

Голові

разової спеціалізованої вченої ради
Інституту математики НАН України
доктору фізико-математичних наук,
професору, члену-кореспонденту
НАН України, завідувачу відділу
алгебри і топології
Інституту математики НАН України
Максименку Сергію Івановичу

ВІДГУК

офіційного опонента **Задерея Петра Васильовича**,
доктора фізико-математичних наук, професора,
на дисертаційну роботу **Мороза Миколи Петровича** на тему:
«Функції з фрактальними властивостями, пов'язані з представленнями чисел
рядами Енгеля та Остроградського–Серпінського–Пірса»,
подану на здобуття ступеня доктора філософії
у галузі знань 11 Математика та статистика за спеціальністю 111 Математика

1. Актуальність теми. Дисертаційна робота Мороза М.П. присвячена спеціальним функціям, що визначені в термінах представлень дійсних чисел рядами Остроградського–Серпінського–Пірса, Енгеля, Перрона, а також теорії кодування дійсних чисел засобами нескінченного алфавіту, який базується на розкладах чисел в ряди Перрона. Ця робота є продовженням досліджень Працьовитого М.В., Торбіна Г.М., Барановського О.М., Шалліта Г.О. та ін.

Важливими питаннями для функцій зі складною локальною структурою (фрактальними властивостями) є їх дослідження на предмет неперервності, монотонності, диференційовності, а для систем кодування чисел такими питаннями є існування та єдиність зображення, асимптотичні частоти цифр зображення, нормальні властивості зображень. Всі ці питання розглядаються в даній роботі.

Метою дослідження в дисертаційній роботі є вивчення фрактальних властивостей функцій, що пов'язані з представлення дійсних чисел рядами Енгеля та Остроградського–Серпінського–Пірса. Об'єктом дослідження є представлення дійсних чисел рядами Енгеля, Остроградського–Серпінського–Пірса, Перрона та функції, що пов'язані з ними. Дисертаційна робота Мороза М.П. виконана в області актуальної тематики, пов'язаної з фрактальними властивостями функцій.

2. Зміст роботи і новизна одержаних результатів. Дисертація Мороза М.П. складається з анотацій (українською та англійською мовами), вступу, трьох розділів, висновків, списку використаних джерел, а також додатку зі списком

публікацій здобувача за темою дисертації та відомостями про апробацію результатів дисертації.

У вступі автор відмічає, що робота присвячена функціям зі складною локальною структурою, що визначені в термінах представлення дійсних чисел рядами Енгеля та Остроградського–Серпінського–Пірса. Наведено обґрунтування вибору теми дослідження. До функцій зі складною локальною структурою відносяться ніде не монотонні, ніде не диференційовні, сингулярні функції тощо. Одним із ефективних засобів вивчення таких об'єктів є представлення чисел в різних системах представлення чисел, наприклад, у вигляді ряду, нескінченного добутку або ланцюгового дроби. Серед відомих представлень дійсних чисел у вигляді ряду є представлення чисел рядами Енгеля, Остроградського–Серпінського–Пірса, Сильвестера, Люрота. Для таких зображень важливо встановити їхні нормальні властивості: кількість цифр, що входять у зображення чисел, швидкість росту послідовності цифр, середнє значення цифр тощо. Саме ці питання розглянуто в даному дослідженні.

Розділ 1 «Огляд літератури та концептуальні основи дослідження» присвячений основам теорій зображення дійсних чисел засобами нескінченного алфавіту, зокрема Q_∞ -зображення, зображення чисел рядами Люрота, Енгеля, Сильвестера, Остроградського–Серпінського–Пірса, зображення чисел елементарними ланцюговими дробами. Тут викладено повний огляд літератури з даної тематики, а також наведено всі відомі твердження, якими користується автор при написанні своєї роботи.

У розділі 2 «Об'єкти зі складною локальною структурою, що пов'язані з рядами Остроградського–Серпінського–Пірса та Енгеля» дисертант Мороз М.П. проводить дослідження функцій з фрактальними властивостями, що визначені в термінах представлення дійсних чисел рядами Остроградського–Серпінського–Пірса та рядами Енгеля, а також об'єктів, що з ними пов'язані (множини, розподіли ймовірностей, динамічні системи).

У п. 2.1 Мороз М. розглядає функцію, яку називає проєктором O -зображення в E -зображення. Це функція $f: (0; 1) \setminus \mathbb{Q} \rightarrow (0; 1)$, яка визначається рівністю

$$f(x) = f(\Delta_{q_1(x)q_2(x)\dots}^O) = f(\Delta_{q_1(x)q_2(x)\dots}^E),$$

де $q_k(x)$ – k -та цифра O -зображення числа x . Автор встановлює зв'язок між задачею Альфреда Реньї, яка сформульована та розв'язана А. Реньї у ймовірнісних термінах, із задачею про міру Лебега множини значень проєктора f (теорема 2.1), досліджує властивості проєктора f (теореми 2.3 – 2.7), вивчає розподіл значень проєктора (теорема 2.8 – 2.10).

У п. 2.2 «Випадкова величина, що пов'язана з рядами Остроградського–Серпінського–Пірса» розглядається випадкова величина

$$\xi_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{q_k(x) + n},$$

де $q_k(x)$ – k -та цифра O -зображення числа x , що є узагальненням випадкової величини $\xi_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{q_k(x)}$, яку вивчав J.O. Shallit. У дисертації Морозом М.П. доведено вимірність функцій ξ_n та запропоновано підхід до обчислення математичного сподівання $\mathbf{M}\xi_n$, відмінний від підходу, який запропонував Shallit J.O. для обчислення $\mathbf{M}\xi_0$. Також автору вдалося обчислити дисперсії $\mathbf{D}\xi_n$ цих випадкових величин.

Пункт 2.3 «Випадкова величина, що пов’язана з рядами Енгеля» присвячений обчисленню математичного сподівання та дисперсії випадкової величини

$$\psi_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p_k(x) + n},$$

де $p_k(x)$ – k -та цифра E -зображення числа x . Ця випадкова величина означена аналогічно до випадкової величини ξ_n та раніше математиками не вивчалася. Для обчислення математичних сподівань $\mathbf{M}\psi_n$ та дисперсій $\mathbf{D}\psi_n$ було використано підходи, що застосовані п. 2.2 для аналогічних задач про випадкову величину ξ_n . Це, з одного боку, демонструє подібність представлень дійсних чисел рядами Остроградського–Серпінського–Пірса та рядами Енгеля, а з іншого боку підкреслює дієвість підходів, запропонованих дисертантом.

У пункті 2.4 «Задача Гауса–Кузьміна для різницевого представлення дійсних чисел рядами Енгеля» вивчається динамічна система, породжена оператором лівостороннього зсуву цифр \bar{E} -зображення дійсних чисел, та розв’язується задача, що аналогічна задачі Гауса–Кузьміна для елементарних ланцюгових дробів.

Розділ 3 «Ряди Перрона» дисертаційної роботи присвячений створенню теорії представлення та зображення чисел рядами Перрона в стандартній та різницевій формах. В цьому розділі автор також досліджує функції, що визначені в термінах \bar{P} -зображення чисел: проєктори одного \bar{P} -зображення в інше та функції, що визначені перетворювачами цифр \bar{P} -зображень чисел. Основними задачами для цих функцій було їх дослідження на предмет неперервності, монотонності, диференційовності (зокрема сингулярності) тощо. Значну увагу приділено нормальним властивостям чисел (в термінах \bar{P} -зображень чисел). Для окремих класів \bar{P} -зображень чисел розв’язано задачу, що є аналогом задачі Гауса–Кузьміна.

У додатку міститься інформація про публікації автора за тематикою дисертації та відомості про апробацію результатів дослідження. Серед публікацій автора 6 одноосібних статей, з яких три статті в «Українському математичному журналі», дві статті у «Збірнику праць Інституту математики НАН України» та одна стаття в журналі «Нелінійні коливання».

3. Зв’язок роботи з науковими програмами, планами, темами, грантами.

Робота виконана в межах досліджень, що проводяться у лабораторії фрактального

аналізу Інституту математики НАН України та на кафедрі вищої математики Українського державного університету імені Михайла Драгоманова.

4. Обґрунтованість і достовірність одержаних результатів. Отримані дисертантом наукові результати носять теоретичних характер, є новими і мають повні та чіткі доведення. Ці результати представляють науковий інтерес для теорії функцій з локально складною структурою та фрактальними властивостями, для метричної та ймовірнісної теорії чисел. Вони можуть бути використані в наступних дослідженнях в області фрактального аналізу.

Дисертаційну роботу та наукові публікації за її темою написано Морозом М.П. без порушень принципів академічної доброчесності.

5. Зауваження. Дисертаційна робота оформлена досить акуратно з повними і правильними формулюваннями теорем та їх чіткими доведеннями. В роботі є граматичні упущення, проте вони незначні і не впливають на загальне позитивне враження від цієї дисертаційної роботи.

6. Висновки. Вважаю, що дисертаційна робота Мороза М.П. «Функції з фрактальними властивостями, пов'язані з представленнями дійсних чисел рядами Енгеля та Остроградського–Серпінського–Пірса» відповідає галузі знань 11 Математика та статистика, зокрема спеціальності 111 Математика. Робота задовольняє вимогам Постанови № 44 Кабінету Міністрів України від 12 січня 2022 р. «Про затвердження Порядку присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії» та Вимогам до оформлення дисертації, затверджених Наказом № 40 Міністерства освіти і науки України від 12 січня 2017 року, а її автор Мороз Микола Петрович заслуговує присудження наукового ступеня доктора філософії з галузі знань 11 Математика та статистика за спеціальністю 111 Математика.

Офіційний опонент

доктор фізико-математичних наук, професор,
професор кафедри математичного аналізу
та теорії ймовірностей

НТУ України «КПІ імені Ігоря Сікорського»

П.В. Задерей