

Голові

разової спеціалізованої вченої ради
Інституту математики НАН України
доктору фізико-математичних наук,
професору, члену-кореспонденту
НАН України, завідувачу відділу
алгебри і топології
Інституту математики НАН України
Максименку Сергію Івановичу

РЕЦЕНЗІЯ

на дисертаційну роботу **Мороза Миколи Петровича** на тему:
«Функції з фрактальними властивостями, пов'язані з представленнями чисел
рядами Енгеля та Остроградського–Серпінського–Пірса»,
подану на здобуття ступеня доктора філософії
у галузі знань 11 Математика та статистика за спеціальністю 111 Математика

У своєму дисертаційному дослідженні Мороз М.П розглядає задачі, які мають стосунок до різних галузей математики (математичних аналіз, теорія чисел, теорія ймовірностей, топологія, теорія динамічних систем) і при цьому мають спільний об'єкт дослідження – представлення дійсних чисел рядами Енгеля та Остроградського–Серпінського–Пірса і функції, що з ними пов'язані. Згадані представлення є нескінченносимвольними та несамоподібними, через що отримані в дисертації результати є особливо важливими і актуальними. Дана дисертація виконана в науковій школі фрактального аналізу доктора фізико-математичних наук, професора Працьовитого Миколи Вікторовича, який є науковим керівником дисертанта. Тому представлена робота природно продовжує дослідження Працьовитого М.В., Торбіна Г.М., Барановського О.М., Гетьмана Б.І. та інших. При цьому робота має тісний зв'язок із відповідними працями П. Ердеша та А. Реньї.

Перший розділ дисертації присвячено основам тополого-метричних теорій представлення та зображення дійсних чисел засобами нескінченного алфавіту, серед яких значну увагу приділено E -зображенню та O -зображенню, що породжені розкладами дійсних чисел в ряди Енгеля та Остроградського–Серпінського–Пірса відповідно. Також в цьому розділі наведено факти з теорії функцій (зокрема сингулярних), теорії рядів та нескінченних добутків, теорії ймовірностей та теорії вимірних функцій, що складають методологічну основу досліджень, висвітлених у даній роботі.

У другому розділі дисертації проведено дослідження функцій зі складною локальною структурою, що пов'язані з представленнями дійсних чисел рядами Енгеля та Остроградського–Серпінського–Пірса. Перша з досліджуваних функцій – проєктор O -зображення в E -зображення. В роботі встановлено ряд нетривіальних особливостей цієї функції, зокрема її ніде не монотонність та майже скрізь недиференційовність. Також висвітлено питання існування границі проєктора (одно- та двосторонньої) в раціональних та ірраціональних точках. Друга та третя з досліджуваних функцій – це суми функціональних рядів, елементами яких є числа, що обернені відповідно до цифр E -зображення та O -зображення чисел. Ці функції є узагальненнями функції, яку означив та частково дослідив J.O. Shallit у своїй роботі «Metric theory of Pierce expansions» (1986) для рядів Остроградського–Серпінського–Пірса. Дисертант, як і J.O. Shallit, встановив тополого-метричну структуру множини розбіжності цих функціональних рядів, розглянув випадкові величини, що породжуються цими функціональними рядами, та обчислив їхні математичні сподівання. Проте, окрім математичного сподівання, Миколі Морозу також вдалося обчислити дисперсію відповідних випадкових величин. Варто відзначити, що підхід дисертанта до обчислення математичного сподівання випадкових величин, розглянутих в дисертації, відрізняється від підходу, який застосував J.O. Shallit і який ґрунтується на деякій тотожності, яка, взагалі кажучи, не виконується в загальній ситуації, що досліджується в дисертації.

Зауважу, що останнім часом спостерігається зростання уваги математиків до функціонального ряду, розглянутого в роботі J.O. Shallit. Так, зовсім недавно у 2023 році вийшла серія препринтів автора Min Woong Ahn із The State University of New Остроградського–Серпінського–Пірса, проте розглядаються інші задачі для цих рядів. Зокрема, в одному з препринтів Min Woong Ahn розглянув той же функціональний ряд, що й J.O. Shallit (1986) та дисертант М.П. Мороз (2019), і дослідив задачу про розмірність Гаусдорфа–Безиковича множини розбіжності цього ряду. Той факт, що об'єкти, які вивчаються в дисертаційному дослідженні М.П. Мороза, викликають інтерес у математиків, вкотре підкреслює актуальність дисертаційної роботи.

Четверта з досліджуваних функцій – оператор лівостороннього зсуву цифр \bar{E} -зображення чисел (різницева форма E -зображення). На її основі визначено динамічну систему, для якої розв'язано задачу, що аналогічна задачі Гауса–Кузьміна для елементарних ланцюгових дробів. Підхід дисертанта до цієї задачі також відмінний від відомих підходів до класичної задачі Гауса–Кузьміна, оскільки \bar{E} -зображення та представлення чисел елементарними ланцюговими дробами мають відмінні тополого-метричні властивості.

Третій розділ дисертації присвячено представленню та зображенню дійсних чисел рядами Перрона, що є узагальненням представлення та зображення чисел рядами Енгеля, Люрота, Сильвестера. Представлення чисел рядами Перрона є насправді нескінченною множиною різних представлень, кожне з яких визначається зліченною послідовністю функцій $\varphi_n: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, що виконують роль параметрів цього представлення. Для представлень чисел рядами Перрона встановлено ряд спільних тополого-метричних властивостей, знайдено деякі достатні умови раціональності та ірраціональності чисел в термінах цих представлень. Разом з цим для окремих класів таких представлень встановлено нормальні властивості, тобто властивості, що виконуються для майже всіх чисел з розглянутого проміжку у сенсі міри Лебега. В дисертаційній роботі це властивості, що пов'язані з кількістю тих чи інших цифр в зображенні числа та їхньою асимптотичною частотою. Варто зауважити, що для різних систем представлення чисел рядами Перрона такі нормальні властивості можуть кардинально відрізнятися: деякі цифри у зображеннях майже всіх чисел можуть зустрічатися скінченну чи нескінченну кількість разів, можуть мати різну асимптотичну частоту чи не мати такої зовсім тощо. В термінах зображень чисел рядами Перрона визначено два класи функцій: проєктори одного \overline{P} -зображення в інше та функції, що визначені послідовністю перетворювачів цифр \overline{P} -зображення чисел. Для таких функцій знайдено достатні умови, за яких вони майже скрізь у сенсі міри Лебега мають похідну, рівну нулю. Також для \overline{P} -зображення чисел (різницева форма представлення дійсних чисел рядами Перрона) розв'язано задачу, що є аналогом задачі Гауса–Кузьміна.

Основні результати, що містяться в дисертації, безперечно, є новими та актуальними. Вони опубліковані в українських фахових наукових виданнях, зокрема, в таких, що індексуються наукометричною базою Scopus, що цілком відповідає вимогам щодо присудження ступеня доктора філософії. Результати дисертаційної роботи доповідалися на конференціях різного рівня та на семінарі з фрактального аналізу відділу теорії динамічних систем та фрактального аналізу Інституту математики НАН України (керівник: доктор фіз.-мат. наук, професор М.В. Працьовитий).

Змістовних недоліків мною в роботі не виявлено. Серед порад, які хотілося б висловити дисертанту, наведу наступні:

– доведення теореми 3.9 (достатні умови сингулярності проєктора одного \overline{P} -зображення в інше) спирається на введене дисертантом поняття циліндричної \overline{P} -похідної та ряд лем. Проте ця теорема безпосередньо впливає з наслідку 3.19 (нормальна властивість чисел в термінах асимптотичних частот цифр \overline{P} -зображення

чисел) та наслідку 1.7 (відомий критерій сингулярності функції). Зокрема такий підхід дозволяє довести сингулярність для більш широкого класу проєкторів. Проте він вимагає зміни порядку підрозділів у третьому розділі дисертації;

- деякі викладки технічного характеру виконано занадто детально, через що вони виглядають доволі громіздкими.

Дана дисертація є завершеним самостійним дослідженням Мороза М.П., яке оформлено згідно з вимогами до кваліфікаційних робіт на здобуття ступеня доктора філософії. Порушень академічної доброчесності у дисертації та наукових публікаціях М.П. Мороза не виявлено.

Дисертаційна робота та наукові публікації Миколи Петровича Мороза, а також їх апробація повністю відповідають спеціальності 111 Математика та задовольняють вимоги постанови № 44 Кабінету Міністрів України від 12 січня скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії», а їх автор заслуговує на присудження ступеня доктора філософії.

Доктор фізико-математичних наук, професор,
завідувач відділу комплексного аналізу і теорії
потенціалу Інституту математики НАН України
21.12.2023

Сергій ПЛАКСА