash\mathbb{Q}$ в розумінні міри Лебега. Згідно з теоремою 1.24, добуток $\prod\limits_{i=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{q_i(x)+1}\right)$ буде мати додатне значення тоді і тільки тоді, коли ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{1}{q_i(x)+1}$ буде збіжним. У свою чергу, згідно з ознакою порівняння рядів, цей ряд буде збіжним тоді і тільки тоді, коли збіжним буде ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{q_i(x)}$.

Як відомо з класичних результатів Дж. Шалліта [39], ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{q_i(x)}$ є збіжним для майже всіх $x \in (0;1) \setminus \mathbb{Q}$ в розумінні міри Лебега. Тому майже для всіх $x \in (0;1) \setminus \mathbb{Q}$: $d(x) > 0$.

Отже, майже для всіх $x \in (0;1) \setminus \mathbb{Q}$ в довільному околі точки $x$ існує точка $x^*$ така, що $\left|\frac{f(x)-f(x^*)}{x-x^*}\right| > d(x) > 0$, а тому проєктор $f$ є майже скрізь недиференційовним по множині ірраціональних чисел. □

*Зауваження* 2.1. Вище було показано, що проєктор $f$ є недиференційовним по множині ірраціональних чисел у всіх точках $x \in D_f$, для яких ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{q_i(x)}$ є збіжним, тобто майже скрізь на $(0;1) \setminus \mathbb{Q}$. Проте [39] множина чисел, для яких цей ряд розбіжний, є континуальною та щільною в $(0;1) \setminus \mathbb{Q}$. Тому природно виникає запитання про диференційовність проєктора $f$ в точках множини розбіжності ряду $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{q_i(x)}$. Наступна теорема частково дає відповідь на це запитання.

**Теорема 2.7.** *Проєктор $f$ є недиференційовним по множині ірраціональних чисел в точках $x$ таких, що $q_{n+1}(x) - q_n(x) \leqslant k = \mathrm{const}$ для нескінченної кількості номерів $n$.*

*Доведення.* Нехай $x_0 = \Delta^O_{c_1 c_2 \ldots}$ таке, що $c_{n+1} - c_n \leqslant k$ для нескінченної кількості номерів $n$. Для довільного як завгодно малого околу точки $x_0$ існує таке число $N$, що для кожного $n \geqslant N$ число $x^* = \Delta^O_{c_1 \ldots c_n (c_{n+1}+1) a_{n+2} \ldots}$ міститься в цьому околі при довільних $a_{n+2}, a_{n+3}, \ldots$ .

Покажемо, що при достатньо великому значенні $a_{n+2}$:

$$\left|\frac{f(x_0) - f(x^*)}{x_0 - x^*}\right| > \frac{1}{k} > 0.$$

Аналогічно до теореми 2.6, цього достатньо щоб стверджувати, що проєктор $f$ є недиференційовним в точці $x_0$.

Із міркувань, використаних при доведенні теореми 2.6, слідує

$$\left|\frac{f(x_0)-f(x^*)}{x_0-x^*}\right| = \frac{c_1\cdots c_n}{(c_1+1)\cdots(c_n+1)}\cdot\left|\frac{\Delta^E_{c_{n+1}c_{n+2}\ldots}-\Delta^E_{(c_{n+1}+1)a_{n+2}\ldots}}{\Delta^O_{c_{n+1}c_{n+2}\ldots}-\Delta^O_{(c_{n+1}+1)a_{n+2}\ldots}}\right|.$$

Очевидно, має місце нерівність

$$\frac{c_1\cdots c_n}{(c_1+1)\cdots(c_n+1)} \geqslant \frac{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}{2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n+1)} = \frac{1}{n+1}.$$

З ознак порівняння чисел за їхніми $E$ та $O$-зображеннями (наслідки 1.2 та 1.3 відповідно) слідує, що

$$\frac{\Delta^E_{c_{n+1}c_{n+2}\ldots}-\Delta^E_{(c_{n+1}+1)a_{n+2}\ldots}}{\Delta^O_{c_{n+1}c_{n+2}\ldots}-\Delta^O_{(c_{n+1}+1)a_{n+2}\ldots}} > 0.$$

Знайдемо більш точні оцінки для цього дробу. Для цього попередньо оцінимо значення його чисельника та знаменника:

$$\begin{aligned}
&\Delta^E_{c_{n+1}c_{n+2}\ldots}-\Delta^E_{(c_{n+1}+1)a_{n+2}\ldots} > \\
&\quad > \frac{1}{c_{n+1}+1}+\frac{1}{(c_{n+1}+1)(c_{n+2}+1)}-\left(\frac{1}{c_{n+1}+2}+\frac{1}{(c_{n+1}+2)a_{n+2}}\right) = \\
&\quad = \frac{1}{(c_{n+1}+1)(c_{n+1}+2)}+\frac{1}{(c_{n+1}+1)(c_{n+2}+1)}-\frac{1}{(c_{n+1}+2)a_{n+2}} > \\
&\quad > \frac{2}{(c_{n+1}+1)(c_{n+2}+1)}-\frac{1}{(c_{n+1}+1)a_{n+2}};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Delta^O_{c_{n+1}c_{n+2}\ldots}-\Delta^O_{(c_{n+1}+1)a_{n+2}\ldots} < \\
&\quad < \frac{1}{c_{n+1}}-\frac{1}{c_{n+1}(c_{n+2}+1)}-\left(\frac{1}{c_{n+1}+1}-\frac{1}{(c_{n+1}+1)a_{n+2}}\right) = \\
&\quad = \frac{c_{n+2}-c_{n+1}}{c_{n+1}(c_{n+1}+1)(c_{n+2}+1)}+\frac{1}{(c_{n+1}+1)a_{n+2}}.
\end{aligned}$$

Таким чином отримуємо оцінку

$$\frac{\Delta^E_{c_{n+1}c_{n+2}\ldots}-\Delta^E_{(c_{n+1}+1)a_{n+2}\ldots}}{\Delta^O_{c_{n+1}c_{n+2}\ldots}-\Delta^O_{(c_{n+1}+1)a_{n+2}\ldots}} > \frac{\dfrac{2}{c_{n+2}+1}-\dfrac{1}{a_{n+2}}}{\dfrac{c_{n+2}-c_{n+1}}{c_{n+1}\left(c_{n+2}+1\right)}+\dfrac{1}{a_{n+2}}}.$$

Врахуємо, що

$$\lim_{a_{n+2}\to\infty} \frac{\dfrac{2}{c_{n+2}+1} - \dfrac{1}{a_{n+2}}}{\dfrac{c_{n+2}-c_{n+1}}{c_{n+1}(c_{n+2}+1)} + \dfrac{1}{a_{n+2}}} = \frac{2c_{n+1}}{c_{n+2}-c_{n+1}},$$

причому ця послідовність прямує до границі знизу. Тому для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $M$, що для всіх $a_{n+2} > M$:

$$\frac{\Delta^E_{c_{n+1}c_{n+2}\ldots} - \Delta^E_{(c_{n+1}+1)a_{n+2}\ldots}}{\Delta^O_{c_{n+1}c_{n+2}\ldots} - \Delta^O_{(c_{n+1}+1)a_{n+2}\ldots}} > \frac{2c_{n+1}}{c_{n+2}-c_{n+1}} - \varepsilon.$$

Звідси маємо, що для довільного $\varepsilon > 0$ в будь-якому околі точки $x_0$ для кожного достатньо великого $n$ існує точка $x^*$ така, що

$$\left|\frac{f(x_0)-f(x^*)}{x_0-x^*}\right| > \frac{1}{n+1}\cdot\left(\frac{2c_{n+1}}{c_{n+2}-c_{n+1}} - \varepsilon\right) \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{n+1}\cdot\left(\frac{2(n+1)}{c_{n+2}-c_{n+1}} - \varepsilon\right) = \frac{2}{c_{n+2}-c_{n+1}} - \frac{\varepsilon}{n+1}.$$

Але оскільки $c_{n+1} - c_n \leqslant k$ для нескінченної кількості номерів, то числа $\varepsilon$ та $x^*$ завжди можна обрати таким чином, що

$$\left|\frac{f(x_0)-f(x^*)}{x_0-x^*}\right| > \frac{2}{k} - \frac{\varepsilon}{n+1} > \frac{1}{k} > 0.$$

Отже, проєктор $f$ є недиференційовним в точці $x_0$. □

**2.1.3. Розподіл значень проєктора.** Розглянемо проєктор $f$ як функцію, визначену на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \lambda)$, де $\Omega = (0;1) \setminus \mathbb{Q}$, $\mathcal{F}$ — $\sigma$-алгебра вимірних за Лебегом підмножин множини $\Omega$.

**Теорема 2.8.** *Проєктор $f$ є випадковою величиною.*

*Доведення.* Для доведення теореми достатньо показати, що множина $\{x\colon f(x) < a\} \in \mathcal{F}$ для кожного $a \in \mathbb{R}$. Зрозуміло, що $E_f \subset (0;1)$. Якщо $a \leqslant 0$, то $\{x\colon f(x) < a\} = \varnothing \in \mathcal{F}$. Якщо $a \geqslant 1$, то $\{x\colon f(x) < a\} = \Omega \in \mathcal{F}$.

Нехай $0 < a < 1$, причому $a = \Delta^E_{c_1 c_2 \ldots}$. Тоді

$$\begin{aligned}\{x\colon f(x) < a\} = \{x\colon q_1(x) > c_1\} \cup \{x\colon q_1(x) = c_1, q_2(x) > c_2\} \cup \\ \cup \{x\colon q_1(x) = c_1, q_2(x) = c_2, q_3(x) > c_3\} \cup \cdots = \\ = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x\colon q_1(x) = c_1, \ldots, q_{n-1}(x) = c_{n-1}, q_n(x) > c_n\}.\end{aligned}$$

Якщо послідовність $c_1, \ldots, c_{n-1}$ не є зростаючою, то

$$\{x\colon q_1(x) = c_1, \ldots, q_{n-1}(x) = c_{n-1}, q_n(x) > c_n\} = \varnothing \in \mathcal{F}.$$

Якщо послідовність $c_1, \ldots, c_{n-1}$ зростаюча, то

$$\{x\colon q_1(x) = c_1, \ldots, q_{n-1}(x) = c_{n-1}, q_n(x) > c_n\} = \bigcup_{k=c_n+1}^{\infty} \Delta^O_{c_1 \ldots c_{n-1} k} \in \mathcal{F}.$$

Таким чином, множина $\{x\colon f(x) < a\}$ є вимірною, оскільки є не більш ніж зліченним об'єднанням вимірних множин. Отже, проєктор $f$ є випадковою величиною. $\square$

Нехай випадкова величина $X$ рівномірно розподілена на $(0;1)\setminus\mathbb{Q}$, тобто $\mathbf{P}\{X < a\} = a$ для кожного $a \in [0;1]$. Розглянемо випадкову величину $Y$, що визначена рівністю $Y = f(X)$, та функцію розподілу $F_Y$ випадкової величини $Y$.

**Теорема 2.9.** *Значення функції розподілу $F_Y$ випадкової величини $Y$ у точці $a = \Delta^E_{c_1 c_2 \ldots} \in E_f$ обчислюється за формулою*

$$F_Y(a) = F_Y\left(\Delta^E_{c_1 c_2 \ldots}\right) = \frac{1}{c_1 + 1} + \frac{1}{c_1(c_2 + 1)} + \frac{1}{c_1 c_2 (c_3 + 1)} + \cdots .$$

*Доведення.* Нехай $a = \Delta^E_{c_1 c_2 \ldots} \in E_f$. З доведення теореми 2.8 слідує, що подію $\{Y < a\}$ можна записати наступним чином

$$\{Y < a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=c_n+1}^{\infty} \Delta^O_{c_1 \ldots c_{n-1} k}.$$

Зрозуміло, що всі циліндри, що входять до цього об'єднання, попарно не перетинаються. Тому

$$F_Y(a) = \mathbf{P}\{Y < a\} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=c_n+1}^{\infty} \left|\Delta^O_{c_1\ldots c_{n-1}k}\right|.$$

Знайдемо значення внутрішньої суми:

$$\sum_{k=c_n+1}^{\infty} \left|\Delta^O_{c_1\ldots c_{n-1}k}\right| = \sum_{k=c_n+1}^{\infty} \frac{1}{c_1 \cdots c_{n-1}k\,(k+1)} =$$
$$= \frac{1}{c_1 \cdots c_{n-1}} \cdot \sum_{k=c_n+1}^{\infty} \frac{1}{k\,(k+1)} = \frac{1}{c_1 \cdots c_{n-1}\,(c_n+1)}.$$

Таким чином, $F_Y\,(a) = F_Y\left(\Delta^E_{c_1c_2\ldots}\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{c_1 \cdots c_{n-1}\,(c_n+1)}.$ $\square$

*Зауваження* 2.2. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_1 \cdots c_{n-1}(c_n+1)}$ є модифікованим рядом Енгеля, елементи якого на 1 більші за елементи ряду Енгеля, яким представлено аргумент функції розподілу $F_Y$ (у випадку $a \in E_f$). Таким чином, функція розподілу $F_Y$ (в певному сенсі) є проєктором з $E$-зображення в зображення чисел модифікованими рядами Енгеля.

**Теорема 2.10.** *Значення функції розподілу $F_Y$ випадкової величини $Y$ у точці $a = \Delta^E_{c_1c_2\ldots} \in (0;1)\backslash E_f$ обчислюється за формулою*

$$F_Y\,(a) = F_Y\left(\Delta^E_{c_1c_2\ldots}\right) = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{c_1 \cdots c_{n-1}(c_n+1)},$$

*де* $k = \min\{i\colon c_i = c_{i-1}\}$.

*Доведення.* Нехай $a = \Delta^E_{c_1c_2\ldots} \notin E_f$. Тоді послідовність $(c_i)_{i=1}^{\infty}$ не є зростаючою, тобто містить рівні сусідні елементи. Нехай $k = \min\{i\colon c_i = c_{i-1}\}$.

У доведенні теореми 2.8 було показано, що

$$\{Y < a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x\colon q_1(x) = c_1, \ldots, q_{n-1}(x) = c_{n-1}, q_n(x) > c_n\}.$$

Проте $\{x\colon q_1(x)=c_1,\ldots,q_{n-1}(x)=c_{n-1},q_n(x)>c_n\}=\varnothing$ при $n\geqslant k+1$, оскільки їхні елементи мають задовольняти умові $q_{k-1}(x)=q_k(x)=c_k$, якою не володіє жодне число з $\Omega$. Отже,

$$\{Y<a\}=\bigcup_{n=1}^{k}\{x\colon q_1(x)=c_1,\ldots,q_{n-1}(x)=c_{n-1},q_n(x)>c_n\}=$$
$$=\bigcup_{n=1}^{k}\bigcup_{k=c_n+1}^{\infty}\Delta^{O}_{c_1\ldots c_{n-1}k}.$$

Оскільки циліндри з цього об'єднання попарно не перетинаються, то

$$F_Y(a)=\sum_{n=1}^{k}\sum_{k=c_n+1}^{\infty}\left|\Delta^{O}_{c_1\ldots c_{n-1}k}\right|=\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{c_1\cdots c_{n-1}(c_n+1)}.\qquad\square$$

## 2.2. Випадкова величина, що пов'язана з рядами Остроградського–Серпінського–Пірса

Нехай $(\Omega,\mathcal{F},\lambda)$ — ймовірнісний простір, де $\Omega=(0;1)\setminus\mathbb{Q}$, $\mathcal{F}$ — $\sigma$-алгебра вимірних за Лебегом підмножин множини $\Omega$, $\lambda$ — міра Лебега.

На множині збіжності ряду $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{q_k(x)+n}$, $n\in\mathbb{N}_0$, визначимо функцію

$$\xi_n(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{q_k(x)+n}.$$

Далі доведемо, що функції $\xi_n(x)$ визначені (набувають скінченних значень) майже скрізь на $\Omega$ та є випадковими величинами, обчислимо їхні математичні сподівання $\mathbf{M}\xi_n$ та дисперсії $\mathbf{D}\xi_n$.

*Зауваження* 2.3. Задача про знаходження математичного сподівання випадкової величини $\xi_0$ була розв'язана в роботі [39]. Проте в цій роботі не висвітлено питання вимірності функції $\xi_0$, що є принциповим для наступного дослідження цієї функції. Також в роботі не висвітлено питання щільності множини, на якій відповідний функціональний ряд розбіжний (запропоновано довести цей факт читачам). Далі в даному дисертаційному дослідженні буде доведено вимірність функцій $\xi_n$ та запропоновано власний підхід до обчислення математичного сподівання $\mathbf{M}\xi_n$, відмінний від того, що застосований у роботі [39].

### 2.2.1. Функція $\xi_n$ як випадкова величина.

**Теорема 2.11.** *Функції* $\frac{1}{q_k(x)}$, *де* $k \in \mathbb{N}$, *є випадковими величинами.*

*Доведення.* Щоб довести, що функція $\frac{1}{q_k(x)}$ є випадковою величиною (вимірною на $(\Omega, \mathcal{F}, \lambda)$), достатньо показати, що $\{x\colon \frac{1}{q_k(x)} \leqslant a\} \in \mathcal{F}$ для кожного $a \in \mathbb{R}$. Зрозуміло, що $\frac{1}{q_k(x)}$ може набувати тільки зліченну кількість значень, причому $0 < \frac{1}{q_k(x)} \leqslant 1$.

Якщо $a \leqslant 0$, то $\{x\colon \frac{1}{q_k(x)} \leqslant a\} = \varnothing \in \mathcal{F}$.

Якщо $a \geqslant 1$, то $\{x\colon \frac{1}{q_k(x)} \leqslant a\} = \Omega \in \mathcal{F}$.

Нехай $a \in (0;1)$. Тоді функція $\frac{1}{q_k(x)}$ набуває зліченну кількість значень, що не більші $a$, а саме значень із множини $\{\frac{1}{m}, \frac{1}{m+1}, \ldots\}$, де $m \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ та $\frac{1}{m} \leqslant a < \frac{1}{m-1}$. Тоді

$$\{x\colon \frac{1}{q_k(x)} \leqslant a\} = \bigcup_{p=0}^{\infty}\{x\colon \frac{1}{q_k(x)} = \frac{1}{m+p}\} = \bigcup_{p=0}^{\infty}\{x\colon q_k(x) = m+p\} =$$
$$= \bigcup_{p=0}^{\infty}\left(\bigcup_{c_1<\cdots<c_{k-1}<m+p} \Delta^{O}_{c_1\ldots c_{k-1}[k+p]}\right).$$

Зрозуміло, що $\bigcup\limits_{c_1<\cdots<c_{k-1}<m+p} \Delta^{O}_{c_1\ldots c_{k-1}[m+p]}$ є скінченним об'єднанням циліндрів, кожен з яких є вимірною за Лебегом множиною. Тому

$$\bigcup_{c_1<\cdots<c_{k-1}<m+p} \Delta^{O}_{c_1\ldots c_{k-1}[m+p]} \in \mathcal{F}.$$

Звідси отримуємо, що $\{x\colon \frac{1}{q_k(x)} \leqslant a\} \in \mathcal{F}$.

Остаточно, $\{x\colon \frac{1}{q_k(x)} \leqslant a\} \in \mathcal{F}$ при всіх $a \in \mathbb{R}$. Тому функція $\frac{1}{q_k(x)}$ є випадковою величиною для кожного $k \in \mathbb{N}$. $\square$

**Наслідок 2.1.** *Функції* $\frac{1}{q_k(x)+n}$, $k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}_0$, *є випадковими величинами.*

Розглянемо допоміжну величину

$$B(k,t) = \sum_{k<q_1<\dots<q_m<k+t} \frac{1}{q_1\cdots q_m},$$

де $t\in\mathbb{N}$, $k\in\mathbb{N}_0$, а сума обчислюється по всеможливим послідовностям натуральних чисел $(q_i)_{i=1}^m$ таким, що $k<q_1<\dots<q_m<k+t$. При цьому кількість $m$ елементів таких послідовностей набуває всеможливих допустимих значень.

**Лема 2.2.** $B(k,t) = \sum\limits_{k<q_1<\dots<q_m<k+t} \dfrac{1}{q_1\cdots q_m} = \dfrac{t-1}{k+1}.$

*Доведення.* Для доведення рівності скористаємося методом математичної індукції. Нехай $k$ — фіксоване ціле невід'ємне число, а $t$ — довільне натуральне число.

Якщо $t=1$, то $B(k,1)=0=\frac{t-1}{k+1}$, оскільки в цьому випадку між $k$ та $k+t$ не існує жодного натурального числа.

Якщо $t=2$, то $B(k,2)=\frac{1}{k+1}=\frac{t-1}{k+1}$.

Якщо $t=3$, то

$$B(k,3) = \frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{2}{k+1} = \frac{t-1}{k+1}.$$

Припустимо, що при $t=s$ має місце рівність $B(k,s)=\frac{s-1}{k+1}$. Тоді при $t=s+1$ отримаємо

$$B(k,s+1) = B(k,s)+\frac{1}{k+s}+B(k,s)\cdot\frac{1}{k+s} = \\ = \frac{s-1}{k+1}+\frac{1}{k+s}+\frac{s-1}{k+1}\cdot\frac{1}{k+s} = \frac{s}{k+1} = \frac{t-1}{k+1}.$$

Отже, в силу принципу математичної індукції, $B(k,t)=\frac{t-1}{k+1}$ для кожного $t\in\mathbb{N}$ та кожного $k\in\mathbb{N}_0$. □

*Зауваження* 2.4. Вираз для величини $B(k,t)$ можна переписати наступним чином:

$$B(k,t) = \sum_{m=1}^{t-1}\left(\sum_{k<q_1<\dots<q_m<k+t} \frac{1}{q_1\cdots q_m}\right),$$

де внутрішня сума обчислюється по всеможливим послідовностям фіксованої довжини $m$.

**Теорема 2.12.** *Ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{q_k(x)+n}$ *збігається майже скрізь (в сенсі міри Лебега) на множині* $\Omega$.

*Доведення.* Покажемо, що ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_{\Omega} \frac{1}{q_k(x)+n}\, d\lambda$ є збіжним.

$$\int\limits_{\Omega} \frac{1}{q_1(x)+n}\, d\lambda = \sum_{j=1}^{\infty} \left( \frac{1}{j+n} \cdot \lambda(\Delta_j^O) \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \left( \frac{1}{j+n} \cdot \frac{1}{j(j+1)} \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j(j+1)(j+n)};$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} \int\limits_{\Omega} \frac{1}{q_k(x)+n}\, d\lambda = \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{q_k=k}^{\infty} \left( \frac{1}{q_k+n} \cdot \sum_{0<q_1<\dots<q_k} \lambda\left(\Delta^O_{q_1\ldots q_{k-1}q_k}\right) \right) =$$
$$= \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{q_k=k}^{\infty} \left( \frac{1}{q_k+n} \cdot \sum_{0<q_1<\dots<q_k} \frac{1}{q_1\cdots q_{k-1}q_k(q_k+1)} \right) =$$
$$= \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{q_k=k}^{\infty} \left( \frac{1}{q_k(q_k+1)(q_k+n)} \cdot \sum_{0<q_1<\dots<q_k} \frac{1}{q_1\cdots q_{k-1}} \right) =$$
$$= \sum_{j=2}^{\infty} \left( \frac{1}{j(j+1)(j+n)} \cdot \sum_{k=2}^{j} \left( \sum_{0<q_1<\dots<q_{k-1}<j} \frac{1}{q_1\cdots q_{k-1}} \right) \right) =$$
$$= \sum_{j=2}^{\infty} \left( \frac{1}{j(j+1)(j+n)} \cdot B(0,j) \right) = \sum_{j=2}^{\infty} \frac{j-1}{j(j+1)(j+n)} =$$
$$= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j-1}{j(j+1)(j+n)}.$$

Остаточно отримуємо, що

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{\Omega} \frac{1}{q_k(x)+n}\, d\lambda = \int\limits_{\Omega} \frac{1}{q_1(x)+n}\, d\lambda + \sum_{k=2}^{\infty} \int\limits_{\Omega} \frac{1}{q_k(x)+n}\, d\lambda =$$
$$= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j(j+1)(j+n)} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j-1}{j(j+1)(j+n)} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(j+1)(j+n)}.$$

Отже, згідно з наслідком 1.9, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{q_k(x)+n}$ збігається майже скрізь на множині $\Omega$. При цьому

$$\int\limits_{\Omega} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{q_k(x)+n} \right) d\lambda = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{\Omega} \frac{1}{q_k(x)+n} \, d\lambda = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(j+1)(j+n)}. \qquad \square$$

Зауважимо, що для кожного $x \in \Omega$ ряди $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{q_k(x)+n}$, $n \in \mathbb{N}_0$, або одночасно збіжні, або одночасно розбіжні. Це слідує з теореми 1.22.

Позначимо через $\Omega^*$ підмножину множини $\Omega$, на якій функціональні ряди $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{q_k(x)+n}$ збіжні. Згідно з попередньою теоремою, $\lambda(\Omega^*) = \lambda(\Omega) = 1$. Нехай $\mathcal{F}^*$ — $\sigma$-алгебра підмножин множини $\Omega^*$, вимірних за Лебегом. Таким чином маємо, що $(\Omega^*, \mathcal{F}^*, \lambda)$ — ймовірнісний простір. Тоді функції $\xi_n(x)$ є випадковими величинами на $(\Omega^*, \mathcal{F}^*, \lambda)$, оскільки є границями послідовностей вимірних функцій $\sum\limits_{k=1}^{m} \frac{1}{q_k(x)+n}$, що монотонно зростають в кожній точці області визначення.

**Теорема 2.13.** *Множина $\Omega \setminus \Omega^*$, що складається з чисел, в яких ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{q_k(x)+n}$ розбіжний, є континуальною та щільною в $(0;1)$.*

*Доведення.* Не порушуючи загальності, можемо вважати, що $\Omega \setminus \Omega^*$ є множиною розбіжності ряду $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{q_k(x)}$. Нехай $\varepsilon > 0$ та $x_0 \in (0;1)$ — довільні фіксовані числа, $x_1 = \Delta^O_{c_1 c_2 \ldots} \in \Omega$ таке, що $|x_0 - x_1| < \frac{\varepsilon}{2}$. Оскільки

$$\left|\Delta^O_{c_1 \ldots c_m}\right| = \frac{1}{c_1 \cdots c_m (c_m+1)} \leqslant \frac{1}{(m+1)!} \, ,$$

то існує таке $N = N(\varepsilon)$, що $\left|\Delta^O_{c_1 \ldots c_m}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ для кожного $m \geqslant N$. Тому при $m \geqslant N$ циліндр $\Delta^O_{c_1 \ldots c_m}$ повністю міститься в $\varepsilon$-околі точки $x_0$.

Зафіксуємо деяке $m \geqslant N$ та розглянемо множину

$$K = \left\{ x \colon x = \Delta^O_{c_1 \ldots c_m a_1 a_2 \ldots}, a_j = c_m + 2j + t_j, t_j \in \{0;1\} \right\}.$$

Довільна послідовність $(t_j)_{j=1}^{\infty}$ визначає деяке число $x$ з циліндра $\Delta^O_{c_1 \ldots c_m}$, оскільки $c_m < a_1 < a_2 < \cdots$ . Отже, $K \subset \Delta^O_{c_1 \ldots c_m}$, а тому $K$ повністю міститься в $\varepsilon$-околі точки $x_0$. При цьому множина $K$ є континуальною, оскільки має місце взаємно однозначна відповідність між елементами множини $K$ та континуальною множиною послідовностей $(t_j)_{j=1}^{\infty}$ нулів та одиниць.

Для кожного $x \in K$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{q_k(x)}$ розбіжний, оскільки

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{q_k(x)} = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{c_k} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{c_m + 2j + t_j},$$

а ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{1}{c_m+2j+t_j}$ розбіжний. Для цього достатньо застосувати теорему 1.22 до даного ряду та гармонічного ряду. Отже, $K \subset \Omega \setminus \Omega^*$. Звідси слідує, що $\Omega \setminus \Omega^*$ континуальна.

Оскільки в довільному $\varepsilon$-околі довільної точки $x_0 \in (0;1)$ містяться числа з множини $\Omega \setminus \Omega^*$, то $\Omega \setminus \Omega^*$ щільна в $(0;1)$. $\square$

*Зауваження* 2.5. Ідея доведення континуальності множини $\Omega \setminus \Omega^*$ належить J.O. Shallit [39]. Проте щільність цієї множини в роботі [39] лише стверджується.

### 2.2.2. Числові характеристики випадкової величини $\xi_n$.

**Теорема 2.14.** *Математичне сподівання* $\mathbf{M}\xi_n$ *випадкової величини* $\xi_n$ *дорівнює*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(j+1)(j+n)}.$$

*Доведення.* Враховуючи проміжні результати, одержані при доведенні теореми 2.12, отримуємо:

$$\mathbf{M}\xi_n = \int\limits_{\Omega^*} \xi_n(x)\, d\lambda = \int\limits_{\Omega} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{q_k(x)+n} \right) d\lambda = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(j+1)(j+n)}. \qquad \square$$

**Наслідок 2.2.** *При* $n = 0$*:*

$$\mathbf{M}\xi_0 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(j+1)j} = 1.$$

Зауважимо, що випадок $n = 0$ повністю узгоджується з теоремою 1.16.

**Наслідок 2.3.** *При $n = 1$:*

$$\mathbf{M}\xi_1 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(j+1)^2} = \frac{\pi^2}{6} - 1.$$

**Наслідок 2.4.** *При $n \geqslant 2$:*

$$\mathbf{M}\xi_n = \frac{H_n - 1}{n-1},$$

*де $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ — $n$-не гармонічне число.*

*Доведення.* При $n \geqslant 2$ отримуємо, що

$$\mathbf{M}\xi_n = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(j+1)(j+n)} = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{n-1}{(j+1)(j+n)} =$$
$$= \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j+n-j-1}{(j+1)(j+n)} = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{\infty} \left( \frac{1}{j+1} - \frac{1}{j+n} \right) =$$
$$= \frac{1}{n-1} \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \right) = \frac{H_n - 1}{n-1}.$$
□

**Теорема 2.15.** *Дисперсія $\mathbf{D}\xi_n$ випадкової величини $\xi_n$ обчислюється за формулою*

$$\mathbf{D}\xi_n = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(j+1)(j+n)^2} +$$
$$+ 2 \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \left( \frac{1}{(j+1)(j+n)} \cdot \sum_{u=j+1}^{\infty} \frac{1}{(u+1)(u+n)} \right) - \left(\mathbf{M}\xi_n\right)^2.$$

*Доведення.* Оскільки $\mathbf{D}\xi_n = \mathbf{M}\xi_n^2 - \left(\mathbf{M}\xi_n\right)^2$, а математичне сподівання $\mathbf{M}\xi_n$ знаходиться за теоремою 2.14, то обчислення дисперсії $\mathbf{D}\xi_n$ зводиться до обчислення математичного сподівання випадкової величини $\xi_n^2$:

$$(\xi_n(x))^2 = \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{q_k(x) + n} \right)^2 =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(q_k(x)+n)^2} + 2 \cdot \sum_{\substack{t,m \in \mathbb{N} \\ t<m}} \frac{1}{(q_t(x)+n)(q_m(x)+n)}.$$

Кожна з двох сум в останній рівності є вимірною функцією, яка приймає на $\Omega^*$ тільки скінченні значення, а тому вони є випадковими величинами. При цьому кожен доданок, що входить до цих сум, також є випадковою величиною. Тому

$$\mathbf{M}\xi_n^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{M}\frac{1}{(q_k+n)^2} + 2 \cdot \sum_{\substack{t,m\in\mathbb{N}\\ t<m}} \mathbf{M}\frac{1}{(q_t+n)(q_m+n)}.$$

Знайдемо значення суми $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathbf{M}\frac{1}{(q_k+n)^2}$ :

$$\mathbf{M}\frac{1}{(q_1+n)^2} = \sum_{q_1=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(q_1+n)^2}\cdot\lambda\left(\Delta^{O}_{q_1}\right)\right) =$$
$$= \sum_{q_1=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(q_1+n)^2}\cdot\frac{1}{q_1(q_1+1)}\right) = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j(j+1)(j+n)^2};$$

$$\sum_{k=2}^{\infty}\mathbf{M}\frac{1}{(q_k+n)^2} = \sum_{k=2}^{\infty}\sum_{q_k=k}^{\infty}\left(\frac{1}{(q_k+n)^2}\cdot\sum_{0<q_1<\dots<q_{k-1}<q_k}\lambda(\Delta^{O}_{q_1\dots q_{k-1}q_k})\right) =$$
$$= \sum_{k=2}^{\infty}\sum_{q_k=k}^{\infty}\left(\frac{1}{(q_k+n)^2}\cdot\sum_{0<q_1<\dots<q_k}\frac{1}{q_1\cdots q_{k-1}q_k(q_k+1)}\right) =$$
$$= \sum_{j=2}^{\infty}\left(\frac{1}{j(j+1)(j+n)^2}\cdot\sum_{k=2}^{j}\left(\sum_{0<q_1<\dots<q_{k-1}<j}\frac{1}{q_1\cdots q_{k-1}}\right)\right) =$$
$$= \sum_{j=2}^{\infty}\left(\frac{1}{j(j+1)(j+n)^2}\cdot B\left(0,j\right)\right) = \sum_{j=2}^{\infty}\frac{j-1}{j(j+1)(j+n)^2}.$$

Тому, як наслідок,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{M}\frac{1}{(q_k+n)^2} = \mathbf{M}\frac{1}{(q_1+n)^2} + \sum_{k=2}^{\infty}\mathbf{M}\frac{1}{(q_k+n)^2} =$$
$$= \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j(j+1)(j+n)^2} + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{j-1}{j(j+1)(j+n)^2} = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(j+1)(j+n)^2}.$$

Тепер знайдемо значення суми $\sum\limits_{\substack{t,m\in\mathbb{N}\\ t<m}} \mathbf{M}\frac{1}{(q_t+n)(q_m+n)}$ :

$$\sum_{\substack{t,m\in\mathbb{N}\\ t<m}} \mathbf{M}\frac{1}{(q_t+n)(q_m+n)} =$$

$$= \sum_{\substack{t,m\in\mathbb{N}\\ t<m}} \sum_{q_1<\dots<q_t<\dots<q_m} \left(\frac{1}{(q_t+n)(q_m+n)} \cdot \lambda\left(\Delta^O_{q_1\dots q_t\dots q_m}\right)\right) =$$

$$= \sum_{0<q_t<q_m} \left(\frac{1}{q_t(q_t+n)q_m(q_m+1)(q_n+n)}\cdot\right.$$

$$\left. \cdot \sum_{q_1<\dots<q_t<\dots<q_m} \frac{1}{q_1\cdots q_{t-1}q_{t+1}\cdots q_{m-1}}\right) =$$

$$= \sum_{0<q_t<q_m} \left(\frac{1}{q_t(q_t+n)q_m(q_m+1)(q_n+n)}\cdot\right.$$

$$\left. \cdot \left(1+\sum_{q_1<\dots<q_t}\frac{1}{q_1\cdots q_{t-1}}\right)\cdot\left(1+\sum_{q_t<\dots<q_m}\frac{1}{q_{t+1}\cdots q_{m-1}}\right)\right).$$

Зауважимо, що під сумою виду $\sum\limits_{\substack{t,m\in\mathbb{N}\\ t<m}} \sum\limits_{q_1<\dots<q_t<\dots<q_m}$ ми маємо на увазі суму по всеможливих послідовностях натуральних чисел $q_1<\dots<q_t<\dots<q_m$, де номери $t$ та $m$ зафіксовані першою сумою. В свою чергу, в сумах виду $\sum\limits_{0<q_t<q_m} \sum\limits_{q_1<\dots<q_t<\dots<q_m}$ підсумовування відбувається по всеможливих послідовностях $q_1<\dots<q_t<\dots<q_m$, де числа $q_t$ та $q_m$ зафіксовані першою сумою, проте їхні номери не зафіксовані і можуть набувати довільних значень таких, що $t<m$.

В сумі $1+\sum\limits_{q_1<\dots<q_t} \frac{1}{q_1\cdots q_{t-1}}$ перший доданок відповідає випадку, коли перед елементом $q_t$ не міститься жодних інших елементів, тобто коли $t=1$. Наступні доданки, що знаходяться під знаком суми, відповідають випадкам, коли перед $q_t$ міститься принаймні один елемент. Згідно з лемою 2.2:

$$1+\sum_{q_1<\dots<q_t}\frac{1}{q_1\cdots q_{t-1}} = 1+B\left(0,q_t\right) = 1+q_t-1 = q_t.$$

В сумі $1+\sum\limits_{q_t<\dots<q_m} \frac{1}{q_{t+1}\cdots q_{m-1}}$ перший доданок відповідає випадку, коли між

елементами $q_t$ та $q_m$ не міститься жодного елемента, тобто коли $m = t + 1$. Наступні доданки, що містяться під знаком суми, відповідають випадкам, коли між $q_t$ та $q_m$ міститься принаймні один елемент. Згідно з лемою 2.2:

$$1 + \sum_{q_t < \cdots < q_m} \frac{1}{q_{t+1} \cdots q_{m-1}} = 1 + B\left(q_t, q_m - q_t\right) = 1 + \frac{q_m - q_t - 1}{q_t + 1} = \frac{q_m}{q_t + 1}.$$

Тому

$$\sum_{\substack{t,m \in \mathbb{N} \\ t<m}} \mathbf{M} \frac{1}{(q_t + n)(q_m + n)} = \sum_{0<q_t<q_m} \frac{1}{(q_t + 1)(q_t + n)(q_m + 1)(q_n + n)} =$$

$$= \sum_{q_t=1}^{\infty} \left( \frac{1}{(q_t + 1)(q_t + n)} \cdot \sum_{q_m = q_t + 1}^{\infty} \frac{1}{(q_m + 1)(q_m + n)} \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \left( \frac{1}{(j + 1)(j + n)} \cdot \sum_{u=j+1}^{\infty} \frac{1}{(u + 1)(u + n)} \right).$$

Остаточно отримуємо, що

$$\mathbf{D}\xi_n = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{M} \frac{1}{(q_k + n)^2} + 2 \cdot \sum_{\substack{t,m \in \mathbb{N} \\ t<m}} \mathbf{M} \frac{1}{(q_t + n)(q_m + n)} - (\mathbf{M}\xi_n)^2 =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(j + 1)(j + n)^2} +$$

$$+ 2 \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \left( \frac{1}{(j + 1)(j + n)} \cdot \sum_{u=j+1}^{\infty} \frac{1}{(u + 1)(u + n)} \right) - (\mathbf{M}\xi_n)^2. \quad \square$$

**Наслідок 2.5.** *При* $n = 0$*:*

$$\mathbf{D}\xi_0 = 2 - \frac{\pi^2}{6}.$$

*Доведення.* З теореми 2.15 та наслідку 2.2 отримуємо:

$$\mathbf{D}\xi_0 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2(j + 1)} + 2 \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \left( \frac{1}{j(j + 1)} \cdot \sum_{u=j+1}^{\infty} \frac{1}{u(u + 1)} \right) - 1 =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2(j + 1)} + 2 \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j(j + 1)^2} - 1 =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \left( \frac{1}{j^2} - \frac{1}{j(j+1)} \right) + 2 \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \left( \frac{1}{j(j+1)} - \frac{1}{(j+1)^2} \right) - 1 =$$
$$= \frac{\pi^2}{6} - 1 + 2 \cdot \left( 2 - \frac{\pi^2}{6} \right) - 1 = 2 - \frac{\pi^2}{6}. \qquad \square$$

**Наслідок 2.6.** *При* $n = 2$*:*

$$\mathbf{D}\xi_2 = 5 - \frac{\pi^2}{2}.$$

*Доведення.* З теореми 2.15 та наслідку 2.4 отримуємо:

$$\mathbf{D}\xi_2 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(j+1)(j+2)^2} +$$
$$+ 2 \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \left( \frac{1}{(j+1)(j+2)} \cdot \sum_{u=j+1}^{\infty} \frac{1}{(u+1)(u+2)} \right) - \left( \frac{H_2 - 1}{2 - 1} \right)^2 =$$
$$= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(j+1)(j+2)^2} + 2 \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(j+1)(j+2)^2} - \left( \frac{1}{2} \right)^2 =$$
$$= 3 \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \left( \frac{1}{(j+1)(j+2)} - \frac{1}{(j+2)^2} \right) - \frac{1}{4} =$$
$$= 3 \cdot \left( \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{4} - \frac{\pi^2}{6} \right) - \frac{1}{4} = 5 - \frac{\pi^2}{2}. \qquad \square$$

**Наслідок 2.7.** *При* $n \geqslant 3$*:*

$$\mathbf{D}\xi_n = \frac{n^2 + 5n - 2}{n(n+1)^3} H_n - \frac{3H_n^2}{(n-1)^2} - \frac{2}{n(n-1)} +$$
$$+ \frac{n+1}{(n-1)^2} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2} + \frac{2}{n-1} \sum_{r=2}^{n-1} \frac{H_r}{(n-r)(r-1)} - \frac{n+1}{(n-1)^2} \cdot \frac{\pi^2}{6},$$

*де* $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ *—* $n$*-не гармонічне число.*

*Доведення.* З теореми 2.15 та наслідку 2.4 отримуємо:

$$\mathbf{D}\xi_n = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(j+1)(j+n)^2} +$$
$$+ 2 \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \left( \frac{1}{(j+1)(j+n)} \cdot \sum_{u=j+1}^{\infty} \frac{1}{(u+1)(u+n)} \right) - \left( \frac{H_n - 1}{n - 1} \right)^2.$$

Знайдемо значення суми $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(j+1)(j+n)^2}$:

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(j+1)(j+n)^2} = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(j+1)(j+n)} - \frac{1}{(j+n)^2}\right) =$$
$$= \frac{1}{(n-1)^2}\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{j+1} - \frac{1}{j+n}\right) - \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(j+n)^2} =$$
$$= \frac{1}{(n-1)^2}\left(\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n-1}\sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{1}{j^2} =$$
$$= \frac{H_n - 1}{(n-1)^2} + \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^2} - \frac{1}{n-1}\cdot\frac{\pi^2}{6}.$$

Знайдемо значення суми $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(j+1)(j+n)} \cdot \sum\limits_{u=j+1}^{\infty}\frac{1}{(u+1)(u+n)}\right)$:

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(j+1)(j+n)} \cdot \sum_{u=j+1}^{\infty}\frac{1}{(u+1)(u+n)}\right) =$$
$$= \sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(j+1)(j+n)(n-1)}\left(\frac{1}{j+2} + \dots + \frac{1}{j+n}\right)\right) =$$
$$= \frac{1}{n-1}\sum_{r=2}^{n-1}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(j+1)(j+r)(j+n)} + \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(j+1)(j+n)^2}\ .$$

Зауважимо, що

$$\frac{1}{(j+1)(j+r)(j+n)} = \frac{1}{(r-1)(n-1)(j+1)} + \frac{1}{(n-r)(n-1)(j+n)} - \frac{1}{(n-r)(r-1)(j+r)}.$$

Тоді, оскільки $\frac{1}{(r-1)(n-1)} + \frac{1}{(n-r)(n-1)} - \frac{1}{(n-r)(r-1)} = 0$, то

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(j+1)(j+r)(j+n)} = \frac{1}{(r-1)(n-1)}\left(\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) -$$
$$- \frac{1}{(n-r)(r-1)}\left(\frac{1}{r+1} + \dots + \frac{1}{n}\right) = \frac{H_n - 1}{(r-1)(n-1)} - \frac{H_n - H_r}{(n-r)(r-1)};$$

$$\sum_{r=2}^{n-1}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(j+1)(j+r)(j+n)}=\sum_{r=2}^{n-1}\left(\frac{H_n-1}{(r-1)(n-1)}-\frac{H_n-H_r}{(n-r)(r-1)}\right)=$$

$$=\frac{H_n-1}{n-1}\sum_{r=2}^{n-1}\frac{1}{r-1}-H_n\sum_{r=2}^{n-1}\frac{1}{(n-r)(r-1)}+\sum_{r=2}^{n-1}\frac{H_r}{(n-r)(r-1)}=$$

$$=\frac{(H_n-1)H_{n-2}}{n-1}-\frac{H_n}{n-1}\sum_{r=2}^{n-1}\left(\frac{1}{r-1}+\frac{1}{n-r}\right)+\sum_{r=2}^{n-1}\frac{H_r}{(n-r)(r-1)}=$$

$$=\frac{H_nH_{n-2}-H_{n-2}}{n-1}-\frac{2H_nH_{n-2}}{n-1}+\sum_{r=2}^{n-1}\frac{H_r}{(n-r)(r-1)}=$$

$$=\frac{-H_nH_{n-2}-H_{n-2}}{n-1}+\sum_{r=2}^{n-1}\frac{H_r}{(n-r)(r-1)}.$$

Остаточно отримуємо, що

$$\mathbf{D}\xi_n=\frac{H_n-1}{(n-1)^2}+\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^2}-\frac{1}{n-1}\cdot\frac{\pi^2}{6}+$$

$$+\frac{2}{n-1}\left(\frac{-H_nH_{n-2}-H_{n-2}}{n-1}+\sum_{r=2}^{n-1}\frac{H_r}{(n-r)(r-1)}\right)+$$

$$+\frac{2}{n-1}\left(\frac{H_n-1}{(n-1)^2}+\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^2}-\frac{1}{n-1}\cdot\frac{\pi^2}{6}\right)-\left(\frac{H_n-1}{n-1}\right)^2.$$

Якщо врахувати, що $H_{n-2}=H_n-\frac{1}{n}-\frac{1}{n-1}$, розкрити дужки та згрупувати відповідні доданки, отримаємо

$$\mathbf{D}\xi_n=\frac{n^2+5n-2}{n(n+1)^3}H_n-\frac{3H_n^2}{(n-1)^2}-\frac{2}{n(n-1)}+$$

$$+\frac{n+1}{(n-1)^2}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^2}+\frac{2}{n-1}\sum_{r=2}^{n-1}\frac{H_r}{(n-r)(r-1)}-\frac{n+1}{(n-1)^2}\cdot\frac{\pi^2}{6}.\quad\square$$

**Наслідок 2.8.** *При* $n=3$*:*

$$\mathbf{D}\xi_3=\frac{27}{16}-\frac{\pi^2}{6}.$$

## 2.3. Випадкова величина, що пов'язана з рядами Енгеля

Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, \lambda)$ — ймовірнісний простір, де $\Omega = (0,1]$, $\lambda$ — міра Лебега, $\mathcal{F}$ — $\sigma$-алгебра вимірних за Лебегом підмножин множини $\Omega$.

На множині збіжності ряду $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p_k(x)+n}$, $n \in \mathbb{N}_0$, визначимо функцію

$$\psi_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p_k(x)+n}.$$

Далі ми доведемо, що функції $\psi_n$ визначені (набувають скінченних значень) майже скрізь на $\Omega$ та є випадковими величинами, обчислимо їхні математичні сподівання $\mathbf{M}\psi_n$ та дисперсії $\mathbf{D}\psi_n$.

### 2.3.1. Функція $\psi_n$ як випадкова величина.

**Теорема 2.16.** *Функції* $\frac{1}{p_k(x)+1}$, *де* $k \in \mathbb{N}$, *є випадковими величинами.*

*Доведення.* Щоб довести, що функція $\frac{1}{p_k(x)+1}$ є випадковою величиною (вимірною на $(\Omega, \mathcal{F}, \lambda)$), достатньо показати, що $\left\{x\colon \frac{1}{p_k(x)+1} \leqslant a\right\} \in \mathcal{F}$ для кожного $a \in \mathbb{R}$. Зрозуміло, що $\frac{1}{p_k(x)+1}$ може набувати тільки зліченну кількість значень, причому $0 < \frac{1}{p_k(x)+1} \leqslant \frac{1}{2}$.

Якщо $a \leqslant 0$, то $\left\{x\colon \frac{1}{p_k(x)+1} \leqslant a\right\} = \varnothing \in \mathcal{F}$.

Якщо $a \geqslant \frac{1}{2}$, то $\left\{x\colon \frac{1}{p_k(x)+1} \leqslant a\right\} = \Omega \in \mathcal{F}$.

Нехай $0 < a < \frac{1}{2}$. Тоді функція $\frac{1}{p_k(x)+1}$ набуває зліченну кількість значень, що не перевищують $a$, а саме значень з множини $\left\{\frac{1}{m}, \frac{1}{m+1}, \ldots\right\}$, де $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ та $\frac{1}{m} \leqslant a < \frac{1}{m-1}$. Тоді

$$\left\{x\colon \frac{1}{p_k(x)+1} \leqslant a\right\} = \bigcup_{r=0}^{\infty} \left\{x\colon \frac{1}{p_k(x)+1} = \frac{1}{m+r}\right\} =$$

$$= \bigcup_{r=0}^{\infty} \{x\colon p_k(x)+1 = m+r\} = \bigcup_{r=0}^{\infty} \left( \bigcup_{c_1 \leqslant \cdots \leqslant c_{k-1} \leqslant m+r-1} \Delta^E_{c_1 \ldots c_{k-1}[m+r-1]} \right).$$

Зрозуміло, що $\bigcup\limits_{c_1 \leqslant \cdots \leqslant c_{k-1} \leqslant m+r-1} \Delta^E_{c_1 \ldots c_{k-1}[m+r-1]}$ є зліченним об'єднанням циліндрів, кожен з яких є вимірною за Лебегом множиною. Тому

$$\bigcup_{c_1\leqslant\cdots\leqslant c_{k-1}\leqslant m+r-1}\Delta^E_{c_1\ldots c_{k-1}[m+r-1]}\in\mathcal{F}.$$

Звідси отримуємо, що $\left\{x\colon \frac{1}{p_k(x)+1}\leqslant a\right\}\in\mathcal{F}$.

Остаточно, $\left\{x\colon \frac{1}{p_k(x)+1}\leqslant a\right\}\in\mathcal{F}$ при всіх $a\in\mathbb{R}$. Тому функція $\frac{1}{p_k(x)+1}$ є випадковою величиною для кожного $k\in\mathbb{N}$. □

**Наслідок 2.9.** *Функції* $\frac{1}{p_k(x)+n}$, *де* $k\in\mathbb{N}, n\in\mathbb{N}_0$, *є випадковими величинами.*

Розглянемо допоміжну величину

$$A(k,t)=\sum_{k\leqslant p_1\leqslant\cdots\leqslant p_m\leqslant k+t}\frac{1}{(p_1+1)\cdots(p_m+1)},$$

де $k\in\mathbb{N}$, $t\in\mathbb{N}_0$, а сума обчислюється по всеможливим скінченним послідовностям $(p_i)_{i=1}^m$ таким, що $k\leqslant p_1\leqslant\cdots\leqslant p_m\leqslant k+t$. При цьому кількість $m$ елементів цих послідовностей набуває всеможливих допустимих значень.

**Лема 2.3.** $A(k,t)=\displaystyle\sum_{k\leqslant p_1\leqslant\cdots\leqslant p_m\leqslant k+t}\frac{1}{(p_1+1)\cdots(p_m+1)}=\frac{t+1}{k}.$

*Доведення.* Для доведення рівності скористаємося методом математичної індукції. Нехай $k$ — фіксоване натуральне число, а $t$ — довільне ціле невід'ємне число.

Якщо $t=0$, то

$$A\,(k,0)=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{(k+1)^2}+\cdots=\frac{1}{k}=\frac{t+1}{k},$$

оскільки в цьому випадку $p_i=k$ для кожного $i\in\mathbb{N}$.

Якщо $t=1$, то $p_i=k$ або $p_i=k+1$. Згрупуємо дроби за степенем входження множника $p_i+1=k+2$ в знаменники дробів. Тоді отримаємо:

$$A(k,1)=\left(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{(k+1)^2}+\frac{1}{(k+1)^3}+\cdots\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{k+2}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}+\frac{1}{(k+1)^2(k+2)}+\cdots\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{(k+2)^2}+\frac{1}{(k+1)(k+2)^2}+\frac{1}{(k+1)^2(k+2)^2}+\cdots\right)+\cdots=$$
$$=A(k,0)+\frac{1}{k+2}(1+A(k,0))+\frac{1}{(k+2)^2}(1+A(k,0))+\cdots=$$
$$=A(k,0)+(1+A(k,0))\left(\frac{1}{k+2}+\frac{1}{(k+2)^2}+\cdots\right)=$$
$$=\frac{1}{k}+\frac{k+1}{k}\cdot\frac{1}{k+1}=\frac{2}{k}=\frac{t+1}{k}.$$

При $t=0$ та $t=1$ твердження виконується. Припустимо, що твердження виконується при $t=s$, тобто має місце рівність $A(k,s)=\frac{s+1}{k}$. Тоді при $t=s+1$, згрупувавши дроби за степенем входження в їхні знаменники множника $k+s+2$, аналогічно з випадком при $t=1$, отримаємо:

$$A(k,s+1)=A(k,s)+\frac{1}{k+s+2}(1+A(k,s))+$$
$$+\frac{1}{(k+s+2)^2}(1+A(k,s))+\cdots=$$
$$=A(k,s)+(1+A(k,s))\left(\frac{1}{k+s+2}+\frac{1}{(k+s+2)^2}+\cdots\right)=$$
$$=\frac{s+1}{k}+\frac{k+s+1}{k}\cdot\frac{1}{k+s+1}=\frac{s+1}{k}+\frac{1}{k}=\frac{s+2}{k}=\frac{t+1}{k}.$$

Отже, в силу принципу математичної індукції, $A(k,t)=\frac{t+1}{k}$ для довільного $t\in\mathbb{N}_0$ та довільного $k\in\mathbb{N}$. □

*Зауваження* 2.6. Вираз для величини $A\left(k,t\right)$ можна переписати наступним чином:

$$A\left(k,t\right)=\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{k\leqslant p_1\leqslant\cdots\leqslant p_m\leqslant k+t}\frac{1}{(p_1+1)\cdots(p_m+1)}\right),$$

де внутрішня сума обчислюється по всеможливим послідовностям фіксованої довжини $m$.

**Теорема 2.17.** *Ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{p_k(x)+n}$ *збігається майже скрізь (в сенсі міри Лебега) на множині* $\Omega$.

*Доведення.* Покажемо, що ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\int\limits_{\Omega}\frac{1}{p_k(x)+n}\,d\lambda$ є збіжним.

$$\int\limits_{\Omega}\frac{1}{p_1(x)+n}\,d\lambda=\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{j+n}\cdot\lambda(\Delta_j^E)\right)=$$
$$=\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{j+n}\cdot\frac{1}{(j+1)j}\right)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j(j+1)(j+n)};$$

$$\sum_{k=2}^{\infty}\int\limits_{\Omega}\frac{1}{p_k(x)+n}\,d\lambda=\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{p_k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{p_k+n}\cdot\sum_{1\leqslant p_1\leqslant\cdots\leqslant p_{k-1}\leqslant p_k}\lambda(\Delta^E_{p_1\ldots p_{k-1}p_k})\right)=$$
$$=\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{p_k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{p_k+n}\cdot\sum_{1\leqslant p_1\leqslant\cdots\leqslant p_{k-1}\leqslant p_k}\frac{1}{(p_1+1)\cdots(p_k+1)\,p_k}\right)=$$
$$=\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{p_k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{p_k(p_k+1)(p_k+n)}\cdot\sum_{1\leqslant p_1\leqslant\cdots\leqslant p_{k-1}\leqslant p_k}\frac{1}{(p_1+1)\cdots(p_{k-1}+1)}\right)=$$
$$=\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{j(j+1)(j+n)}\cdot\sum_{1\leqslant p_1\leqslant\cdots\leqslant p_{k-1}\leqslant j}\frac{1}{(p_1+1)\cdots(p_{k-1}+1)}\right)=$$
$$=\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{j(j+1)(j+n)}\cdot\sum_{k=2}^{\infty}\left(\sum_{1\leqslant p_1\leqslant\cdots\leqslant p_{k-1}\leqslant j}\frac{1}{(p_1+1)\cdots(p_{k-1}+1)}\right)\right)=$$
$$=\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{j(j+1)(j+n)}\cdot A\,(1,j-1)\right)=\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{j(j+1)(j+n)}\cdot j\right)=$$
$$=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(j+1)(j+n)}\ .$$

Остаточно отримуємо, що

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{\Omega}\frac{1}{p_k(x)+n}\,d\lambda=\int\limits_{\Omega}\frac{1}{p_1(x)+n}\,d\lambda+\sum_{k=2}^{\infty}\int\limits_{\Omega}\frac{1}{p_k(x)+n}\,d\lambda=$$
$$=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j(j+1)(j+n)}+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(j+1)(j+n)}=$$
$$=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1+j}{j(j+1)(j+n)}=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j(j+n)}.$$

Отже, згідно з наслідком 1.9, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p_k(x)+n}$ збігається майже скрізь на множині $\Omega$. При цьому

$$\int\limits_{\Omega} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p_k(x)+n} \right) d\lambda = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{\Omega} \frac{1}{p_k(x)+n}\, d\lambda = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j(j+n)}. \qquad \square$$

Зауважимо, що для кожного $x \in \Omega$ ряди $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p_k(x)+n}$, $n \in \mathbb{N}_0$, або одночасно збіжні, або одночасно розбіжні. Це слідує з теореми 1.22.

Позначимо через $\Omega^*$ підмножину множини $\Omega$, на якій функціональні ряди $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p_k(x)+n}$ збіжні. Згідно з попередньою теоремою, $\lambda(\Omega^*) = \lambda(\Omega) = 1$. Нехай $\mathcal{F}^*$ — $\sigma$-алгебра підмножин множини $\Omega^*$, вимірних за Лебегом. Таким чином, $(\Omega^*, \mathcal{F}^*, \lambda)$ — ймовірнісний простір. Тоді функції $\psi_n(x)$ є випадковими величинами на $(\Omega^*, \mathcal{F}^*, \lambda)$, оскільки є границями послідовностей вимірних функцій $\sum\limits_{k=1}^{m} \frac{1}{p_k(x)+n}$, що монотонно зростають в кожній точці області визначення.

**Теорема 2.18.** *Множина $\Omega \setminus \Omega^*$, що складається з чисел, в яких ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p_k(x)+n}$ розбіжний, є континуальною та щільною в $(0;1)$.*

*Доведення.* Не порушуючи загальності, можемо вважати, що $\Omega \setminus \Omega^*$ є множиною розбіжності ряду $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p_k(x)}$. Нехай $\varepsilon > 0$ та $x_0 = \Delta^E_{c_1 c_2 \ldots} \in (0;1)$ — довільні фіксовані числа. Оскільки

$$\left|\Delta^E_{c_1 \ldots c_m}\right| = \frac{1}{(c_1+1)\cdots(c_m+1)\, c_m} \leqslant \frac{1}{2^m}\ ,$$

то існує таке $N = N(\varepsilon)$, що $\left|\Delta^E_{c_1 \ldots c_m}\right| < \varepsilon$ для кожного $m \geqslant N$. Тому при $m \geqslant N$ циліндр $\Delta^E_{c_1 \ldots c_m}$ повністю міститься в $\varepsilon$-околі точки $x_0$.

Зафіксуємо деяке $m \geqslant N$ та розглянемо множину

$$K = \left\{ x \colon x = \Delta^E_{c_1 \ldots c_m a_1 a_2 \ldots}, a_j = c_m + 2j + t_j, t_j \in \{0;1\} \right\}.$$

Зауважимо, що довільна послідовність $(t_j)_{j=1}^{\infty}$ визначає деяке число $x$ з циліндра $\Delta^E_{c_1 \ldots c_m}$, оскільки $c_m < a_1 < a_2 < \cdots$ . Отже, $K \subset \Delta^E_{c_1 \ldots c_m}$, а тому $K$ повністю міститься в $\varepsilon$-околі точки $x_0$. При цьому множина $K$ є континуальною, оскільки має місце взаємно однозначна відповідність між елементами множини $K$ та континуальною множиною всеможливих послідовностей $(t_j)_{j=1}^{\infty}$ нулів та одиниць.

Для кожного $x \in K$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p_k(x)}$ розбіжний, оскільки

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p_k(x)} = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{c_k} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{c_m + 2j + t_j},$$

а ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{1}{c_m+2j+t_j}$ розбіжний. Для цього достатньо застосувати теорему 1.22 до даного ряду та гармонічного ряду. Отже, $K \subset \Omega \setminus \Omega^*$. Звідси слідує, що $\Omega \setminus \Omega^*$ континуальна.

Оскільки в довільному $\varepsilon$-околі довільної точки $x_0 \in (0;1)$ містяться числа з множини $\Omega \setminus \Omega^*$, то $\Omega \setminus \Omega^*$ щільна в $(0;1)$. $\square$

### 2.3.2. Числові характеристики випадкової величини $\psi_n$.

**Теорема 2.19.** *Математичне сподівання* $\mathbf{M}\psi_n$ *випадкової величини* $\psi_n$ *дорівнює*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j(j+n)}.$$

*Доведення.* Враховуючи проміжні результати, одержані при доведенні теореми 2.17, отримуємо:

$$\mathbf{M}\psi_n = \int\limits_{\Omega^*} \psi_n(x)\, d\lambda = \int\limits_{\Omega} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p_k(x)+n} \right) d\lambda = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j(j+n)}. \qquad \square$$

**Наслідок 2.10.** *При* $n = 0$*:*

$$\mathbf{M}\psi_0 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

**Наслідок 2.11.** *При* $n = 1$*:*

$$\mathbf{M}\psi_1 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j(j+1)} = 1.$$

**Наслідок 2.12.** *При $n \geqslant 2$:*

$$\mathbf{M}\psi_n = \frac{H_n}{n},$$

*де $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ — $n$-не гармонічне число.*

*Доведення.* Згідно з теоремою 2.19, при $n \geqslant 2$ маємо:

$$\mathbf{M}\psi_n = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j(j+n)} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{n}{j(j+n)} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(j+n)-j}{j(j+n)} =$$
$$= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{\infty} \left( \frac{1}{j} - \frac{1}{j+n} \right) = \frac{1}{n} \cdot \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \right) = \frac{H_n}{n}. \qquad \square$$

**Теорема 2.20.** *Дисперсія $\mathbf{D}\psi_n$ випадкової величини $\psi_n$ обчислюється за формулою*

$$\mathbf{D}\psi_n = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j(j+n)^2} + 2 \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \left( \frac{1}{j(j+n)} \sum_{u=j}^{\infty} \frac{1}{u(u+n)} \right) - (\mathbf{M}\psi_n)^2.$$

*Доведення.* Оскільки $\mathbf{D}\psi_n = \mathbf{M}\psi_n^2 - (\mathbf{M}\psi_n)^2$, а математичне сподівання $\mathbf{M}\psi_n$ знаходиться за теоремою 2.18, то обчислення дисперсії $\mathbf{D}\psi_n$ зводиться до обчислення математичного сподівання випадкової величини $\psi_n^2$ :

$$(\psi_n(x))^2 = \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p_k(x)+n} \right)^2 =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(p_k(x)+n)^2} + 2 \cdot \sum_{\substack{t,m \in \mathbb{N} \\ t<m}} \frac{1}{(p_t(x)+n)(p_m(x)+n)}.$$

Кожна з двох сум в останній рівності є вимірною функцією, яка набуває на $\Omega^*$ тільки скінченні значення, а тому вони є випадковими величинами. При цьому кожен доданок, що входить до цих сум, також є випадковою величиною. Тому

$$\mathbf{M}\psi_n^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{M} \frac{1}{(p_k+n)^2} + 2 \cdot \sum_{\substack{t,m \in \mathbb{N} \\ t<m}} \mathbf{M} \frac{1}{(p_t+n)(p_m+n)}.$$

Знайдемо значення суми $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathbf{M}\frac{1}{(p_k+n)^2}$:

$$\mathbf{M}\frac{1}{(p_1+n)^2} = \sum_{p_1=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(p_1+n)^2}\cdot\lambda\left(\Delta^E_{p_1}\right)\right) =$$

$$= \sum_{p_1=1}^{\infty}\frac{1}{p_1(p_1+1)(p_1+n)^2} = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j(j+1)(j+n)^2};$$

$$\sum_{k=2}^{\infty}\mathbf{M}\frac{1}{(p_k+n)^2} = \sum_{k=2}^{\infty}\sum_{p_k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(p_k+n)^2}\cdot\sum_{1\leqslant p_1\leqslant\cdots\leqslant p_{k-1}\leqslant p_k}\lambda(\Delta^E_{p_1\ldots p_{k-1}p_k})\right) =$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty}\sum_{p_k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(p_k+n)^2}\cdot\sum_{1\leqslant p_1\leqslant\cdots\leqslant p_{k-1}\leqslant p_k}\frac{1}{(p_1+1)\cdots(p_{k-1}+1)(p_k+1)p_k}\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{j(j+1)(j+n)^2}\cdot\sum_{k=2}^{\infty}\left(\sum_{1\leqslant p_1\leqslant\cdots\leqslant p_{k-1}\leqslant j}\frac{1}{(p_1+1)\cdots(p_{k-1}+1)}\right)\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{j(j+1)(j+n)^2}\cdot A\left(1, j-1\right)\right) = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(j+1)(j+n)^2}.$$

Як наслідок, маємо:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{M}\frac{1}{(p_k+n)^2} = \mathbf{M}\frac{1}{(p_1+n)^2} + \sum_{k=2}^{\infty}\mathbf{M}\frac{1}{(p_k+n)^2} =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j(j+1)(j+n)^2} + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(j+1)(j+n)^2} = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j(j+n)^2}.$$

Тепер знайдемо значення наступної суми:

$$\sum_{\substack{t,m\in\mathbb{N}\\ t<m}}\mathbf{M}\frac{1}{(p_t+n)(p_m+n)} =$$

$$= \sum_{\substack{t,m\in\mathbb{N}\\ t<m}}\sum_{p_1\leqslant\cdots\leqslant p_m}\left(\frac{1}{(p_t+n)(p_m+n)}\cdot\lambda\left(\Delta^E_{p_1\ldots p_t\ldots p_m}\right)\right) =$$

$$= \sum_{1\leqslant p_t\leqslant p_m}\left(\frac{1}{(p_t+1)(p_t+n)p_m(p_m+1)(p_m+n)}\cdot\right.$$

$$\cdot \sum_{1\leqslant p_1\leqslant\cdots\leqslant p_t\leqslant\cdots\leqslant p_m} \frac{1}{(p_1+1)\cdots(p_{t-1}+1)(p_{t+1}+1)\cdots(p_{m-1}+1)}\Bigg) =$$

$$= \sum_{1\leqslant p_t\leqslant p_m} \left(\frac{1}{(p_t+1)(p_t+n)p_m(p_m+1)(p_m+n)}\cdot\right.$$

$$\cdot\left(1+\sum_{1\leqslant p_1\leqslant\cdots\leqslant p_k}\frac{1}{(p_1+1)\cdots(p_{k-1}+1)}\right)\cdot$$

$$\left.\cdot\left(1+\sum_{p_k\leqslant\cdots\leqslant p_m}\frac{1}{(p_{k+1}+1)\cdots(p_{m-1}+1)}\right)\right).$$

Зауважимо, що під сумою виду $\sum\limits_{\substack{t,m\in\mathbb{N}\\ t<m}}\sum\limits_{p_1\leqslant\cdots\leqslant p_m}$ ми маємо на увазі суму по всеможливим послідовностям натуральних чисел $p_1 \leqslant \cdots \leqslant p_t \leqslant \cdots \leqslant p_m$, де номери $t$ та $m$ зафіксовані першою сумою. В свою чергу, в сумах виду $\sum\limits_{1\leqslant p_t\leqslant p_m}\sum\limits_{1\leqslant p_1\leqslant\cdots\leqslant p_t\cdots\leqslant p_m}$ підсумовування відбувається по всеможливих послідовностях $p_1 \leqslant \cdots \leqslant p_t \leqslant \cdots \leqslant p_m$, де числа $p_t$ та $p_m$ зафіксовані першою сумою, проте їхні номери не зафіксовані та можуть набувати довільних значень таких, що $t < m$.

В сумі $1+\sum\limits_{1\leqslant p_1\leqslant\cdots\leqslant p_t}\frac{1}{(p_1+1)\cdots(p_{t-1}+1)}$ перший доданок відповідає випадку, коли перед елементом $p_t$ не міститься жодного елемента ($t = 1$). Наступні доданки, що знаходяться під знаком суми, відповідають випадкам, коли перед $p_t$ міститься принаймні один елемент. Згідно з лемою 2.3:

$$1+\sum_{1\leqslant p_1\leqslant\cdots\leqslant p_t}\frac{1}{(p_1+1)\cdots(p_{t-1}+1)} = 1 + A\left(1, p_t-1\right) = p_t+1.$$

В сумі $1+\sum\limits_{p_t\leqslant\ldots\leqslant p_m}\frac{1}{(p_{t+1}+1)\cdots(p_{m-1}+1)}$ перший доданок відповідає випадку, коли між $p_t$ та $p_m$ не міститься жодного елемента ($m = t+1$). Наступні доданки, що знаходяться під знаком суми, відповідають випадкам, коли між $p_t$ та $p_m$ міститься принаймні один елемент. Згідно з лемою 2.3:

$$1+\sum_{p_t\leqslant\cdots\leqslant p_m}\frac{1}{(p_{t+1}+1)\cdots(p_{m-1}+1)} = 1 + A(p_t, p_m-p_t) = \frac{p_m+1}{p_t}.$$

Тому

$$\sum_{\substack{t,m\in\mathbb{N}\\ t<m}} \mathbf{M}\frac{1}{(p_t+n)(p_m+n)} = \sum_{1\leqslant p_t\leqslant p_m} \frac{1}{p_t(p_t+n)p_m(p_m+n)} =$$

$$= \sum_{p_t=1}^{\infty}\left(\frac{1}{p_t(p_t+n)}\cdot\sum_{p_m=p_t}^{\infty}\frac{1}{p_m(p_m+n)}\right) = \sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{j(j+n)}\cdot\sum_{u=j}^{\infty}\frac{1}{u(u+n)}\right).$$

Остаточно отримуємо, що

$$\mathbf{D}\psi_n = \sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{M}\frac{1}{(p_k+n)^2} + 2\cdot\sum_{\substack{t,m\in\mathbb{N}\\ t<m}}\mathbf{M}\frac{1}{(p_t+n)(p_m+n)} - (\mathbf{M}\psi_n)^2 =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j(j+n)^2} + 2\cdot\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{j(j+n)}\sum_{u=j}^{\infty}\frac{1}{u(u+n)}\right) - (\mathbf{M}\psi_n)^2. \quad \square$$

**Наслідок 2.13.** *При $n=1$:*

$$\mathbf{D}\psi_1 = \frac{\pi^2}{6} - 1.$$

*Доведення.* З теореми 2.20 та наслідку 2.11 отримуємо:

$$\mathbf{D}\psi_n = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j(j+1)^2} + 2\cdot\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{j(j+1)}\sum_{u=j}^{\infty}\frac{1}{u(u+1)}\right) - (\mathbf{M}\psi_1)^2 =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{j(j+1)} - \frac{1}{(j+1)^2}\right) + 2\cdot\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{j^2(j+1)}\right) - 1 =$$

$$= 1 - \left(\frac{\pi^2}{6} - 1\right) + 2\cdot\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{j^2} - \frac{1}{j(j+1)}\right) - 1 =$$

$$= 1 - \frac{\pi^2}{6} + 2\cdot\left(\frac{\pi^2}{6} - 1\right) = \frac{\pi^2}{6} - 1.$$

$\square$

**Наслідок 2.14.** *При $n \geqslant 2$:*

$$\mathbf{D}\psi_n = \frac{H_n}{n^2} - \frac{3H_n^2}{n^2} + \frac{1}{n}\cdot\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^2} + \frac{2}{n}\cdot\sum_{r=1}^{n-1}\frac{H_r}{r(n-r)} - \frac{n-2}{n^2}\cdot\frac{\pi^2}{6},$$

*де $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ — $n$-не гармонічне число.*

*Доведення.* З теореми 2.20 та наслідку 2.12 отримуємо:

$$\mathbf{D}\psi_n = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j(j+n)^2} + 2 \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \left( \frac{1}{j(j+n)} \cdot \sum_{u=j}^{\infty} \frac{1}{u(u+n)} \right) - \left( \frac{H_n}{n} \right)^2.$$

Знайдемо значення суми $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j(j+n)^2}$:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j(j+n)^2} =& \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \left( \frac{1}{j(j+n)} - \frac{1}{(j+n)^2} \right) = \\
=& \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \left( \frac{1}{j} - \frac{1}{j+n} \right) - \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(j+n)^2} = \\
=& \frac{1}{n^2} \cdot \left( \frac{1}{1} + \dots + \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{j^2} = \\
=& \frac{H_n}{n^2} + \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2} - \frac{1}{n} \cdot \frac{\pi^2}{6}.
\end{aligned}$$

Знайдемо значення суми $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \left( \frac{1}{j(j+n)} \cdot \sum\limits_{u=j}^{\infty} \frac{1}{u(u+n)} \right)$:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{\infty} \left( \frac{1}{j(j+n)} \cdot \sum_{u=j}^{\infty} \frac{1}{u(u+n)} \right) = \\
&\quad = \sum_{j=1}^{\infty} \left( \frac{1}{j(j+n)n} \left( \frac{1}{j} + \dots + \frac{1}{j+n-1} \right) \right) = \\
&\quad = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2(j+n)} + \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j(j+r)(j+n)} \ ;
\end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2(j+n)} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{\infty} \left( \frac{1}{j^2} - \frac{1}{j(j+n)} \right) = \frac{1}{n} \cdot \frac{\pi^2}{6} - \frac{H_n}{n^2}.$$

Зауважимо, що

$$\frac{1}{j(j+r)(j+n)} = \frac{1}{rnj} + \frac{1}{n(n-r)(j+n)} - \frac{1}{r(n-r)(j+r)}.$$

Тоді, оскільки $\frac{1}{rn}+\frac{1}{n(n-r)}-\frac{1}{r(n-r)}=0$, то

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j(j+r)(j+n)} =\frac{1}{rn}\left(\frac{1}{1}+\cdots+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{r(n-r)}\left(\frac{1}{r+1}+\cdots+\frac{1}{n}\right)= =\frac{H_n}{rn}-\frac{H_n-H_r}{r(n-r)};$$

$$\sum_{r=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j(j+r)(j+n)}=\sum_{r=1}^{n-1}\left(\frac{H_n}{rn}-\frac{H_n-H_r}{r(n-r)}\right)= =\sum_{r=1}^{n-1}\left(\frac{H_r}{r(n-r)}-\frac{H_n}{n(n-r)}\right)=\sum_{r=1}^{n-1}\frac{H_r}{r(n-r)}-\frac{H_n}{n}\sum_{r=1}^{n-1}\frac{1}{n-r}= =\sum_{r=1}^{n-1}\frac{H_r}{r(n-r)}-\frac{H_nH_{n-1}}{n}.$$

Таким чином

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{j(j+n)}\cdot\sum_{u=j}^{\infty}\frac{1}{u(u+n)}\right)= =\frac{1}{n^2}\cdot\frac{\pi^2}{6}-\frac{H_n}{n^3}+\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n-1}\frac{H_r}{r(n-r)}-\frac{H_nH_{n-1}}{n^2}= =\frac{1}{n^2}\cdot\frac{\pi^2}{6}-\frac{H_n^2}{n^2}+\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n-1}\frac{H_r}{r(n-r)}.$$

Остаточно отримуємо, що

$$\mathbf{D}\psi_n=\frac{H_n}{n^2}+\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^2}-\frac{1}{n}\cdot\frac{\pi^2}{6}+ +2\cdot\left(\frac{1}{n^2}\cdot\frac{\pi^2}{6}-\frac{H_n^2}{n^2}+\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n-1}\frac{H_r}{r(n-r)}\right)-\frac{H_n^2}{n^2}= =\frac{H_n}{n^2}-\frac{3H_n^2}{n^2}+\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^2}+\frac{2}{n}\sum_{r=1}^{n-1}\frac{H_r}{r(n-r)}-\frac{n-2}{n^2}\cdot\frac{\pi^2}{6}. \quad \square$$

**Наслідок 2.15.** $\mathbf{D}\psi_2=\dfrac{5}{16}$.

## 2.4. Задача Гауса–Кузьміна для різницевого представлення дійсних чисел рядами Енгеля

**Означення 2.2.** Функція $\omega$, означена рівністю

$$\omega(x) = \omega(\Delta^{\overline{E}}_{g_1(x)g_2(x)\ldots}) = \Delta^{\overline{E}}_{g_2(x)g_3(x)\ldots}, \tag{2.1}$$

називається оператором лівостороннього зсуву цифр $\overline{E}$-зображення чисел.

З означення функції $\omega$ та властивостей $\overline{E}$-зображення випливає, що функція $\omega$ є:

— сюр'єктивною;

— зростаючою на кожному $\overline{E}$-циліндрі;

— неперервною у всіх внутрішніх точках кожного $\overline{E}$-циліндра.

Оператор $n$-кратного лівостороннього зсуву $\omega^n$ означується рівністю

$$\omega^n(x) \equiv \omega(\omega^{n-1}(x)), \quad \text{де } \omega^1(x) = \omega(x).$$

Розглянемо множину $E_n(a)$ таку, що

$$E_n(a) = \{x\colon x \in (0;1]\,, \omega^n(x) < a\}\,.$$

Задача Гауса–Кузьміна для різницевого зображення дійсних чисел рядами Енгеля ($\overline{E}$-зображення) полягає у знаходженні границі

$$\lim_{n\to\infty} \lambda\left(E_n(a)\right),$$

де $\lambda$ — міра Лебега.

Нехай

$$M_n^k = \bigcup_{\substack{p_{n-1}\leqslant k\\ p_n>k}} \Delta^E_{p_1\ldots p_n}$$

— множина всіх тих чисел, у яких $n-1$ перших $E$-цифр не перевищують $k$, а $n$-на $E$-цифра більша за $k$. Тоді для кожного $x \in (0;1)\setminus\mathbb{Q}$ та кожного $k \in \mathbb{N}$ існує єдине $n = n(x) \in \mathbb{N}$ таке, що $x \in M_n^k$ (наслідок з теореми 1.2).

Зрозуміло, що для кожного $k$ має місце рівність

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(M_n^k) = 1.$$

Звідси отримуємо наступні допоміжні рівності:

$$\lim_{n\to\infty} \lambda(M_n^k) = 0;$$
$$\lim_{r\to\infty} \sum_{n=r+1}^{\infty} \lambda(M_n^k) = 0;$$
$$\lim_{r\to\infty} \sum_{n=1}^{r} \lambda(M_n^k) = 1.$$

**Лема 2.4.** *Для кожного $t \in \mathbb{N}$ має місце рівність*

$$\sum_{i=t}^{\infty} \lambda\left(\Delta^E_{p_1\ldots p_n[p_n+i]}\right) = \frac{p_n}{p_n+t} \cdot \lambda\left(\Delta^E_{p_1\ldots p_n}\right).$$

*Доведення.* Скориставшись теоремою 1.1, отримуємо

$$\sum_{i=t}^{\infty} \lambda\left(\Delta^E_{p_1\ldots p_n[p_n+i]}\right) = \sum_{i=t}^{\infty} \frac{1}{(p_1+1)\cdots(p_n+1)\,(p_n+i+1)\,(p_n+i)} =$$
$$= \frac{1}{(p_1+1)\cdots(p_n+1)} \sum_{i=t}^{\infty} \frac{1}{(p_n+i+1)\,(p_n+i)} =$$
$$= \frac{1}{(p_1+1)\cdots(p_n+1)} \cdot \frac{1}{p_n+t} =$$
$$= \frac{1}{(p_1+1)\cdots(p_n+1)\,p_n} \cdot \frac{p_n}{p_n+t} = \frac{p_n}{p_n+t} \cdot \lambda\left(\Delta^E_{p_1\ldots p_n}\right). \qquad \square$$

**Теорема 2.21.** *Для довільних $\varepsilon \in (0;1)$ та $t \in \mathbb{N}$ існує $H = H(\varepsilon,t) \in \mathbb{N}$ таке, що для всіх натуральних $r > H$:*

$$\lambda\left(\{x\colon g_{r+1}(x) \geqslant t\}\right) > 1-\varepsilon. \tag{2.2}$$

*Доведення.* Нехай $\varepsilon \in (0;1)$ — довільна фіксована як завгодно близька до нуля константа, $t$ — довільне фіксоване натуральне число.

Оскільки $\lim\limits_{p_n\to\infty}\frac{p_n}{p_n+t}=1$, причому послідовність дробів $\frac{p_n}{p_n+t}$ зростаюча, то існує натуральне число $N=N(\varepsilon,t)$ таке, що для всіх $p_n>N$ виконується нерівність

$$\frac{p_n}{p_n+t}>\frac{N}{N+t}>\sqrt{1-\varepsilon}.$$

Оскільки $\lim\limits_{r\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{r}\lambda(M_n^k)=1$, то існує натуральне число $H=H(\varepsilon,t,N)$ таке, що для всіх $r>H$ виконується нерівність

$$\sum_{n=1}^{r}\lambda(M_n^N)>\sqrt{1-\varepsilon}.$$

Розіб'ємо множину

$$\bigcup_{n=1}^{r}M_n^N=\{x\colon p_r(x)>N\}$$

на циліндри рангу $(r+1)$ та оцінимо сумарну міру Лебега $\lambda_t=\lambda(\varepsilon,t,N,r)$ тих циліндрів, для яких $p_{r+1}\geqslant p_r+t$ (тобто $g_{r+1}\geqslant t$):

$$\lambda_t=\sum_{\substack{1\leqslant p_1\leqslant\ldots\leqslant p_r\\ p_r>N}}\left(\sum_{i=t}^{\infty}\lambda\left(\Delta^E_{p_1\ldots p_r[p_r+i]}\right)\right)=\sum_{\substack{1\leqslant p_1\leqslant\ldots\leqslant p_r\\ p_r>N}}\left(\frac{p_r}{p_r+t}\cdot\lambda\left(\Delta^E_{p_1\ldots p_r}\right)\right)>$$
$$>\sum_{\substack{1\leqslant p_1\leqslant\ldots\leqslant p_r\\ p_r>N}}\left(\frac{N}{N+t}\cdot\lambda\left(\Delta^E_{p_1\ldots p_r}\right)\right)=\frac{N}{N+t}\cdot\sum_{\substack{1\leqslant p_1\leqslant\ldots\leqslant p_r\\ p_r>N}}\lambda\left(\Delta^E_{p_1\ldots p_r}\right)=$$
$$=\frac{N}{N+t}\cdot\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{r}M_n^N\right)=\frac{N}{N+t}\cdot\sum_{n=1}^{r}\lambda\left(M_n^N\right)>\sqrt{1-\varepsilon}\cdot\sqrt{1-\varepsilon}=1-\varepsilon.$$

Далі очевидно, що $\lambda\left(\{x\colon g_{r+1}(x)\geqslant t\}\right)\geqslant\lambda_t>1-\varepsilon$. □

**Теорема 2.22.** *Для кожного $a\in(0;1]$ має місце рівність*

$$\lim_{n\to\infty}\lambda\left(E_n(a)\right)=1.$$

*Доведення.* Достатньою умовою для того, щоб $x_1<x_2$, є нерівність $g_1(x_1)>g_1(x_2)$. Тому $(0;1]\supset E_n(a)\supset\{x\colon g_{n+1}(x)>g_1(a)\}$. Звідси

$$1=\lambda\left((0;1]\right)\geqslant\lambda\left(E_n(a)\right)\geqslant\lambda\left(\{x\colon g_{n+1}(x)>g_1(a)\}\right).$$

З теореми 2.21 при $t = g_1(a)$ отримуємо, що для довільних $\varepsilon \in (0;1)$ та $a \in (0;1]$ існує $H = H(\varepsilon, a) \in \mathbb{N}$ таке, що

$$\lambda\left(\{x\colon g_{r+1}(x) \geqslant g_1(a)\}\right) > 1 - \varepsilon$$

для всіх $r > H$. Тоді для кожного $r > H$ має місце нерівність

$$1 \geqslant \lambda\left(E_r(a)\right) \geqslant \lambda\left(\{x\colon g_{r+1}(x) > g_1(a)\}\right) > 1 - \varepsilon.$$

З останньої нерівності маємо, що $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda\left(E_n(a)\right) = 1.$ $\square$

## Висновки до розділу 2

У другому розділі розглянуто наступні об'єкти зі складною локальною структурою, що пов'язані з розкладами дійсних чисел в ряди Енгеля та ряди Остроградського–Серпінського–Пірса: проєктор $O$-зображення в $E$-зображення; випадкові величини, що визначені як функціональні ряди, елементами яких є цифри $O$ та $E$-зображень чисел; динамічна система, що породжена оператором лівостороннього зсуву цифр $\overline{E}$-зображення чисел.

У підрозділі 2.1 встановлено, що проєктор $O$-зображення в $E$-зображення є розривним в кожній раціональній точці та неперервним в кожній ірраціональній точці, є ніде не монотонним та майже скрізь недиференційовним по множині ірраціональних чисел. Визначено тополого-метричну структуру множини значень проєктора та знайдено функцію розподілу значень проєктора. Основні результати цього підрозділу опубліковані в роботі [65] та доповідалися на конференції [64].

У підрозділах 2.2 та 2.3, що присвячені двом випадковим величинам $\xi_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{q_k(x)+n}$ та $\psi_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p_k(x)+n}$, вивчено тополого-метричну структуру множин розбіжності відповідних функціональних рядів, обчислено математичні сподівання та дисперсії цих випадкових величин. Основні результати цих підрозділів опубліковані в роботах [67, 68] та доповідалися на конференції [63].

У підрозділі 2.4 вивчалася динамічна система, породжена оператором лівостороннього зсуву цифр $\overline{E}$-зображення дійсних чисел. Стосовно цієї динамічної системи розв'язано задачу, що аналогічна до задачі Гауса–Кузьміна для елементарних ланцюгових дробів. Основні результати цього підрозділу опубліковано в роботі [56] та доповідалися на конференції [57].

Відкритими залишились питання про структуру розподілу значень проєктора $O$-зображення в $E$-зображення та розподілів випадкових величин $\xi_n$ та $\psi_n$.

# РОЗДІЛ 3
# РЯДИ ПЕРРОНА

Оскар Перрон у роботі [27] наводить приклад ряду, що є узагальненням рядів Енгеля, Люрота та Сильвестера:

$$\frac{1}{p_1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_1 r_2 \cdots r_n}{(p_1-1)p_1(p_2-1)p_2 \cdots (p_n-1)p_n p_{n+1}}\ , \tag{3.1}$$

де $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ — довільна послідовність натуральних чисел, $p_n \in \mathbb{N}$, $p_1 \geqslant 2$, $p_{n+1} \geqslant r_n + 1$ для кожного $n \in \mathbb{N}$.

У роботі [27] автор доводить, що ряд (3.1) є збіжним, його сума є числом з $(0;1]$ і що кожне число з $(0;1]$ можна представити як суму ряду (3.1). Проте для кожного $x \in (0;1]$ таких рядів існує континуальна кількість.

У даному розділі нами запропоновано модифікацію ряду (3.1) та умови, що гарантують єдиність розкладу числа в модифікований ряд (3.1). Ці умови визначають два класи зображень чисел, що мають відносно просту геометрію (метричні та топологічні властивості): $P$-зображення та його різницеву форму ($\overline{P}$-зображення).

## 3.1. Ряди Перрона. Означення та приклади

**Означення 3.1.** Рядом Перрона будемо називати числовий ряд виду

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_0 r_1 \cdots r_n}{(p_1-1)p_1(p_2-1)p_2 \cdots (p_n-1)p_n p_{n+1}}\ , \tag{3.2}$$

де $(r_n)_{n=0}^{\infty}$ — довільна послідовність натуральних чисел, $p_n \in \mathbb{N}$, причому $p_n \geqslant r_{n-1} + 1$ для кожного $n \in \mathbb{N}$.

*Зауваження* 3.1. Надалі під дробом $\frac{r_0 r_1 \cdots r_n}{(p_1-1)p_1(p_2-1)p_2 \cdots (p_n-1)p_n p_{n+1}}$ при значенні $n = 0$ будемо розуміти дріб $\frac{r_0}{p_1}$.

**Лема 3.1.** *Для кожної послідовності натуральних чисел* $(r_n)_{n=0}^{\infty}$ *має місце рівність*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_n}{(r_0+1)\cdots(r_n+1)} = 1.$$

*Доведення.* За допомогою методу математичної індукції можна показати, що для кожного $k \in \mathbb{N}$ має місце рівність

$$\sum_{n=0}^{k} \frac{r_n}{(r_0+1)\cdots(r_n+1)} = 1 - \frac{1}{(r_0+1)\cdots(r_k+1)}.$$

Звідси випливає, що

$$1 - \frac{1}{2^{k+1}} \leqslant \sum_{n=0}^{k} \frac{r_n}{(r_0+1)\cdots(r_n+1)} < 1.$$

Дана лема слідує безпосередньо з останньої нерівності. □

**Лема 3.2.** *Ряд Перрона* (3.2) *є збіжним, причому його сума є числом з проміжку* $(0;1]$.

*Доведення.* Враховуючи лему 3.1, маємо

$$0 < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_0 r_1 \cdots r_n}{(p_1-1)p_1(p_2-1)p_2\cdots(p_n-1)p_n p_{n+1}} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_0 r_1 \cdots r_n}{r_0(r_0+1)r_1(r_1+1)\cdots r_{n-1}(r_{n-1}+1)(r_n+1)} =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_n}{(r_0+1)\cdots(r_n+1)} = 1. \qquad \square$$

Ряд (3.2) є узагальненням рядів Енгеля, Люрота, Сильвестера, які, в свою чергу, є окремим об'єктом досліджень. Ряд (3.2) буде:

1) рядом Енгеля при $r_n = p_n - 1$, $r_0 = 1$;
2) модифікованим рядом Енгеля при $r_n = p_n$, $r_0 = 1$;
3) рядом Люрота при $r_n \equiv 1$, $r_0 = 1$;
4) рядом Сильвестера при $r_n = (p_n - 1)p_n$, $r_0 = 1$.

Наведені приклади рядів, що утворюють підкласи рядів Перрона, мотивують наступне вивчення рядів Перрона як їх узагальнень. Адже всі ті факти, що будуть встановлені для рядів Перрона загалом, будуть справедливі і для будь-якого конкретного підкласу рядів Перрона — як вище згаданих, так і тих, які ще не вивчалися.

## 3.2. Представлення дійсних чисел рядами Перрона

**3.2.1. $P$-зображення чисел. Циліндричні множини.** Нехай маємо функції $\varphi_n(x_1,\ldots,x_n)\colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ для кожного $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_0 = \mathrm{const} \in \mathbb{N}$. Через $P$ позначатимемо фіксовану послідовність функцій $(\varphi_n)_{n=0}^{\infty}$.

**Означення 3.2.** Нехай $x \in (0;1]$ є сумою ряду (3.2), причому $r_0 = \varphi_0$ та $r_n = \varphi_n(p_1,\ldots,p_n)$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Тоді розклад числа $x$ в ряд (3.2) будемо називати його $P$-представленням, а скорочений запис $\Delta^P_{p_1p_2\ldots}$ — його $P$-зображенням. Число $p_i = p_i(x)$ будемо називати $i$-тою цифрою $P$-зображення числа $x$.

**Означення 3.3.** $P$-циліндром рангу $k$ з основою $c_1\ldots c_k$ будемо називати непорожню множину $\Delta^P_{c_1\ldots c_k}$ всіх чисел з $(0;1]$, для яких існує $P$-зображення виду $\Delta^P_{c_1\ldots c_k p_{k+1}p_{k+2}\ldots}$, тобто

$$\Delta^P_{c_1\ldots c_k} = \left\{x\colon x \in (0;1], x = \Delta^P_{c_1\ldots c_k p_{k+1}p_{k+2}\ldots}\right\}.$$

**Лема 3.3.** *Для циліндра $\Delta^P_{c_1\ldots c_k}$ рангу $k$ мають місце рівності*

$$\inf \Delta^P_{c_1\ldots c_k} = \sum_{n=0}^{k-1} \frac{r_0\cdots r_n}{(c_1-1)c_1\cdots(c_n-1)c_nc_{n+1}}, \tag{3.3}$$

$$\sup \Delta^P_{c_1\ldots c_k} = \inf \Delta^P_{c_1\ldots c_k} + \frac{r_0\cdots r_{k-1}}{(c_1-1)c_1\cdots(c_k-1)c_k}, \tag{3.4}$$

$$|\Delta^P_{c_1\ldots c_k}| = \sup\left(\Delta^P_{c_1\ldots c_k}\right) - \inf\left(\Delta^P_{c_1\ldots c_k}\right) = \frac{r_0\cdots r_{k-1}}{(c_1-1)c_1\cdots(c_k-1)c_k}, \tag{3.5}$$

*де $r_0 = \varphi_0$ та $r_n = \varphi_n(c_1,\ldots,c_n)$ для кожного $n = 1,\ldots,k-1$.*

*Доведення.* Доведемо рівність (3.3) для $k=1$. Розглянемо циліндр першого рангу $\Delta^P_{c_1}$. Зрозуміло, що число $\frac{r_0}{c_1}$ є нижньою межею циліндра $\Delta^P_{c_1}$. Покажемо, що число $\frac{r_0}{c_1}$ є точною нижньою межею циліндра $\Delta^P_{c_1}$. Для цього достатньо довести, що в циліндрі $\Delta^P_{c_1}$ містяться числа як завгодно близькі до числа $\frac{r_0}{c_1}$.

Розглянемо ряд Перрона (3.2), у якому послідовності $(r_n)_{n=0}^{\infty}$ та $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ визначені рекурентно: $r_0=\varphi_0$, $p_1=c_1$, $r_n=\varphi_n(p_1,\ldots,p_n)$, $p_{n+1}=r_nq+1$ для кожного $n\in\mathbb{N}$, де $q\in\mathbb{N}$, $q\geqslant 2$. Позначимо суму такого ряду через $x_q$. Очевидно, що $x_q\in\Delta^P_{c_1}$, причому

$$
\begin{aligned}
x_q=\frac{r_0}{c_1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r_0r_1\cdots r_n}{(c_1-1)\,c_1\cdot r_1q\cdot(r_1q+1)\cdots r_{n-1}q\cdot(r_{n-1}q+1)\,(r_nq+1)}\leqslant\\
\leqslant\frac{r_0}{c_1}+\frac{r_0}{(c_1-1)\,c_1}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r_1\cdots r_n}{r_1^2q^2\cdots r_{n-1}^2q^2\cdot r_nq}=\\
=\frac{r_0}{c_1}+\frac{r_0}{(c_1-1)\,c_1}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{r_1\cdots r_{n-1}q^{2n-1}}\leqslant\frac{r_0}{c_1}+\frac{r_0}{(c_1-1)\,c_1}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{q^{2n-1}}=\\
=\frac{r_0}{c_1}+\frac{r_0}{(c_1-1)\,c_1}\cdot\frac{q}{q^2-1}\leqslant\frac{r_0}{c_1}+\frac{r_0}{(c_1-1)\,c_1}\cdot\frac{1}{q-1}.
\end{aligned}
$$

Оскільки $\frac{r_0}{c_1}+\frac{r_0}{(c_1-1)c_1}\cdot\frac{1}{q-1}\to\frac{r_0}{c_1}$ при $q\to\infty$, то $x_q\to\frac{r_0}{c_1}$ при $q\to\infty$. Отже, $\inf\Delta^P_{c_1}=\frac{r_0}{c_1}$. Таким чином, рівність (3.3) доведено для випадку $k=1$.

Доведемо рівність (3.4) для $k=1$. Враховуючи, що $p_n\geqslant r_{n-1}+1$, а також лему 3.1, отримаємо

$$
\begin{aligned}
\Delta^P_{c_1p_2p_3\ldots}=\frac{r_0}{c_1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r_0r_1\cdots r_n}{(c_1-1)\,c_1\,(p_2-1)\,p_2\cdots(p_n-1)\,p_np_{n+1}}\leqslant\\
\leqslant\frac{r_0}{c_1}+\frac{r_0}{(c_1-1)\,c_1}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r_1\cdots r_n}{r_1\,(r_1+1)\cdots r_{n-1}\,(r_{n-1}+1)\,(r_n+1)}=\\
=\frac{r_0}{c_1}+\frac{r_0}{(c_1-1)\,c_1}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r_n}{(r_1+1)\cdots(r_n+1)}=\inf\Delta^P_{c_1}+\frac{r_0}{(c_1-1)\,c_1}.
\end{aligned}
$$

При цьому верхня оцінка завжди досягається і дорівнює сумі ряду, у якому послідовності $(r_n)_{n=0}^{\infty}$ та $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ визначені рекурентно наступним чином: $r_0 = \varphi_0$, $p_1 = c_1$, $r_n = \varphi_n(p_1, \ldots, p_n)$, $p_{n+1} = r_n + 1$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Отже, $\sup \Delta^P_{c_1} = \inf \Delta^P_{c_1} + \frac{r_0}{(c_1-1)c_1}$. Таким чином, рівність (3.4) доведено для випадку $k = 1$.

Доведення рівностей (3.3) та (3.4) для $k \geqslant 2$ аналогічні до доведень цих рівностей при $k = 1$. Рівність (3.5) випливає з рівностей (3.3) та (3.4). □

*Зауваження* 3.2. З доведення леми 3.3 випливає, що точна нижня межа циліндра йому не належить, а точна верхня межа — належить.

**Наслідок 3.1.** *Для циліндра $\Delta^P_{c_1\ldots c_k}$ рангу $k \geqslant 2$ мають місце рівності*

$$\inf \Delta^P_{c_1\ldots c_k} = \inf \Delta^P_{c_1\ldots c_{k-1}} + \frac{r_0 r_1 \cdots r_{k-1}}{(c_1-1)\,c_1\cdots(c_{k-1}-1)\,c_{k-1}c_k}, \tag{3.6}$$

$$\sup \Delta^P_{c_1\ldots c_k} = \inf \Delta^P_{c_1\ldots c_{k-1}} + \frac{r_0 r_1 \cdots r_{k-1}}{(c_1-1)\,c_1\cdots(c_{k-1}-1)\,c_{k-1}(c_k-1)}, \tag{3.7}$$

*де $r_0 = \varphi_0$ та $r_n = \varphi_n(c_1, \ldots, c_n)$ для кожного $n = 1, \ldots, k-1$.*

**Наслідок 3.2.** *Для циліндрів рангу $n$ та кожного $k \geqslant r_{n-1} + 1$ виконується співвідношення* $\inf \Delta^P_{c_1\ldots c_{n-1}k} = \sup \Delta^P_{c_1\ldots c_{n-1}[k+1]}$.

**Лема 3.4.** *Для довільної послідовності $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ такої, що $p_n \geqslant r_{n-1} + 1$, де $r_{n-1} = \varphi_{n-1}(p_1, \ldots, p_{n-1})$,*

$$|\Delta^P_{p_1\ldots p_n}| \to 0 \text{ \textit{при} } n \to \infty.$$

*Доведення.* Нехай послідовність $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ задовольняє умовам даної леми. Тоді, згідно з формулою (3.5), маємо

$$\begin{aligned} 0 < |\Delta^P_{p_1\ldots p_n}| &= \frac{r_0 \cdots r_{n-1}}{(p_1-1)\,p_1\cdots(p_n-1)\,p_n} \leqslant \\ &\leqslant \frac{r_0\cdots r_{n-1}}{r_0\,(r_0+1)\cdots r_{n-1}\,(r_{n-1}+1)} = \\ &= \frac{1}{(r_0+1)\cdots(r_{n-1}+1)} \leqslant \frac{1}{2^n} \to 0. \end{aligned}$$

Тому $|\Delta^P_{p_1\ldots p_n}| \to 0$ при $n \to \infty$. □

**Лема 3.5.** *Для кожної послідовності $P$ функцій $\varphi_i$, кожного $x \in (0;1]$ та $n \in \mathbb{N}$ існує єдиний циліндр $\Delta^P_{p_1\ldots p_n}$ рангу $n$ такий, що*

$$\inf \Delta^P_{p_1\ldots p_n} < x \leqslant \sup \Delta^P_{p_1\ldots p_n}. \tag{3.8}$$

*Доведення.* Скористаємося методом математичної індукції. Зафіксуємо послідовність $P$ функцій $\varphi_i$ та число $x \in (0;1]$.

**База індукції.** Нехай $n = 1$. Нерівність $\inf \Delta^P_{p_1} < x \leqslant \sup \Delta^P_{p_1}$, враховуючи рівності (3.3) та (3.4), рівносильна нерівності

$$p_1 > \frac{r_0}{x} \geqslant p_1 - 1, \quad r_0 = \varphi_0.$$

Очевидно, що існує єдине число $p_1 \geqslant r_0 + 1$ таке, що виконується остання нерівність. Позначимо це число як $p_1'$. Тоді $\Delta^P_{p_1'}$ — єдиний циліндр першого рангу, що задовольняє нерівність (3.8).

Отже, можемо записати, що $x = \inf \Delta^P_{p_1'} + x_1 = \frac{r_0}{p_1'} + x_1$. При цьому

$$0 < x_1 \leqslant \sup \Delta^P_{p_1'} - \inf \Delta^P_{p_1'} = \frac{r_0}{(p_1' - 1)\, p_1'}.$$

Перевіримо твердження для $n = 2$. Нехай $\Delta^P_{p_1 p_2}$ — деякий циліндр другого рангу. Оскільки циліндр $\Delta^P_{p_1 p_2}$ є підмножиною циліндра $\Delta^P_{p_1}$, то $\inf \Delta^P_{p_1} \leqslant \inf \Delta^P_{p_1 p_2}$ та $\sup \Delta^P_{p_1} \geqslant \sup \Delta^P_{p_1 p_2}$. Тому з нерівності $\inf \Delta^P_{p_1 p_2} < x \leqslant \sup \Delta^P_{p_1 p_2}$ випливає нерівність $\inf \Delta^P_{p_1} < x \leqslant \sup \Delta^P_{p_1}$. Тоді, в силу доведеного вище, $p_1 = p_1'$, а значить $r_1 = \varphi_1(p_1')$.

Згідно з рівностями (3.3) та (3.4), а також попередніми домовленостями, нерівність

$$\inf \Delta^P_{p_1' p_2} < x \leqslant \sup \Delta^P_{p_1' p_2}$$

рівносильна наступним нерівностям:

$$\frac{r_0}{p_1'} + \frac{r_0 r_1}{(p_1' - 1)\, p_1' p_2} < \frac{r_0}{p_1'} + x_1 \leqslant \frac{r_0}{p_1'} + \frac{r_0 r_1}{(p_1' - 1)\, p_1' p_2} + \frac{r_0 r_1}{(p_1' - 1)\, p_1' \,(p_2 - 1)\, p_2};$$

$$\frac{r_0 r_1}{(p_1' - 1)\, p_1' p_2} < x_1 \leqslant \frac{r_0 r_1}{(p_1' - 1)\, p_1' \,(p_2 - 1)};$$

$$p_2 > \frac{r_0 r_1}{(p_1' - 1)\, p_1' x_1} \geqslant p_2 - 1 \ .$$

Щоб стверджувати існування та єдиність значення $p_2 \geqslant r_1 + 1$, при якому виконується остання нерівність, достатньо показати, що $\frac{r_0 r_1}{(p_1'-1) p_1' x_1} \geqslant r_1$. А ця умова рівносильна нерівності $x_1 \leqslant \frac{r_0}{(p_1'-1)p_1'}$, істинність якої було встановлено вище. Тому таке натуральне число $p_2$ існує та єдине. Позначимо його як $p_2'$. Тоді $\Delta^P_{p_1'p_2'}$ — єдиний циліндр другого рангу, що задовольняє нерівність (3.8).

**Припущення індукції.** Припустимо, що при $n = k$ існує єдиний циліндр $\Delta^P_{p_1'\ldots p_k'}$ рангу $k$ такий, що

$$\inf \Delta^P_{p_1'\ldots p_k'} < x \leqslant \sup \Delta^P_{p_1'\ldots p_k'}.$$

Нехай $x_k = x - \inf \Delta^P_{p_1'\ldots p_k'}$. Тоді з припущення індукції випливає, що

$$0 < x_k \leqslant \sup \Delta^P_{p_1'\ldots p_k'} - \inf \Delta^P_{p_1'\ldots p_k'} = \frac{r_0 r_1 \cdots r_{k-1}}{(p_1'-1)\, p_1' \cdots (p_k'-1)\, p_k'},$$

де $r_0 = \varphi_0$ та $r_i = \varphi_i\,(p_1', \ldots, p_i')$ для всіх $i = 1, \ldots, k-1$.

**Крок індукції.** Нехай $n = k+1$ та $\Delta^P_{p_1\ldots p_k p_{k+1}}$ — деякий циліндр $(k+1)$-го рангу. Тоді, аналогічно до випадку при $n = 2$, з нерівності $\inf \Delta^P_{p_1\ldots p_k p_{k+1}} < x \leqslant \sup \Delta^P_{p_1\ldots p_k p_{k+1}}$ випливає нерівність $\inf \Delta^P_{p_1\ldots p_k} < x \leqslant \sup \Delta^P_{p_1\ldots p_k}$. Звідси маємо, що $p_1 = p_1'$, $\ldots$, $p_k = p_k'$, а значить $r_0 = \varphi_0$ та $r_i = \varphi_i\,(p_1', \ldots, p_i')$ для всіх $i = 1, \ldots, k$

Тепер залишилося довести, що існує єдине значення $p_{k+1} \geqslant r_k + 1$ таке, що

$$\inf \Delta^P_{p_1'\ldots p_k' p_{k+1}} < x \leqslant \sup \Delta^P_{p_1'\ldots p_k' p_{k+1}}.$$

Враховуючи припущення індукції, а також рівності (3.6) та (3.7), остання нерівність рівносильна наступним нерівностям:

$$\inf \Delta^P_{p_1'\ldots p_k'} + \frac{r_0 r_1 \cdots r_k}{(p_1'-1)\, p_1' \cdots (p_k'-1)\, p_k' p_{k+1}} < x \leqslant$$
$$\leqslant \inf \Delta^P_{p_1'\ldots p_k'} + \frac{r_0 r_1 \cdots r_k}{(p_1'-1)\, p_1' \cdots (p_k'-1)\, p_k'\,(p_{k+1}-1)};$$

$$\frac{r_0 r_1 \cdots r_k}{(p_1'-1)\, p_1' \cdots (p_k'-1)\, p_k' p_{k+1}} < x_k \leqslant \frac{r_0 r_1 \cdots r_k}{(p_1'-1)\, p_1' \cdots (p_k'-1)\, p_k'\,(p_{k+1}-1)};$$

$$p_{k+1} > \frac{r_0 r_1 \cdots r_k}{(p_1'-1)\, p_1' \cdots (p_k'-1)\, p_k' x_k} \geqslant p_{k+1} - 1.$$

Щоб стверджувати існування та єдиність значення $p_{k+1} \geqslant r_k + 1$, при якому виконується остання нерівність, достатньо показати, що

$$\frac{r_0 r_1 \cdots r_k}{(p'_1 - 1)\, p'_1 \cdots (p'_k - 1)\, p'_k x_k} \geqslant r_k.$$

А ця умова рівносильна нерівності $x_k \leqslant \frac{r_0 r_1 \cdots r_{k-1}}{(p'_1-1)p'_1 \cdots (p'_k-1)p'_k}$, яка вище випливала з припущення індукції. Тому таке натуральне число $p_{k+1}$ існує та єдине. Позначимо його як $p'_{k+1}$. Тоді $\Delta^P_{p'_1 \ldots p'_k p'_{k+1}}$ — єдиний циліндр $(k+1)$-го рангу, що задовольняє нерівність (3.8).

Тому, в силу принципу математичної індукції, для кожного $n \in \mathbb{N}$ та довільного $x \in (0;1]$ існує єдиний циліндр $\Delta^P_{p'_1 \ldots p'_n}$ рангу $n$ такий, що

$$\inf \Delta^P_{p'_1 \ldots p'_n} < x \leqslant \sup \Delta^P_{p'_1 \ldots p'_n}. \qquad \square$$

**Теорема 3.1.** *При довільній послідовності $P$ функцій $\varphi_n$ кожен $x$ з проміжку $(0;1]$ має єдине $P$-представлення, тобто існує єдина послідовність натуральних чисел $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ така, що*

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_0 r_1 \cdots r_n}{(p_1 - 1)\, p_1 \cdots (p_n - 1)\, p_n p_{n+1}} \equiv \Delta^P_{p_1 p_2 \ldots},$$

*де $r_0 = \varphi_0$, $r_n = \varphi_n(p_1, \ldots, p_n)$ та $p_n \geqslant r_{n-1} + 1$ для кожного $n \in \mathbb{N}$.*

*Доведення.* **Існування.** З міркувань, наведених в доведенні леми 3.5, слідує, що для довільного набору $P$ функцій $\varphi_i$, довільних фіксованих $n \in \mathbb{N}$ та $x \in (0;1]$ число $p_n$ в основах циліндрів $\Delta^P_{p_1 \ldots p_k}$ рангу $k \geqslant n$, що задовольняють нерівність (3.8), є одним і тим же. Таким чином маємо, що послідовність функцій $P$ та число $x$ породжують деяку послідовність $(p_n)_{n=1}^{\infty}$. Покажемо, що $\Delta^P_{p_1 p_2 \ldots} = x$.

Припустимо, що $\Delta^P_{p_1 p_2 \ldots} \neq x$. Тоді для $\forall k \in \mathbb{N}$ маємо $\Delta^P_{p_1 p_2 \ldots} \in \Delta^P_{p_1 \ldots p_k}$, а значить $\inf \Delta^P_{p_1 \ldots p_k} < \Delta^P_{p_1 p_2 \ldots} \leqslant \sup \Delta^P_{p_1 \ldots p_k}$. Враховуючи цю нерівність та нерівність $\inf \Delta^P_{p_1 \ldots p_k} < x \leqslant \sup \Delta^P_{p_1 \ldots p_k}$, маємо, що при кожному $k \in \mathbb{N}$:

$$0 < |x - \Delta^P_{p_1 p_2 \ldots}| < \sup \Delta^P_{p_1 \ldots p_k} - \inf \Delta^P_{p_1 \ldots p_k} = |\Delta^P_{p_1 \ldots p_k}|.$$

Але, в силу леми 3.4, при достатньо великих $k$ значення $|\Delta^P_{p_1\ldots p_k}|$ може бути як завгодно близьким до нуля, а $|x - \Delta^P_{p_1p_2\ldots}|$ є фіксованою додатною величиною. Отримали суперечність, а тому припущення хибне.

Отже, $\Delta^P_{p_1p_2\ldots} = x$. Звідси слідує, що для кожного числа $x \in (0;1]$ існує своє $P$-представлення при довільній послідовності функцій $P$.

**Єдиність.** Припустимо, що для деякої послідовності функцій $P$ та деякого $x$ існує два різних $P$-представлення:

$$x = \Delta^P_{p_1p_2\ldots} = \Delta^P_{p_1'p_2'\ldots}.$$

Нехай натуральне число $k$ таке, що $p_i = p_i'$ для всіх $i < k$ та $p_k \neq p_k'$. Тоді маємо, що $x \in \Delta^P_{p_1\ldots p_{k-1}p_k}$ та одночасно з цим $x \in \Delta^P_{p_1\ldots p_{k-1}p_k'}$, а значить

$$\inf \Delta^P_{p_1\ldots p_{k-1}p_k} < x \leqslant \sup \Delta^P_{p_1\ldots p_{k-1}p_k};$$

$$\inf \Delta^P_{p_1\ldots p_{k-1}p_k'} < x \leqslant \sup \Delta^P_{p_1\ldots p_{k-1}p_k'}.$$

Але це суперечить лемі 3.5. Отримали суперечність, а тому припущення хибне. Отже, кожне число $x \in (0;1]$ має єдине $P$-представлення для кожної послідовності функцій $P$. □

**Наслідок 3.3.** *Циліндр $\Delta^P_{p_1\ldots p_n}$ є проміжком виду $(a;b]$. При цьому довжина цього проміжку (міра Лебега циліндра $\Delta^P_{p_1\ldots p_n}$) дорівнює $|\Delta^P_{p_1\ldots p_n}|$.*

**Наслідок 3.4.** *Нехай $x = \Delta^P_{p_1p_2\ldots}$. Тоді*

$$\lim_{n\to\infty} \inf \Delta^P_{p_1\ldots p_n} = \lim_{n\to\infty} \sup \Delta^P_{p_1\ldots p_n} = x.$$

**Наслідок 3.5.** *Якщо $\Delta^P_{b_1\ldots b_n}$ та $\Delta^P_{c_1\ldots c_m}$ — два різні $P$-циліндри, то можливі тільки два наступні випадки:*

— $\Delta^P_{b_1\ldots b_n} \cap \Delta^P_{c_1\ldots c_m} = \varnothing$, *якщо існує натуральне $k \leqslant \min\{n, m\}$ таке, що $b_i = c_i$ для всіх $i < k$ та $b_k \neq c_k$;*

— $\Delta^P_{b_1\ldots b_n} \subset \Delta^P_{c_1\ldots c_m}$, *якщо $n > m$ та $b_i = c_i$ для всіх $i \leqslant m$.*

**Наслідок 3.6.**

$$(0;1] = \bigcup_{i=r_0+1}^{\infty} \Delta_i^P; \tag{3.9}$$

$$\Delta^P_{p_1\ldots p_n} = \bigcup_{i=r_n+1}^{\infty} \Delta^P_{p_1\ldots p_n i}, \tag{3.10}$$

*де* $r_0 = \varphi_0$ *та* $r_n = \varphi_n(p_1, \ldots, p_n)$ *для кожного* $n \in \mathbb{N}$.

**Наслідок 3.7.**

$$\sum_{i=r_0+1}^{\infty} |\Delta_i^P| = 1; \tag{3.11}$$

$$|\Delta^P_{p_1\ldots p_n}| = \sum_{i=r_n+1}^{\infty} |\Delta^P_{p_1\ldots p_n i}|, \tag{3.12}$$

*де* $r_0 = \varphi_0$ *та* $r_n = \varphi_n(p_1, \ldots, p_n)$ *для кожного* $n \in \mathbb{N}$.

**Наслідок 3.8.** ***Основне метричне відношення***. *Для всіх* $i \geqslant r_n + 1$*:*

$$\frac{|\Delta^P_{p_1\ldots p_n i}|}{|\Delta^P_{p_1\ldots p_n}|} = \frac{r_n}{(i-1)\,i},$$

*де* $r_n = \varphi_n(p_1, \ldots, p_n)$ *для кожного* $n \in \mathbb{N}$.

**Теорема 3.2.** *Нехай* $x = \Delta^P_{p_1p_2\ldots}$ *та* $x' = \Delta^P_{p'_1p'_2\ldots}$, *а число* $k \in \mathbb{N}$ *таке, що* $p_i = p'_i$ *при всіх* $i < k$ *та* $p_k \neq p'_k$. *Тоді для того, щоб* $x > x'$, *необхідно і достатньо, щоб* $p_k < p'_k$.

*Доведення.* **Достатність.** Нехай $k \in \mathbb{N}$ таке, що $p_i = p'_i$ при всіх $i < k$ та $p_k < p'_k$. Тоді, якщо $k = 1$, то

$$x = \Delta^P_{p_1p_2\ldots} > \inf \Delta^P_{p_1} = \frac{r_0}{p_1}; \qquad x' = \Delta^P_{p'_1p'_2\ldots} \leqslant \sup \Delta^P_{p'_1} = \frac{r_0}{p'_1 - 1}.$$

Звідси маємо, що $x > \frac{r_0}{p_1} \geqslant \frac{r_0}{p'_1-1} \geqslant x'$.

Якщо $k \geqslant 2$, то, згідно з рівностями (3.6) та (3.7), маємо:

$$\begin{aligned} x = \Delta^P_{p_1\ldots p_{k-1}p_k\ldots} &> \inf \Delta^P_{p_1\ldots p_{k-1}p_k} = \\ &= \inf \Delta^P_{p_1\ldots p_{k-1}} + \frac{r_0 r_1 \cdots r_{k-1}}{(p_1-1)\,p_1 \cdots (p_{k-1}-1)\,p_{k-1}p_k}; \end{aligned}$$

$$x' = \Delta^P_{p_1\ldots p_{k-1}p'_k\ldots} \leqslant \sup \Delta^P_{p_1\ldots p_{k-1}p'_k} =$$
$$= \inf \Delta^P_{p_1\ldots p_{k-1}} + \frac{r_0 r_1 \cdots r_{k-1}}{(p_1-1)\,p_1\cdots(p_{k-1}-1)\,p_{k-1}\,(p'_k-1)}.$$

Оскільки $p_i = p'_i$ при всіх $i < k$, то значення $r_1, \ldots, r_{k-1}$ для чисел $x$ та $x'$ однакові.

Звідси маємо, що

$$x > \inf \Delta^P_{p_1\ldots p_{k-1}} + \frac{r_0 r_1 \cdots r_{k-1}}{(p_1-1)\,p_1\cdots(p_{k-1}-1)\,p_{k-1}p_k} \geqslant$$
$$\geqslant \inf \Delta^P_{p_1\ldots p_{k-1}} + \frac{r_0 r_1 \cdots r_{k-1}}{(p_1-1)\,p_1\cdots(p_{k-1}-1)\,p_{k-1}\,(p'_k-1)} \geqslant x'.$$

Достатність доведено.

**Необхідність.** Нехай $x > x'$, тобто $\Delta^P_{p_1\ldots p_{k-1}p_k\ldots} > \Delta^P_{p_1\ldots p_{k-1}p'_k\ldots}$. Припустимо, що при цьому $p_k > p'_k$. Але, згідно з доведеним вище (достатність), звідси слідує, що $x < x'$. Одержали суперечність, а тому припущення хибне. Отже, з нерівності $x > x'$ слідує, що $p_k < p'_k$. □

**3.2.2. Алгоритм знаходження $P$-зображення числа.** Нехай $P$-зображення визначене послідовністю $P$ функцій $\varphi_n$. З доведення теореми 3.5 безпосередньо слідує наступна теорема.

**Теорема 3.3.** *Для всіх $x \in (0;1]$ мають місце рекурентні формули:*

$$r_0 = \varphi_0, \quad p_1(x) = \left[\frac{r_0}{x}\right] + 1;$$
$$x_k = x - \sum_{n=0}^{k-1} \frac{r_0\cdots r_n}{(p_1-1)\,p_1\cdots(p_n-1)\,p_n p_{n+1}};$$
$$r_k = \varphi_k(p_1, \ldots, p_k);$$
$$p_{k+1}(x) = \left[\frac{r_0 r_1 \cdots r_k}{(p_1-1)\,p_1\cdots(p_k-1)\,p_k x_k}\right] + 1.$$

**3.2.3. Достатні умови раціональності та ірраціональності числа в термінах $P$-зображення.** Встановлення раціональності чи ірраціональності числа за його $P$-зображенням є, взагалі кажучи, нетривіальною задачею. Для різних $P$-зображень умови раціональності числа можуть принципово відрізнятися. Підтвердженням цього є теореми 1.2, 1.1 та 1.8 — критерії раціональності чисел, що представлені рядами Енгеля, Люрота та Сильвестера відповідно.

Як бачимо, навіть у найпростіших випадках необхідні та достатні умови раціональності чисел в термінах їхніх $P$-зображень суттєво різняться. Це наштовхує на думку, що загального критерію раціональності числа в термінах $P$-зображення або не існує, або він є досить складним. Тому далі ми доведемо лише достатню умову ірраціональності числа для довільного $P$-зображення та дві достатні умови раціональності (для довільного $P$-зображення та $P$-зображення деякого спеціального виду).

**Теорема 3.4.** *Нехай маємо $P$-зображення, що визначене послідовністю функцій $(\varphi_n)_{n=0}^{\infty}$, та $x = \Delta^P_{p_1p_2\ldots}$. Тоді якщо $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{p_{n+1}}{r_0\cdots r_n} = \infty$, де $r_0 = \varphi_0$ та $r_n = \varphi_n(p_1, \ldots, p_n)$, то число $x$ ірраціональне.*

*Доведення.* Доведемо теорему від супротивного. Припустимо, що число $x = \Delta^P_{p_1p_2\ldots} = \frac{a}{b}$ раціональне $(a, b \in \mathbb{N})$, але $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{p_{n+1}}{r_0\cdots r_n} = \infty$. Тоді

$$\frac{a}{b} = \frac{r_0}{p_1} + \frac{r_0r_1}{(p_1-1)\,p_1p_2} + \cdots + \frac{r_0r_1\cdots r_n}{(p_1-1)\,p_1\cdots(p_n-1)\,p_np_{n+1}} + \cdots .$$

В цій рівності помножимо обидві частини на $(p_1-1)\,p_1\cdots(p_n-1)\,p_n$, перенесемо цілі доданки з правої частини в ліву та отримаємо

$$\frac{A_n}{b} = \frac{r_0r_1\cdots r_n}{p_{n+1}} + \frac{r_0r_1\cdots r_nr_{n+1}}{(p_{n+1}-1)\,p_{n+1}p_{n+2}} + \cdots \leqslant \frac{r_0r_1\cdots r_n}{p_{n+1}-1};$$

$$b \geqslant \frac{A_n\,(p_{n+1}-1)}{r_0\cdots r_n} \geqslant \frac{p_{n+1}-1}{r_0\cdots r_n}.$$

Але оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{p_{n+1}-1}{r_0\cdots r_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{p_{n+1}}{r_0\cdots r_n} = \infty$, то для кожного раціонального числа $\frac{a}{b}$ нерівність $b \geqslant \frac{p_{n+1}-1}{r_0\cdots r_n}$ перестане виконуватися, починаючи з деякого номеру $n$. Отримали суперечність. Отже, $x$ — ірраціональне число. □

**Теорема 3.5.** *Нехай маємо $P$-зображення, визначене послідовністю функцій $(\varphi_n)_{n=0}^{\infty}$, та $x = \Delta^P_{p_1p_2\ldots}$. Тоді якщо $p_{n+1} = r_n + 1$ для всіх $n$, починаючи з деякого місця, де $r_0 = \varphi_0$ та $r_n = \varphi_n(p_1, \ldots, p_n)$, то $x$ — раціональне.*

*Доведення.* Нехай $p_{n+1} = r_n + 1$ для всіх $n \geqslant N$. Тоді

$$
\begin{aligned}
x = \Delta^P_{p_1p_2\ldots} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_0r_1\cdots r_n}{(p_1-1)\,p_1\cdots(p_n-1)\,p_np_{n+1}} = \\
= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{r_0r_1\cdots r_n}{(p_1-1)\,p_1\cdots(p_n-1)\,p_np_{n+1}} + \\
+ \frac{r_0r_1\cdots r_{N-1}}{(p_1-1)\,p_1\cdots(p_N-1)\,p_N} \cdot \sum_{n=N}^{\infty} \frac{r_n}{(r_N+1)\cdots(r_n+1)}.
\end{aligned}
$$

Згідно з лемою 3.1, $\sum\limits_{n=N}^{\infty} \frac{r_n}{(r_N+1)\cdots(r_n+1)} = 1$. Отже, $x$ — раціональне число. □

**Теорема 3.6.** *Нехай маємо $P$-зображення, що визначене послідовністю функцій $(\varphi_n)_{n=0}^{\infty}$ таких, що для всіх $n > N$ функції $\varphi_n \equiv r_n = \mathrm{const}$, та $x = \Delta^P_{p_1p_2\ldots}$. Тоді якщо послідовності $(r_n)_{n=N+1}^{\infty}$ та $(p_n)_{n=0}^{\infty}$ періодичні, починаючи з деякого номеру, то число $x$ — раціональне.*

*Доведення.* Нехай послідовність $(r_n)_{n=N+1}^{\infty}$ періодична, починаючи з номеру $k_1$, та має період довжини $m_1$, а послідовність $(p_n)_{n=0}^{\infty}$ періодична, починаючи з номеру $k_2$, та має період довжини $m_2$. Тоді можна сказати, що ці послідовності періодичні, починаючи з номеру $k = \max\{k_1, k_2\}$, та мають період довжини $m = \text{НСК}\,(m_1, m_2)$. Тоді

$$
\begin{aligned}
x = &\Delta^P_{p_1p_2\ldots} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_0r_1\cdots r_n}{(p_1-1)\,p_1\cdots(p_n-1)\,p_np_{n+1}} = \\
= &\sum_{n=0}^{k-1} \frac{r_0r_1\cdots r_n}{(p_1-1)\,p_1\cdots(p_n-1)\,p_np_{n+1}} + \\
&+ \frac{r_0r_1\cdots r_{k-1}}{(p_1-1)\,p_1\cdots(p_k-1)\,p_k} \cdot \left(S + S\cdot Q + S\cdot Q^2 + \cdots\right),
\end{aligned}
$$

де

$$
S = \frac{r_k}{p_{k+1}} + \cdots + \frac{r_k\cdots r_{k+m-1}}{(p_{k+1}-1)\,p_{k+1}\cdots(p_{k+m-1}-1)\,p_{k+m-1}p_{k+m}};
$$
$$
Q = \frac{r_k\cdots r_{k+m-1}}{(p_{k+1}-1)\,p_{k+1}\cdots(p_{k+m}-1)\,p_{k+m}}.
$$

Звідси

$$x=\sum_{n=0}^{k-1}\frac{r_0r_1\cdots r_n}{(p_1-1)\,p_1\cdots(p_n-1)\,p_np_{n+1}}+\frac{r_0r_1\cdots r_{k-1}}{(p_1-1)\,p_1\cdots(p_k-1)\,p_k}\cdot\frac{S}{1-Q},$$

а тому $x$ — раціональне число. □

### 3.3. Різницева форма $P$-зображення ($\overline{P}$-зображення)

**Означення 3.4.** Різницевим представленням ряду Перрона будемо називати запис ряду (3.2) у наступній формі

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r_0r_1\cdots r_n}{(r_0+g_1-1)\,(r_0+g_1)\cdots(r_{n-1}+g_n-1)\,(r_{n-1}+g_n)\,(r_n+g_{n+1})},\quad(3.13)$$

де $g_n=p_n-r_{n-1}$ та $g_n\geqslant 1$ для всіх $n\in\mathbb{N}$.

Різницева форма запису (3.13) ряду Перрона (3.2) є лише перепозначенням його елементів. Проте вона має одну важливу перевагу. У формі запису (3.2) на цифри $p_n$ накладено умови, що залежать від числа $r_{n-1}$. Натомість у різницевій формі запису (3.13) жодних умов на цифри $g_n$ не накладається і вони можуть бути довільними натуральними числами.

Нехай $P$ — послідовність функцій $(\varphi_n)_{n=0}^{\infty}$. Розглянемо функції $\overline{\varphi}_n$ такі, що $\overline{\varphi}_0=\varphi_0=\mathrm{const}\in\mathbb{N}$ та

$$\overline{\varphi}_n\,(g_1,\ldots,g_n)=\varphi_n\,(p_1,\ldots,p_n)\,,$$

де $r_0=\varphi_0$, $p_n=r_{n-1}+g_n$, $r_n=\varphi_n\,(p_1,\ldots,p_n)$ для кожного $n\in\mathbb{N}$. Послідовність функцій $(\overline{\varphi}_n)_{n=0}^{\infty}$ позначимо як $\overline{P}$.

У свою чергу, кожна послідовність $\overline{P}$ функцій $\overline{\varphi}_n$, де $\overline{\varphi}_0=\mathrm{const}\in\mathbb{N}$, а $\overline{\varphi}_n\,(x_1,\ldots,x_n):\mathbb{N}^n\to\mathbb{N}$ для кожного $n\in\mathbb{N}$, породжує послідовність $P$ функцій $\varphi_n$ (з точністю до значень цих функцій на допустимих наборах змінних $p_1,\ldots,p_n$):

$$\varphi_n\,(p_1,\ldots,p_n)=\overline{\varphi}_n\,(g_1,\ldots,g_n)\,,\quad \varphi_0=\overline{\varphi}_0,$$

де $g_n = p_n - r_{n-1}$, $r_0 = \overline{\varphi}_0$, $r_n = \overline{\varphi}_n(g_1, \ldots, g_n)$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Тому надалі можемо обирати послідовності $\overline{P}$ функцій $\overline{\varphi}_n$ незалежно від послідовностей $P$ функцій $\varphi_n$.

**Означення 3.5.** Нехай $x \in (0;1]$ є сумою ряду (3.13), причому $r_0 = \overline{\varphi}_0$ та $r_n = \overline{\varphi}_n(g_1, \ldots, g_n)$ для кожного $n \in \mathbb{N}$, де $\overline{\varphi}_n \in \overline{P}$. Тоді розклад числа $x$ в ряд (3.13) будемо називати його $\overline{P}$-представленням, а скорочений запис $\Delta^{\overline{P}}_{g_1 g_2 \ldots}$ ряду (3.13) будемо називати $\overline{P}$-зображенням числа $x$. Число $g_i$ називатимемо $i$-тою цифрою $\overline{P}$-зображення числа $x$.

*Зауваження* 3.3. Якщо послідовність $\overline{P}$ функцій $\overline{\varphi}_n$ породжена послідовністю $P$ функцій $\varphi_n$, то $\overline{P}$-зображення $\Delta^{\overline{P}}_{g_1 g_2 \ldots}$ та $P$-зображення $\Delta^{P}_{p_1 p_2 \ldots}$ числа $x$ є перекодуваннями один одного, що пов'язані формулами $p_n = r_{n-1} + g_n$ для кожного $n \in \mathbb{N}$, де $r_0 = \varphi_0 = \overline{\varphi}_0$ та $r_n = \overline{\varphi}_n(g_1, \ldots, g_n) = \varphi_n(p_1, \ldots, p_n)$.

**Теорема 3.7.** *При довільній послідовності $\overline{P}$ функцій $\overline{\varphi}_n$ кожен $x$ з проміжку $(0;1]$ має єдине $\overline{P}$-представлення, тобто існує єдина послідовність натуральних чисел $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ така, що*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_0 r_1 \cdots r_n}{(r_0 + g_1 - 1)(r_0 + g_1) \cdots (r_{n-1} + g_n - 1)(r_{n-1} + g_n)(r_n + g_{n+1})},$$

*де $r_0 = \overline{\varphi}_0$, $r_n = \overline{\varphi}_n(g_1, \ldots, g_n)$ для всіх $n \in \mathbb{N}$*

Доведення безпосередньо слідує з теореми 3.1 та зауваження 3.3.

**Означення 3.6.** $\overline{P}$-циліндром рангу $k$ з основою $c_1 \ldots c_k$ називають множину $\Delta^{\overline{P}}_{c_1 \ldots c_k}$ всіх чисел з проміжку $(0;1]$, для яких існує $\overline{P}$-зображення виду $\Delta^{\overline{P}}_{c_1 \ldots c_k g_{k+1} \ldots}$, тобто

$$\Delta^{\overline{P}}_{c_1 \ldots c_k} = \left\{ x \colon x \in (0;1], x = \Delta^{\overline{P}}_{c_1 \ldots c_k g_{k+1} g_{k+2} \ldots} \right\}.$$

Як і кожен $P$-циліндр, всі $\overline{P}$-циліндри є числовими проміжками виду $(a;b]$. Всі властивості $\overline{P}$-зображення та $\overline{P}$-циліндрів аналогічні до відповідних властивостей $P$-зображення та безпосередньо слідують з них, а всі рівності лише змінюють свою форму запису завдяки підстановці $p_n = r_{n-1} + g_n$.

Таким чином, для $\overline{P}$-циліндрів мають місце наступні рівності:

$$|\Delta^{\overline{P}}_{c_1\ldots c_k}| = \frac{r_0 r_1 \cdots r_{k-1}}{(r_0+c_1-1)(r_0+c_1)\cdots(r_{k-1}+c_k-1)(r_{k-1}+c_k)}; \tag{3.14}$$

$$(0;1] = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Delta^{\overline{P}}_i; \qquad \Delta^{\overline{P}}_{c_1\ldots c_k} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Delta^{\overline{P}}_{c_1\ldots c_k i}; \tag{3.15}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\Delta^{\overline{P}}_i| = 1; \qquad |\Delta^{\overline{P}}_{c_1\ldots c_k}| = \sum_{i=1}^{\infty} |\Delta^{\overline{P}}_{c_1\ldots c_k i}|, \tag{3.16}$$

де $r_0 = \overline{\varphi}_0$ та $r_n = \overline{\varphi}_n(c_1,\ldots,c_n)$ для кожного $n = 1,\ldots,k$.

**Лема 3.6.** ***Основне метричне відношення.***

$$\frac{|\Delta^{\overline{P}}_{c_1\ldots c_k i}|}{|\Delta^{\overline{P}}_{c_1\ldots c_k}|} = \frac{r_k}{(r_k+i-1)(r_k+i)},$$

*де* $r_k = \overline{\varphi}_k(c_1,\ldots,c_k)$.

**Лема 3.7.** *Якщо* $\Delta^{\overline{P}}_{b_1\ldots b_n}$ *та* $\Delta^{\overline{P}}_{c_1\ldots c_m}$ *— два різні* $\overline{P}$*-циліндри, то можливі тільки два випадки їх взаємного розміщення:*

— $\Delta^{\overline{P}}_{b_1\ldots b_n} \cap \Delta^{\overline{P}}_{c_1\ldots c_m} = \varnothing$, *якщо існує натуральне* $k \leqslant \min\{n,m\}$ *таке, що* $b_i = c_i$ *для всіх* $i < k$ *та* $b_k \neq c_k$;

— $\Delta^{\overline{P}}_{b_1\ldots b_n} \subset \Delta^{\overline{P}}_{c_1\ldots c_m}$, *якщо* $n > m$ *та* $b_i = c_i$ *для всіх* $i \leqslant m$.

**Наслідок 3.9.** *Нехай* $x = \Delta^{\overline{P}}_{g_1\ldots g_n\ldots}$ *та* $x' = \Delta^{\overline{P}}_{g'_1\ldots g'_n\ldots}$, *a* $k \in \mathbb{N}$ *таке, що* $g_i = g'_i$ *при всіх* $i < k$ *та* $g_k \neq g'_k$. *Тоді для того, щоб* $x > x'$ *необхідно і достатньо, щоб* $g_k < g'_k$.

Твердження випливає безпосередньо з теореми 3.2.

## 3.4. Функції, визначені в термінах $\overline{P}$-зображення чисел

### 3.4.1. Проєктор одного $\overline{P}$-зображення в інше.

**Означення 3.7.** Нехай $\overline{P}_1$ та $\overline{P}_2$ — дві послідовності функцій $\overline{\varphi}^{(1)}_n$ та $\overline{\varphi}^{(2)}_n$ відповідно, $x = \Delta^{\overline{P}_1}_{g_1 g_2\ldots}$. Функцію $f = f\left[\overline{P}_1;\overline{P}_2\right] : (0;1] \to (0;1]$ таку, що

$$f(x) = f\left(\Delta^{\overline{P}_1}_{g_1 g_2\ldots}\right) = \Delta^{\overline{P}_2}_{g_1 g_2\ldots}$$

будемо називати проєктором $\overline{P}_1$-зображення у $\overline{P}_2$-зображення.

**Лема 3.8.** *Для довільних послідовностей функцій* $\overline{P}_1$ *та* $\overline{P}_2$ *проєктор* $f\left[\overline{P}_1;\overline{P}_2\right]$ *є зростаючою на* $(0;1]$ *функцією.*

*Доведення.* Нехай $x_1=\Delta^{\overline{P}_1}_{g_1g_2\ldots}$, $x_2=\Delta^{\overline{P}_1}_{g'_1g'_2\ldots}$, $x_1>x_2$ і $k\in\mathbb{N}$ таке, що $g_i=g'_i$ при всіх $i<k$ та $g_k\neq g'_k$. Тоді, згідно з наслідком 3.9, $g_k<g'_k$. Але в силу цього ж наслідку,

$$f(x_1)=\Delta^{\overline{P}_2}_{g_1g_2\ldots}>\Delta^{\overline{P}_2}_{g'_1g'_2\ldots}=f(x_2).$$

Отже, проєктор $f\left[\overline{P}_1;\overline{P}_2\right]$ є зростаючою на $(0;1]$ функцією. □

**Лема 3.9.** *При довільних послідовностях функцій* $\overline{P}_1$ *та* $\overline{P}_2$ *для проєктора* $f=f\left[\overline{P}_1;\overline{P}_2\right]$ *має місце рівність* $\lim\limits_{x\to 0+}f(x)=0$.

*Доведення.* Нехай $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ — довільна фіксована послідовність така, що $x_n=\Delta^{\overline{P}_1}_{g_1^{(n)}g_2^{(n)}\ldots}$ та $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$. Оскільки

$$x_n=\Delta^{\overline{P}_1}_{g_1^{(n)}g_2^{(n)}\ldots}>\inf\Delta^{\overline{P}_1}_{g_1^{(n)}}=\frac{r_0^{(1)}}{r_0^{(1)}+g_1^{(n)}}>0,\quad r_0^{(1)}=\overline{\varphi}_0^{(1)},$$

то $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{r_0^{(1)}}{r_0^{(1)}+g_1^{(n)}}=0$, а тому $\lim\limits_{n\to\infty}g_1^{(n)}=\infty$.

Нехай послідовність $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ така, що $y_n=f(x_n)$. Тоді

$$0<y_n=\Delta^{\overline{P}_2}_{g_1^{(n)}g_2^{(n)}\ldots}<\sup\Delta^{\overline{P}_2}_{g_1^{(n)}}=\frac{r_0^{(2)}}{r_0^{(2)}+g_1^{(n)}-1}\to 0,\quad r_0^{(2)}=\overline{\varphi}_0^{(2)}.$$

Отже, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$, а значить $\lim\limits_{x\to 0+}f(x)=0$. □

**Теорема 3.8.** *Для довільних послідовностей функцій* $\overline{P}_1$ *та* $\overline{P}_2$ *проєктор* $f\left[\overline{P}_1;\overline{P}_2\right]$ *є неперервною функцією на всій області визначення.*

*Доведення.* Зрозуміло, що проєктор $f$ є монотонним сюр'єктивним відображенням проміжку $(0;1]$ на себе. Відомо, що монотонна функція може мати розриви тільки першого роду. Проте наявність такого розриву у проєктора $f$ суперечить його сюр'єктивності. Звідси слідує, що проєктор $f$ є неперервною на $(0;1]$ функцією. □

### 3.4.2. Диференціальні властивості проєктора. Умови сингулярності проєктора.

**Лема 3.10.** *Для довільних послідовностей функцій $\overline{P}_1$ та $\overline{P}_2$ проєктор $f\left[\overline{P}_1;\overline{P}_2\right]$ має скінченну похідну майже скрізь на $(0;1)$ (в розумінні міри Лебега).*

*Доведення.* Покладемо $f(0)=0$. Тоді, враховуючи леми 3.8, 3.9 та теорему 3.8, довизначена таким чином функція буде зростаючою та неперервною на відрізку $[0;1]$. Тому ця функція, а значить і проєктор $f$, матимуть скінченну похідну майже скрізь всередині відрізка $[0;1]$. $\square$

**Означення 3.8.** Циліндричною $\overline{P}$-похідною $\mathfrak{C}_{\overline{P}}f(x_0)$ деякої функції $f$ в точці $x_0=\Delta^{\overline{P}}_{g_1g_2\ldots}$ називається границя

$$\mathfrak{C}_{\overline{P}}f(x_0)=\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(\sup\Delta^{\overline{P}}_{g_1\ldots g_n}\right)-f\left(\inf\Delta^{\overline{P}}_{g_1\ldots g_n}\right)}{|\Delta^{\overline{P}}_{g_1\ldots g_n}|}.$$

**Лема 3.11.** *Якщо деяка функція $f$ в точці $x_0\in(0;1)$ має класичну похідну $f'(x_0)$, то в точці $x_0$ існує циліндрична $\overline{P}$-похідна $\mathfrak{C}_{\overline{P}}f(x_0)$, причому $f'(x_0)=\mathfrak{C}_{\overline{P}}f(x_0)$.*

*Доведення.* Легко показати, що коли в точці $x_0$ існує класична похідна функції $f$, тобто існує границя $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x}$, то існують також односторонні похідні в точці $x_0$ та границя $\lim\limits_{\substack{x'>x_0>x''\\ x'-x''\to 0}}\frac{f(x')-f(x'')}{x'-x''}$, причому всі вони рівні класичній похідній функції $f$ в точці $x_0$.

Нехай $x=\Delta^{\overline{P}}_{g_1g_2\ldots}\in(0;1)$. Згідно з лемою 3.4,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup\Delta^{\overline{P}}_{g_1\ldots g_n}-\inf\Delta^{\overline{P}}_{g_1\ldots g_n}\right)=0.$$

Тоді якщо $x_0$ є кінцем циліндра, то $\mathfrak{C}_{\overline{P}}f(x_0)$ рівна односторонній похідній. Якщо ж $x_0$ не є кінцем жодного з циліндрів, то $\mathfrak{C}_{\overline{P}}f(x_0)$ є границею типу $\lim\limits_{\substack{x'>x_0>x''\\ x'-x''\to 0}}\frac{f(x')-f(x'')}{x'-x''}$ при $x'=\sup\Delta^{\overline{P}}_{g_1\ldots g_n}$ та $x''=\inf\Delta^{\overline{P}}_{g_1\ldots g_n}$.

Отже, якщо функція $f$ диференційовна в точці $x_0$, то в точці $x_0$ існує циліндрична $\overline{P}$-похідна $\mathfrak{C}_{\overline{P}}f\left(x_0\right)$, причому $f'\left(x_0\right)=\mathfrak{C}_{\overline{P}}f\left(x_0\right)$. $\square$

**Лема 3.12.** *Циліндрична $\overline{P}_1$-похідна $\mathfrak{C}_{\overline{P}_1}f\left(x\right)$ проєктора $f=f\left[\overline{P}_1;\overline{P}_2\right]$ в точці $x=\Delta^{\overline{P}_1}_{g_1g_2\ldots}$ має вираз*

$$\mathfrak{C}_{\overline{P}_1}f\left(x\right)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{r^{(2)}_{k-1}\left(r^{(1)}_{k-1}+g_k-1\right)\left(r^{(1)}_{k-1}+g_k\right)}{r^{(1)}_{k-1}\left(r^{(2)}_{k-1}+g_k-1\right)\left(r^{(2)}_{k-1}+g_k\right)}\ , \tag{3.17}$$

*де $r^{(1)}_0=\overline{\varphi}^{(1)}_0$, $r^{(2)}_0=\overline{\varphi}^{(2)}_0$, $r^{(1)}_k=\overline{\varphi}^{(1)}_k\left(g_1,\ldots,g_k\right)$ та $r^{(2)}_k=\overline{\varphi}^{(2)}_k\left(g_1,\ldots,g_k\right)$.*

*Доведення.* Нехай $f\left(\Delta^{\overline{P}_1}_{g_1\ldots g_n}\right)$ — образ циліндра $\Delta^{\overline{P}_1}_{g_1\ldots g_n}$. Зрозуміло, що тоді $f\left(\Delta^{\overline{P}_1}_{g_1\ldots g_n}\right)=\Delta^{\overline{P}_2}_{g_1\ldots g_n}$. Оскільки проєктор є неперервною функцією, то

$$f\left(\sup\Delta^{\overline{P}_1}_{g_1\ldots g_n}\right)=\sup f\left(\Delta^{\overline{P}_1}_{g_1\ldots g_n}\right)=\sup\Delta^{\overline{P}_2}_{g_1\ldots g_n};$$
$$f\left(\inf\Delta^{\overline{P}_1}_{g_1\ldots g_n}\right)=\inf f\left(\Delta^{\overline{P}_1}_{g_1\ldots g_n}\right)=\inf\Delta^{\overline{P}_2}_{g_1g_2\ldots g_n}.$$

Тоді

$$\mathfrak{C}_{\overline{P}_1}f\left(x\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sup\Delta^{\overline{P}_2}_{g_1\ldots g_n}-\inf\Delta^{\overline{P}_2}_{g_1\ldots g_n}}{|\Delta^{\overline{P}_1}_{g_1\ldots g_n}|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|\Delta^{\overline{P}_2}_{g_1\ldots g_n}|}{|\Delta^{\overline{P}_1}_{g_1\ldots g_n}|}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{r^{(2)}_0\cdots r^{(2)}_{n-1}\cdot\left(r^{(1)}_0+g_1-1\right)\left(r^{(1)}_0+g_1\right)\cdots\left(r^{(1)}_{n-1}+g_n-1\right)\left(r^{(1)}_{n-1}+g_n\right)}{\left(r^{(2)}_0+g_1-1\right)\left(r^{(2)}_0+g_1\right)\cdots\left(r^{(2)}_{n-1}+g_n-1\right)\left(r^{(2)}_{n-1}+g_n\right)\cdot r^{(1)}_0\cdots r^{(1)}_{n-1}}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{r^{(2)}_{k-1}\left(r^{(1)}_{k-1}+g_k-1\right)\left(r^{(1)}_{k-1}+g_k\right)}{r^{(1)}_{k-1}\left(r^{(2)}_{k-1}+g_k-1\right)\left(r^{(2)}_{k-1}+g_k\right)}=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{r^{(2)}_{k-1}\left(r^{(1)}_{k-1}+g_k-1\right)\left(r^{(1)}_{k-1}+g_k\right)}{r^{(1)}_{k-1}\left(r^{(2)}_{k-1}+g_k-1\right)\left(r^{(2)}_{k-1}+g_k\right)}\ .\ \square$$

**Наслідок 3.10.** *Якщо проєктор $f\left[\overline{P}_1;\overline{P}_2\right]$ має в точці $x_0=\Delta^{\overline{P}_1}_{g_1g_2\ldots}$ класичну похідну $f'\left(x_0\right)$, то або $f'\left(x_0\right)=0$, або*

$$\lim_{k\to\infty}\frac{r^{(2)}_{k-1}\left(r^{(1)}_{k-1}+g_k-1\right)\left(r^{(1)}_{k-1}+g_k\right)}{r^{(1)}_{k-1}\left(r^{(2)}_{k-1}+g_k-1\right)\left(r^{(2)}_{k-1}+g_k\right)}=1. \tag{3.18}$$

*Доведення.* Нехай проєктор $f\left[\overline{P}_1;\overline{P}_2\right]$ має в точці $x_0$ класичну похідну $f'\left(x_0\right)$. Тоді $f'\left(x_0\right)=\mathfrak{C}_{\overline{P}_1}f\left(x_0\right)$.

Припустимо, що $f'(x_0) \neq 0$. Тоді $\mathfrak{C}_{\overline{P}_1} f(x_0) > 0$, оскільки проєктор $f\left[\overline{P}_1; \overline{P}_2\right]$ зростає на $(0;1]$. Отже, нескінченний добуток (3.17) є збіжним, необхідною умовою чого є виконання рівності (3.18). $\square$

**Теорема 3.9.** ***Достатні умови сингулярності проєктора*** $f$. *Нехай для послідовностей функцій $\overline{P}_1$ та $\overline{P}_2$ існує число $n_0 \in \mathbb{N}$ таке, що $\overline{\varphi}_i^{(1)} \equiv a = \mathrm{const}$ та $\overline{\varphi}_i^{(2)} \equiv b = \mathrm{const}$ для всіх $i \geqslant n_0$, $a \neq b$. Тоді проєктор $f = f\left[\overline{P}_1; \overline{P}_2\right]$ є сингулярною функцією, тобто має похідну рівну 0 майже скрізь (в розумінні міри Лебега).*

*Доведення.* Нехай проєктор $f$ має в точці $x_0 = \Delta^{\overline{P}_1}_{g_1 g_2 \ldots}$ класичну похідну $f'(x_0)$. Покажемо, що за вказаних в теоремі умов рівність (3.18) виконується для не більш ніж зліченної множини точок.

Припустимо, що для для деякої точки $x_0 = \Delta^{\overline{P}_1}_{g_1 g_2 \ldots}$ виконується рівність (3.18). Позначимо

$$\frac{r^{(2)}_{k-1}\left(r^{(1)}_{k-1} + g_k - 1\right)\left(r^{(1)}_{k-1} + g_k\right)}{r^{(1)}_{k-1}\left(r^{(2)}_{k-1} + g_k - 1\right)\left(r^{(2)}_{k-1} + g_k\right)} = s_k.$$

Тоді $\lim\limits_{k\to\infty} s_k = 1$. Нехай $k \geqslant n_0 + 1$. Тоді, враховуючи припущення в твердженні теореми, отримаємо, що

$$\frac{b\,(a + g_k - 1)\,(a + g_k)}{a\,(b + g_k - 1)\,(b + g_k)} = s_k.$$

Виразимо $g_k$ через $a$, $b$ та $s_k$:

$$b\,(a + g_k - 1)\,(a + g_k) = s_k a\,(b + g_k - 1)\,(b + g_k)\,;$$

$$g_k^2 b + g_k\,(2ab - b) + a^2 b - ab = g_k^2 a s_k + g_k\,(2ab - a)\,s_k + b^2 a s_k - ab s_k;$$

$$g_k^2\,(b - a s_k) + g_k\,(2ab\,(1 - s_k) - b + a s_k) + ab\,(a - b s_k - 1 + s_k) = 0.$$

Отримали квадратне рівняння відносно $g_k$. Позначимо через $D_k$ його дискримінант. Тоді

$$D_k = (2ab\,(1 - s_k) - b + a s_k)^2 - 4\,(b - a s_k)\,ab\,(a - b s_k - 1 + s_k)\,;$$

$$\lim_{k\to\infty} D_k = (b-a)^2 + 4(b-a)^2 ab = (b-a)^2(1+4ab) > 0;$$

$$g_k = \frac{-(2ab(1-s_k) - b + as_k) \pm \sqrt{D_k}}{2(b-as_k)};$$

$$\lim_{k\to\infty} g_k = \frac{b-a \pm \sqrt{(b-a)^2(1+4ab)}}{2(b-a)} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1+4ab}\ .$$

Зрозуміло, що можливим є лише варіант $\lim\limits_{k\to\infty} g_k = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1+4ab}$. Оскільки послідовність $(g_k)_{k=1}^{\infty}$ складається з натуральних чисел, то існує такий номер $m_0$, що для всіх $k \geqslant m_0$:

$$g_k = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1+4ab},$$

причому число $1+4ab$ є квадратом непарного натурального числа.

Отже, якщо число $1+4ab$ не є квадратом непарного натурального числа, то припущення хибне, а тому проєктор $f$ в точці $x_0$ має похідну рівну нулю. Звідси отримуємо, що в кожній точці, в якій існує похідна проєктора $f$, ця похідна рівна нулю. А оскільки похідна проєктора існує майже скрізь на $(0;1)$, то проєктор $f$ є сингулярною функцією.

Нехай число $1+4ab$ є квадратом непарного натурального числа. Тоді число $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1+4ab}$ є натуральним. Позначимо його як $g^*$. Тоді $g_k = g^*$ для всіх $k \geqslant m_0$. Проте таких чисел $x_0$ злічена кількість. Тому чисел, в яких похідна проєктора $f$ не рівна нулю, не більш ніж злічена кількість. Отже, в цьому випадку проєктор $f$ також є сингулярною функцією. □

### 3.4.3. Функції, визначені послідовністю перетворювачів цифр $\overline{P}$-зображення чисел.

**Означення 3.9.** Перетворювачем цифр $\overline{P}$-зображення чисел будемо називати кожну функцію $l$ таку, що $l\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\ldots\to\mathbb{N}$.

Нехай $L$ — послідовність перетворювачів цифр $(l_n)_{n=1}^{\infty}$ .

**Означення 3.10.** Функцію $f_L^{\overline{P}}\colon\ (0;1]\to(0;1]$ таку, що

$$f_L^{\overline{P}}(x) = f_L^{\overline{P}}\left(\Delta^{\overline{P}}_{g_1 g_2 \ldots}\right) = \Delta^{\overline{P}}_{g'_1 g'_2 \ldots}\ ,$$

де $g'_n = l_n(g_1, g_2, \ldots)$, будемо називати функцією, що визначена послідовністю $L$ перетворювачів цифр $\overline{P}$-зображення чисел.

*Зауваження* 3.4. Для довільного $\overline{P}$-зображення дійсних чисел кожна функція $f\colon (0;1] \to (0;1]$ є функцією, що визначена деякою послідовністю перетворювачів цифр $\overline{P}$-зображення чисел.

Справді, нехай маємо деяку функцію $f\colon (0;1] \to (0;1]$. Оскільки перетворювачі цифр $l_n$ є функціями від всіх цифр $\overline{P}$-зображення числа, то значення функцій $l_n$ можна визначити окремо для кожного значення $x$. Тоді для кожного $x = \Delta^{\overline{P}}_{g_1 g_2 \ldots}$ потрібно покласти такі значення функцій $l_n$, щоб $f^{\overline{P}}_L\left(\Delta^{\overline{P}}_{g_1 g_2 \ldots}\right) = \Delta^{\overline{P}}_{g'_1 g'_2 \ldots} = f\left(\Delta^{\overline{P}}_{g_1 g_2 \ldots}\right)$. Функція, що визначена послідовністю $L$ перетворювачів $l_n$, буде співпадати з функцією $f$.

В даному розділі ми розглянемо клас функцій, що визначені перетворювачами цифр $\overline{P}$-зображення чисел, який містить підклас сингулярних функцій.

Домовимося про те, що до кінця цього підрозділу $n_0$ — це фіксований натуральний параметр. Під $L_1$ будемо розуміти послідовність перетворювачів $(l_n)_{n=1}^{\infty}$ таких, що

— при $n < n_0$ функції $l_n$ залежать тільки від аргументів $g_1, \ldots, g_{n_0-1}$;

— при $n \geqslant n_0$: $l_n = l_n(g_n)$ — зростаюча функція.

Також домовимося, що $\overline{P}_1$ — така послідовність функцій $\overline{\varphi}_n$, що при всіх $n \geqslant n_0$ значення $\overline{\varphi}_n$ залежать тільки від номеру $n$. Функцію, що визначена послідовністю $L_1$ перетворювачів цифр $\overline{P}_1$-зображень дійсних чисел будемо позначати $f^{\overline{P}_1}_{L_1}$.

*Зауваження* 3.5. Оскільки $l_n$ — зростаюча функція, то $l_n(g_n) \geqslant g_n$.

**Лема 3.13.** *Функція $f^{\overline{P}_1}_{L_1}$ є зростаючою на кожному з циліндрів рангу $n_0 - 1$ при $n_0 \geqslant 2$ та зростаючою на всій області визначення при $n_0 = 1$.*

*Доведення. Випадок 1: $n_0 \geqslant 2$.* Розглянемо довільний циліндр $\Delta^{\overline{P}_1}_{g_1 \cdots g_{n_0-1}}$ рангу $n_0 - 1$. Оскільки функції $l_n$ при $n < n_0$ залежать тільки від значень

$g_1, \dots, g_{n_0-1}$, то значення цих функцій фіксовані на даному циліндрі. Нехай $x_1, x_2 \in \Delta^{\overline{P}_1}_{g_1 \dots g_{n_0-1}}$, а саме $x_1 = \Delta^{\overline{P}_1}_{g_1 \dots g_{n_0-1} g^{(1)}_{n_0} \dots}$ та $x_2 = \Delta^{\overline{P}_1}_{g_1 \dots g_{n_0-1} g^{(2)}_{n_0} \dots}$. Тоді

$$f^{\overline{P}_1}_{L_1}(x_1) = \Delta^{\overline{P}_1}_{g'_1 \dots g'_{n_0-1} g'^{(1)}_{n_0} g'^{(1)}_{n_0+1} \dots}, \qquad f^{\overline{P}_1}_{L_1}(x_2) = \Delta^{\overline{P}_1}_{g'_1 \dots g'_{n_0-1} g'^{(2)}_{n_0} g'^{(2)}_{n_0+1} \dots},$$

де $g'_n = l_n(g_1, \dots, g_n)$ при $n < n_0$ та $g'_n = l_n(g_n)$ при $n \geqslant n_0$. Звідси, згідно з наслідком 3.9, якщо $x_1 > x_2$, то $f^{\overline{P}_1}_{L_1}(x_1) > f^{\overline{P}_1}_{L_1}(x_2)$. Отже, функція $f^{\overline{P}_1}_{L_1}$ зростаюча на циліндрі $\Delta^{\overline{P}_1}_{g_1 \dots g_{n_0-1}}$.

*Випадок 2:* $n_0 = 1$. Тоді $g'_n = l_n(g_n)$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Далі аналогічно до випадку 1. □

**Наслідок 3.11.** *Кожна функція $f^{\overline{P}_1}_{L_1}$ майже скрізь на $(0;1)$ має скінченну похідну.*

**Лема 3.14.** *Якщо функція $f^{\overline{P}_1}_{L_1}$ диференційовна в точці $x_0 = \Delta^{\overline{P}_1}_{g_1 g_2 \dots}$, то*

$$\left(f^{\overline{P}_1}_{L_1}\right)'(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sup f^{\overline{P}_1}_{L_1}\left(\Delta^{\overline{P}_1}_{g_1 \dots g_n}\right) - \inf f^{\overline{P}_1}_{L_1}\left(\Delta^{\overline{P_1}}_{g_1 \dots g_n}\right)}{|\Delta^{\overline{P}_1}_{g_1 \dots g_n}|}.$$

*Доведення.* Нехай функція $f^{\overline{P}_1}_{L_1}$ диференційовна в точці $x_0 = \Delta^{\overline{P}_1}_{g_1 g_2 \dots}$. Надалі, не порушуючи загальності, будемо вважати, що $n \geqslant n_0$.

Оскільки $\sup \Delta^{\overline{P}_1}_{g_1 \dots g_n} \in \Delta^{\overline{P}_1}_{g_1 \dots g_n}$, а функція $f^{\overline{P}_1}_{L_1}$ зростає на циліндрі $\Delta^{\overline{P}_1}_{g_1 \dots g_n}$, то $f^{\overline{P}_1}_{L_1}\left(\sup \Delta^{\overline{P}_1}_{g_1 \dots g_n}\right) = \sup f^{\overline{P}_1}_{L_1}\left(\Delta^{\overline{P}_1}_{g_1 \dots g_n}\right)$, але $\inf \Delta^{\overline{P}_1}_{g_1 \dots g_n} \notin \Delta^{\overline{P}_1}_{g_1 \dots g_n}$. Проте $\inf \Delta^{\overline{P}_1}_{g_1 \dots g_n} + \lambda_n \in \Delta^{\overline{P}_1}_{g_1 \dots g_n}$ при довільному додатному $\lambda_n < |\Delta^{\overline{P}_1}_{g_1 \dots g_n}|$.

Розглянемо наступну границю:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{\overline{P}_1}_{L_1}\left(\sup \Delta^{\overline{\overline{P}_1}}_{g_1 \dots g_n}\right) - f^{P_1}_{L_1}\left(\inf \Delta^{\overline{P}_1}_{g_1 \dots g_n} + \lambda_n\right)}{|\Delta^{\overline{P}_1}_{g_1 \dots g_n}| - \lambda_n}. \tag{3.19}$$

Зрозуміло, що ця границя, аналогічно до циліндричної $\overline{P}_1$-похідної, рівна похідній функції $f^{\overline{P}_1}_{L_1}$ в точці $x_0$.

Оскільки $\inf \Delta^{\overline{P}_1}_{g_1 \dots g_n} \notin \Delta^{\overline{P}_1}_{g_1 \dots g_n}$, а функція $f^{\overline{P}_1}_{L_1}$ зростає на циліндрі $\Delta^{\overline{P}_1}_{g_1 \dots g_n}$, то в довільному околі точки $\inf f^{\overline{P}_1}_{L_1}\left(\Delta^{\overline{P}_1}_{g_1 \dots g_n}\right)$ міститься безліч точок із множини $f_{L_1}^{\overline{P}_1}\left(\Delta_{g_1\ldots g_n}^{\overline{P}_1}\right)$. Звідси, зокрема, слідує, що при достатньо малому значенні $\lambda_n$ величина

$$f_{L_1}^{\overline{P}_1}\left(\inf \Delta_{g_1\ldots g_n}^{\overline{P}_1} + \lambda_n\right) - \inf f_{L_1}^{\overline{P}_1}\left(\Delta_{g_1\ldots g_n}^{\overline{P}_1}\right)$$

може набувати як завгодно малого додатного значення. Тому для кожного $n \geqslant n_0$ оберемо $\lambda_n$ таке, що одночасно виконуються нерівності

$$0 < f_{L_1}^{\overline{P}_1}\left(\inf \Delta_{g_1\ldots g_n}^{\overline{P}_1} + \lambda_n\right) - \inf f_{L_1}^{\overline{P}_1}\left(\Delta_{g_1\ldots g_n}^{\overline{P}_1}\right) < \frac{1}{n}|\Delta_{g_1\ldots g_n}^{\overline{P}_1}|;$$
$$0 < \lambda_n < \frac{1}{n}|\Delta_{g_1\ldots g_n}^{\overline{P}_1}|.$$

Вираз, що міститься під знаком границі (3.19), запишемо в наступному вигляді:

$$\frac{\sup f_{L_1}^{\overline{P}_1}\left(\Delta_{g_1\ldots g_n}^{\overline{P}_1}\right) - \inf f_{L_1}^{\overline{P}_1}\left(\Delta_{g_1\ldots g_n}^{\overline{P}_1}\right)}{|\Delta_{g_1\ldots g_n}^{\overline{P}_1}|} \cdot \frac{|\Delta_{g_1\ldots g_n}^{\overline{P}_1}|}{|\Delta_{g_1\ldots g_n}^{\overline{P}_1}| - \lambda_n} +$$
$$+ \frac{\inf f_{L_1}^{\overline{P}_1}\left(\Delta_{g_1\ldots g_n}^{\overline{P}_1}\right) - f_{L_1}^{\overline{P}_1}\left(\inf \Delta_{g_1\ldots g_n}^{\overline{P}_1} + \lambda_n\right)}{|\Delta_{g_1\ldots g_n}^{\overline{P}_1}| - \lambda_n}.$$

Тоді

$$0 < \frac{\inf f_{L_1}^{\overline{P}_1}\left(\Delta_{g_1\ldots g_n}^{\overline{P}_1}\right) - f_{L_1}^{\overline{P}_1}\left(\inf \Delta_{g_1\ldots g_n}^{\overline{P}_1} + \lambda_n\right)}{|\Delta_{g_1\ldots g_n}^{\overline{P}_1}| - \lambda_n} < \frac{\frac{1}{n}|\Delta_{g_1\ldots g_n}^{\overline{P}_1}|}{\frac{n-1}{n}|\Delta_{g_1\ldots g_n}^{\overline{P}_1}|} = \frac{1}{n-1}.$$

Звідси отримуємо, що

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\inf f_{L_1}^{\overline{P}_1}\left(\Delta_{g_1\ldots g_n}^{\overline{P}_1}\right) - f_{L_1}^{\overline{P}_1}\left(\inf \Delta_{g_1\ldots g_n}^{\overline{P}_1} + \lambda_n\right)}{|\Delta_{g_1\ldots g_n}^{\overline{P}_1}| - \lambda_n} = 0.$$

Оскільки має місце нерівність

$$1 < \frac{|\Delta_{g_1\ldots g_n}^{\overline{P}_1}|}{|\Delta_{g_1\ldots g_n}^{\overline{P}_1}| - \lambda_n} < \frac{|\Delta_{g_1\ldots g_n}^{\overline{P}_1}|}{\frac{n-1}{n}|\Delta_{g_1\ldots g_n}^{\overline{P}_1}|} = \frac{n}{n-1},$$

то отримуємо, що

$$\left(f^{\overline{P}_1}_{L_1}\right)'(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{\overline{P}_1}_{L_1}\left(\sup \Delta^{\overline{P}_1}_{g_1\ldots g_n}\right) - f^{\overline{P}_1}_{L_1}\left(\inf \Delta^{\overline{P}_1}_{g_1\ldots g_n} + \lambda_n\right)}{|\Delta^{\overline{P}_1}_{g_1\ldots g_n}| - \lambda_n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sup f^{\overline{P}_1}_{L_1}\left(\Delta^{\overline{P}_1}_{g_1\ldots g_n}\right) - \inf f^{\overline{P}_1}_{L_1}\left(\Delta^{\overline{P}_1}_{g_1\ldots g_n}\right)}{|\Delta^{\overline{P}_1}_{g_1\ldots g_n}|}. \quad \square$$

**Лема 3.15.** *Для функції $f^{\overline{P}_1}_{L_1}$ та циліндра $\Delta^{\overline{P}_1}_{g_1\ldots g_n}$ рангу $n \geqslant n_0$ має місце нерівність*

$$\frac{\sup f^{\overline{P}_1}_{L_1}\left(\Delta^{\overline{P}_1}_{g_1\ldots g_n}\right) - \inf f^{\overline{P}_1}_{L_1}\left(\Delta^{\overline{P}_1}_{g_1\ldots g_n}\right)}{|\Delta^{\overline{P}_1}_{g_1\ldots g_n}|} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\overline{\varphi}_n \cdot A}{\overline{\varphi}_n + l_{n+1}(1) - 1} \cdot \prod_{k=n_0+1}^{n} \frac{(\overline{\varphi}_{k-1} + g_k - 1)(\overline{\varphi}_{k-1} + g_k)}{(\overline{\varphi}_{k-1} + g'_k - 1)(\overline{\varphi}_{k-1} + g'_k)},$$

*де*

$$A = \prod_{k=1}^{n_0} \frac{r^{(2)}_k \left(r^{(1)}_{k-1} + g_k - 1\right)\left(r^{(1)}_{k-1} + g_k\right)}{r^{(1)}_k \left(r^{(2)}_{k-1} + g'_k - 1\right)\left(r^{(2)}_{k-1} + g'_k\right)},$$

*причому $g'_k = l_k(g_1, \ldots, g_{n_0-1})$, $r^{(1)}_k = \overline{\varphi}_k(g_1, \ldots, g_k)$, $r^{(2)}_k = \overline{\varphi}_k(g'_1, \ldots, g'_k)$ при $k < n_0$ та $g'_k = l_k(g_k)$ при $k \geqslant n_0$.*

*Доведення.* Нехай $\Delta^{\overline{P}_1}_{g_1\ldots g_n}$ — довільний циліндр рангу $n \geqslant n_0$. Оскільки

$$\sup f^{\overline{P}_1}_{L_1}\left(\Delta^{\overline{P}_1}_{g_1\ldots g_n}\right) = f^{\overline{P}_1}_{L_1}\left(\sup \Delta^{\overline{P}_1}_{g_1\ldots g_n}\right) = f^{\overline{P}_1}_{L_1}\left(\Delta^{\overline{P}_1}_{g_1\ldots g_n 11\ldots}\right) = \Delta^{\overline{P}_1}_{g'_1\ldots g'_n[l_{n+1}(1)]\ldots},$$

то

$$\sup f^{\overline{P}_1}_{L_1}\left(\Delta^{\overline{P}_1}_{g_1\ldots g_n}\right) \leqslant \sup \Delta^{\overline{P}_1}_{g'_1\ldots g'_n[l_{n+1}(1)]}.$$

Зрозуміло, що $f^{\overline{P}_1}_{L_1}\left(\Delta^{\overline{P}_1}_{g_1\ldots g_n}\right) \subset \Delta^{\overline{P}_1}_{g'_1\ldots g'_n}$. Тому

$$\inf f^{\overline{P}_1}_{L_1}\left(\Delta^{\overline{P}_1}_{g_1\ldots g_n}\right) \geqslant \inf \Delta^{\overline{P}_1}_{g'_1\ldots g'_n}.$$

Звідси отримуємо наступну нерівність:

$$\frac{\sup f^{\overline{P}_1}_{L_1}\left(\Delta^{\overline{P}_1}_{g_1\ldots g_n}\right) - \inf f^{\overline{P}_1}_{L_1}\left(\Delta^{\overline{P}_1}_{g_1\ldots g_n}\right)}{|\Delta^{\overline{P}_1}_{g_1\ldots g_n}|} \leqslant \frac{\sup \Delta^{\overline{P}_1}_{g'_1\ldots g'_n[l_{n+1}(1)]} - \inf \Delta^{\overline{P}_1}_{g'_1\ldots g'_n}}{|\Delta^{\overline{P}_1}_{g_1\ldots g_n}|}$$

Враховуючи формулу (3.7), маємо

$$\sup \Delta^{\overline{P}_1}_{g'_1 \ldots g'_n [l_{n+1}(1)]} - \inf \Delta^{\overline{P}_1}_{g'_1 \ldots g'_n} =$$
$$= \frac{1}{r_n^{(2)} + l_{n+1}(1) - 1} \cdot \prod_{k=1}^{n} \frac{r_k^{(2)}}{\left(r_{k-1}^{(2)} + g'_k - 1\right)\left(r_{k-1}^{(2)} + g'_k\right)},$$

де $r_k^{(1)} = \overline{\varphi}_k(g_1, \ldots, g_k)$, $r_k^{(2)} = \overline{\varphi}_k(g'_1, \ldots, g'_k)$.

Таким чином, отримуємо

$$\frac{\sup f^{\overline{P}_1}_{L_1}\left(\Delta^{\overline{P}_1}_{g_1 \ldots g_n}\right) - \inf f^{\overline{P}_1}_{L_1}\left(\Delta^{\overline{P}_1}_{g_1 \ldots g_n}\right)}{|\Delta^{\overline{P}_1}_{g_1 \ldots g_n}|} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{r_n^{(1)}}{r_n^{(2)} + l_{n+1}(1) - 1} \cdot \prod_{k=1}^{n} \frac{r_k^{(2)}\left(r_{k-1}^{(1)} + g_k - 1\right)\left(r_{k-1}^{(1)} + g_k\right)}{r_k^{(1)}\left(r_{k-1}^{(2)} + g'_k - 1\right)\left(r_{k-1}^{(2)} + g'_k\right)}.$$

Позначимо $\prod\limits_{k=1}^{n_0} \frac{r_k^{(2)}\left(r_{k-1}^{(1)} + g_k - 1\right)\left(r_{k-1}^{(1)} + g_k\right)}{r_k^{(1)}\left(r_{k-1}^{(2)} + g'_k - 1\right)\left(r_{k-1}^{(2)} + g'_k\right)} = A = \mathrm{const}$. Оскільки при $n \geqslant n_0$ значення $r_n^{(1)} = r_n^{(2)} \equiv \overline{\varphi}_n = \mathrm{const}$, то можемо записати

$$\frac{\sup f^{\overline{P}_1}_{L_1}\left(\Delta^{\overline{P}_1}_{g_1 \ldots g_n}\right) - \inf f^{\overline{P}_1}_{L_1}\left(\Delta^{\overline{P}_1}_{g_1 \ldots g_n}\right)}{|\Delta^{\overline{P}_1}_{g_1 \ldots g_n}|} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\overline{\varphi}_n \cdot A}{\overline{\varphi}_n + l_{n+1}(1) - 1} \cdot \prod_{k=n_0+1}^{n} \frac{(\overline{\varphi}_{k-1} + g_k - 1)(\overline{\varphi}_{k-1} + g_k)}{(\overline{\varphi}_{k-1} + g'_k - 1)(\overline{\varphi}_{k-1} + g'_k)}. \quad \square$$

**Теорема 3.10.** *Для того, щоб функція* $f^{\overline{P}_1}_{L_1}$ *мала похідну майже скрізь рівну нулю, достатньо, щоб множина значень дробів* $\dfrac{l_{n+1}(1)}{\overline{\varphi}_n}$ $(n \geqslant n_0)$ *була необмеженою зверху.*

*Доведення.* Нехай функція $f^{\overline{P}_1}_{L_1}$ має в точці $x_0 = \Delta^{\overline{P}_1}_{g_1 g_2 \ldots}$ класичну похідну. Тоді з нерівності (3.4.3) та зауваження 3.5 випливає, що при $n \geqslant n_0$:

$$\frac{\sup f^{\overline{P}_1}_{L_1}\left(\Delta^{\overline{P}_1}_{g_1 \ldots g_n}\right) - \inf f^{\overline{P}_1}_{L_1}\left(\Delta^{\overline{P}_1}_{g_1 \ldots g_n}\right)}{|\Delta^{\overline{P}_1}_{g_1 \ldots g_n}|} \leqslant \frac{\overline{\varphi}_n \cdot A}{\overline{\varphi}_n + l_{n+1}(1) - 1}.$$

Тому має місце наступна нерівність

$$0 \leqslant \left(f_{L_1}^{\overline{P}_1}\right)'(x_0) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \frac{A\cdot\overline{\varphi}_n}{\overline{\varphi}_n + l_{n+1}(1) - 1} = \liminf_{n\to\infty} \frac{A}{1+\dfrac{l_{n+1}(1)}{\overline{\varphi}_n} - \dfrac{1}{\overline{\varphi}_n}}.$$

Тоді, якщо послідовність $q_n = \frac{l_{n+1}(1)}{\overline{\varphi}_n}$ необмежена згори, то

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{A}{1+\dfrac{l_{n+1}(1)}{\overline{\varphi}_n} - \dfrac{1}{\overline{\varphi}_n}} = 0.$$

Звідси маємо, що $\left(f_{L_1}^{\overline{P}_1}\right)'(x_0) = 0$. Оскільки $x_0$ — довільна точка, в якій функція $f_{L_1}^{\overline{P}_1}$ диференційовна, а сама функція $f_{L_1}^{\overline{P}_1}$ диференційовна майже скрізь на $(0;1)$, то функція $f_{L_1}^{\overline{P}_1}$ майже скрізь на $(0;1)$ має похідну рівну нулю. □

**Наслідок 3.12.** *Нехай для $\overline{P}_1$-зображення чисел послідовність функцій $\overline{\varphi}_n$ така, що при всіх $n \geqslant n_0$ значення $\overline{\varphi}_n$ залежать тільки від номеру $n$ та утворюють обмежену числову послідовність. Також нехай $L_1$ — така послідовність функцій $l_n$, що*

— *при $n < n_0$ функції $l_n$ залежать лише від аргументів $g_1, \ldots, g_{n_0-1}$;*

— *при $n \geqslant n_0$ функції $l_n = l_n(g_n)$ — зростаючі, а послідовність $l_n(1)$ необмежена.*

*Тоді функція $f_{L_1}^{\overline{P}_1}$ майже скрізь на $(0;1)$ має похідну рівну нулю.*

**Теорема 3.11.** *Нехай $L_1$ — така послідовність функцій $l_n$, що при $n \geqslant n_0$:*

$$l_n(g_n) = k_n g_n + c_n, \ \text{де } k_n, c_n \in \mathbb{N}\ .$$

*Тоді для того, щоб функція $f_{L_1}^{\overline{P}_1}$ майже скрізь на $(0;1)$ мала похідну рівну нулю, достатньо, щоб виконувалася одна з умов*

1. *нерівність $k_n \geqslant 2$ та рівність $c_n = \overline{\varphi}_{n-1}\cdot(k_n-1)$ виконуються одночасно для нескінченної кількості номерів $n > n_0$;*
2. *нерівність $k_n \geqslant 2$ та рівність $c_n = (\overline{\varphi}_{n-1}-1)(k_n-1)$ виконуються одночасно для нескінченної кількості номерів $n > n_0$.*

*Доведення.* Нехай функція $f_{L_1}^{\overline{P}_1}$ диференційовна в точці $x_0 = \Delta^{\overline{P}_1}_{g_1g_2\ldots}$. Тоді з нерівності (3.4.3) випливає, що

$$\frac{\sup f_{L_1}^{\overline{P}_1}\left(\Delta^{\overline{P}_1}_{g_1\ldots g_n}\right) - \inf f_{L_1}^{\overline{P}_1}\left(\Delta^{\overline{P}_1}_{g_1\ldots g_n}\right)}{|\Delta^{\overline{P}_1}_{g_1\ldots g_n}|} \leqslant A\cdot \prod_{k=n_0+1}^{n} \frac{(\overline{\varphi}_{k-1}+g_k-1)(\overline{\varphi}_{k-1}+g_k)}{(\overline{\varphi}_{k-1}+g'_k-1)(\overline{\varphi}_{k-1}+g'_k)},$$

де $A = \prod\limits_{k=1}^{n_0} \frac{r_k^{(2)}\left(r_{k-1}^{(1)}+g_k-1\right)\left(r_{k-1}^{(1)}+g_k\right)}{r_k^{(1)}\left(r_{k-1}^{(2)}+g'_k-1\right)\left(r_{k-1}^{(2)}+g'_k\right)}$, причому $g'_k = l_k(g_1,\ldots,g_{n_0-1})$, $r_k^{(1)} = \overline{\varphi}_k(g_1,\ldots,g_k)$, $r_k^{(2)} = \overline{\varphi}_k(g'_1,\ldots,g'_k)$ при $k<n_0$ та $g'_k = l_k(g_k)$ при $k \geqslant n_0$.

Розглянемо границю $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=n_0+1}^{n}\frac{(\overline{\varphi}_{k-1}+g_k-1)(\overline{\varphi}_{k-1}+g_k)}{(\overline{\varphi}_{k-1}+g'_k-1)(\overline{\varphi}_{k-1}+g'_k)}$. Оскільки кожен множник добутку додатний та не перевищує 1, то послідовність частинних добутків є незростаючою та обмеженою знизу нулем. Отже, ця границя існує та скінченна.

Для того, щоб ця границя була додатною, необхідно, щоб

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(\overline{\varphi}_{n-1}+g_n-1)\,(\overline{\varphi}_{n-1}+g_n)}{(\overline{\varphi}_{n-1}+g'_n-1)\,(\overline{\varphi}_{n-1}+g'_n)} = 1. \tag{3.20}$$

Покажемо, що коли виконується хоч одна з умов даної теореми, то умова (3.20) не виконується, а тому перетворювач цифр $f_{L_1}^{P_1}$ в точці $x_0$ має похідну рівну нулю.

Розглянемо умову 1. Легко пересвідчитися, що коли $k_n \geqslant 2$ та $c_n = \overline{\varphi}_{n-1}\cdot(k_n-1)$, то при $n>n_0$:

$$\frac{\overline{\varphi}_{n-1}+g_n}{\overline{\varphi}_{n-1}+g'_n} = \frac{1}{k_n}, \qquad \frac{(\overline{\varphi}_{n-1}+g_n-1)\,(\overline{\varphi}_{n-1}+g_n)}{(\overline{\varphi}_{n-1}+g'_n-1)\,(\overline{\varphi}_{n-1}+g'_n)} \leqslant \frac{1}{k_n} \leqslant \frac{1}{2}.$$

Зрозуміло, що коли $k_n \geqslant 2$ та $c_n = \overline{\varphi}_{n-1}\cdot(k_n-1)$ одночасно для нескінченної кількості номерів $n>n_0$, то умова (3.20) не виконується, а тому

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=n_0+1}^{n}\frac{(\overline{\varphi}_{k-1}+g_k-1)\,(\overline{\varphi}_{k-1}+g_k)}{(\overline{\varphi}_{k-1}+g'_k-1)\,(\overline{\varphi}_{k-1}+g'_k)} = 0.$$

Звідси слідує, що $\left(f_{L_1}^{\overline{P}_1}\right)'(x_0) = 0$.

Розглянемо умову 2. Коли $k_n \geqslant 2$ та $c_n = (\overline{\varphi}_{n-1}-1)\,(k_n-1)$, то

$$\frac{\overline{\varphi}_{n-1}+g_n-1}{\overline{\varphi}_{n-1}+g'_n-1} = \frac{1}{k_n}, \qquad \frac{(\overline{\varphi}_{n-1}+g_n-1)\,(\overline{\varphi}_{n-1}+g_n)}{(\overline{\varphi}_{n-1}+g'_n-1)\,(\overline{\varphi}_{n-1}+g'_n)} \leqslant \frac{1}{k_n} \leqslant \frac{1}{2}.$$

Зрозуміло, що коли $k_n \geqslant 2$ та $c_n = (\overline{\varphi}_{n-1} - 1)(k_n - 1)$ одночасно для нескінченної кількості номерів $n > n_0$, то умова (3.20) не виконується, а тому, аналогічно до попереднього випадку, $\left(f_{L_1}^{\overline{P}_1}\right)'(x_0) = 0$. □

**Теорема 3.12.** *Нехай $L_1$ — така послідовність функцій $l_n$, що при $n \geqslant n_0$:*

$$l_n(g_n) = k_n g_n + c_n, \ \text{де } k_n, c_n \in \mathbb{N} \ .$$

*Тоді для того, щоб функція $f_{L_1}^{\overline{P}_1}$ майже скрізь на $(0;1)$ мала похідну рівну нулю, достатньо, щоб виконувалася одна з умов*

1. *нерівності $k_n \geqslant 2$ та $c_n < \overline{\varphi}_{n-1} \cdot (k_n - 1)$ виконуються одночасно для нескінченної кількості номерів $n > n_0$, причому, якщо $n_t$ — зростаюча послідовність таких номерів, то послідовність $\dfrac{k_{n_t} + c_{n_t}}{\overline{\varphi}_{n_t - 1}}$ не є збіжною до 0;*
2. *нерівності $k_n \geqslant 2$ та $c_n < (\overline{\varphi}_{n-1} - 1)(k_n - 1)$ виконуються одночасно для нескінченної кількості номерів $n > n_0$, причому, якщо $n_t$ — зростаюча послідовність таких номерів, то послідовність $\dfrac{k_{n_t} + c_{n_t}}{\overline{\varphi}_{n_t - 1}}$ не є збіжною до 0.*

*Доведення.* Нехай перетворювач цифр $f_{L_1}^{\overline{P}_1}$ диференційовний в точці $x_0 = \Delta_{g_1 g_2 \ldots}^{\overline{P}_1}$. Аналогічно до доведення теореми 3.11, для того, щоб похідна в точці $x_0$ була ненульовою, необхідним є виконання рівності (3.20).

Покажемо, що коли виконується хоч одна з умов даної теореми, то умова (3.20) не виконується, а тому функція $f_{L_1}^{P_1}$ в точці $x_0$ має похідну рівну нулю.

Розглянемо умову 1. Введемо допоміжну функцію

$$h_n(x) = \frac{\overline{\varphi}_{n-1} + x}{\overline{\varphi}_{n-1} + k_n x + c_n}.$$

Тоді

$$h_n'(x) = \frac{c_n - \overline{\varphi}_{n-1} \cdot (k_n - 1)}{(\overline{\varphi}_{n-1} + k_n x + c_n)^2}.$$

Нехай умови $k_n \geqslant 2$ та $c_n < \overline{\varphi}_{n-1} \cdot (k_n - 1)$ виконуються одночасно для нескінченної кількості номерів $n > n_0$. Позначимо через $(n_t)_{t=1}^{\infty}$ зростаючу послідовність таких номерів. Тоді для всіх таких $n_t$ похідна $h'_{n_t}(x) < 0$ при $x > 0$, а тому $h_{n_t}$ спадає на множині $(0; +\infty)$. Звідси слідує, що

$$\frac{\overline{\varphi}_{n_t-1} + g_{n_t}}{\overline{\varphi}_{n_t-1} + g'_{n_t}} = \frac{\overline{\varphi}_{n_t-1} + g_{n_t}}{\overline{\varphi}_{n_t-1} + k_{n_t} g_{n_t} + c_{n_t}} \leqslant \frac{\overline{\varphi}_{n_t-1} + 1}{\overline{\varphi}_{n_t-1} + k_{n_t} + c_{n_t}};$$
$$\frac{\left(\overline{\varphi}_{n_t-1} + g_{n_t} - 1\right)\left(\overline{\varphi}_{n_t-1} + g_{n_t}\right)}{\left(\overline{\varphi}_{n_t-1} + g'_{n_t} - 1\right)\left(\overline{\varphi}_{n_t-1} + g'_{n_t}\right)} \leqslant \frac{\overline{\varphi}_{n_t-1} + 1}{\overline{\varphi}_{n_t-1} + k_{n_t} + c_{n_t}} < 1.$$

Отже, щоб виконувалася умова (3.20), необхідно, щоб

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\overline{\varphi}_{n_t-1} + 1}{\overline{\varphi}_{n_t-1} + k_{n_t} + c_{n_t}} = 1.$$

Ця умова рівносильна наступним рівносильним між собою твердженням:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\overline{\varphi}_{n_t-1} + k_{n_t} + c_{n_t}}{\overline{\varphi}_{n_t-1} + 1} = 1 \Longleftrightarrow \lim_{t\to\infty} \frac{k_{n_t} + c_{n_t}}{\overline{\varphi}_{n_t-1} + 1} = 0 \Longleftrightarrow \lim_{t\to\infty} \frac{k_{n_t} + c_{n_t}}{\overline{\varphi}_{n_t-1}} = 0.$$

Як бачимо, якщо послідовність $\dfrac{k_{n_t} + c_{n_t}}{r_{n_t-1}}$ не збігається до нуля, то умова (3.20) не виконується, а тому функція $f_{L_1}^{P_1}$ в точці $x_0$ має похідну рівну нулю.

Розглянемо умову 2. Введемо допоміжну функцію

$$s_n(x) = \frac{\overline{\varphi}_{n-1} + x - 1}{\overline{\varphi}_{n-1} + k_n x + c_n - 1}.$$

Тоді

$$s'_n(x) = \frac{c_n - (\overline{\varphi}_{n-1} - 1)(k_n - 1)}{(\overline{\varphi}_{n-1} + k_n x + c_n)^2}.$$

Нехай умови $k_n \geqslant 2$ та $c_n < (\overline{\varphi}_{n-1} - 1)(k_n - 1)$ виконуються одночасно для нескінченної кількості номерів $n > n_0$. Позначимо через $(n_t)_{t=1}^{\infty}$ зростаючу послідовність таких номерів. Тоді для всіх таких $n_t$ похідна $s'_{n_t}(x) < 0$ при $x > 0$, а тому $s_{n_t}$ спадає на множині $(0; +\infty)$. Звідси слідує, що

$$\frac{\overline{\varphi}_{n_t-1} + g_{n_t} - 1}{\overline{\varphi}_{n_t-1} + g'_{n_t} - 1} = \frac{\overline{\varphi}_{n_t-1} + g_{n_t} - 1}{\overline{\varphi}_{n_t-1} + k_{n_t} g_{n_t} + c_{n_t} - 1} \leqslant \frac{\overline{\varphi}_{n_t-1}}{\overline{\varphi}_{n_t-1} + k_{n_t} + c_{n_t} - 1};$$

$$\frac{\left(\overline{\varphi}_{n_t-1}+g_{n_t}-1\right)\left(\overline{\varphi}_{n_t-1}+g_{n_t}\right)}{\left(\overline{\varphi}_{n_t-1}+g'_{n_t}-1\right)\left(\overline{\varphi}_{n_t-1}+g'_{n_t}\right)} \leqslant \frac{\overline{\varphi}_{n_t-1}}{\overline{\varphi}_{n_t-1}+k_{n_t}+c_{n_t}-1} < 1.$$

Отже, щоб виконувалася умова (3.20), необхідно, щоб

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\overline{\varphi}_{n_t-1}}{\overline{\varphi}_{n_t-1}+k_{n_t}+c_{n_t}-1}=1.$$

Ця умова рівносильна наступним рівносильним між собою твердженням:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\overline{\varphi}_{n_t-1}+k_{n_t}+c_{n_t}-1}{\overline{\varphi}_{n_t-1}}=1 \Leftrightarrow \lim_{t\to\infty}\frac{k_{n_t}+c_{n_t}-1}{\overline{\varphi}_{n_t-1}}=0 \Leftrightarrow \lim_{t\to\infty}\frac{k_{n_t}+c_{n_t}}{\overline{\varphi}_{n_t-1}}=0.$$

Як бачимо, якщо послідовність $\frac{k_{n_t}+c_{n_t}}{\overline{\varphi}_{n_t-1}}$ не збігається до нуля, то умова (3.20) не виконується, а тому функція $f_{L_1}^{\overline{P}_1}$ в точці $x_0$ має похідну рівну нулю.

Отже, якщо функція $f_{L_1}^{\overline{P}_1}$ диференційовна в точці $x_0$ та виконується хоча б одна з умов, вказаних в теоремі, то $\left(f_{L_1}^{\overline{P}_1}\right)'(x_0)=0$. А оскільки функція $f_{L_1}^{\overline{P}_1}$ диференційовна майже скрізь на $(0;1)$, то майже скрізь на $(0;1)$ вона має похідну рівну нулю. □

**Наслідок 3.13.** *Нехай $L_1$ такий набір функцій $l'_n$, що при $n>n_0$:*

$$l'_n\left(g_n\right)=k_n g_n+c_n,\ \text{де } k_n, c_n \in \mathbb{N}\ .$$

*Тоді для того, щоб функція $f_{L_1}^{\overline{P}_1}$ майже скрізь на $(0;1)$ мала похідну рівну нулю, достатньо, щоб нерівність $k_n \geqslant 2$ та одна з нерівностей $c_n < \overline{\varphi}_{n-1}\cdot(k_n-1)$ або $c_n < \left(\overline{\varphi}_{n-1}-1\right)\left(k_n-1\right)$ виконувалися одночасно для нескінченної кількості номерів $n>n_0$, при цьому щоб існувала додатна границя послідовності $\dfrac{k_n+c_n}{\overline{\varphi}_{n-1}}$.*

## 3.5. Нормальні властивості чисел у термінах $\overline{P}$-зображення

### 3.5.1. Нормальні властивості чисел, що пов'язані з кількістю різних цифр у їхньому $\overline{P}$-зображенні.

Розглянемо $\overline{P}$-зображення, що визначене послідовністю функцій $(\overline{\varphi}_n)_{n=0}^{\infty}$.

**Теорема 3.13.** *Якщо ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\min \overline{\varphi}_n}$ *збіжний, то для майже всіх чисел з* $(0;1]$ *кожна цифра в їхніх* $\overline{P}$*-зображеннях зустрічається скінченну кількість разів.*

*Доведення.* Використаємо ймовірнісний підхід, скориставшись лемою Бореля–Кантеллі. Для цього розглянемо ймовірнісний простір $(\Omega, \mathcal{F}, \lambda)$, де $\Omega = (0;1]$, $\mathcal{F}$ — $\sigma$-алгебра вимірних за Лебегом підмножин множини $\Omega$, $\lambda$ — міра Лебега.

Нехай $A_k^i = \{x \colon g_k(x) = i\}$. Подію $A_k^i$ можна подати у вигляді

$$A_k^i = \bigcup_{g_1=1}^{\infty} \cdots \bigcup_{g_{k-1}=1}^{\infty} \Delta^{\overline{P}}_{g_1 \ldots g_{k-1} i}.$$

Оскільки $\overline{P}$-циліндри $\Delta^{\overline{P}}_{g_1 \ldots g_{k-1} i}$ попарно не перетинаються, то

$$\lambda\left(A_k^i\right) = \sum_{g_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{g_{k-1}=1}^{\infty} |\Delta^{\overline{P}}_{g_1 \ldots g_{k-1} i}|.$$

Із рівності (3.14) слідує, що для кожного $i \in \mathbb{N}$ має місце нерівність $|\Delta^{\overline{P}}_{g_1 \ldots g_{k-1} i}| \leqslant |\Delta^{\overline{P}}_{g_1 \ldots g_{k-1} 1}|$. Тоді, враховуючи лему 3.6, отримаємо

$$\begin{aligned}
\lambda\left(A_k^i\right) \leqslant \lambda\left(A_k^1\right) &= \sum_{g_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{g_{k-1}=1}^{\infty} |\Delta^{\overline{P}}_{g_1 \ldots g_{k-1} 1}| = \\
&= \sum_{g_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{g_{k-1}=1}^{\infty} \left( |\Delta^{\overline{P}}_{g_1 \ldots g_{k-1}}| \cdot \frac{|\Delta^{\overline{P}}_{g_1 \ldots g_{k-1} 1}|}{|\Delta^{\overline{P}}_{g_1 \ldots g_{k-1}}|} \right) = \\
&= \sum_{g_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{g_{k-1}=1}^{\infty} \left( |\Delta^{\overline{P}}_{g_1 \ldots g_{k-1}}| \cdot \frac{1}{\overline{\varphi}_{k-1}(g_1, \ldots, g_{k-1}) + 1} \right) \leqslant \\
&\leqslant \sum_{g_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{g_{k-1}=1}^{\infty} \left( |\Delta^{\overline{P}}_{g_1 \ldots g_{k-1}}| \cdot \frac{1}{\min \overline{\varphi}_{k-1} + 1} \right) = \\
&= \frac{1}{\min \overline{\varphi}_{k-1} + 1} \cdot \sum_{g_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{g_{k-1}=1}^{\infty} |\Delta^{\overline{P}}_{g_1 \ldots g_{k-1}}| = \\
&= \frac{1}{\min \overline{\varphi}_{k-1} + 1} < \frac{1}{\min \overline{\varphi}_{k-1}}.
\end{aligned}$$

Зрозуміло, що коли ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\min \overline{\varphi}_{k-1}}$ збіжний, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda\left(A_k^i\right)$ також збіжний.

Нехай

$$A^i = \limsup_{k\to\infty} A_k^i = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left( \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k^i \right).$$

Зрозуміло, що множина $A^i$ містить ті та тільки ті числа, $\overline{P}$-зображення яких містять цифру $i$ нескінченну кількість разів. Оскільки ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda\left(A_k^i\right)$ збіжний, то, згідно з лемою Бореля–Кантеллі, $\lambda\left(A^i\right) = 0$. Тому кожна цифра $i$ зустрічається скінченну кількість разів у $\overline{P}$-зображеннях майже всіх чисел з $(0;1]$. □

**Наслідок 3.14.** *Нехай $\overline{P}$-зображення таке, що з деякого номера $n_0$ для всіх $k \geqslant n_0$: $\overline{\varphi}_k = \mathrm{const}$. Тоді якщо ряд $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} \frac{1}{\overline{\varphi}_k}$ збіжний, то для майже всіх чисел з $(0;1]$ кожна цифра в їхніх $\overline{P}$-зображеннях зустрічається скінченну кількість разів.*

**Лема 3.16.** *Якщо для деякого $k \in \mathbb{N}$ функція $\overline{\varphi}_{k-1}$ є константою, то*

$$\lambda\left(A_k^i\right) = \frac{\overline{\varphi}_{k-1}}{\left(\overline{\varphi}_{k-1} + i - 1\right)\left(\overline{\varphi}_{k-1} + i\right)}. \tag{3.21}$$

*Доведення.* Оскільки $A_k^i = \bigcup\limits_{g_1=1}^{\infty} \cdots \bigcup\limits_{g_{k-1}=1}^{\infty} \Delta^{\overline{P}}_{g_1\ldots g_{k-1}i}$, то

$$\begin{aligned}
\lambda\left(A_k^i\right) &= \sum_{g_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{g_{k-1}=1}^{\infty} |\Delta^{\overline{P}}_{g_1\ldots g_{k-1}i}| = \\
&= \sum_{g_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{g_{k-1}=1}^{\infty} \left( |\Delta^{\overline{P}}_{g_1\ldots g_{k-1}}| \cdot \frac{|\Delta^{\overline{P}}_{g_1\ldots g_{k-1}i}|}{|\Delta^{\overline{P}}_{g_1\ldots g_{k-1}}|} \right) = \\
&= \sum_{g_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{g_{k-1}=1}^{\infty} \left( |\Delta^{\overline{P}}_{g_1\ldots g_{k-1}}| \cdot \frac{\overline{\varphi}_{k-1}}{\left(\overline{\varphi}_{k-1} + i - 1\right)\left(\overline{\varphi}_{k-1} + i\right)} \right) = \\
&= \frac{\overline{\varphi}_{k-1}}{\left(\overline{\varphi}_{k-1} + i - 1\right)\left(\overline{\varphi}_{k-1} + i\right)} \cdot \sum_{g_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{g_{k-1}=1}^{\infty} |\Delta^{\overline{P}}_{g_1\ldots g_{k-1}}| = \\
&= \frac{\overline{\varphi}_{k-1}}{\left(\overline{\varphi}_{k-1} + i - 1\right)\left(\overline{\varphi}_{k-1} + i\right)}.
\end{aligned}$$

□

**Теорема 3.14.** *Нехай $\overline{P}$-зображення таке, що з деякого номера $n_0$ для всіх $k \geqslant n_0$: $\overline{\varphi}_k = \mathrm{const}$. Тоді для кожного $i \in \mathbb{N}$ випадкові події*

$$A_k^i = \{x\colon g_k(x) = i\},$$

*де $k \geqslant n_0 + 1$, незалежні в сукупності.*

*Доведення.* Нехай $n_0 \in \mathbb{N}$ таке, що для всіх $k \geqslant n_0$: $\overline{\varphi}_k = \mathrm{const}$. Розглянемо довільний скінченний набір випадкових подій $A_{k_j}^i$, де $j \in \{1, \ldots, n\}$, $k_j \geqslant n_0 + 1$. Згідно з лемою 3.16, маємо

$$\lambda\left(A_{k_j}^i\right) = \frac{\overline{\varphi}_{k_j-1}}{\left(\overline{\varphi}_{k_j-1} + i - 1\right)\left(\overline{\varphi}_{k_j-1} + i\right)}.$$

Знайдемо вираз для $\lambda\left(A_{k_1}^i \cap \cdots \cap A_{k_n}^i\right)$. Нехай $t_1, \ldots, t_s$ — зростаюча послідовність всіх тих номерів, що менші за $k_n$ та не співпадають з жодним з номерів $k_j$. Тоді міра Лебега $\overline{P}$-циліндра $\Delta_{g_1 \ldots g_{k_n}}^{\overline{P}}$ рангу $k_n$, в якого $g_{k_j} = i$ при всіх $j \in \{1, \ldots, n\}$, має вираз

$$\lambda\left(\Delta_{g_1 \ldots g_{k_n}}^{\overline{P}}\right) = \\ = \prod_{j=1}^{n} \frac{r_{k_j-1}}{(r_{k_j-1} + i - 1)(r_{k_j-1} + i)} \cdot \prod_{j=1}^{s} \frac{r_{t_j-1}}{(r_{t_j-1} + g_{t_j} - 1)(r_{t_j-1} + g_{t_j})} = \\ = \prod_{j=1}^{n} \lambda\left(A_{k_j}^i\right) \cdot \prod_{j=1}^{s} \frac{r_{t_j-1}}{(r_{t_j-1} + g_{t_j} - 1)(r_{t_j-1} + g_{t_j})},$$

де $r_n = \overline{\varphi}_n\,(g_1, \ldots, g_n)$, $r_0 = \overline{\varphi}_0$. Тому

$$\lambda\left(A_{k_1}^i \cap \cdots \cap A_{k_n}^i\right) = \\ = \sum_{g_{t_1}=1}^{\infty} \cdots \sum_{g_{t_s}=1}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^{n} \lambda\left(A_{k_j}^i\right) \cdot \prod_{j=1}^{s} \frac{\overline{\varphi}_{t_j-1}}{\left(\overline{\varphi}_{t_j-1} + g_{t_j} - 1\right)\left(\overline{\varphi}_{t_j-1} + g_{t_j}\right)}\right) = \\ = \prod_{j=1}^{n} \lambda\left(A_{k_j}^i\right) \cdot \sum_{g_{t_1}=1}^{\infty} \cdots \sum_{g_{t_s}=1}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^{s} \frac{\overline{\varphi}_{t_j-1}}{\left(\overline{\varphi}_{t_j-1} + g_{t_j} - 1\right)\left(\overline{\varphi}_{t_j-1} + g_{t_j}\right)}\right).$$

Помітимо, що

$$\sum_{g_{t_s}=1}^{\infty}\left(\prod_{j=1}^{s}\frac{\overline{\varphi}_{t_j-1}}{\left(\overline{\varphi}_{t_j-1}+g_{t_j}-1\right)\left(\overline{\varphi}_{t_j-1}+g_{t_j}\right)}\right)=$$

$$=\prod_{j=1}^{s-1}\frac{\overline{\varphi}_{t_j-1}}{\left(\overline{\varphi}_{t_j-1}+g_{t_j}-1\right)\left(\overline{\varphi}_{t_j-1}+g_{t_j}\right)}\cdot$$

$$\cdot\sum_{g_{t_s}=1}^{\infty}\frac{\overline{\varphi}_{t_s-1}}{\left(\overline{\varphi}_{t_s-1}+g_{t_s}-1\right)\left(\overline{\varphi}_{t_s-1}+g_{t_s}\right)}=$$

$$=\prod_{j=1}^{s-1}\frac{\overline{\varphi}_{t_j-1}}{\left(\overline{\varphi}_{t_j-1}+g_{t_j}-1\right)\left(\overline{\varphi}_{t_j-1}+g_{t_j}\right)}.$$

Виконавши $s$ таких перетворень, отримаємо рівність

$$\sum_{g_{t_1}=1}^{\infty}\cdots\sum_{g_{t_s}=1}^{\infty}\left(\prod_{j=1}^{s}\frac{\overline{\varphi}_{t_j-1}}{\left(\overline{\varphi}_{t_j-1}+g_{t_j}-1\right)\left(\overline{\varphi}_{t_j-1}+g_{t_j}\right)}\right)=1.$$

Таким чином, $\lambda\left(A^i_{k_1}\cap\cdots\cap A^i_{k_n}\right)=\prod\limits_{j=1}^{n}\lambda\left(A^i_{k_j}\right)$, а тому випадкові події $A^i_k$ незалежні в сукупності. □

**Теорема 3.15.** *Нехай $\overline{P}$-зображення таке, що з деякого номера $n_0$ для всіх $k\geqslant n_0$: $\overline{\varphi}_k=\mathrm{const}$. Для того, щоб для майже всіх чисел $x\in(0;1]$ кожна цифра $i$ в їхніх $\overline{P}$-зображеннях зустрічалася нескінченну кількість разів, необхідно та достатньо, щоб ряд $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty}\frac{1}{\overline{\varphi}_k}$ був розбіжним.*

*Доведення.* **Необхідність.** Припустимо, що за умов даної теореми ряд $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty}\frac{1}{\overline{\varphi}_k}$ є збіжним. Тоді, згідно з наслідком 3.14, для майже всіх $x\in(0;1]$ рівність $g_n(x)=i$ виконується для скінченної кількості номерів $n$. Тому необхідно, щоб ряд $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty}\frac{1}{\overline{\varphi}_k}$ був розбіжним.

**Достатність.** Нехай виконуються умови теореми. Тоді, враховуючи лему 3.16, для всіх $k\geqslant n_0+1$ має місце рівність

$$\lambda\left(A^i_k\right)=\frac{\overline{\varphi}_{k-1}}{\left(\overline{\varphi}_{k-1}+i-1\right)\left(\overline{\varphi}_{k-1}+i\right)}.$$

Нехай
$$A^i = \limsup_{k\to\infty} A_k^i = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k^i\right).$$
Множина $A^i$ містить ті та тільки ті числа, $\overline{P}$-зображення яких містять цифру $i$ нескінченну кількість разів. Події $A_k^i$ $(k \geqslant n_0+1)$ незалежні в сукупності (теорема 3.14). Тому, згідно з лемою Бореля–Кантеллі, для того, щоб $\lambda\left(A^i\right) = 1$, достатньо, щоб ряд
$$\sum_{k=n_0+1}^{\infty} \frac{\overline{\varphi}_{k-1}}{(\overline{\varphi}_{k-1}+i-1)(\overline{\varphi}_{k-1}+i)} = \sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{\overline{\varphi}_k}{(\overline{\varphi}_k+i-1)(\overline{\varphi}_k+i)}$$
був розбіжним. Покажемо, що цей ряд розбіжний тоді і тільки тоді, коли розбіжним є ряд $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty}\frac{1}{\overline{\varphi}_k}$. Для цього розглянемо два випадки.

Якщо $\overline{\varphi}_n \not\to \infty$, то загальні члени обох цих рядів не прямують до 0, а тому обидва ряди розбіжні.

Нехай $\overline{\varphi}_n \to \infty$. Знайдемо границю відношення членів цих рядів:
$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{\overline{\varphi}_k} : \frac{\overline{\varphi}_k}{(\overline{\varphi}_k+i-1)(\overline{\varphi}_k+i)}\right) = \lim_{k\to\infty}\frac{(\overline{\varphi}_k+i-1)(\overline{\varphi}_k+i)}{\overline{\varphi}_k^2} =$$
$$= \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{i-1}{\overline{\varphi}_k}\right)\left(1+\frac{i}{\overline{\varphi}_k}\right) = 1.$$
Згідно з граничною ознакою порівняння рядів, ці ряди або одночасно збіжні, або одночасно розбіжні. Отже, якщо ряд $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty}\frac{1}{\overline{\varphi}_k}$ розбіжний, то ряд $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty}\frac{\overline{\varphi}_k}{(\overline{\varphi}_k+i-1)(\overline{\varphi}_k+i)}$ також розбіжний, а значить $\lambda\left(A^i\right) = 1$. Звідси маємо, що для майже всіх чисел $x \in (0;1]$ рівність $g_n(x) = i$ виконується для нескінченної кількості номерів $n$. $\square$

**Наслідок 3.15.** *Якщо $\overline{\varphi}_n = 1$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, тобто $\overline{P}$-представлення чисел є різницевим представленням чисел рядами Люрота, то для кожного $i \in \mathbb{N}$ рівність $g_n(x) = i$ виконується для нескінченної кількості номерів $n$ для майже всіх $x \in (0;1]$.*

**Лема 3.17.** *Якщо $\overline{P}$-зображення таке, що*

$$\overline{\varphi}_k\left(g_1,\ldots,g_k\right) \geqslant \overline{\varphi}_{k-1}\left(g_1,\ldots,g_{k-1}\right)+g_k$$

*для довільного набору* $g_1,\ldots,g_k$, *то* $\lambda\left(A^1_{k+1}\right) \leqslant \frac{1}{2}\lambda\left(A^1_k\right)$.

*Доведення.* В доведенні теореми 3.13 було показано, що

$$\lambda\left(A^1_k\right)=\sum_{g_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{g_{k-1}=1}^{\infty}\left(|\Delta^{\overline{P}}_{g_1\ldots g_{k-1}}|\cdot\frac{1}{\overline{\varphi}_{k-1}\left(g_1,\ldots,g_{k-1}\right)+1}\right).$$

Тоді мають місце нерівності

$$\lambda\left(A^1_{k+1}\right)=\sum_{g_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{g_{k-1}=1}^{\infty}\sum_{g_k=1}^{\infty}\left(|\Delta^{\overline{P}}_{g_1\ldots g_{k-1}g_k}|\cdot\frac{1}{\overline{\varphi}_k+1}\right)\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{g_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{g_{k-1}=1}^{\infty}\sum_{g_k=1}^{\infty}\left(|\Delta^{\overline{P}}_{g_1\ldots g_{k-1}g_k}|\cdot\frac{1}{\overline{\varphi}_{k-1}+g_k+1}\right)=$$
$$=\sum_{g_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{g_{k-1}=1}^{\infty}\sum_{g_k=1}^{\infty}\left(|\Delta^{\overline{P}}_{g_1\ldots g_{k-1}}|\cdot\frac{\overline{\varphi}_{k-1}}{(\overline{\varphi}_{k-1}+g_k-1)(\overline{\varphi}_{k-1}+g_k)(\overline{\varphi}_{k-1}+g_k+1)}\right).$$

Знайдемо внутрішню суму для довільного фіксованого набору $g_1,\ldots,g_{k-1}$:

$$\sum_{g_k=1}^{\infty}\left(|\Delta^{\overline{P}}_{g_1\ldots g_{k-1}}|\cdot\frac{\overline{\varphi}_{k-1}}{(\overline{\varphi}_{k-1}+g_k-1)(\overline{\varphi}_{k-1}+g_k)(\overline{\varphi}_{k-1}+g_k+1)}\right)=$$
$$=|\Delta^{\overline{P}}_{g_1\ldots g_{k-1}}|\cdot\overline{\varphi}_{k-1}\cdot\sum_{g_k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(\overline{\varphi}_{k-1}+g_k-1)(\overline{\varphi}_{k-1}+g_k)(\overline{\varphi}_{k-1}+g_k+1)}\right)=$$
$$=|\Delta^{\overline{P}}_{g_1\ldots g_{k-1}}|\cdot\overline{\varphi}_{k-1}\cdot\frac{1}{2\overline{\varphi}_{k-1}\left(\overline{\varphi}_{k-1}+1\right)}=\frac{1}{2}|\Delta^{\overline{P}}_{g_1\ldots g_{k-1}}|\cdot\frac{1}{\overline{\varphi}_{k-1}+1}.$$

Таким чином отримуємо нерівність

$$\lambda\left(A^1_{k+1}\right)\leqslant\sum_{g_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{g_{k-1}=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}|\Delta^{\overline{P}}_{g_1\ldots g_{k-1}}|\cdot\frac{1}{\overline{\varphi}_{k-1}+1}\right)=\frac{1}{2}\lambda\left(A^1_k\right). \qquad \square$$

**Теорема 3.16.** *Нехай $\overline{P}$-зображення таке, що при деякому $n_0$ для всіх $k \geqslant n_0$ нерівність $\overline{\varphi}_k(g_1,\ldots,g_k) \geqslant \overline{\varphi}_{k-1}(g_1,\ldots,g_{k-1})+g_k$ виконується для кожного набору $g_1,\ldots,g_k$. Тоді для кожного $i\in\mathbb{N}$ рівність $g_n(x)=i$ для майже всіх $x\in(0;1]$ виконується для скінченної кількості номерів $n$.*

*Доведення.* Нехай виконуються умови теореми. Тоді

$$\lambda\left(A^i_{k+1}\right) \leqslant \lambda\left(A^1_{k+1}\right) \leqslant \frac{1}{2}\lambda\left(A^1_k\right);$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda\left(A^i_k\right) = \sum_{k=1}^{n_0}\lambda\left(A^i_k\right) + \sum_{k=1}^{\infty}\lambda\left(A^i_{n_0+k}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n_0}\lambda\left(A^i_k\right) + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^k}\lambda\left(A^1_{n_0}\right)\right) = \sum_{k=1}^{n_0}\lambda\left(A^i_k\right) + \lambda\left(A^1_{n_0}\right).$$

Отже, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lambda\left(A^i_k\right)$ збіжний, а тому $\lambda\left(A^i\right) = 0$. Таким чином, для кожного $i \in \mathbb{N}$ рівність $g_n\left(x\right) = i$ для майже всіх $x \in (0;1]$ виконується для скінченної кількості номерів $n$. $\square$

**Наслідок 3.16.** *Якщо $\overline{\varphi}_n = \overline{\varphi}_{n-1} + g_n$ для кожного $n \in \mathbb{N}$, тобто $\overline{P}$-зображення є різницевою формою зображення чисел модифікованими рядами Енгеля, то для кожного $i \in \mathbb{N}$ рівність $g_n(x) = i$ виконується для скінченної кількості номерів $n$ для майже всіх $x \in (0;1]$.*

**Наслідок 3.17.** *Якщо $\overline{\varphi}_n = (\overline{\varphi}_{n-1} + g_n - 1)(\overline{\varphi}_{n-1} + g_n)$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, тобто $\overline{P}$-зображення є різницевою формою зображення чисел рядами Сильвестера, то для кожного $i \in \mathbb{N}$ рівність $g_n\left(x\right) = i$ виконується для скінченної кількості номерів $n$ для майже всіх $x \in (0;1]$.*

### 3.5.2. Нормальні властивості чисел, що пов'язані з асимптотичною частотою цифр у їхньому $\overline{P}$-зображенні.

Нехай $x = \Delta^{\overline{P}}_{g_1 g_2 \ldots}$. Через $N^{\overline{P}}_i\left(x,k\right)$ позначимо кількість номерів $n$ таких, що $g_n = i$ та $n \leqslant k$.

**Означення 3.11.** Якщо для числа $x$ існує границя

$$\lim_{k\to\infty}\frac{N^{\overline{P}}_i\left(x,k\right)}{k} = \nu^{\overline{P}}_i\left(x\right),$$

то число $\nu^{\overline{P}}_i\left(x\right)$ називають асимптотичною частотою цифри $i$ в $\overline{P}$-зображенні числа $x$.

Якщо цифра $i$ зустрічається скінченну кількість разів у $\overline{P}$-зображенні числа $x$, то $\nu^{\overline{P}}_i\left(x\right) = 0$. Тому цікавим є лише той випадок, коли цифра $i$ в

$\overline{P}$-зображенні числа зустрічається нескінченну кількість разів.

Розглянемо ймовірнісний простір $(\Omega, \mathcal{F}, \lambda)$, де $\Omega = (0;1]$, $\mathcal{F}$ — $\sigma$-алгебра вимірних за Лебегом підмножин множини $\Omega$, $\lambda$ — міра Лебега.

Нехай випадкові величини $\xi_k^i$ такі, що

$$\xi_k^i(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } g_k(x) \neq i, \\ 1, & \text{якщо } g_k(x) = i. \end{cases}$$

**Лема 3.18.** *Нехай $\overline{P}$-зображення таке, що з деякого номера $n_0$ для всіх $k \geqslant n_0$: $\overline{\varphi}_k = \mathrm{const}$. Тоді для послідовності випадкових величин*

$$\left\{\xi_k^i, k \geqslant n_0 + 1\right\}$$

*виконується посилений закон великих чисел.*

*Доведення.* З теореми 3.14 випливає, що випадкові величини $\xi_k^i$ незалежні в сукупності. Тоді, згідно з теоремою Колмогорова про посилений закон великих чисел, достатньо показати, що $\mathbf{D}\xi_k^i < \infty$ та ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{D}\xi_{n+n_0}^i}{n^2}$ є збіжним.

Зрозуміло, що математичне сподівання $\mathbf{M}\xi_k^i$ випадкової величини $\xi_k^i$ обчислюється за формулою $\mathbf{M}\xi_k^i = \lambda\left(A_k^i\right)$. Звідси одразу слідує, що для дисперсії $\mathbf{D}\xi_k^i$ випадкової величини $\xi_k^i$ має місце співвідношення

$$\mathbf{D}\xi_k^i = \lambda\left(A_k^i\right)\left(1 - \lambda\left(A_k^i\right)\right) < 1 < \infty.$$

Як наслідок, ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{D}\xi_{n+n_0}^i}{n^2}$ є збіжним.

Отже, для послідовності випадкових величин $\left\{\xi_k^i, k \geqslant n_0 + 1\right\}$ виконується посилений закон великих чисел. □

**Теорема 3.17.** *Нехай $\overline{P}$-зображення таке, що з деякого номера $n_0$ для всіх $k \geqslant n_0$: $\overline{\varphi}_k = \mathrm{const}$. Тоді якщо існує границя*

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{k}\sum_{n=n_0}^{k-1} \frac{\overline{\varphi}_n}{\left(\overline{\varphi}_n + i - 1\right)\left(\overline{\varphi}_n + i\right)}\right) = \nu_i, \tag{3.22}$$

*то для майже всіх чисел $x \in (0;1]$ існує і при цьому одна й та ж сама асимптотична частота цифри $i$, що дорівнює $\nu_i$.*

*Доведення.* Для випадкових величин $\left\{\xi_k^i, k \geqslant n_0+1\right\}$ виконується посилений закон великих чисел, тобто для майже всіх чисел $x \in (0;1]$:

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{\sum\limits_{n=n_0+1}^{k}\xi_n^i(x)}{k-n_0}-\frac{\mathbf{M}\left(\sum\limits_{n=n_0+1}^{k}\xi_n^i\right)}{k-n_0}\right)=0.$$

Оскільки $\sum\limits_{n=n_0+1}^{k}\xi_n^i(x)=N_i^{\overline{P}}(x,k)-N_i^{\overline{P}}(x,n_0)$ та

$$\mathbf{M}\left(\sum_{n=n_0+1}^{k}\xi_n^i\right)=\sum_{n=n_0+1}^{k}\mathbf{M}\xi_n^i=\sum_{n=n_0+1}^{k}\lambda\left(A_n^i\right)=\sum_{n=n_0}^{k-1}\frac{\overline{\varphi}_n}{(\overline{\varphi}_n+i-1)(\overline{\varphi}_n+i)},$$

то цю границю можна переписати наступним чином:

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{N_i^{\overline{P}}(x,k)}{k-n_0}-\frac{N_i^{\overline{P}}(x,n_0)}{k-n_0}-\frac{1}{k-n_0}\cdot\sum_{n=n_0}^{k-1}\frac{\overline{\varphi}_n}{(\overline{\varphi}_n+i-1)(\overline{\varphi}_n+i)}\right)=0.$$

Зрозуміло, що $\frac{N_i^{\overline{P}}(x,n_0)}{k-n_0}\to 0$ при $k\to\infty$, а заміна знаменників $k-n_0$ на $k$ не впливає на значення границі. Тому для майже всіх чисел $x \in (0;1]$:

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{N_i^{\overline{P}}(x,k)}{k}-\frac{1}{k}\sum_{n=n_0}^{k-1}\frac{\overline{\varphi}_n}{(\overline{\varphi}_n+i-1)(\overline{\varphi}_n+i)}\right)=0.$$

Тоді, якщо існує границя (3.22), то для майже всіх чисел $x \in (0;1]$ має місце рівність

$$\nu_i^{\overline{P}}(x)=\lim_{k\to\infty}\frac{N_i^{\overline{P}}(x,k)}{k}=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{k}\sum_{n=n_0}^{k-1}\frac{\overline{\varphi}_n}{(\overline{\varphi}_n+i-1)(\overline{\varphi}_n+i)}\right)=\nu_i. \qquad \square$$

**Наслідок 3.18.** *Нехай $\overline{P}$-зображення таке, що з деякого номера $n_0$ для всіх $k \geqslant n_0$: $\overline{\varphi}_k = \mathrm{const}$. Тоді якщо $\lim\limits_{k\to\infty}\overline{\varphi}_k=\infty$, то для майже всіх чисел $x \in (0;1]$ та кожного $i \in \mathbb{N}$ має місце рівність $\nu_i^{\overline{P}}(x)=0$.*

*Доведення.* З теореми Штольца слідує, що для того, щоб існувала границя (3.22) достатньо, щоб існувала границя $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{\overline{\varphi}_k}{(\overline{\varphi}_k+i-1)(\overline{\varphi}_k+i)}$. При цьому ці границі будуть рівними між собою. Тому, якщо $\lim\limits_{k\to\infty} \overline{\varphi}_k = \infty$, то $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{\overline{\varphi}_k}{(\overline{\varphi}_k+i-1)(\overline{\varphi}_k+i)} = 0$ для кожного натурального $i$. Звідси отримуємо, що для майже всіх чисел $x \in (0;1]$ та кожного $i \in \mathbb{N}$ має місце рівність $\nu_i^{\overline{P}}(x) = 0$. □

*Зауваження* 3.6. Нехай $\overline{P}$-зображення таке, що з деякого номера $n_0$ для всіх $k \geqslant n_0$: $\overline{\varphi}_k = \text{const}$, $\lim\limits_{k\to\infty} \overline{\varphi}_k = \infty$, але при цьому ряд $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} \frac{1}{\overline{\varphi}_k}$ розбіжний. Тоді для майже всіх чисел $x \in (0;1]$ кожна цифра $i$ зустрічається нескінченну кількість разів в $\overline{P}$-зображенні числа $x$, але при цьому має нульову асимптотичну частоту.

**Наслідок 3.19.** *Якщо функції* $\overline{\varphi}_k$ *такі, що починаючи з деякого номеру* $\overline{\varphi}_k \equiv r$, *то для майже всіх чисел* $x \in (0;1]$ *та кожного* $i \in \mathbb{N}$ *має місце рівність*

$$\nu_i^{\overline{P}}(x) = \frac{r}{(r+i-1)(r+i)}.$$

**Наслідок 3.20.** *Якщо* $\overline{\varphi}_k \equiv 1$ *для всіх* $k \in \mathbb{N}$, *тобто* $\overline{P}$-*зображення є різницевою формою зображення чисел рядами Люрота, то для майже всіх чисел* $x \in (0;1]$ *та кожного* $i \in \mathbb{N}$ *має місце рівність*

$$\nu_i^{\overline{P}}(x) = \frac{1}{i(i+1)}.$$

**Означення 3.12.** Нехай $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ — послідовність елементів деякої множини $X$, $a^*$ — деякий елемент цієї множини, $N_{a^*}(k)$ — кількість номерів $n \leqslant k$ таких, що $a_n = a^*$. Якщо для послідовності $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ та елемента $a^*$ існує границя

$$\lim_{k\to\infty} \frac{N_{a^*}(k)}{k} = \theta(a^*),$$

то число $\theta(a^*)$ називатимемо асимптотичною частотою елемента $a^*$ в послідовності $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

**Теорема 3.18.** *Нехай функції* $\overline{\varphi}_k$ *такі, що, починаючи з деякого номеру* $k_0$*, їхні значення залежать тільки від номеру* $k$*,* $\theta(n)$ *— асимптотична частота числа* $n \in \mathbb{N}$ *в послідовності* $(\overline{\varphi}'_k)_{k=1}^{\infty}$*, де* $\overline{\varphi}'_k = \overline{\varphi}_{k+k_0-1}$*, причому* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \theta(n) = 1$*. Тоді для майже всіх чисел* $x \in (0;1]$ *та кожного* $i \in \mathbb{N}$ *має місце рівність*

$$\nu_i^{\overline{P}}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \theta(n) \frac{n}{(n+i-1)(n+i)} \right).$$

*Доведення.* Згідно з теоремою 3.17, коли існує границя

$$\lim_{k\to\infty} \left( \frac{1}{k} \sum_{m=k_0}^{k-1} \frac{\overline{\varphi}_m}{(\overline{\varphi}_m + i - 1)(\overline{\varphi}_m + i)} \right) = \nu_i,$$

то для для майже всіх чисел $x \in (0;1]$ існує і при цьому одна й та ж сама асимптотична частота цифри $i$, що дорівнює $\nu_i$. Нехай послідовність $(\overline{\varphi}'_k)_{k=1}^{\infty}$ така, що для кожного числа $n \in \mathbb{N}$ існує його асимптотична частота $\theta(n)$ в цій послідовності, а $N_n(k)$ — кількість разів, які число $n$ зустрічається в цій послідовності до $k$-го місця включно. Тоді одночасно існують та рівні (або не існують) наступні границі:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{m=k_0}^{k-1} \frac{\overline{\varphi}_m}{(\overline{\varphi}_m + i - 1)(\overline{\varphi}_m + i)} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{m=1}^{k} \frac{\overline{\varphi}'_m}{(\overline{\varphi}'_m + i - 1)(\overline{\varphi}'_m + i)} =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{\infty} N_n(k) \frac{n}{(n+i-1)(n+i)} = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{N_n(k)}{k} \frac{n}{(n+i-1)(n+i)}.$$

Доведемо, що остання границя існує, причому має місце рівність

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{N_n(k)}{k} \frac{n}{(n+i-1)(n+i)} = \sum_{n=1}^{\infty} \theta(n) \frac{n}{(n+i-1)(n+i)}.$$

Звідси безпосередньо буде слідувати існування границі (3.22).

Оскільки ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \theta(n)$ збіжний, то для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $t \in \mathbb{N}$, що $\sum\limits_{n=t+1}^{\infty} \theta(n) < \varepsilon$. Оскільки $\theta(n) = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{N_n(k)}{k}$, то існує таке $K > t$, що для всіх $k \geqslant K$ та всіх $n \leqslant t$ має місце нерівність

$$\left|\theta(n) - \frac{N_n(k)}{k}\right| < \frac{\varepsilon}{t}.$$

Тоді для всіх $k \geqslant K$ виконується нерівність

$$\left|\sum_{n=1}^{k}\theta(n)\frac{n}{(n+i-1)(n+i)} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{N_n(k)}{k}\frac{n}{(n+i-1)(n+i)}\right| <$$
$$< \sum_{n=1}^{t}\left|\theta(n) - \frac{N_n(k)}{k}\right|\frac{n}{(n+i-1)(n+i)} + \sum_{n=t+1}^{k}\theta(n) + \sum_{n=t+1}^{\infty}\frac{N_n(k)}{k} <$$
$$< \sum_{n=1}^{t}\left|\theta(n) - \frac{N_n(k)}{k}\right| + \varepsilon + \sum_{n=t+1}^{\infty}\frac{N_n(k)}{k} < \frac{\varepsilon}{t}\cdot t + \varepsilon + \sum_{n=t+1}^{\infty}\frac{N_n(k)}{k} =$$
$$= 2\varepsilon + \sum_{n=t+1}^{\infty}\frac{N_n(k)}{k}.$$

Оцінимо значення суми $\sum\limits_{n=t+1}^{\infty}\frac{N_n(k)}{k}$. Оскільки для всіх $k \geqslant K$ та всіх $n \leqslant t$ має місце нерівність $\left|\theta(n) - \frac{N_n(k)}{k}\right| < \frac{\varepsilon}{t}$, то

$$\frac{N_n(k)}{k} > \theta(n) - \frac{\varepsilon}{t}.$$

Звідси слідує, що

$$\sum_{n=1}^{t}\frac{N_n(k)}{k} > \sum_{n=1}^{t}\theta(n) - \varepsilon.$$

Тоді

$$\sum_{n=t+1}^{\infty}\frac{N_n(k)}{k} = 1 - \sum_{n=1}^{t}\frac{N_n(k)}{k} < 1 - \sum_{n=1}^{t}\theta(n) + \varepsilon = \sum_{n=t+1}^{\infty}\theta(n) + \varepsilon < 2\varepsilon.$$

Таким чином маємо, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $K$, що для кожного $k \geqslant K$ має місце нерівність

$$\left|\sum_{n=1}^{k}\theta(n)\frac{n}{(n+i-1)(n+i)} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{N_n(k)}{k}\frac{n}{(n+i-1)(n+i)}\right| < 4\varepsilon.$$

Оскільки, згідно з ознакою порівняння, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\theta(n)\frac{n}{(n+i-1)(n+i)}$ збіжний, то з останньої нерівності випливає, що існує також і границя

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{N_n(k)}{k}\frac{n}{(n+i-1)(n+i)}=\sum_{n=1}^{\infty}\theta(n)\frac{n}{(n+i-1)(n+i)}.$$

Звідси безпосередньо слідує твердження даної теореми. □

**Лема 3.19.** *Нехай послідовність $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ елементів деякої множини періодична, починаючи з деякого номеру $k_0$, причому цей період складається з чисел $c_1,\dots,c_j$, що містяться в ньому $h_1,\dots,h_j$ разів відповідно. Тоді існує асимптотична частота елементів $c_1,\dots,c_j$ в даній послідовності, причому*

$$\theta(c_n)=\frac{h_n}{h_1+\cdots+h_j}.$$

*Доведення.* Нехай $h=h_1+\cdots+h_j$, $k>k_0$, причому $k=(k_0-1)+hd+t$, де $d$ — кількість повних періодів до номеру $k$ включно, $t\in\{0,\dots,h-1\}$. Тоді має місце наступна оцінка числа $N_{c_n}(k)$, де $N_{c_n}(k)$ — кількість чисел $c_n$ в послідовності $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ до $k$-го місця включно:

$$N_{c_n}(k_0-1)+h_nd\leqslant N_{c_n}(k)\leqslant N_{c_n}(k_0-1)+h_n(d+1).$$

Звідси випливає, що

$$\theta(c_n)=\lim_{k\to\infty}\frac{N_{c_n}(k)}{k}=\lim_{k\to\infty}\frac{h_nd}{k}=\frac{h_n}{h}=\frac{h_n}{h_1+\cdots+h_j}.$$ □

**Наслідок 3.21.** *Нехай функції $\overline{\varphi}_k$ такі, що, починаючи з деякого номеру $n_0$, їхні значення залежать тільки від номеру $k$. Також нехай послідовність $(\overline{\varphi}_k)_{k=n_0}^{\infty}$ періодична, починаючи з деякого номеру, причому цей період складається з чисел $c_1,\dots,c_j$, що містяться в ньому $h_1,\dots,h_j$ разів відповідно. Тоді для майже всіх чисел $x\in(0;1]$ та для кожної цифри $i$ має місце рівність*

$$\nu_i^{\overline{P}}(x)=\sum_{n=1}^{j}\left(\frac{h_n}{h_1+\cdots+h_j}\cdot\frac{c_n}{(c_n+i-1)(c_n+i)}\right).$$

**3.5.3. Приклади: нормальні властивості деяких $\overline{P}$-зображень.** Наведемо приклади декількох $\overline{P}$-зображень, відмінних від класичних зображень рядами Енгеля, Люрота та Сильвестера, що володіють тими чи іншими нормальними властивостями згідно з доведеними вище теоремами.

**Приклад 3.1.** Нехай $\overline{P}$-зображення таке, що $\overline{\varphi}_0 = 1$ та $\overline{\varphi}_n = n$, $n \in \mathbb{N}$. Тоді у $\overline{P}$-зображеннях майже всіх чисел з $(0;1]$ кожна цифра зустрічається нескінченну кількість разів з нульовою асимптотичною частотою.

*Доведення.* Оскільки ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\overline{\varphi}_n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ розбіжний, то, згідно з теоремою 3.15, у $\overline{P}$-зображеннях майже всіх чисел з $(0;1]$ кожна цифра зустрічається нескінченну кількість разів. Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{\varphi}_n = \infty$, то, згідно з наслідком 3.18, для майже всіх чисел з $(0;1]$ асимптотична частота кожної цифри їхнього $\overline{P}$-зображення рівна нулю. □

**Приклад 3.2.** Нехай $\overline{P}$-зображення таке, що $\overline{\varphi}_0 = 1$ та $\overline{\varphi}_n = r^{g_1+\cdots+g_n}$, де $r \geqslant 2$, $n \in \mathbb{N}$. Тоді у $\overline{P}$-зображеннях майже всіх чисел з $(0;1]$ кожна цифра зустрічається скінченну кількість разів.

*Доведення.* Оскільки ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\min \overline{\varphi}_n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r^n}$ збіжний, то, згідно з теоремою 3.13, у $\overline{P}$-зображеннях майже всіх чисел з $(0;1]$ кожна цифра зустрічається скінченну кількість разів. □

**Приклад 3.3.** Нехай $\overline{P}$-зображення визначене послідовністю функцій $\overline{\varphi}_k$ таких, що $\overline{\varphi}_{3n} = 1$, $\overline{\varphi}_{3n+1} = 1$ та $\overline{\varphi}_{3n+2} = 2$, $n \geqslant 0$. Тоді у $\overline{P}$-зображеннях майже всіх чисел з $(0;1]$ кожна цифра зустрічається нескінченну кількість разів з асимптотичною частотою $\nu_i^{\overline{P}} = \frac{4}{3i(i+2)}$.

*Доведення.* Оскільки значення функцій $\overline{\varphi}_n$ не залежать від значення $n$ та утворюють при цьому періодичну послідовність з періодом $(1;1;2)$, то, згідно з наслідком 3.21, у $\overline{P}$-зображенні майже всіх чисел $x \in (0;1]$ кожна цифра $i$ зустрічається з асимптотичною частотою

$$\nu_i^{\overline{P}}(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{i(i+1)} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{(i+1)(i+2)} = \frac{4}{3i(i+2)}.$$ □

**Приклад 3.4.** Нехай $\overline{P}$-зображення таке, що

$$\overline{\varphi}_n(g_1, \dots, g_n) = 1 + g_1^1 + g_2^2 + \dots + g_n^n, \quad \overline{\varphi}_0 = 1.$$

Тоді у $\overline{P}$-зображеннях майже всіх чисел з $(0;1]$ кожна цифра зустрічається скінченну кількість разів.

*Доведення.* Оскільки

$$\overline{\varphi}_n(g_1, \dots, g_n) = 1 + g_1^1 + g_2^2 + \dots + g_n^n = \\ = \overline{\varphi}_{n-1}(g_1, \dots, g_{n-1}) + g_n^n \geqslant \overline{\varphi}_{n-1}(g_1, \dots, g_{n-1}) + g_n,$$

то, згідно з теоремою 3.16, у $\overline{P}$-зображеннях майже всіх чисел з $(0;1]$ кожна цифра зустрічається скінченну кількість разів. □

## 3.6. Оператор лівостороннього зсуву цифр $\overline{P}$-зображення чисел. Аналог задачі Гауса–Кузьміна для $\overline{P}$-зображення чисел

**Означення 3.13.** Нехай $x = \Delta^{\overline{P}}_{g_1 g_2 \dots}$. Функцію $\omega_{\overline{P}}\colon (0;1] \to (0;1]$, означену рівністю

$$\omega_{\overline{P}}(x) = \omega_{\overline{P}}(\Delta^{\overline{P}}_{g_1 g_2 \dots}) = \Delta^{\overline{P}}_{g_2 g_3 \dots},$$

будемо називати оператором лівостороннього зсуву цифр $\overline{P}$-зображення чисел.

**Лема 3.20.** *Функція $\omega_{\overline{P}}$:*

1) *є сюр'єктивною;*
2) *є зростаючою на кожному $\overline{P}$-циліндрі першого рангу;*
3) *є неперервною у всіх внутрішніх точках кожного $\overline{P}$-циліндра першого рангу;*
4) *має скінчену похідну майже скрізь на $(0;1]$.*

Доведення цієї леми випливає безпосередньо з означення функції $\omega_{\overline{P}}$ та властивостей $\overline{P}$-зображення.

Оператор $n$-кратного лівостороннього зсуву $\omega^n_{\overline{P}}$ означується рівністю $\omega^n_{\overline{P}}(x) \equiv \omega_{\overline{P}}(\omega^{n-1}_{\overline{P}}(x))$, де $\omega^1_{\overline{P}}(x) = \omega_{\overline{P}}(x)$.

Для фіксованого $a \in (0;1]$ означимо множину $E^{\overline{P}}_n(a)$:

$$E^{\overline{P}}_n(a) = \left\{x\colon x \in (0;1], \omega^n_{\overline{P}}(x) < a\right\}.$$

Задача Гауса–Кузьміна для різницевого $\overline{P}$-зображення дійсних чисел полягає у знаходженні границі

$$\lim_{n\to\infty} \lambda\left(E^{\overline{P}}_n(a)\right),$$

де $\lambda$ — міра Лебега.

**Лема 3.21.** *Для кожного $\overline{P}$-зображення та довільного $a \in (0;1]$ множина $E^{\overline{P}}_n(a)$ є вимірною за Лебегом.*

*Доведення.* Нехай $a = \Delta^{\overline{P}}_{c_1c_2\ldots}$. Тоді

$$\begin{aligned}E^{\overline{P}}_n(a) &= \left\{x = \Delta^{\overline{P}}_{g_1g_2\ldots}\colon \Delta^{\overline{P}}_{g_{n+1}g_{n+2}\ldots} < \Delta^{\overline{P}}_{c_1c_2\ldots}\right\} = \\ &= \bigcup_{g_1=1}^{\infty}\cdots\bigcup_{g_n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\left(\bigcup_{i=c_k+1}^{\infty}\Delta^{\overline{P}}_{g_1\ldots g_nc_1\ldots c_{k-1}i}\right)\right) = \\ &= \bigcup_{g_1=1}^{\infty}\cdots\bigcup_{g_n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{i=c_1+1}^{\infty}\Delta^{\overline{P}}_{g_1\ldots g_ni} \cup \bigcup_{i=c_2+1}^{\infty}\Delta^{\overline{P}}_{g_1\ldots g_nc_1i}\cup\cdots\right).\end{aligned}$$

Таким чином маємо, що множина $E^{\overline{P}}_n(a)$ є об'єднанням зліченної кількості циліндрів, а тому вона є вимірною за Лебегом множиною. □

**Теорема 3.19.** *Нехай $\overline{P}$-представлення таке, що існує номер $n_0 \in \mathbb{N}$ такий, що для всіх $k \geqslant n_0$ значення функцій $\overline{\varphi}_k$ залежать тільки від номеру $k$, причому ряд $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty}\frac{1}{\overline{\varphi}_k}$ є збіжним. Тоді для кожного $a \in (0;1]$:*

$$\lim_{n\to\infty} \lambda\left(E^{\overline{P}}_n(a)\right) = 1.$$

*Доведення.* Зрозуміло, що для кожного $\overline{P}$-зображення

$$\lim_{n\to\infty} \lambda\left(E^{\overline{P}}_n(1)\right) = 1.$$

Припустимо, що для деякого $\overline{P}$-зображення, що задовольняє умови даної теореми, при деякому $a \in (0;1)$ або $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda\left(E_n^{\overline{P}}(a)\right) < 1$, або ця границя не існує. Тоді існує $\delta \in (0;1)$ таке, що $\lambda\left(E_k^{\overline{P}}(a)\right) \leqslant \delta$ для нескінченної кількості номерів $k$.

Звідси отримуємо, що для нескінченної кількості номерів $k$ має місце нерівність

$$\lambda\left(A_{k+1}^1\right) + \cdots + \lambda\left(A_{k+1}^{g_1(a)}\right) = \lambda\left(\{x\colon g_{k+1}(x) \leqslant g_1(a)\}\right) \geqslant$$
$$\geqslant \lambda\left(\left\{x\colon \omega_{\overline{P}}^k(x) \geqslant a\right\}\right) \geqslant 1-\delta > 0.$$

Отже, існує такий номер $t \leqslant g_1(a)$, що для нескінченної кількості номерів має місце нерівність $\lambda\left(A_{k+1}^t\right) \geqslant \frac{1-\delta}{g_1(a)} > 0$, а тому ряд $\sum\limits_{k=n_0+1}^{\infty} \lambda\left(A_k^t\right)$ розбіжний.

Згідно з теоремою 3.14, події $A_k^t$ при $k \geqslant n_0+1$ незалежні в сукупності. Тому, враховуючи лему Бореля–Кантеллі, отримуємо, що для майже всіх $x \in (0;1]$ цифра $t$ у їхньому $\overline{P}$-представленні зустрічається нескінченну кількість разів. Тоді, в силу теореми 3.15, ряд $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} \frac{1}{\overline{\varphi}_k}$ має бути розбіжним, що суперечить умові даної теореми. Отже, припущення хибне, а тому для кожного $a \in (0;1]$ має місце рівність $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda\left(E_n^{\overline{P}}(a)\right) = 1$. □

**Теорема 3.20.** *Нехай для $\overline{P}$-представлення існує $n_0 \in \mathbb{N}$ таке, що*

$$\overline{\varphi}_n(g_1,\ldots,g_n) \geqslant \overline{\varphi}_{n-1}(g_1,\ldots,g_{n-1}) + g_n$$

*для довільного набору $g_1,\ldots,g_n$, де $n > n_0$. Тоді для кожного $a \in (0;1]$:*

$$\lim_{n\to\infty} \lambda\left(E_n^{\overline{P}}(a)\right) = 1.$$

*Доведення.* Нехай $n > n_0$. Розглянемо доповнення до множини $E_n^{\overline{P}}(a)$:

$$D_n^{\overline{P}}(a) = (0;1] \setminus E_n^{\overline{P}}(a) = \left\{x\colon x \in (0;1], \omega_{\overline{P}}^n(x) \geqslant a\right\}.$$

Нехай $a = \Delta^{\overline{P}}_{c_1c_2\ldots}$. Тоді

$$D^{\overline{P}}_n(a) \subset \{x\colon x \in (0;1], g_{n+1}(x) \leqslant c_1\} = \bigcup_{i=1}^{c_1} A^i_{n+1}.$$

Оскільки $D^{\overline{P}}_n(a)$ є доповненням до вимірної за Лебегом множини (лема 3.21), то, враховуючи лему 3.17, маємо

$$\lambda\left(D^{\overline{P}}_n(a)\right) \leqslant \sum_{i=1}^{c_1} \lambda\left(A^i_{n+1}\right) \leqslant c_1 \cdot \lambda\left(A^1_{n+1}\right) \leqslant \frac{c_1}{2} \cdot \lambda\left(A^1_n\right).$$

Таким чином, для кожного $k$ має місце нерівність

$$\lambda\left(D^{\overline{P}}_{n+k}(a)\right) \leqslant \frac{c_1}{2^{k+1}} \cdot \lambda\left(A^1_n\right).$$

Тому

$$\lambda\left(E^{\overline{P}}_{n+k}(a)\right) = 1 - \lambda\left(D^{\overline{P}}_{n+k}(a)\right) \geqslant 1 - \frac{c_1}{2^{k+1}} \cdot \lambda\left(A^1_n\right).$$

Звідси слідує, що

$$\lim_{n\to\infty} \lambda\left(E^{\overline{P}}_n(a)\right) = \lim_{k\to\infty} \lambda\left(E^{\overline{P}}_{n+k}(a)\right) = 1. \qquad \square$$

**Висновки до розділу 3**

У цьому розділі створено загальну теорію представлення та зображення чисел рядами Перрона в стандартній та різницевій формах, зокрема:

1) для дійсного числа з проміжку $(0; 1]$ дано означення його $P$ та $\overline{P}$-представлення, $P$ та $\overline{P}$-зображення, $P$ та $\overline{P}$-цифри, обґрунтовано їхнє існування та єдиність;
2) для $P$ та $\overline{P}$-зображень означено циліндричні множини, описано їхні тополого-метричні властивості;
3) для окремих класів $\overline{P}$-зображень встановлено нормальні властивості чисел за їхніми $\overline{P}$-зображеннями; це стосувалось кількості цифр у $\overline{P}$-зображеннях чисел та їхньої асимптотичної частоти, у окремих випадках знайдено формули для обчислення асимптотичних частот цифр у $\overline{P}$-зображеннях чисел.

Також у даному розділі вивчались функції, що визначені в термінах $\overline{P}$-зображення чисел. Вивчено властивості проєктора одного $\overline{P}$-зображення в інше, а також знайдено достатні умови, за яких такі проєктори є сингулярними функціями. Досліджено функції, що визначені перетворювачами цифр $\overline{P}$-зображень чисел, а також знайдено достатні умови, за яких ці функції є сингулярними. Також розглянуто оператор лівостороннього зсуву цифр $\overline{P}$-зображення числа та динамічну систему, що ним породжена, а саме для окремих класів $\overline{P}$-зображень чисел розв'язано задачу, що є аналогом задачі Гауса–Кузьміна для елементарних ланцюгових дробів.

Основні результати цього розділу опубліковано в роботах [59, 62] та доповідалися на конференціях [58, 60, 61, 66].

# ВИСНОВКИ

Системи представлення та зображення дійсних чисел засобами нескінченного алфавіту є ефективними засобами для конструювання та дослідження математичних об’єктів зі складною локальною структурою. До таких систем належать представлення дійсних чисел елементарними ланцюговими дробами, рядами Люрота, Енгеля, Остроградського–Серпінського–Пірса, Сильвестера тощо.

У даній роботі було використано такі представлення та зображення чисел для розвитку теорії структурно фрактальних множин, ніде не монотонних та сингулярних функцій, локально складних розподілів випадкових величин, динамічних систем, породжених оператором лівостороннього зсуву цифр зображення числа. Зокрема у роботі було отримано наступні результати:

1) проєктор $O$-зображення дійсних чисел в $E$-зображення досліджено на предмет неперервності, монотонності, диференційовності;
2) знайдено функцію розподілу значень проєктора та встановлено її зв’язок із представленням дійсних чисел модифікованими рядами Енгеля;
3) для випадкової величини, що є сумою ряду, члени якого є оберненими до елементів випадкового ряду Енгеля (аналогічно і для ряду Остроградського–Серпінського–Пірса), обчислено математичне сподівання та дисперсію, вивчено тополого-метричну структуру нуль-множин, на яких відповідні функціональні ряди, що породжують вказані випадкові величини, є розбіжними;
4) створено загальну теорію представлення та зображення чисел рядами Перрона в стандартній ($P$-зображення) та різницевій ($\overline{P}$-зобра-

ження) формах, зокрема встановлено тополого-метричні властивості циліндричних множин $P$ та $\overline{P}$-зображень, для деяких класів $\overline{P}$-зображень знайдено нормальні властивості, що пов'язані з кількістю цифр та їх асимптотичними частотами у $\overline{P}$-зображеннях чисел;

5) описано властивості проєктора одного $\overline{P}$-зображення в інше та функцій, що задані перетворювачами $\overline{P}$-цифр числа; показано, що серед них є сингулярні функції; знайдено достатні умови сингулярності таких функцій;
6) вивчено асимптотичні властивості динамічної системи, породженої оператором лівостороннього зсуву цифр $\overline{P}$-зображення числа; збагачено метричну теорію динамічних систем розв'язком задачі, що є аналогом відомої задачі Гауса–Кузьміна для елементарних ланцюгових дробів.

Бачимо перспективи продовження дослідження в таких напрямках:

1) обчислення розмірності Гаусдорфа–Безиковича множин розбіжності функціональних рядів, якими визначені випадкові величини $\psi_n$ та $\xi_n$;
2) вивчення тополого-метричної структури множин чисел з умовами на використання цифр у їхніх $P$ та $\overline{P}$-зображеннях, зокрема множин чисел із забороною на вживання цифр, із заданою частотою цифр, із заданою асимптотикою зростання послідовності цифр тощо;
3) створення загальної теорії представлення та зображення дійсних чисел знакозмінними рядами Перрона, які є узагальненням знакозмінних рядів Люрота та рядів Остроградського–Серпінського–Пірса.

# СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ


1. Albeverio S., Baranovskyi O., Pratsiovytyi M., Torbin G. The Ostrogradsky series and related Cantor-like sets // Acta Arithmetica. 2007. Vol. 130, No 3. P. 215–230.
2. Albeverio S., Baranovskyi O., Pratsiovytyi M., Torbin G. The set of incomplete sums of the first Ostrogradsky series and probability distributions on it // Rev. Roum. Math. Pures Appl. 2009. No 54. P. 129–145.
3. Baranovskyi O., Pratsiovytyi M. One class of continuous functions with complicated local properties related to Engel series // Funct. Approx. Comment. Math. 2023. No 68(2). P. 143–166.
4. Borel Émile. Les probabilités dénombrables et leurs applications arithḿtiques // Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo (1884-1940). 1909. Vol. 27. P. 247–271.
5. Engel F. Entwicklung der Zahlen nach Stammbrüchen // Verhandl. d. 52 Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner in Marburg vom 29. September bis 3. Oktober 1913. Leipzig, 1914. S. 190–191.
6. Erdős P., Rényi A., Szüsz P. On Engel's and Sylvester's series // Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Math. 1958. Vol. 1. P. 7–32.
7. Erdős P., Shallit J. O. New bounds on the length of finite Pierce and Engel series // Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux. 1991. Tome 3. No. 1. P. 43–53.
8. Fang L., Wu M. A Note on Rényi's "Record" Problem and Engel's Series // Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society. 2008. Vol. 61. № 2. P. 363–369.
9. Fang L., Wu M. Hausdorff dimension of certain sets arising in Engel expansions // Nonlinearity. 2018. Vol. 31. No 5. P. 2105–2125.

10. Feng Y., Tan B. Hausdorff dimensions of some exceptional sets in the first Ostrogradsky series // Fractals. 2020. Vol. 28. No 2. 14 pp.
11. Galambos J. The ergodic properties of the denominators in the Oppenheim expansion of real numbers into infinite series of rationals // Quart. J. Math. Oxford Ser. 1970. Vol. 21. P.177–191.
12. Galambos J. On infinite series representations of real numbers // Compositio Mathematica. 1973. Tome 27. No 2. P. 197–204.
13. Galambos J. Representations of Real Numbers by Infinite Series. Springer, 1976. 156 pp.
14. Ganatsiou Ch. On the application of ergodic theory to alternating Engel series // International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. 2001. Vol. 25(12). P. 813–819.
15. Jager H., Vroedt C. Lüroth series and their ergodic properties // Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A. 1969. Vol. 31. P. 31–42.
16. Kalpazidou S., Ganatsiou C. Knopfmacher expansions in number theory // Quaestiones Mathematicae. 2001. Vol. 24. P. 393–401.
17. Klymchuk S.O., Makarchuk O.P., Prats'ovytyi M.V. Frequency of a Digit in the Representation of a Number and the Asymptotic Mean Value of the Digits // Ukr. Math. J. 2014. Vol. 66. No 3. P. 336–346.
18. Knopfmacher A., Knopfmacher J. Two constructions of the real numbers via alternating series // Int. J. Math. Math. Sci. 1989. Vol. 12. No. 3. P.603–613.
19. Lévy P. Sur les lois de probabilité dont dépendent les quotients complets et incomplets d'une fraction continue // Bulletin de la Société Mathématique de France. 1929. Tome 57. P. 178–194.
20. Liu J. On some exceptional sets in Engel expansions and Hausdorff dimensions // Fractals. 2020. Vol. 28(07). 13 pp.
21. Liu Y.Y., Wu J. Hausdorff dimensions in Engel expansions // Acta Arithmetica. 2001. Vol. 99. P. 79–83.

22. Liu Y.Y., Wu J. Some exceptional sets in Engel expansions // Nonlinearity. 2003. Vol. 16(2). P .559–566.
23. Lü M., Liu J. Hausdorff dimensions of some exceptional sets in Engel expansions // Journal of Number Theory. 2018. Vol. 185. P. 490–498.
24. Lüroth J. Uber eine eindeutige Entwickelung von Zahlen in eine unendliche Reihe // Math. Ann. 1883. Vol. 21. P. 411–423.
25. Oppenheim A. The representation of real numbers by infinite series of rationals // Acta Arithmetica. 1972. Vol. 1(21). P. 391–398.
26. Paradís J., Viader P., Bibiloni L. Approximation of irrational quadratics and their Pierce expansions // Fibonacci Quart. 1998. Vol. 36. P. 146–153.
27. Perron O. Irrationalzahlen. Berlin. 1960. viii+204 pp.
28. Pierce T.A. On an algorithm and its use in approximating roots of algebraic equations // The American Mathematical Monthly. 1929. Vol. 36. N 10. P. 523–525.
29. Pratsiovytyi M.V., Goncharenko Ya.V., Dyvliah N.V., Ratushniak S.P. Inversor of digits of $Q_2^*$-representation of numbers // Mat. Stud. 2021. Vol. 55. P. 37–43.
30. Pratsiovytyi M., Khvorostina Yu. Topological and metric properties of distributions of random variables represented by the alternating Lüroth series with independent elements // Random Operators and Stochastic Equations. 2013. Vol. 21. No 4. P. 385–401.
31. Pratsiovytyi M.V., Khvorostina Yu.V. A random variable whose digits in the $\widetilde{L}$-representation have the Markovian dependence // Theor. Probability and Math. Statist. 2015. Vol. 91. P. 157–168.
32. Pratsiovytyi M.V., Ratushniak S.P. Properties and distributions of values of fractal functions related to $Q_2$-representations of real numbers // Theor. Probability and Math. Statist. 2019. Vol. 99. P. 211–228.
33. Rényi A. A new approach to the theory of Engel's series // Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Math. 1962. Vol. 5. P. 25–32.

34. Rényi A. Egy megfigyeléssorozat kiemelkedő elemeiről // Akadémiai Kiadó. 1962. XII. kötet 2. szám. P. 105–121.

35. Rényi A. Théorie des éléments saillants d'une suite d'observations // Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand. 1962. Tome 8. Série Mathématiques. No 2. P. 7–13.

36. Shang L., Wu M. On the growth speed of digits in Engel expansions // Journal of Number Theory. 2021. Vol. 219. P. 368–385.

37. Shang L., Wu M. Slow growth rate of the digits in Engel expansions // Fractals. 2020. Vol. 28. No 3. 10 pp.

38. Sierpiński W. O kilku algorytmach dla rozwijania liczb rzeczywistych na szeregi // Sprawozdania z posiedzen Towarzystwa Naukowego Warszawskiego, Wydzial III. 1911. Vol. 4. P. 56–77.

39. Shallit J.O. Metric theory of Pierce expansions // Fibonacci Quarterly. 1986. Vol. 24. No 1. P. 22–40.

40. Sylvester J.J. On a Point in the Theory of Vulgar Fractions // American Journal of Mathematics. 1880. Vol. 3. No 4. P. 332–335.

41. Viader P., Bibiloni L., Paradís J. On a problem of Alfréd Rényi // Acta Arithmetica. 1999. Vol. 91. No 2. P. 107–115.

42. Wang B.-W., Wu, J. A problem of Galambos on Oppenheim series expansions // Publ. Math. Debrecen. 2007. Vol. 70. No 1–2. P. 45–58.

43. Wu J. A problem of Galambos on Engel expansions // Acta Arithmetica. 2000. Vol. 92(4). P. 383–386.

44. Zhykharyeva Yu., Pratsiovytyi M. Expansions of numbers in positive Lüroth series and their applications to metric, probabilistic and fractal theories of numbers // Algebra and Discrete Mathematics. 2012. Vol. 14. No 1. P. 145–160.

45. Барановський О.М., Працьовитий М.В. Властивості розподілів випадкових величин з незалежними різницями послідовних елементів ряду

Остроградського // Теор. ймовірност. та матем. статист. 2004. Вип. 70. С. 131–143.

46. Барановський О.М., Працьовитий М.В. Про одну сингулярну функцію канторівського типу, пов'язану з рядами Енгеля // Збірник Праць Інституту математики НАН України. 2019. Т. 16. № 3. С. 131–148.
47. Барановський О.М., Працьовитий М.В., Гетьман Б.І. Порівняльний аналіз метричних теорій представлень чисел рядами Енгеля і Остроградського та ланцюговими дробами // Наук. час. Нац. пед. унів. ім. М.П. Драгоманова. Сер. 1, Фіз.-мат. науки. 2011. № 12. С. 130–139.
48. Барановський О.М., Працьовитий М.В., Торбін Г.М. Ряди Остроградського–Серпінського–Пірса та їхні застосування. Київ: Наукова Думка, 2013. 288 с.
49. Барановський О.М., Працьовитий М.В., Торбін Г.М. Тополого-метричні властивості множин дійсних чисел з умовами на їх розклади в ряди Остроградського // Український математичний журнал. 2007. Т. 59. № 9. С. 1155–1168.
50. Гетьман Б.І. Метричні властивості множини чисел, визначених умовами на їх розклади в ряд Енгеля // Наук. час. Нац. пед. унів. ім. М.П. Драгоманова. Сер. 1, Фіз.-мат. науки. 2009. № 10. С. 88–99.
51. Гетьман Б.І., Працьовитий М.В., Барановський О.М. Про властивості однієї сім'ї множин канторівського типу, що визначається умовами на елементи розкладу в ряд Енгеля // Наук. час. Нац. пед. унів. ім. М.П. Драгоманова. Сер. 1, Фіз.-мат. науки. 2010. № 11. С. 119–142.
52. Жихарєва Ю.І., Працьовитий М.В. Зображення чисел знакододатними рядами Люрота: основи метричної теорії // Наук. час. Нац. пед. унів. ім. М.П. Драгоманова. Сер. 1, Фіз.-мат. науки. 2008. № 9. С. 200–211.
53. Карташов М.В. Імовірність, процеси, статистика : Посібник. Київ: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2008. 494 с.

54. Кузьмин Р.О. Об одной задаче Гаусса // Доклады Акад. наук СССР. 1928. С. 375–380.
55. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. Москва: Наука, 1976. 542 с.
56. Мороз М.П. Задача Гаусса–Кузьміна для різницевого зображення дійсних чисел рядами Енгеля // Український математичний журнал. 2022. Т. 74. № 7. С. 1004–1008.
57. Мороз М.П. Задача Гаусса–Кузьміна для різницевого представлення дійсних чисел рядами Енгеля // Тези доповідей Міжнародної конференції «Теорія наближення функцій та її застосування», присвяченої 80-річчю з дня народження члена-кореспондента НАН України, професора О.І. Степанця (1942–2007), Луцьк, 2022.
58. Мороз М.П. Зображення дійсних чисел рядами Перрона // Тези доповідей Всеукраїнської науково-практичної конференції «Актуальні проблеми фізики, математики, інформатики та методики їх навчання», присвяченої 90-річчю від дня народження кандидата фізико-математичних наук, проф. Горбачука Івана Тихоновича, Київ, 2023.
59. Мороз М.П. Зображення дійсних чисел рядами Перрона, їхня геометрія та деякі застосування // Нелінійні коливання. 2023. Т. 26. № 2. С.246–260.
60. Мороз М.П. Зображення чисел рядами Перрона ($\overline{P}$-зображення) та частоти цифр у $\overline{P}$-зображеннях чисел // Тези доповідей Міжнародної конференції молодих математиків, Київ, 2023.
61. Мороз М.П. Нормальні властивості чисел у термінах їхніх $\overline{P}$-зображень // Тези доповідей XXI Міжнародної науково–практичної конференції «Шевченківська весна — 2023», Київ, 2023.
62. Мороз М.П. Нормальні властивості чисел у термінах їхнього зображення рядами Перрона // Український математичний журнал. 2023. Т. 75. № 7. С. 920–932.

63. Мороз М.П. Про одну випадкову величину, визначену в термінах представлення дійсних чисел рядами Енгеля // Тези доповідей Восьмої Всеукраїнської наукової конференції молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання», Київ, 2019.
64. Мороз М.П. Про розподіл значень однієї ніде не монотонної та майже скрізь недиференційовної функції // Тези доповідей Шостої Всеукраїнської наукової конференції молодих вчених з математики і фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання», Київ, 2017.
65. Мороз М.П. Проектор $\Delta^O$-зображення чисел в $\Delta^E$-зображення // Зб. Праць Ін-ту матем. НАН України. 2017. Т. 14. № 4. С. 49–64.
66. Мороз М.П. Проєктор одного зображення чисел рядами Перрона ($\overline{P}$-зображення) в інше // Тези доповідей XI Всеукраїнської конференції молодих математиків, Київ, 2023.
67. Мороз М.П. Числові характеристики випадкової величини, пов'язаної з представленням дійсних чисел рядами Енгеля // Український математичний журнал. 2020. Т. 72. № 5. С. 658–666.
68. Мороз М.П. Числові характеристики випадкової величини, пов'язаної з представленням дійсних чисел рядами Остроградського-Серпінського-Пірса // Зб. Праць Ін-ту матем. НАН України. 2019. Т. 16. № 3. С. 160–173.
69. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. Москва: Наука, 1974. 480 с.
70. Працьовитий М.В. Двосимвольні системи кодування дійсних чисел та їх застосування. Київ: Наукова думка, 2022. 316 с.
71. Працьовитий М.В. Фрактальний підхід у дослідженні сингулярних розподілів. Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, 1998. 296 с.

72. Працьовитий М.В., Барановський О.М. Використання рядів Остроградського для аналітичного задання розподілів випадкових величин і відображень // Динамічні системи: Праці Українського математичного конгресу. 2001. Київ: Ін-т математики НАН України, 2003. С. 59–76.
73. Працьовитий М.В., Гетьман Б.І. Ряди Енгеля та їх застосування // Наук. час. Нац. пед. унів. ім. М.П. Драгоманова. Сер. 1, Фіз.-мат. науки. 2006. № 7. С. 105–116.
74. Працьовитий М.В., Лещинський О.Л. Властивості випадкових величин, заданих розподілами елементів свого $\tilde{Q}_\infty$-зображення // Теор. ймовірност. та матем. статист. 1997. Вип. 57. С. 134–139.
75. Працьовитий М.В., Хворостіна Ю.В. Основи метричної теорії зображення дійсних чисел знакозмінними рядами Люрота та найпростіші застосування // Наук. час. Нац. пед. унів. ім. М.П. Драгоманова. Сер. 1, Фіз.-мат. науки. 2010. № 11. С. 102–118.
76. Смолин Ю.Н. Введение в теорию функций действительной переменной. Москва: ФЛИНТА, 2012. 516 с.
77. Торбін Г.М., Працьовита І.М. Сингулярність випадкових рядів Остроградського другого виду // Теор. ймовірност. та матем. статист. 2009. Вип. 81. С. 164–172.
78. Турбин А.Ф., Працевитый Н.В. Фрактальные множества, функции, распределения. Киев: Наукова думка. 1992. 208 с.
79. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Москва: Наука, 1964. Т. 2. 800 с.
80. Хинчин А.Я. Цепные дроби. Москва: Наука, 1978. 112 с.

Додаток А

# Список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації

Цей додаток містить список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів.

## А.1. Список публікацій здобувача за темою дисертації

1. Мороз М.П. Проектор $\Delta^O$-зображення чисел в $\Delta^E$-зображення // Зб. Праць Ін-ту матем. НАН України. 2017. Т. 14. № 4. С. 49–64.
https://trim.imath.kiev.ua/index.php/trim/article/view/404.
2. Мороз М.П. Числові характеристики випадкової величини, пов'язаної з представленням дійсних чисел рядами Остроградського-Серпінського-Пірса // Зб. Праць Ін-ту матем. НАН України. 2019. Т. 16. № 3. С. 160–173.
https://trim.imath.kiev.ua/index.php/trim/article/view/514.
3. Мороз М.П. Числові характеристики випадкової величини, пов'язаної з представленням дійсних чисел рядами Енгеля // Український математичний журнал. 2020. Т. 72. № 5. С. 658–666.
https://doi.org/10.37863/umzh.v72i5.2284.
*Переклад англійською мовою:*
Moroz M.P. Numerical Characteristics of a Random Variable Related to the Engel Expansions of Real Numbers. Ukr Math J **72**, 759–770 (2020).
https://doi.org/10.1007/s11253-020-01825-7.

4. Мороз М.П. Задача Гаусса–Кузьміна для різницевого зображення дійсних чисел рядами Енгеля // Український математичний журнал. 2022. Т. 74. № 7. С. 1004–1008.
https://doi.org/10.37863/umzh.v74i7.7159.
*Переклад англійською мовою:*
Moroz M.P. Gauss–Kuzmin Problem for the Difference Engel-Series Representation of Real Numbers. Ukr Math J **74**, 1149–1154 (2022).
https://doi.org/10.1007/s11253-022-02126-x.
5. Мороз М.П. Зображення дійсних чисел рядами Перрона, їхня геометрія та деякі застосування // Нелінійні коливання. 2023. Т. 26. № 2. С.246–260. https://doi.org/10.37863/nosc.v26i2.1417.
6. Мороз М.П. Нормальні властивості чисел у термінах їхнього зображення рядами Перрона // Український математичний журнал. 2023. Т. 75. № 7. С. 920–932. https://doi.org/10.37863/umzh.v75i7.7503.
7. Мороз М.П. Про розподіл значень однієї ніде не монотонної та майже скрізь недиференційовної функції // Тези доповідей Шостої Всеукраїнської наукової конференції молодих вчених з математики і фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання», Київ, 2017.
8. Мороз М.П. Про одну випадкову величину, визначену в термінах представлення дійсних чисел рядами Енгеля // Тези доповідей Восьмої Всеукраїнської наукової конференції молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання», Київ, 2019.
9. Мороз М.П. Задача Гаусса–Кузьміна для різницевого представлення дійсних чисел рядами Енгеля // Тези доповідей Міжнародної конференції «Теорія наближення функцій та її застосування», присвяченої 80-річчю з дня народження члена-кореспондента НАН України, професора О.І. Степанця (1942–2007), Луцьк, 2022.

10. Мороз М.П. Зображення дійсних чисел рядами Перрона // Тези доповідей Всеукраїнської науково-практичної конференції «Актуальні проблеми фізики, математики, інформатики та методики їх навчання», присвяченої 90-річчю від дня народження кандидата фізико-математичних наук, професора Горбачука Івана Тихоновича, Київ, 2023. https://enpuir.npu.edu.ua/handle/123456789/39397.
11. Мороз М.П. Нормальні властивості чисел у термінах їхніх $\overline{P}$-зображень // Тези доповідей XXI Міжнародної науково–практичної конференції «Шевченківська весна — 2023», Київ, 2023. https://probability.knu.ua/shv2023/ShV_2023.pdf.
12. Мороз М.П. Проєктор одного зображення чисел рядами Перрона ($\overline{P}$-зображення) в інше // Тези доповідей XI Всеукраїнської конференції молодих математиків, Київ, 2023. https://matan.kpi.ua/public/files/2023/young-math-2023-abstracts.pdf.
13. Мороз М.П. Зображення чисел рядами Перрона ($\overline{P}$-зображення) та частоти цифр у $\overline{P}$-зображеннях чисел // Тези доповідей Міжнародної конференції молодих математиків, Київ, 2023. https://www.imath.kiev.ua/~young/youngconf2023/Abstracts_2023/PS/Moroz.pdf.

## А.2. Відомості про апробацію результатів дисертації

Основні результати дослідження доповідалися на наукових конференціях різного рівня та наукових семінарах:

1) Шоста Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики і фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання» (Київ, 2017);
2) Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і

фізики та методики їх навчання» (Київ, 2019);

3) Міжнародна конференція «Теорія наближення функцій та її застосування», присвячена 80-річчю з дня народження члена-кореспондента НАН України, проф. О.І. Степанця (1942–2007) (Луцьк, 2022);
4) Всеукраїнська науково-практична конференція «Актуальні проблеми фізики, математики, інформатики та методики їх навчання», присвячена 90-річчю від дня народження кандидата фізико-математичних наук, проф. Горбачука Івана Тихоновича (Київ, 2023);
5) XXI Міжнародна науково-практична конференція «Шевченківська весна — 2023» (Київ, 2023);
6) XI Всеукраїнська конференція молодих математиків (Київ, 2023);
7) Міжнародна конференція молодих математиків (Київ, 2023);
8) семінар з фрактального аналізу відділу теорії динамічних систем та фрактального аналізу Інституту математики НАН України (керівник: доктор фіз.-мат. наук, проф. М.В. Працьовитий).