

Голові

разової спеціалізованої вченої ради
Інституту математики НАН України
доктору фізико-математичних наук,
професору, члену-кореспонденту
НАН України, завідувачу відділу
алгебри і топології
Інституту математики НАН України
Максименку Сергію Івановичу

РЕЦЕНЗІЯ

на дисертаційну роботу **Мороза Миколи Петровича** на тему:
«Функції з фрактальними властивостями, пов'язані з представленнями чисел
рядами Енгеля та Остроградського–Серпінського–Пірса»,
подану на здобуття ступеня доктора філософії
у галузі знань 11 Математика та статистика за спеціальністю 111 Математика

Результати дисертаційної роботи Миколи Петровича Мороза є вагомим внеском в метричну теорію чисел та конструктивну теорію функцій зі складною локальною структурою. У даному дослідженні отримали своє продовження, узагальнення та застосування класичні результати теорій представлення дійсних чисел рядами Енгеля та рядами Остроградського–Серпінського–Пірса. Підходи метричної теорії чисел та фрактального аналізу на високому науковому рівні було застосовано для дослідження низки функцій з фрактальними властивостями та математичних об'єктів, що з ними пов'язані (множин, випадкових величин, динамічних систем).

У першому розділі зроблено доволі змістовний огляд різних систем кодування чисел засобами нескінченного алфавіту (Q_∞ -зображення, зображення чисел елементарними ланцюговими дробами, рядами Енгеля (E -зображення), Остроградського–Серпінського–Пірса (O -зображення), Люрота, Сильвестера). Для цих систем було висвітлено їхні властивості тополого-метричного, ймовірнісного та фрактального характеру, детально розглянуто основи метричних теорій представлення дійсних чисел рядами Енгеля та Остроградського–Серпінського–Пірса, зокрема ті відомі результати, що використовуються чи узагальнюються в даному дисертаційному дослідженні. Також наведено відомості з теорії сингулярних функцій (неперервних функцій, відмінних від константи, похідна яких

майже скрізь в розумінні міри Лебега рівна нулю), деякі відомості з теорії числових рядів та нескінченних добутків.

Другий розділ присвячено дослідженню чотирьох функцій, що визначені в термінах представлення чисел рядами Енгеля та Остроградського–Серпінського–Пірса: проєктор з O -зображення в E -зображення; дві функції, що є сумами функціональних рядів (узагальнення функції, яку досліджував J.O. Shallit); оператор лівостороннього зсуву цифр \bar{E} -зображення (різницевої форми E -зображення). Проєктор з O -зображення в E -зображення досліджено на предмет монотонності, неперервності, диференційовності, встановлено ряд його фрактальних властивостей. Для функціональних рядів, що є узагальненнями ряду Шалліта, визначено структуру їхніх множин розбіжності. Для випадкових величин, що породжені цими функціональними рядами, обчислено математичні сподівання та дисперсії. В термінах оператора лівостороннього зсуву цифр \bar{E} -зображення сформульовано та розв'язано задачу, що є аналогом задачі Гауса–Кузьміна для елементарних ланцюгових дробів.

У третьому розділі закладено основи нового напрямку метричної та ймовірнісної теорії чисел – теорії представлення дійсних чисел рядами Перрона, що є узагальненнями рядів Люрота, Енгеля, Сильвестера. Хоч «ряди Перрона» як узагальнення вище згаданих рядів були запропоновані ще Оскаром Перроном, дисертанту вдалося на їхній основі визначити нескінченну кількість систем представлення чисел. При цьому такі системи можуть мати кардинально відмінні властивості, що залежать від вибору параметрів, які визначають дані системи представлень. Для систем кодування дійсних чисел рядами Перрона (P -зображення та \bar{P} -зображення) встановлено низку властивостей тополого-метричного характеру, що спільні для всіх таких систем, а для окремих класів зображень знайдено нормальні властивості чисел, визначені в термінах кількості цифр та їхніх асимптотичних частот. Запропоновані представлення чисел рядами Перрона застосовано для конструювання та дослідження таких функцій як проєктори одного \bar{P} -зображення в інше, функцій, що визначені послідовністю перетворювачів цифр \bar{P} -зображення чисел, операторів лівостороннього зсуву цифр \bar{P} -зображення чисел. Зокрема для функцій перших двох класів знайдено достатні умови їхньої сингулярності, а для динамічної системи, що визначена оператором лівостороннього зсуву цифр \bar{P} -зображення, розв'язано задачу, що є аналогом задачі Гауса–Кузьміна.

Основні результати, представлені в даному дисертаційному дослідженні, належним чином висвітлено у публікаціях, що відповідають вимогам щодо присудження ступеня доктора філософії. За матеріалами дисертації Миколою Морозом було зроблено серію доповідей на семінарах Інституту математики НАН

України та конференціях всеукраїнського та міжнародного рівнів. Окремо варто зазначити, що всі шість публікацій дисертанта, в яких опубліковано результати даного дисертаційного дослідження, є одноосібними. При цьому серед них три статті, що опубліковано у виданнях, індексованих наукометричною базою Scopus.

Суттєвих зауважень до змісту роботи не було виявлено. Проте все таки слід навести декілька побажань, які би покращили дану роботу.

- У першому розділі дисертації описано зв'язок сингулярних функцій з функціями обмеженої варіації та сингулярними мірами, проте безпосередньо в роботі це не було використано.
- Наведені у першому розділі відомості з теорії нескінченних добутків хоч зазвичай і не розглядаються в курсі математичного аналізу для студентів, проте все ж є загальновідомими серед математиків. Тому було би більш доречно не присвячувати їм окремий підрозділ, а зробити на них посилання безпосередньо в тих місцях, де їх було застосовано в роботі.
- Поняття «фрактал» та «фрактальний» тісно пов'язані з розмірністю Гаусдорфа–Безиковича. Тому було б не зайвим розглянути задачі про обчислення розмірності Гаусдорфа–Безиковича досліджених у дисертації множин, графіків функцій тощо. Проте в силу непростой геометрії нескінченносимвольних систем зображень чисел, що були використані в роботі, такі задачі можуть виявитися досить складними як в ідейному, так і в технічному плані. Гадаю, що дисертант обов'язково присвятить таким задачам свої наступні наукові роботи.

Дисертацію оформлено відповідно до вимог, що висуваються до кваліфікаційних робіт на здобуття ступеня доктора філософії. Поршень академічної доброчесності у дисертації та наукових працях М.П. Мороза не виявлено.

Дисертаційна робота Миколи Петровича Мороза та його наукові публікації відповідають спеціальності 111 Математика та задовольняють вимоги постанови № 44 Кабінету Міністрів України від 12 січня 2022 р. «Про затвердження Порядку присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії», а їх автор заслуговує на присудження ступеня доктора філософії.

Рецензент:

Завідувач відділу теорії функцій
Інституту математики НАН України
доктор фізико – математичних наук,
професор

Анатолій Романюк