

Голові
разової спеціалізованої вченої ради
Інституту математики НАН України
доктору фізико-математичних
наук, професору,
члену-кореспонденту НАН України,
завідувачу відділу алгебри і топології
Інституту математики НАН України
Максименку Сергію Івановичу

ВІДГУК

офіційного опонента Радченка Вадима Миколайовича,
доктора фізико-математичних наук, професора,
на дисертаційну роботу Мороза Миколи Петровича на тему:
«Функції з фрактальними властивостями,
пов'язані з представленнями чисел рядами Енгеля
та Остроградського–Серпінського–Пірса»,
подану на здобуття ступеня доктора філософії
у галузі знань 11 Математика та статистика
за спеціальністю 111 Математика

Дисертаційна робота присвячена дослідженню ніде не монотонних, ніде не диференційовних і сингулярних функцій, визначених за допомогою представлень дійсних чисел рядами Енгеля, рядами Остроградського–Серпінського–Пірса і рядами Перрона.

Математичні об'єкти зі складною локальною структурою (серед них фрактальні множини, ніде не диференційовні та ніде не монотонні функції, сингулярні розподіли ймовірностей, динамічні системи з фрактальними властивостями) в останній час викликають підвищений інтерес дослідників.

Вивчення таких об'єктів ускладнюється через те, що класичні інструменти аналізу часто незастосовні до них. Тому виникає природна потреба створити нові засоби дослідження локально складних множин, функцій, динамічних систем. З іншого боку, математичні об'єкти з фрактальними властивостями часто є адекватними моделями складних природних, соціальних, економічних явищ і процесів. Тому їхнє вивчення відкриває нові можливості не тільки для математики, а й для інших наук.

Дослідниками України розроблено ефективну й результативну методологію застосування різноманітних систем представлення (кодування) дійсних чисел засобами різних алфавітів до аналітичного задання фрактальних математичних об'єктів. Серед них представлення чисел додатними і знакозмінними рядами, ланцюговими дробами, нескінченними добутками тощо.

У своїй дисертації М. П. Мороз продовжує цю традицію і проводить актуальні й важливі дослідження функцій, розподілів ймовірностей і динамічних систем засобами рядів Енгеля, Остроградського–Серпінського–Пірса і Перрона. Отримані в роботі результати становлять вагомий внесок в теорію функцій з фрактальними властивостями, теорію систем зображення чисел засобами нескінченного алфавіту, в метричну і ймовірнісну теорію чисел, а також теорію динамічних систем.

Робота складається з анотації українською і англійською мовами, переліку скорочень і умовних позначень, вступу, трьох розділів, висновків, списку використаних джерел (80 найменувань) і додатку, що містить список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації. Загальний обсяг дисертації — 145 сторінок.

Перший розділ дисертації виконує вступну та оглядову функції. Дисертант розглядає різноманітні системи представлення (та кодування) дійсних чисел з нескінченим алфавітом і дає огляд пов'язаних з ними результатів. Серед них Q_∞ -зображення, зображення чисел рядами Люрота, Енгеля, модифікованими рядами Енгеля, рядами Сильвестера, елементарними ланцюговими дробами,

рядами Остроградського–Серпінського–Пірса. Також наведено потрібні в подальшому відомості з теорії функцій дійсної змінної та теорії ймовірностей.

У розділі 2 вивчаються функції, задані в термінах представлення чисел рядами Енгеля та рядами Остроградського–Серпінського–Пірса. Зокрема, це проєктори одного зображення в інше, які є майже скрізь недиференційовними функціями. Варто відзначити результати дослідження випадкових величин, визначених у термінах рядів Остроградського–Серпінського–Пірса та рядів Енгеля, що є узагальненням випадкової величини, яку вивчав J. O. Shallit. Дисертант розвиває свій підхід до вивчення таких випадкових величин і обчислює їхні числові характеристики (математичне сподівання і дисперсію). Також в цьому розділі розв'язано задачу метричної теорії динамічних систем, що є аналогом відомої задачі Гауса–Кузьміна для елементарних ланцюгових дробів.

У розділі 3 запропоновано представлення чисел рядами, які вперше запропонував O. Perron як узагальнення рядів Люрота, Енгеля, Сильвестера (далі ряди Перрона). Відповідна робота O. Perron надихнула дисертанта на створення параметричної системи представлення чисел. Для певного вибору параметрів ця конструкція містить як часткові випадки системи зображення чисел рядом Енгеля, модифікованим рядом Енгеля, рядом Люрота і рядом Сильвестера. У цьому розділі запропоновано тополого-метричну теорію представлення дійсних чисел рядами Перрона у стандартній та різницевій формах. Важливою компонентою роботи є опис нормальних властивостей певних підкласів представлень чисел рядами Перрона у різницевій формі, тобто властивостей, які мають майже всі в розумінні міри Лебега числа з одиничного відрізка. Також у цьому розділі вивчаються проєктори одного різницевого зображення чисел рядами Перрона в інше. Знайдено умови, коли ці проєктори є сингулярними функціями. Для таких зображень також розв'язано аналог задачі Гауса–Кузьміна.

У дисертаційній роботі отримано нові важливі результати. Їхні доведення строгі і достатньо аргументовані. Дослідження є завершеним і самостійним. Робота має переважно теоретичний характер, а отримані результати можуть бути

корисні для подальшого вивчення математичних об'єктів з фрактальними властивостями.

Пропозиції і зауваження до дисертації:

— У дисертації розв'язано задачу Гауса–Кузьміна у постановці для різних представлень дійсних чисел: різницевого представлення числа рядом Енгеля і його узагальнення — різницевого представлення рядом Перрона. Також згадано про відоме розв'язання задачі Гауса–Кузьміна в класичному формулюванні (для представлення чисел ланцюговими дробами). Цікаво було би порівняти розв'язань в різних ситуаціях і з'ясувати, які властивості відповідних представлень чисел спричиняють відмінності розв'язань. В яких ситуаціях ми можемо отримати границю значень мір, відмінну від одиниці?

— Весь розділ 3 присвячено вивченню представлення чисел рядами Перрона, яке є узагальненням деяких представлень чисел, які вивчалися в розділі 2, а також є узагальненням деяких інших представлень чисел. Але в роботі бракує прикладів, які би ілюстрували, що загальна теорія систем представлення чисел рядами Перрона справджується для відомих раніше часткових випадків (представлень чисел рядами Енгеля чи іншими).

— Можна висловити зауваження щодо пояснення деяких результатів роботи. Не дуже зрозумілим є наведене формулювання леми 2.1 – треба було чітко відмітити, що вказана сума береться по всім зростаючим послідовностям з $q_n=k$. В доведенні теореми 2.15 на стор. 59 ніяк не пояснено, чому від математичного сподівання ряду ми можемо перейти до ряду з математичних сподівань (варто було послатися на наслідок 1.9).

Проте висловлені зауваження не впливають на загальну високу оцінку дисертаційної роботи.

Оформлення дисертації відповідає вимогам, затвердженим наказом Міністерства освіти і науки України від 12 січня 2017 р. № 40.

У дисертації та публікаціях, в яких оприлюднено результати дослідження М. П. Мороза, не виявлено порушень академічної доброчесності.

Основні результати дослідження достатньо повно висвітлено у 6 одноосібних статтях у наукових виданнях, внесених до переліку наукових фахових видань України. З них 2 статті — у виданнях, що індексуються міжнародною наукометричною базою Scopus та належать до квартиля Q3 (згідно з класифікацією SCImago Journal & Country Rank). Також вони пройшли належну апробацію на наукових семінарах і конференціях (7 публікацій у матеріалах українських і міжнародних конференцій).

Таким чином, враховуючи актуальність дослідження, наукову новизну і вагомість отриманих результатів, високий науковий рівень дисертації, якість висвітлення рівень висвітлення результатів дослідження в наукових публікаціях і апробацію на наукових конференціях, вважаю, що дисертація «Функції з фрактальними властивостями, пов'язані з представленнями чисел рядами Енгеля та Остроградського–Серпінського–Пірса» відповідає спеціальності 111 Математика і вимогам «Порядку присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії», затвердженого постановою Кабінету Міністрів України від 12 січня 2022 р. № 44, а її автор — Мороз Микола Петрович — заслуговує на присудження ступеня доктора філософії.

Офіційний опонент:

професор кафедри математичного аналізу

Київського національного університету

імені Тараса Шевченка

доктор фізико-математичних наук, професор

Вадим РАДЧЕНКО