Національна академія наук України
Інститут математики

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Локазюк Олександра Вікторівна

УДК 517.958:512.816

Реалізації алгебр Лі на прямій та групова класифікація диференціальних рівнянь

111 Математика

Дисертація
на здобуття наукового ступеня
доктора філософії

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело. ________ О.В. Локазюк

Науковий керівник
доктор фіз.-мат. наук
БОЙКО Вячеслав Миколайович

Київ — 2022

Анотація

Локазюк О.В. Реалізації алгебр Лі на прямій та групова класифікація диференціальних рівнянь. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 Математика. – Інститут математики НАН України, Київ, 2022.

Основою дисертаційного дослідження є дві наступні задачі: групова класифікація (1+1)-вимірних узагальнених нелінійних рівнянь Клейна–Ґордона і групова класифікація нормальних лінійних систем звичайних диференціальних рівнянь другого порядку з довільною кількістю залежних змінних. Незважаючи на те, що ці задачі мають дуже довгу історію досліджень, у роботі отримано нові результати у рамках алгебраїчного підходу після детального вивчення трансформаційних властивостей розглядуваних класів та їх підкласів. Об'єднуючим інструментом в обох цих задачах стало ефективне використання класичної теореми Лі про реалізації скінченновимірних алгебр Лі векторними полями на прямій. Запропоновані у дисертації методи і підходи дали змогу не лише значно покращити попередні результати щодо лiївських симетрій рівнянь із цих класів, а й істотно спростити доведення класифікаційних результатів і перевірку їх достовірності.

У розділі 1 проведено повну групову класифікацію класу (1+1)-вимірних узагальнених нелінійних рівнянь Клейна–Ґордона

$$u_{tx} = f(t, x, u) \quad \text{з} \quad f_{uu} \neq 0, \tag{1}$$

з точністю до $G^{\sim}$-еквівалентності. Як суттєве узагальнення результатів Лі у параграфі 1.1 доведено, що групоїд контактної еквівалентності класу (1+1)-вимірних узагальнених нелінійних рівнянь Клейна–Ґордона є

продовженням першого порядку групоїда точкової еквівалентності цього класу (лема 1.2). Таким чином, проблему дослідження структури контактних перетворень для рівнянь із даного класу зведено до дослідження відповідних точкових перетворень. У лемі 1.4 доведено, що клас (1+1)-вимірних узагальнених нелінійних рівнянь Клейна–Ґордона є нормалізованим (відносно точкових перетворень), і побудовано його групу еквівалентності $G^{\sim}$ та відповідну алгебру еквівалентності $\mathfrak{g}^{\sim}$. Вигляд векторних полів ліївських симетрій та відповідне класифікаційне рівняння представлено у твердженні 1.9. Оскільки клас є нормалізованим, а його група еквівалентності має специфічну структуру, то для його повної групової класифікації використано алгебраїчний метод у поєднанні з ефективним залученням класичної теореми Лі про реалізації скінченновимірних алгебр Лі векторними полями на прямій. У класі (1) виокремлено рівняння Ліувілля як рівняння з нескінченновимірними алгебрами ліївської інваріантності та досліджено властивості скінченновимірних придатних підалгебр проєкції $\varpi_*\mathfrak{g}^{\sim}$ алгебри $\mathfrak{g}^{\sim}$ на простір із координатами (t,x,u). У лемі 1.12 доведено, що $\dim\mathfrak{g}_f=\dim\pi^{t,x}_*\mathfrak{g}_f$, і показано, що $\dim\mathfrak{g}_f\leqslant 4$, якщо рівняння з класу допускає скінченновимірну алгебру ліївської інваріантності. У теоремі 1.14 параграфу 1.2 представлено основний результат групової класифікації у вигляді повного списку $G^{\sim}$-нееквівалентних розширень ліївської симетрії у класі (1). У параграфі 1.3 наведено повне доведення теореми 1.14. Також у цьому ж параграфі знайдено низку $G^{\sim}$-інваріантних цілочисельних характеристик підалгебр алгебри $\mathfrak{g}^{\sim}$, які дозволяють повністю ідентифікувати $G^{\sim}$-нееквівалентні випадки розширень ліївської симетрії у класі (1). Ці характеристики використано у параграфі 1.4 для розрізнення, з точністю до $G^{\sim}$-еквівалентності, послідовних розширень ліївської симетрії серед знайдених у теоремі 1.14. Таким чином, вичерпно описано структуру частково впорядкованої множини $G^{\sim}$-нееквівалентних розширень ліївської симетрії у класі (1), яку представлено на рисунку 1.1 у вигляді діаграми Хассе. Також проаналізовано можливі шляхи для групової класифікації підкласів класу (1). Як приклад, у параграфі 1.5 розглянуто повну групову класифікацію важливого підкласу $\mathcal{K}_2$, що виокремлено умовою $f_x + f_t = 0$, з точністю до еквівалентності, породженою групою еквівалентності $G_2^{\sim}$ цього підкласу.

У розділі 2 досліджено клас $\bar{\mathcal{L}}$ нормальних лінійних систем звичайних диференціальних рівнянь другого порядку:

$$\boldsymbol{x}_{tt} = A(t)\boldsymbol{x}_t + B(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}(t), \tag{2}$$

з n невідомими функціями x^1, …, x^n, $\boldsymbol{x}(t) = \big(x^1(t), \dots, x^n(t)\big)^\mathsf{T}$, $n \geqslant 2$. Набір $\theta = (A, B, \boldsymbol{f})$ довільних елементів класу $\bar{\mathcal{L}}$ утворено довільними (достатньо гладкими) $n \times n$ матричнозначними функціями A та B змінної t і довільною (достатньо гладкою) векторнозначною функцією $\boldsymbol{f}$ змінної t. На початку розділу наведено детальний огляд відомих результатів щодо трансформаційних властивостей звичайних диференціальних рівнянь та систем таких рівнянь. У параграфі 2.1 побудовано групи еквівалентності та групоїди еквівалентності класу $\bar{\mathcal{L}}$ та його вкладених підкласів, що отримані за допомогою калібрування набору довільних елементів $\theta = (A, B, \boldsymbol{f})$ із використанням перетворень еквівалентності. У результаті отримано ланцюжок класів $\bar{\mathcal{L}} \hookleftarrow \mathcal{L} \hookleftarrow \mathcal{L}' \supset \mathcal{L}''$. Доведено, що вищенаведені класи напівнормалізовані у звичайному сенсі, орбіта елементарної системи $\boldsymbol{x}_{tt} = \boldsymbol{0}$ у кожному з них під дією відповідної групи еквівалентності є сингулярною частиною цього класу, і є доповненням до орбіти, яку вважаємо регулярною частиною класу, і яка має кращі властивості нормалізації, ніж весь цей клас. Алгебри еквівалентності всіх класів, їх сингулярних і регулярних частин обчислено у параграфі 2.2 як інфінітезимальні аналоги відповідних груп еквівалентності. У параграфі 2.3 показано, що групові класифікації класу $\bar{\mathcal{L}}$ та каліброваних підкласів можна розділити на групові класифікації їх сингулярних і регулярних частин. Задачі групової класифікації сингулярних частин є тривіальними, оскільки їх розв'язання визначено елементарною системою $\boldsymbol{x}_{tt} = \boldsymbol{0}$ та її максимальною алгеброю ліївської інваріантності. Отримано системи визначальних рівнянь для ліївських симетрій систем із регулярних частин класу і показано, що задачі групової класифікації для цих частин можна звести до класифікації суттєвих розширень ліївської симетрії цих регулярних підкласів. Також обчислено ядро групи точкових симетрій для всіх класів, що виникають у цьому розгляді. Властивості можливих суттєвих розширень ліївської симетрії у регулярних частинах класу досліджено в параграфі 2.4. Використовуючи отримані властивості, запропоновано два шляхи класифікації таких розширень у рамках алгебраїчного підходу в залежності від їх структури. Необхідні та достатні умови еквівалентності систем, що допускають векторні поля ліївської симетрії зі сталими t-компонентами, представлено в параграфі 2.5. Отримані властивості суттєвих ліївських розширень у регулярних частинах класу дозволили знайти максимальну розмірність максимальних алгебр ліївської інваріантності систем, яка є підмаксимальною для всього класу $\bar{\mathcal{L}}$ та його каліброваних підкласів, див. параграф 2.6. У цьому параграфі детально описано структуру суттєвих алгебр ліївської інваріантності систем із регулярних частин класу та охарактеризовано максимальні алгебри ліївської інваріантності систем із сингулярних частин класу. У параграфі 2.7 доведено твердження щодо пониження порядку для нормальних лінійних систем звичайних диференціальних рівнянь другого порядку та їх інтегрування із використанням відомих ліївських симетрій або перетворень еквівалентності між ними. Методи, які розроблено в параграфі 2.4, використано в параграфі 2.8 для вичерпного розв'язання задачі групової класифікації нормальних лінійних систем звичайних диференціальних рівнянь другого порядку для найнижчого частинного значення $n = 2$.

У додатку A досліджено нелінійні (1+1)-вимірні еволюційні рівняння другого порядку та знайдено явний вигляд перетворень, що пов'язують такі рівняння з максимальними семивимірними алгебрами ліївських симетрій. Додаток Б містить список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації.

Ключові слова: групова класифікація диференціальних рівнянь, нелінійні рівняння Клейна–Ґордона, системи лінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, ліївські симетрії, група еквівалентності, групоїд еквівалентності, алгебра еквівалентності, алгебраїчний метод групової класифікації, реалізації алгебр Лі векторними полями, максимальна алгебра інваріантності.

Abstract

Lokaziuk O.V. Realizations of Lie algebras on line and group classification of differential equations. – Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

Thesis for the degree of Doctor of Philosophy, speciality 111 Mathematics. – Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, 2022.

The foundation of the dissertation research is the following two problems: group classification (1+1)-dimensional generalized nonlinear Klein–Gordon equations and group classification of normal linear systems of ordinary second-order differential equations. Despite the fact that these problems have a very long history of research, new results have been obtained in the framework of the algebraic approach after a detailed study of the transformational properties of the considered classes and their subclasses. The unifying tool in both of these problems was the efficient use of the classical Lie theorem on the realization of finite-dimensional Lie algebras by vector fields on the line. The methods and approaches proposed in the dissertation allowed us not only to essentially improve the previous results on Lie symmetries of equations from these classes, but also to significantly simplify the proof of classification results and verification their correctness.

In Chapter 1 we carried out the complete group classification of class of (1+1)-dimensional generalized nonlinear Klein–Gordon equations

$$u_{tx} = f(t, x, u) \quad \text{with} \quad f_{uu} \neq 0, \tag{1'}$$

up to the $G^{\sim}$-equivalence. Essentially generalizing Lie's results, we prove that the contact equivalence groupoid of the class of (1+1)-dimensional generalized nonlinear Klein–Gordon equations is the first-order prolongation of its point equivalence groupoid (Lemma 1.2). Thus, the problem of studying the structure of contact transformations for equations of this class reduced to

the study of the corresponding point transformations. In Lemma 1.4, we prove that (1+1)-dimensional generalized nonlinear Klein–Gordon equations is normalized (with respect to point transformations), and constructed its equivalence group $G^{\sim}$ and corresponding equivalence algebra $\mathfrak{g}^{\sim}$. The form of the vector fields of Lie symmetries and the corresponding classification equation are presented in Proposition 1.9. Since the class is normalized, and its equivalence group has the specific structure, so for complete group classification we used the algebraic method combined with effective application of the classical Lie theorem on realizations of finite-dimensional Lie algebras by vector fields on the line. In the class ($1'$) we singled out the Liouville equations as equations with infinite-dimensional Lie invariance algebras and investigated the properties of finite-dimensional appropriate subalgebras of projection $\varpi_*\mathfrak{g}^{\sim}$ of algebra $\mathfrak{g}^{\sim}$ on space with coordinates (t,x,u). In Lemma 1.12, we proved that $\dim\mathfrak{g}_f=\dim\pi^{t,x}_*\mathfrak{g}_f$, and shew that $\dim\mathfrak{g}_f\leqslant 4$ if the class equation admits the finite-dimensional Lie invariance algebra. In Theorem 1.14, we presented the main result of the group classification as the complete list of $G^{\sim}$-inequivalent Lie-symmetry extensions within the class ($1'$). We found the number of $G^{\sim}$-invariant integer characteristics of subalgebras of algebra $\mathfrak{g}^{\sim}$ that allowed us to completely identify $G^{\sim}$-inequivalent cases of Lie-symmetry extensions within the class ($1'$). We used these characteristics to distinguish, modulo the $G^{\sim}$-equivalence, successive Lie-symmetry extensions among the found ones in Theorem 1.14. Thus, we exhaustively described the structure of partially ordered set of $G^{\sim}$-inequivalent Lie-symmetry extensions within the class ($1'$), that is represented as the Hasse diagram in Figure 1.1. Possible ways for the group classifications of subclasses of the class ($1'$) are also analyzed. As an example, we considered the group classification of the important subclass $\mathcal{K}_2$ associated with the constraint $f_x+f_t=0$ up to the equivalence generated by the equivalence group $G^{\sim}_2$ of this subclass.

In Chapter 2, we studied the class $\bar{\mathcal{L}}$ of normal linear systems of second-order ordinary differential equations:

$$\boldsymbol{x}_{tt} = A(t)\boldsymbol{x}_t + B(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}(t), \tag{2'}$$

with the n unknown functions $x^1, \dots, x^n$, $\boldsymbol{x}(t) = \big(x^1(t), \dots, x^n(t)\big)^{\mathsf{T}}$, where $n \geqslant 2$. The tuple $\theta = (A, B, \boldsymbol{f})$ of arbitrary elements of the class $\bar{\mathcal{L}}$ consists of arbitrary (sufficiently smooth) $n \times n$ matrix-valued functions A and B of t and arbitrary (sufficiently smooth) vector-valued function $\boldsymbol{f}$ of t. At the beginning of the chapter, the detailed review is made of the known results on the transformational properties of ordinary differential equations and systems of such equations. Section 2.1 is devoted to the construction of the equivalence groups and the equivalence groupoids of the class $\bar{\mathcal{L}}$ and its nested subclasses obtained by gauging of the arbitrary-element tuple $\theta = (A, B, \boldsymbol{f})$ by equivalence transformations. As results we obtained the chain of classes $\bar{\mathcal{L}} \hookleftarrow \mathcal{L} \hookleftarrow \mathcal{L}' \supset \mathcal{L}''$. We proved that the above classes are semi-normalized in the usual sense, the orbit of the elementary system $\boldsymbol{x}_{tt} = \boldsymbol{0}$ in each of them under action of the corresponding equivalence group is the singular part of this class, and the complement to the orbit, which is assumed as the regular class part, has better normalization properties than this entire class. The equivalence algebras of all the classes and their singular and regular parts are computed in Section 2.2 as the infinitesimal counterparts of the respective equivalence groups. In Section 2.3, we shew that the group classifications of the class $\bar{\mathcal{L}}$ and the gauged subclasses split into the group classifications of their singular and regular parts. The group classification problems for the singular parts are trivial since their solutions are given by the elementary system $\boldsymbol{x}_{tt} = \boldsymbol{0}$ and its maximal Lie invariance algebra. We derived the systems of determining equations for Lie symmetries of the systems from the regular class parts and shew that the group classification problems for these parts reduce to the classifications of essential Lie-symmetry extensions within them. We also computed the kernel point symmetry groups for all the classes arising in this consideration. Properties of possible essential Lie-symmetry extensions within the regular class parts are studied in Section 2.4. Using the obtained properties, we suggested two ways for classifying such extensions within the framework of the algebraic approach depending on their structure. Necessary and sufficient conditions for the similarity of systems possessing Lie-symmetry vector fields with constant t-components are presented in Section 2.5. The obtained properties of essential Lie-symmetry extensions within the regular class parts allowed us to find the maximum dimension of the maximal Lie invariance algebras of systems from these parts, which is submaximum within the entire class $\bar{\mathcal{L}}$ and its gauged subclasses, see Section 2.6. Therein, we more thoroughly described the structure of the essential Lie invariance algebras of systems from the regular class parts and characterized the maximal Lie invariance algebras of systems from the singular class parts. In Section 2.7, we proved several assertions on order reduction for normal linear systems of second-order ordinary differential equations and their integration using their known Lie symmetries or equivalence transformations between them. The techniques developed in Section 2.4 are applied in Section 2.8 to exhaustively solving the problem of group classification of normal linear systems of second-order ordinary differential equations for the lowest particular value $n = 2$.

In Appendix A, the nonlinear (1+1)-dimensional evolution equations of the second order are investigated and an explicit form of transformations is found that connects such equations with maximal seven-dimensional Lie symmetries algebras. Appendix Б is contained the list of publications and information on approbation of the results.

Key words: group classification of differential equations, nonlinear Klein–Gordon equations, linear systems of second-order ordinary differential equations, Lie symmetries, equivalence group, equivalence groupoid, equivalence algebra, algebraic method of group classification, realizations of Lie algebras by vector fields, maximal Lie invariance algebra.

Список публікацій здобувача за темою дисертації

1. Бойко В.М., Локазюк О.В., (1+1)-вимірні нелінійні еволюційні рівняння другого порядку з максимальними ліївськими симетріями, *Збірник праць Ін-ту мат. НАН України* **16** (2019), № 1, 16–21, http://trim.imath.kiev.ua/index.php/trim/article/view/364.

2. Boyko V.M., Lokaziuk O.V., Popovych R.O., Realizations of Lie algebras on the line and the new group classification of (1+1)-dimensional generalized nonlinear Klein–Gordon equations, *Anal. Math. Phys.* **11** (2021), 127, 38 pp., https://doi.org/10.1007/s13324-021-00550-z, arXiv:2008.05460. (SJR – Q2, Scopus – Q1, WoS – Q1).

3. Локазюк О.В., Ліївські симетрії лінійних систем двох звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, *Доп. НАН України* (2021), № 5, 3–11, https://doi.org/10.15407/dopovidi2021.05.003.

4. Boyko V.M., Lokaziuk O.V., Popovych R.O., Admissible transformations and Lie symmetries of linear systems of second-order ordinary differential equations, arXiv:2105.05139, 2021, 49 pp.

5. Локазюк О.В., Групова класифікація та точні розв'язки рівнянь типу нелінійної теплопровідності, Тези доповідей Міжнародного семінару до 40-річчя від створення відділу прикладних досліджень, Київ, Інститут математики НАН України, 2018, https://www.imath.kiev.ua/~appmath/Abstracts2018/Lokazyuk_ua.html.

6. Локазюк О.В., Нелінійні еволюційні рівняння другого порядку з алгебрами ліївських симетрій максимальної розмірності, Тези доповідей Міжнародної конференції молодих математиків, Київ, Інститут математики НАН України, 2019, С. 62.

7. Локазюк О.В., Контактні перетворення нелінійних еволюційних рівнянь з максимальними ліївськими симетріями, Тези доповідей

V Міжнародної науково-практичної конференції “Інформаційні технології в освіті, науці і техніці” ІТОНТ, Черкаси, Черкаський державний технологічний університет, 2020, С. 100–102.

8. Локазюк О.В., Ліївські симетрії лінійних систем двох диференціальних рівнянь другого порядку з залежними від часу коефіцієнтами, Тези доповідей Міжнародної конференції молодих вчених “Підстригачівські читання – 2021”, Львів, Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2021, http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2021/abstracts/Lokazyuk.pdf.

9. Локазюк О.В., Групова класифікація (1+1)-вимірних нелінійних узагальнених рівнянь Клейна–Ґордона, Тези доповідей Міжнародної конференції молодих математиків, Київ, Інститут математики НАН України, 2021, С. 68, https://www.imath.kiev.ua/~young/youngconf2021/Abstracts_2021.pdf.

10. Бойко В.М., Локазюк О.В., Попович Р.О., Реалізації алгебр Лі на прямій та групова класифікація (1+1)-вимірних узагальнених нелінійних рівнянь Клейна–Ґордона, Тези доповідей Міжнародного онлайн-семінару з нагоди 85-ї річниці від народження Вільгельма Фущича, Київ, Інститут математики НАН України, 2021, https://www.imath.kiev.ua/~appmath/Abstracts2021/Lokaziuk.html.

11. Локазюк О.В., Групи еквівалентності лінійних систем звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, Тези доповідей Міжнародної конференції молодих вчених “Підстригачівські читання – 2022”, Львів, Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2022, http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2022/abstracts/Lokaziuk.pdf.

12. Локазюк О.В., Пониження порядку та інтегрування нормальних лінійних систем звичайних диференціальних рівнянь другого поряд-

ку, Тези доповідей Міжнародної наукової конференції “Прикладна математика та інформаційні технології – 2022”, Чернівці, Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича, 2022, С. 70–71, http://www.amit60.fmi.org.ua/?page=materials.

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

$\mathfrak{g}^{\sim}_{\mathcal{K}}$	алгебра еквівалентності класу $\mathcal{K}$
$\mathfrak{g}_f$	алгебра ліївської інваріантності рівняння K_f
$\mathcal{G}_\theta$	вертексна група в $\mathcal{G}^{\sim}_{\mathcal{K}}$
$G^{\sim}_{\mathcal{K}}$	група еквівалентності класу $\mathcal{K}$
$G^{\sim}_{\mathcal{L}}$	група еквівалентності класу $\mathcal{L}$
$\mathcal{G}^{\sim}_{\mathcal{K}}$	групоїд еквівалентності класу $\mathcal{K}$
$\mathcal{G}^{G^{\sim}_{\mathcal{K}}}$	групоїд дії групи $G^{\sim}_{\mathcal{K}}$
$\mathcal{T}$	допустиме перетворення
$\mathcal{K}$, $\mathcal{L}$	клас диференціальних рівнянь
$\mathcal{T}_1\star\mathcal{T}_2$	композиція допустимих перетворень
Φ, $\tilde\Phi$	контактні або точкові перетворення
$\mathfrak{g}_{\langle\,\rangle}$	лінійна оболонка векторних полів
$\mathfrak{g}_\theta$	максимальна алгебра системи K_θ
θ	набір довільних елементів
$\mathcal{K}_{\rm gen}$	надклас класу диференціальних рівнянь класу $\mathcal{K}$
$\mathrm{N}_{\mathfrak{g}}(\mathsf{S})$	нормалізатор підмножини S в $\mathfrak{g}$
$\mathfrak{s}$	підалгебра алгебри $\mathfrak{g}$
$\mathcal{K}_N$, $\hat{\mathcal{K}}$, $\tilde{\mathcal{K}}$	підкласи класу $\mathcal{K}$
$\mathcal{L}'_0$, $\mathcal{L}'_1$	підкласи класу $\mathcal{L}'$
S	підмножина алгебри $\mathfrak{g}$
G_θ	повна група точкової симетрії системи K_θ
$\mathrm{C}_{\mathfrak{g}}\big(\mathrm{C}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{s})\big)$	подвійний централізатор підалгебри $\mathfrak{s}$
ϖ	проєкція простору з координатами (t,x,u,f) на простір із координатами (t,x,u)
$\pi^{t,x}$	проєкція простору з координатами (t,x,u) на простір із координатами (t,x)

π^t	проєкція простору з координатами (t, x, u) на простір із координатою t
π^x	проєкція простору з координатами (t, x, u) на простір із координатою x
$\mathcal{G}^{G^\sim_{\mathcal{L}'}}\vert_{\mathcal{L}'_i}$	обмеження дії групоїда $\mathcal{G}^{G^\sim_{\mathcal{L}'}}$ групи еквівалентності $G^\sim_{\mathcal{L}'}$ до відповідного підкласу
$\delta_{0\lambda},\ \delta_{ab}$	символ Кронекера
$L_V,\ L'_V$	системи диференціальних рівнянь класів $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}'$
$\mathrm{St}_G(\mathfrak{s})$	стабілізатор підгрупи групи G відносно $\mathfrak{s}$
$\mathfrak{g}^{\mathrm{ess}}_V$	суттєва алгебра ліївської інваріантності системи L_V
$\mathfrak{g}^{\mathrm{s}\sim}_{\mathcal{K}}$	суттєва звичайна алгебра еквівалентності класу $\mathcal{K}$
$G^{\mathrm{s}\sim}_{\mathcal{K}}$	суттєва звичайна група еквівалентності класу $\mathcal{K}$
$K_f,\ K_{\tilde f}$	рівняння з класу $\mathcal{K}$
$\mathrm{C}_{\mathfrak{g}}(\mathsf{S})$	централізатор підмножини S в алгебрі $\mathfrak{g}$
$\mathcal{G}^{\mathrm{f}}_{\mathcal{L}'_1}$	фундаментальний групоїд $\mathcal{L}'_1$
$\mathfrak{g}^{\cap}$	ядро алгебри ліївської інваріантності

ЗМІСТ

Вступ

Актуальність теми. Груповий аналіз диференціальних рівнянь бере свій початок із робіт Софуса Лі (див., наприклад, [97–99]), який став не лише засновником оригінальної математичної теорії, а й з його іменем пов'язана низка математичних об'єктів названих на його честь, наприклад, група Лі, алгебра Лі, похідна Лі, дужка Лі, біалгебра Лі, алгеброїд Лі, кільце Лі, ліївська симетрія та багато інших. На сьогодні теорія Лі є важливою складовою не лише теорії диференціальних рівнянь, а й математичної та теоретичної фізики, більш того, теорія груп та алгебр Лі сформувалася як самостійний розділ сучасної алгебри, причому активність наукових досліджень у цих напрямках дуже висока. Слід зауважити, що хоча всі вище згадані напрямки вже давно виокремилися як окремі галузі математики чи фізики, але їх тісний взаємозв'язок є важливим для розвитку кожного з них. Подальший розвиток і популяризація групового аналізу диференціальних рівнянь пов'язані з іменами Л.В. Овсяннікова [24], Дж. Блумана та С. Кумея [42], П. Олвера [112, 113], монографії яких на багато років стали настільними книгами науковців-фахівців у цій галузі. Беззаперечним тут є також вагомий внесок наукової школи симетрійного аналізу, що була сформована В.І. Фущичем у 70-х роках минулого століття, і сьогоднішні досягнення якої пов'язані з іменами А.Г. Нікітіна, М.І. Сєрова, Р.М. Цифри, Р.З. Жданова, В.І. Лагна, Р.М. Черніги, Р.О. Поповича, В.М. Бойка, О.О. Ванеєвої, М.О. Нестеренко та їх учнів, див. монографії [66, 67].

З іншої сторони, класичні методи групового аналізу призводять до досить громіздких обчислень при дослідженні складних нелінійних моделей, особливо багатовимірних або з великою кількістю довільних параметрів. Тому актуальним є дослідження не лише різних типів симетрій як то дискретні, некласичні, контактні, а й дослідження трансформаційних властивостей і структур пов'язаних із класами диференціальних рівнянь, зокрема, нормалізованості класів, їх групоїдів і груп еквівалентності, а також проблеми контракцій і реалізацій алгебр Лі тощо, що були започатковані в роботах Р.О. Поповича та його співавторів, зокрема, у дисертаціях Р.О. Поповича [27], О.А. Почекети [28], В.М. Бойка [5], О.О. Ванєєвої [9], С.В. Опанасенка [25], М.О. Нестеренко [22]. Наприклад, розвинуті в київській школі групового аналізу алгебраїчний метод групової класифікації та метод розгалуженого розщеплення у поєднанні з глибоким аналізом трансформаційних властивостей досліджуваних класів продемонстрували свою високу ефективність і дали змогу вичерпно розв'язати низку задач групової класифікації, які не вдавалося розв'язати в рамках стандартного ліївського підходу, та уточнити або навіть виправити отримані раніше результати.

Основою дисертаційного дослідження стали дві задачі: групова класифікація (1+1)-вимірних узагальнених нелінійних рівнянь Клейна–Ґордона та групова класифікація нормальних лінійних систем звичайних диференціальних рівнянь другого порядку з довільною кількістю залежних змінних. Незважаючи на те, що ці задачі мають дуже довгу історію досліджень, їх вдалося вичерпно розв'язати за допомогою алгебраїчного методу після детального вивчення трансформаційних властивостей розглядуваних класів та їх підкласів. Об'єднуючим інструментом в обох цих задачах стало ефективне використання класичної теореми Лі про реалізації скінченновимірних алгебр Лі векторними полями на прямій. Запропоновані в дисертації методи та підходи дали змогу не лише значно покращити попередні результати щодо ліївських симетрій рівнянь із цих класів, а й істотно спростити доведення класифікаційних результатів і перевірку їх достовірності.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертацію виконано у відділі математичної фізики Інституту математи-

ки НАН України у рамках наступних НДР: “Симетрія, суперсиметрія та суперінтегровність рівнянь математичної фізики” (номер держреєстрації 0116U003059), “Симетрія та інтегровність рівнянь сучасної математичної фізики” (номер держреєстрації 0120U100173), “Аналітичні та групові методи дослідження математичних моделей сучасного природознавства” (номер держреєстрації 0117U002119), “Алгебраїчні та аналітичні методи у теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними” (номер держреєстрації 0121U110543), а також у рамках проєкту Національного фонду досліджень України 2020.02/0089 “Складні динамічні системи в природничих науках: теорія, математичне моделювання, чисельні методи та застосування до передових технологій” (номер держреєстрації 0120U104004).

Мета і завдання дослідження. *Метою дисертаційної роботи* є дослідження симетрійних властивостей та повна групова класифікація класів (1+1)-вимірних нелінійних узагальнених рівнянь Клейна–Ґордона та нормальних лінійних систем звичайних диференціальних рівнянь другого порядку.

Об'єктом дослідження є клас (1+1)-вимірних нелінійних узагальнених рівнянь Клейна–Ґордона, клас нормальних лінійних систем звичайних диференціальних рівнянь другого порядку з довільною кількістю залежних змінних.

Предметом дослідження є групи і групоїди еквівалентності класів диференціальних рівнянь та їх систем, групова класифікація, ліївські симетрії, алгебри ліївської інваріантності.

Методи дослідження. У роботі разом із відомими методами лінійної алгебри, теорії алгебр Лі та теорії диференціальних рівнянь використовувалися алгебраїчний метод групової класифікації, метод розгалуженого розщеплення, розбиття класів на підкласи з кращими нормалізаційними властивостями, відображення між класами, метод обчислення групоїдів і груп еквівалентності (точкових та контактних), репараметризація класів диференціальних рівнянь, процедура калібрування довільних елементів, реалізації алгебр Лі на прямій.

Наукова новизна одержаних результатів. Основні результати, які визначають наукову новизну та винесені на захист:

1. Доведено, що будь-яке контактне перетворення рівнянь із класу (1+1)-вимірних нелінійних узагальнених рівнянь Клейна–Ґордона є першим продовженням його точкового перетворення. Показано, що клас (1+1)-вимірних нелінійних узагальнених рівнянь Клейна–Ґордона є нормалізованим відносно точкових перетворень, і побудовано його групу еквівалентності та його алгебру еквівалентності.

2. Виконано повну групову класифікацію (1+1)-вимірних нелінійних узагальнених рівнянь Клейна–Ґордона.

3. Знайдено низку цілочисельних характеристик, які дозволяють вичерпно описати послідовні розширення ліївської симетрії у класі (1+1)-вимірних нелінійних узагальнених рівнянь Клейна–Ґордона.

4. Проведено повний опис допустимих перетворень для класу нормальних лінійних систем звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, побудовано групи еквівалентності та групоїди еквівалентності розглядуваного класу та його підкласів. Показано, що групові класифікації класу лінійних систем звичайних диференціальних рівнянь другого порядку та його каліброваних підкласів можна звести до групових класифікацій їх сингулярних та регулярних частин.

5. Запропоновано два шляхи класифікації суттєвих розширень ліївської симетрії у регулярних частинах класу лінійних систем звичайних диференціальних рівнянь другого порядку у рамках алгебраїчного підходу. Описано структуру суттєвих алгебр ліївської інваріантності систем із регулярних частин класу лінійних систем звичайних диференціальних рівнянь другого порядку.

6. Доведено кілька тверджень щодо пониження порядку для лінійних систем звичайних диференціальних рівнянь другого порядку та їх інтегрування з використанням відомих ліївських симетрій або перетворень еквівалентності.

7. Виконано повну групову класифікацію класу лінійних систем звичайних диференціальних рівнянь другого порядку у випадку двох залежних змінних.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота має теоретичний характер. Отримані результати є новими і можуть бути використані у подальших дослідженнях диференціальних рівнянь, зокрема, моделей сучасної математичної й теоретичної фізики.

Особистий внесок здобувача. Усі результати, що винесено на захист, одержано здобувачем самостійно. У роботах у співавторстві [6, 46, 47], В.М. Бойку та Р.О. Поповичу належить постановка задач, визначення напрямку дослідження та перевірка отриманих результатів.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертації доповідалися й обговорювалися на:

- Міжнародному семінарі з нагоди 40-ї річниці створення відділу прикладних досліджень (зараз відділ математичної фізики) (Київ, Інститут математики НАН України, 2018);
- Міжнародній конференції молодих вчених (Київ, 2019);
- V Міжнародній науково-практичній конференції “Інформаційні технології в освіті, науці і техніці” ІТОНТ (Черкаси, 2020);
- Міжнародній конференції молодих учених “Підстригачівські читання – 2021” (Львів, 2021);
- Міжнародній конференції молодих математиків (Київ, Інститут математики НАН України, 2021);

- Міжнародному онлайн-семінарі з нагоди 85-ї річниці від народження Вільгельма Фущича (Київ, Інститут математики НАН України, 2021);
- Міжнародній конференції молодих учених "Підстригачівські читання – 2022" (Львів, 2022);
- Міжнародній науковій конференції "Прикладна математика та інформаційні технології – 2022", (Чернівці, 2022);
- семінарі відділу математичної фізики Інституту математики НАН України (керівник семінару: член-кореспондент НАН України, професор А.Г. Нікітін).

Публікації. Основні результати дисертаційної роботи опубліковано у 12 наукових публікаціях, дві з них [6, 17] — у наукових виданнях, внесених до переліку наукових фахових видань України, одна стаття [46] — у виданні з квартиля Q2 (відповідно до класифікації SCImago Journal and Country Rank), прирівнюється до двох публікацій. Вісім робіт [7, 13–16, 18–20] — матеріали міжнародних наукових конференцій та семінарів.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація включає анотації українською й англійською мовами, список публікацій автора, зміст, перелік умовних позначень, вступ, два розділи, висновки, список використаних джерел, що містить 140 найменувань, і два додатки. Повний обсяг дисертації становить 195 сторінок, з них список використаних джерел займає 16 сторінок, а додатки — 9 сторінок.

Подяки. Авторка висловлює щиру вдячність доктору фізико-математичних наук Вячеславу Миколайовичу Бойку, доктору фізико-математичних наук, професору Роману Омеляновичу Поповичу, за постановку задач, постійну увагу і допомогу, конструктивні зауваження до роботи, а також співробітникам відділу математичної фізики за плідні дискусії.

РОЗДІЛ 1

Реалізації алгебр Лі на прямій та групова класифікація (1+1)-вимірних узагальнених нелінійних рівнянь Клейна–Ґордона

Квазілінійні гіперболічні рівняння другого порядку моделюють багато явищ і процесів у фізиці та математиці, особливо різні типи розповсюдження хвиль, див., наприклад, [58,65,67,117]. Такі рівняння навіть із двома незалежними змінними є важливими в ряді областей, включаючи диференціальну геометрію, квантову теорію поля, космологію, гідродинаміку та газову динаміку, надпровідність, дислокацію кристалів, хвилі у феромагнітних матеріалах, нелінійну оптику, фізику низьких температур і т.д. Ось чому ці рівняння інтенсивно вивчалися у багатьох галузях математики, зокрема, у рамках теорії інтегровності та симетрійному аналізі диференціальних рівнянь.

У дисертаційній роботі проведено вичерпну групову класифікацію класу (1+1)-вимірних узагальнених нелінійних рівнянь Клейна–Ґордона у конусних (характеристичних) координатах вигляду

$$u_{tx} = f(t,x,u) \quad \text{з} \quad f_{uu} \neq 0, \tag{1.1}$$

який позначаємо $\mathcal{K}$ й одночасно називаємо як клас (1.1) і як клас $\mathcal{K}$. Тут $u = u(t,x)$ — невідома функція незалежних змінних (t,x), а індекси у функцій — похідні за відповідними змінними, наприклад,

$u_{tx} := \partial^2 u/\partial t\,\partial x$ та $f_{uu} := \partial^2 f/\partial u^2$. Довільний елемент f класу $\mathcal{K}$ пробігає множину гладких функцій змінних (t, x, u), які не є лінійними відносно u. Останнє обмеження накладаємо на функцію f для виключення лінійних рівнянь із класу $\mathcal{K}$, що є природним із різних причин, див. зауваження 1.7. Варто зазначити, що задача дослідження класу $\mathcal{K}$ у рамках групового аналізу диференціальних рівнянь була сформульована іще Софусом Лі [95].

Нижче представлено чотири важливі властивості класу $\mathcal{K}$, які дозволяють отримати сильніші результати ніж звичайна групова класифікація цього класу та спростити всі обчислення. По-перше, доведено, що клас $\mathcal{K}$ є нормалізованим відносно його точкової групи еквівалентності $G^\sim$. По-друге, показано, що перші продовження його допустимих точкових перетворень вичерпують всі допустимі контактні перетворення. З огляду на ці дві властивості, класифікація ліївських симетрій рівнянь із класу $\mathcal{K}$ з точністю до $G^\sim$-еквівалентності, грубо кажучи, співпадає з аналогічною класифікацією з точністю до загальної точкової еквівалентності і з класифікаціями неперервних контактних симетрій цих рівнянь із точністю до еквівалентності, яка визначена контактною групою еквівалентності та групоїдом класу $\mathcal{K}$. Більш того, цю класифікаційну задачу можна ефективно розв'язати за допомогою алгебраїчного методу. По-третє, доведено, що розмірності максимальних алгебр ліївської інваріантності рівнянь із класу $\mathcal{K}$ не перевищують чотири, за винятком рівнянь, які є $G^\sim$-еквівалентними до рівняння Ліувілля і максимальні алгебри ліївської інваріантності яких є нескінченновимірними. Четверта властивість полягає в тому, що кожне точкове перетворення між будь-якими двома рівняннями з класу $\mathcal{K}$ є проєктовним як на простір із координатою t, так і на простір із координатою x. Таким чином, всі структури точкових перетворень, що пов'язані з класом $\mathcal{K}$, включаючи групу еквівалентності, алгебру еквівалентності і максимальні алгебри ліївської інваріантності рівнянь із цього класу, також є проєктовними на ці ж два простори. Ця подвійна проєктовність дає можливість для розширеного застосування під час групової класифікації класичної теореми Лі про реалізації скінченновимірних алгебр Лі векторними полями на прямій [94, параграф 6, с. 455], див. також [113, теорема 2.70], [121] та посилання в цих роботах.

Теорема 1.1 (теорема Лі). *Нееквівалентні (з точністю до локальних дифеоморфізмів прямої) реалізації скінченновимірних алгебр Лі векторними полями на t-прямій вичерпують наступні алгебри:*

$$\{0\}, \quad \langle\partial_t\rangle, \quad \langle\partial_t,\, t\partial_t\rangle, \quad \langle\partial_t,\, t\partial_t,\, t^2\partial_t\rangle.$$

Раніше теорему Лі вже використовували для групової класифікації класів еволюційних рівнянь та рівнянь Шредінґера [39, 88, 89, 114] і класу лінійних звичайних диференціальних рівнянь довільного фіксованого порядку $r \geqslant 2$ [49, параграф 3], де існує аналогічна проєктовність на одновимірний простір відповідно змінної часу або незалежної змінної.

Найважливіший і добре вивчений підклас $\mathcal{K}_9$ класу $\mathcal{K}$ можна виокремити за допомогою допоміжних рівнянь $f_t = f_x = 0$, тобто цей підклас утворюють нелінійні рівняння Клейна–Ґордона вигляду $u_{tx} = f(u)$ з $f_{uu} \neq 0$; див. зауваження 1.15 для обґрунтування позначень. Підклас $\mathcal{K}_9$ включає низку відомих рівнянь, які нижче представлено в канонічній формі (сталі параметри прибрано за допомогою перетворень еквівалентності):

- рівняння Ліувілля $u_{tx} = \mathrm{e}^u$,
- рівняння Цецейки $u_{tx} = \mathrm{e}^u \pm \mathrm{e}^{-2u}$,
- рівняння синус-Ґордона (або Бонне) $u_{tx} = \sin u$,
- рівняння синус-гіперболічний-Ґордона $u_{tx} = \operatorname{sh} u$,
- рівняння подвійного синус-Ґордона $u_{tx} = \sin u + C\sin 2u$ з $C \neq 0$,

див. параграф 7.5.1 у довіднику [117] та відповідні посилання там. Контактні перетворення симетрії рівнянь із підкласу $\mathcal{K}_9$ описано іще Софусом Лі [95]. Зокрема, було доведено, що будь-яке таке перетворення є першим продовженням точкового перетворення. Далі Лі виділив рівняння Ліувілля, $f(u) = C\mathrm{e}^{\kappa u}$ з ненульовими сталими κ та C, як єдине рівняння в класі $\mathcal{K}_9$, яке допускає нескінченновимірну групу точкових симетрій. Він також показав, що інші рівняння допускають лише точкові перетворення симетрії, де кожна з t-, x- та u-компонент залежить лише від відповідної змінної, і ця залежність є лінійною. У вступі роботи [95] Лі сформулював гіпотезу, що отримані результати можна узагальнити на клас $\mathcal{K}$. Слід зауважити, що у дисертаційному дослідженні отримано декілька узагальнень результатів Лі для класу $\mathcal{K}$.

Фіксовані рівняння з підкласу $\mathcal{K}_9$ та сам підклас $\mathcal{K}_9$ інтенсивно вивчалися в рамках симетрійного аналізу диференціальних рівнянь. Зокрема, узагальнені симетрії рівнянь із підкласу $\mathcal{K}_9$ з характеристиками, що не залежать від змінних (t, x), прокласифіковано над комплексним полем у роботі [10]. Рівняння Ліувілля, рівняння синус-Ґордона та рівняння Цецейки виокремлено в підкласі $\mathcal{K}_9$ як єдині рівняння з нескінченновимірними алгебрами таких симетрій, див. також [79, пункт 21.2]. Ці ж рівняння виокремлено в роботі [57] як єдині рівняння у підкласі $\mathcal{K}_9$, які допускають нескінченновимірні простори законів збереження з так званими “поліноміальними щільностями”, а в роботах [56, 102] — як єдині рівняння з властивістю Пенлеве серед рівнянь $u_{tx} = f(u)$, де функція f є лінійною комбінацією експоненціальних функцій $\mathrm{e}^{j\alpha u}$ для деякої фіксованої ненульової комплекснозначної сталої α та $j \in \mathbb{Z}$. У роботі [138] прокласифіковано рівняння з підкласу $\mathcal{K}_9$, які допускають нелінійне розділення змінних у стандартних просторово-часових координатах до двох звичайних диференціальних рівнянь першого порядку; див. також посилання в [138] і роботу [76] для інших типів нелінійного розділення змінних для цих рівнянь. Класифікацію локальних законів збереження рівнянь із підкласу $\mathcal{K}_9$ над комплексним полем було розпочато в роботі [65]. Сингулярні оператори редукції [45, 87], тобто сингулярні некласичні (або умовні, або Q-умовні) симетрії, усіх рівнянь вигляду $u_{tx} = f(u)$ вичерпно вивчено у роботі [87]. У той же час досі немає повної класифікації узагальнених симетрій, локальних законів збереження та регулярних операторів редукції для рівнянь із підкласу $\mathcal{K}_9$, а також відсутні вичерпні класифікації таких рівнянь, що допускають нелінійне розділення змінних або властивість Пенлеве, не кажучи вже про весь клас $\mathcal{K}$. Винятком є загальний опис регулярних операторів редукції для рівнянь із класу $\mathcal{K}$, який представлено в роботі [137].

Основа алгебраїчного методу групової класифікації виникла в класифікації Лі звичайних диференціальних рівнянь другого порядку [98], але це стало загальноприйнятим інструментом групового аналізу диференціальних рівнянь значно пізніше, лише у 1990-х роках, хоча його застосування до задач повної групової класифікації все ж неявно включало властивість нормалізації [21,34,68,70,78,92,93,140]. Алгебраїчний метод при прямому застосуванні до ненормалізованих класів диференціальних рівнянь призводить до так званої попередньої групової класифікації таких класів [3, 37, 59, 81]. Зазвичай алгебраїчний метод використовують для розв'язання задач групової класифікації класів диференціальних рівнянь із довільними елементами, що залежать від кількох аргументів і для яких прямий метод групової класифікації, включаючи метод розгалуженого розщеплення [23,38,115] як його найдосконалішу версію, є неконструктивним. Для групової класифікації класу $\mathcal{K}$ використовуємо вдосконалену версію алгебраїчного методу, основою якого є нормалізація розглядуваного класу диференціальних рівнянь [118, 122, 123], і яка включає в себе класифікацію придатних підалгебр [37, 59] відповідної алгебри еквівалентності. Цю версію алгебраїчного методу запропоновано в роботах [122, 123] і ефективно використано при розв'язанні задач групової класифікації для різних класів диференціальних рівнянь [37,39,49,88,89,114,120,122,123,130].

Статті [37,92,93,130] особливо доречні в контексті даної дисертаційної роботи, оскільки вони використовують алгебраїчний метод для групової класифікації класів квазілінійних гіперболічних рівнянь другого порядку з двома незалежними змінними. Див. також посилання в цих роботах щодо групових класифікацій інших класів таких рівнянь. Зокрема, задача групової класифікації для надкласу $\breve{\mathcal{K}}$ класу $\mathcal{K}$, який утворюють рівняння вигляду $u_{\check{t}\check{t}} - u_{\check{x}\check{x}} = f(\check{t}, \check{x}, u, u_{\check{x}})$ у стандартній системі координат простір–час $(\check{t}, \check{x}) = (x + t, x - t)$, досліджено в новаторських роботах [92, 93]. У цих роботах надклас $\breve{\mathcal{K}}$ розділено на чотири підкласи, які насправді є нормалізованими і які непов'язані точковими перетвореннями між собою; клас $\mathcal{K}$ є одним із цих підкласів (при використанні конусних змінних). Таким чином, задачу групової класифікації для всього надкласу $\breve{\mathcal{K}}$ розділено на чотири задачі групової класифікації для підкласів, кожен з яких досліджувався окремо у рамках алгебраїчного методу групової класифікації. На жаль, розгляд класу $\mathcal{K}$ у вищезазначених роботах мав певні недоліки (див. другий абзац параграфа 1.6 нижче), а тому ліївські симетрії рівнянь із цього класу потребували більш акуратної та повної класифікації, що й пророблено у дисертаційній роботі. Задачі групової класифікації для ненормалізованого класу квазілінійних гіперболічних та еліптичних рівнянь вигляду $u_{\check{t}\check{t}} - h(\check{x}, u, u_{\check{x}})u_{\check{x}\check{x}} = f(\check{x}, u, u_{\check{x}})$ із точністю до еквівалентності, визначеною відповідно групою та групоїдом еквівалентності, вичерпно розв'язано у роботі [130] з використанням оригінальної версії алгебраїчного методу групової класифікації для ненормалізованих класів диференціальних рівнянь. Записаний у конусних змінних, цей клас має нетривіальне перекриття з класом $\mathcal{K}$.

Більш детально, розділ 1 має таку структуру. У параграфі 1.1 доведено, що будь-яке контактне перетворення, що пов'язане з рівняннями з класу (1.1), є першим продовженням його точкового перетворення, і це обґрунтовує чому в подальшому розгляді обмежуємося лише точковими перетвореннями. Доведено, що клас (1.1) є нормалізованим (відносно точкових перетворень), і побудовано його (точкову) групу еквівалентності $G^{\sim}$ та його (точкову) алгебру еквівалентності $\mathfrak{g}^{\sim}$. У цьому ж параграфі виокремлено рівняння з класу (1.1) з нескінченновимірними алгебрами ліївської інваріантності та досліджено властивості скінченновимірних придатних підалгебр проєкції $\varpi_*\mathfrak{g}^\sim$ алгебри $\mathfrak{g}^\sim$ на простір із координатами (t,x,u), які є важливими для групової класифікації цього класу. У теоремі 1.14 параграфа 1.2 представлено основний результат групової класифікації у вигляді повного списку $G^\sim$-нееквівалентних розширень ліївської симетрії у класі (1.1). Структуру частково впорядкованої множини таких розширень показано на рисунку 1.1 у вигляді діаграми Хассе. Також обговорено співвідношення між розширеннями ліївської симетрії та граничними переходами. Параграф 1.3 присвячено доведенню теореми 1.14 та її аналізу. Знайдено низку $G^\sim$-інваріантних цілочисельних характеристик підалгебр алгебри $\mathfrak{g}^\sim$ або, еквівалентно, алгебри проєкції $\varpi_*\mathfrak{g}^\sim$, які дозволяють повністю ідентифікувати $G^\sim$-нееквівалентні випадки розширень ліївської симетрії у класі (1.1). У параграфі 1.4 використано ці характеристики для розрізнення, з точністю до $G^\sim$-еквівалентності, послідовних розширень ліївської симетрії серед знайдених у теоремі. Таким чином, вичерпно описано структуру частково впорядкованої множини $G^\sim$-нееквівалентних розширень ліївської симетрії в класі (1.1). Можливі шляхи для групової класифікації підкласів класу (1.1) проаналізовано в параграфі 1.5. Як приклад використано результати роботи [130] для проведення повної групової класифікації важливого підкласу $\mathcal{K}_2$, що пов'язаний з умовою $f_x + f_t = 0$, з точністю до еквівалентності, індукованою групою еквівалентності $G_2^\sim$ цього підкласу. У параграфі 1.6 обговорено отримані результати та розглянуто пов'язані з ними проблеми для подальшого дослідження.

Результати цього розділу опубліковано в роботах [7, 16, 46].

1.1. Попередній аналіз

У цьому параграфі розглянемо надклас $\mathcal{K}_{\rm gen}$ всіх рівнянь загального вигляду $u_{tx}=f(t,x,u)$, $\mathcal{K}\subset\mathcal{K}_{\rm gen}$. Для фіксованого значення довільного елементу f позначимо через K_f рівняння з класу $\mathcal{K}_{\rm gen}$ із цим значенням f. Розгляд почнемо з дослідження контактних допустимих перетворень для підкласу $\bar{\mathcal{K}}$ з $\mathcal{K}_{\rm gen}$, який виділяємо за допомогою умови $f_u\neq0$, тобто додаємо до $\mathcal{K}$ лінійні рівняння вигляду $u_{tx}=f(t,x,u)$ з $f_{uu}=0$ і $f_u\neq0$.

Наступна лема узагальнює результат Софуса Лі з роботи [95].

Лема 1.2. *Будь-яке контактне допустиме перетворення в класі $\bar{\mathcal{K}}$ є першим продовженням точкового допустимого перетворення в цьому класі.*

Доведення. Наведемо просте доведення за допомогою прямого методу. Фіксуємо контактне допустиме перетворення $\mathcal{T}=(f,\Phi,\tilde f)$ для класу $\bar{\mathcal{K}}$. Тут Φ: $(\tilde t,\tilde x,\tilde u,\tilde u_{\tilde t},\tilde u_{\tilde x})=(T,X,U,U^t,U^x)$ — контактне перетворення із незалежними змінними (t,x) і залежною змінною u, що відображає рівняння K_f: $u_{tx}=f(t,x,u)$ у рівняння $K_{\tilde f}$: $\tilde u_{\tilde t\tilde x}=\tilde f(\tilde t,\tilde x,\tilde u)$. Функції T, X, U, U^t та U^x, які визначають компоненти перетворення Φ, є гладкими функціями змінних (t,x,u,u_t,u_x) з ненульовим якобіаном, $\big|\partial(T,X,U,U^t,U^x)/\partial(t,x,u,u_t,u_x)\big|\neq0$, та задовольняють умову контактності

$$
\begin{aligned}
&U^t{\rm D}_tT+U^x{\rm D}_tX={\rm D}_tU,\\
&U^t{\rm D}_xT+U^x{\rm D}_xX={\rm D}_xU,
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

де

$$
\begin{aligned}
&{\rm D}_t=\partial_t+u_t\partial_u+u_{tt}\partial_{u_t}+u_{tx}\partial_{u_x}+\cdots,\\
&{\rm D}_x=\partial_x+u_x\partial_u+u_{tx}\partial_{u_t}+u_{xx}\partial_{u_x}+\cdots
\end{aligned}
$$

— оператори повних похідних відповідно відносно змінних t та x. Після групування коефіцієнтів при других похідних від залежної змінної u

в умові контактності (1.2) отримаємо систему

$$
\begin{aligned}
&U^tT_{u_t}+U^xX_{u_t}=U_{u_t}, \quad U^t\hat{\mathrm{D}}_tT+U^x\hat{\mathrm{D}}_tX=\hat{\mathrm{D}}_tU,\\
&U^tT_{u_x}+U^xX_{u_x}=U_{u_x}, \quad U^t\hat{\mathrm{D}}_xT+U^x\hat{\mathrm{D}}_xX=\hat{\mathrm{D}}_xU,
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

де $\hat{\mathrm{D}}_t=\partial_t+u_t\partial_u$ та $\hat{\mathrm{D}}_x=\partial_x+u_x\partial_u$ — обрізані оператори повних похідних відносно змінних t та x. Умову, що перетворення Φ відображає рівняння K_f у рівняння $K_{\tilde f}$, враховуємо шляхом заміни виразу для $\tilde u_{\tilde t\tilde x}$ у термінах нетильдованих змінних:

$$
\begin{vmatrix} \mathrm{D}_tU^x & \mathrm{D}_xU^x\\ \mathrm{D}_tX & \mathrm{D}_xX\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \mathrm{D}_tT & \mathrm{D}_xT\\ \mathrm{D}_tU^t & \mathrm{D}_xU^t\end{vmatrix}=(\Phi^*\tilde f)\begin{vmatrix} \mathrm{D}_tT & \mathrm{D}_xT\\ \mathrm{D}_tX & \mathrm{D}_xX\end{vmatrix}. \tag{1.4}
$$

Тут Φ^* — обернене відображення до відображення Φ, $\Phi^*\tilde f:=\tilde f(T,X,U)$. Перше рівняння в (1.4) є диференціальним наслідком системи (1.2). Розщеплення рівняння (1.4) відносно u_{tt} та u_{xx} приводить, зокрема, до рівнянь

$$
\begin{vmatrix} U^x_{u_t} & U^x_{u_x}\\ X_{u_t} & X_{u_x}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} T_{u_t} & T_{u_x}\\ U^t_{u_t} & U^t_{u_x}\end{vmatrix}=(\Phi^*\tilde f)\begin{vmatrix} T_{u_t} & T_{u_x}\\ X_{u_t} & X_{u_x}\end{vmatrix}, \tag{1.5а}
$$

$$
\begin{vmatrix} U^x_{u_t} & \hat{\mathrm{D}}_xU^x\\ X_{u_t} & \hat{\mathrm{D}}_xX\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} T_{u_t} & \hat{\mathrm{D}}_xT\\ U^t_{u_t} & \hat{\mathrm{D}}_xU^t\end{vmatrix}=(\Phi^*\tilde f)\begin{vmatrix} T_{u_t} & \hat{\mathrm{D}}_xT\\ X_{u_t} & \hat{\mathrm{D}}_xX\end{vmatrix}, \tag{1.5б}
$$

$$
\begin{vmatrix} \hat{\mathrm{D}}_tU^x & U^x_{u_x}\\ \hat{\mathrm{D}}_tX & X_{u_x}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \hat{\mathrm{D}}_tT & T_{u_x}\\ \hat{\mathrm{D}}_tU^t & U^t_{u_x}\end{vmatrix}=(\Phi^*\tilde f)\begin{vmatrix} \hat{\mathrm{D}}_tT & T_{u_x}\\ \hat{\mathrm{D}}_tX & X_{u_x}\end{vmatrix}. \tag{1.5в}
$$

Нехай принаймні одна з похідних T_{u_t}, T_{u_x}, X_{u_t} та X_{u_x} не дорівнює тотожно нулю. З точністю до перестановок змінних t і x та змінних $\tilde t$ і $\tilde x$, які є перетвореннями еквівалентності для класу $\bar{\mathcal{K}}$, можна вважати, що $T_{u_t}\neq 0$. Введемо позначення

$$
\Lambda:=\frac{U^t_{u_t}-(\Phi^*\tilde f)X_{u_t}}{T_{u_t}}.
$$

Таким чином, Λ — функція змінних (t,x,u,u_t,u_x). З урахуванням цього позначення і других рівностей у рівняннях (1.5а) та (1.5б) отримаємо рівняння

$$U^t_{u_t} = \Lambda T_{u_t} + (\Phi^*\tilde f)X_{u_t},$$
$$U^t_{u_x} = \Lambda T_{u_x} + (\Phi^*\tilde f)X_{u_x},$$
$$\hat{\mathrm D}_x U^t = \Lambda \hat{\mathrm D}_x T + (\Phi^*\tilde f)\hat{\mathrm D}_x X,$$

які можна представити як єдине рівняння вигляду

$$\mathrm D_x U^t = \Lambda \mathrm D_x T + (\Phi^*\tilde f)\mathrm D_x X.$$

Це рівняння визначено на всьому просторі струменів другого порядку $\mathrm J^2(t,x;u)$ з незалежними змінними (t,x) і залежною змінною u. Після віднімання останнього рівняння від рівності

$$\mathrm D_x U^t = (\mathrm{pr}_{(2)}\,\Phi)^*(\tilde u_{\tilde t\tilde t})\mathrm D_x T + (\mathrm{pr}_{(2)}\,\Phi)^*(\tilde u_{\tilde t\tilde x})\mathrm D_x X$$

отримаємо рівняння

$$\big((\mathrm{pr}_{(2)}\,\Phi)^*(\tilde u_{\tilde t\tilde t}) - \Lambda\big)\mathrm D_x T + (\mathrm{pr}_{(2)}\,\Phi)^*(\tilde u_{\tilde t\tilde x} - \tilde f)\mathrm D_x X = 0 \tag{1.6}$$

на просторі струменів другого порядку $\mathrm J^2(t,x;u)$. Тут $\mathrm{pr}_{(2)}\,\Phi$ — друге продовження контактного перетворення Φ. На многовиді рівняння K_f у просторі струменів $\mathrm J^2(t,x;u)$, де $u_{tx} = f$ та $(\mathrm{pr}_{(2)}\,\Phi)^*(\tilde u_{\tilde t\tilde x} - \tilde f) = 0$, рівняння (1.6) набуває вигляду

$$\big((\mathrm{pr}_{(2)}\,\Phi)^*(\tilde u_{\tilde t\tilde t}) - \Lambda\big)(\hat{\mathrm D}_x T + fT_{u_t} + T_{u_x}u_{xx}) = 0.$$

Оскільки похідна $\tilde u_{\tilde t\tilde t}$ є незв'язною на розв'язках рівняння $K_{\tilde f}$, то

$$\hat{\mathrm D}_x T + fT_{u_t} + T_{u_x}u_{xx} = 0,$$

і після розщеплення відносно u_{xx} маємо такі два рівняння:

$$T_{u_x} = 0 \quad \text{та} \quad \hat{\mathrm D}_x T + fT_{u_t} = 0.$$

Використовуючи перше з цих двох рівнянь, друге рівняння можна додатково розщепити відносно u_x і як результат отримуємо рівняння:

$$T_u = 0 \quad \text{і} \quad T_x + fT_{u_t} = 0.$$

Оскільки $T_u = 0$ і $f_u \neq 0$, то рівняння $T_x + fT_{u_t} = 0$ можна розщепити на рівняння $T_x = T_{u_t} = 0$, що суперечить нерівності $T_{u_t} \neq 0$.

Таким чином,

$$T_{u_t} = T_{u_x} = X_{u_t} = X_{u_x} = 0.$$

Тоді з системи (1.3) прямо випливає, що

$$U_{u_t} = U_{u_x} = 0.$$

Оскільки t-, x- і u-компоненти контактного перетворення Φ не залежать від похідних першого порядку u_t і u_x, то це перетворення є першим продовженням точкового перетворення з тими ж t-, x- і u-компонентами. □

Узагальнення леми 1.2 для класу рівнянь $u_{tx} = f(t, x, u, u_t, u_x)$ доведено у роботі [119]. У силу леми 1.2, всі структури, що пов'язані з контактними перетвореннями рівнянь із надкласу $\bar{\mathcal{K}}$ та всі його підкласи, включаючи клас $\mathcal{K}$, — це перші продовження відповідних структур, що пов'язані з точковими перетвореннями рівнянь із тих же класів. Ці структури включають групоїди еквівалентності, групи еквівалентності цих класів та групи симетрій рівнянь із цих класів. Таким чином, подальший розгляд можна обмежити лише точковими перетвореннями в класі $\mathcal{K}$.

Зауваження 1.3. Нетривіальні приклади використання контактних перетворень еквівалентності у задачі групової класифікації класу рівнянь типу нелінійної теплопровідності представлено у роботах [6, 13, 14], див. додаток A.

Наступна лема є очевидним наслідком леми 1.2 та [84, теорема 4.3c].

Лема 1.4. *Клас (1.1) є нормалізованим у звичайному сенсі як відносно точкових, так і контактних перетворень, тобто його точковий та контактний групоїди еквівалентності співпадають із групоїдами дії відповідно його точкової групи еквівалентності $G^{\sim}$ та першим продовженням цієї групи. Група $G^{\sim}$ утворена перетвореннями вигляду*

$$\tilde{t} = T(t), \quad \tilde{x} = X(x), \quad \tilde{u} = Cu + U^0(t,x), \quad \tilde{f} = \frac{Cf + U^0_{tx}}{T_t X_x} \tag{1.7}$$

та дискретним перетворенням еквівалентності $\mathcal{J}^0$*:* $\tilde t = x$, $\tilde x = t$, $\tilde u = u$, $\tilde f = f$. *Тут* T, X *та* U^0 *— довільні гладкі функції своїх аргументів,* $T_tX_x \neq 0$, C *— довільна ненульова стала.*

Наслідок 1.5. *Повний список дискретних перетворень еквівалентності класу* (1.1)*, які є незалежними з точністю до композицій одне з одним та з неперервними перетвореннями еквівалентності цього класу, вичерпують* (t, x)*-перестановка* $\mathcal{J}^0$ *і три перетворення зміни знаку змінних,*

$$\mathcal{J}^t\colon (t,x,u,f)\mapsto(-t,x,u,-f),\qquad \mathcal{J}^x\colon (t,x,u,f)\mapsto(t,-x,u,-f),$$
$$\mathcal{J}^u\colon (t,x,u,f)\mapsto(t,x,-u,-f).$$

Фактор-група групи еквівалентності $G^{\sim}$ *класу* (1.1) *відносно її одиничної компоненти ізоморфна групі* $\mathrm{D}_4\times\mathbb{Z}_2$*, де діедрова група* D_4 *— група симетрії квадрата.*

Наслідок 1.6. *Рівняння вигляду* $u_{tx} = f(t,x,u)$ *з* $f_u \neq 0$ *не можна звести за допомогою контактних перетворень до рівняння такого ж вигляду з* $f_u = 0$.

Доведення. Припустимо протилежне, тобто нехай існує таке контактне перетворення Φ. Повторюючи доведення леми 1.2 для $f_u \neq 0$ та $\tilde f_u = 0$, отримаємо, що перетворення Φ є першим продовженням точкового перетворення у просторі з координатами (t,x,u). З теореми 4.3c роботи [84] випливає, що (точкова) група еквівалентності надкласу $\mathcal{K}_{\rm gen}$ всіх рівнянь вигляду $u_{tx} = f(t,x,u)$ співпадає з групою $G^{\sim}$, і будь-яке точкове допустиме перетворення у класі $\mathcal{K}_{\rm gen}$ визначено деяким елементом групи $G^{\sim}$. Умови $f_u \neq 0$ та $f_u = 0$ — $G^{\sim}$-інваріантні, а це суперечить припущенню. □

З результатів робіт [95, 96] випливає, що твердження аналогічні лемам 1.2 та 1.4 та наслідку 1.6 можливо були відомі ще Софусу Лі. У загальному випадку аналогічні твердження є типовими для теорії контактної еквівалентності рівнянь Монжа–Ампера, див., наприклад, лему 1 у роботі [91, с. 205] та літературу там. Зокрема, вищезазначений наслідок 1.6 випливає із наслідку 1 роботи [90, с. 238].

Зауваження 1.7. З наведених вище тверджень випливає, що клас $\mathcal{K}_{\rm gen}$ та його підкласи $\mathcal{K}_{\rm gen}\setminus\bar{\mathcal{K}}$, $\bar{\mathcal{K}}$, $\bar{\mathcal{K}}\setminus\mathcal{K}$ та $\mathcal{K}$, які відповідно виокремлено допоміжними умовами $f_u=0$, $f_u\neq 0$, $f_u\neq 0\wedge f_{uu}=0$ та $f_{uu}\neq 0$, мають одну і ту ж точкову групу еквівалентності $G^{\sim}$ і є нормалізованими відносно точкових перетворень. Підкласи $\bar{\mathcal{K}}$, $\bar{\mathcal{K}}\setminus\mathcal{K}$ та $\mathcal{K}$ також є нормалізованими відносно контактних перетворень. Рівняння з класу $\mathcal{K}$ не можна відобразити за допомогою контактних перетворень у рівняння з класу $\mathcal{K}_{\rm gen}\setminus\mathcal{K}$. На сьогодні групова класифікація класу $\mathcal{K}_{\rm gen}\setminus\mathcal{K}$ з точністю до $G^{\sim}$-еквівалентності не виконана, але добре відомий розв'язок Софуса Лі задачі групової класифікації для ширшого класу всіх лінійних гіперболічних рівнянь із двома незалежними змінними [96]. Більш того, симетрійні властивості лінійного та нелінійного рівнянь із класу $\mathcal{K}_{\rm gen}$, які утворюють відповідно класи $\mathcal{K}_{\rm gen}\setminus\mathcal{K}$ та $\mathcal{K}$, повністю різні. Останні три факти обґрунтовують виключення лінійних рівнянь із подальшого розгляду.

З леми 1.4 випливає, що перетворення вигляду (1.7) утворюють підгрупу H групи $G^{\sim}$. Будь-яке таке перетворення $\mathcal{T}$ можна представити у вигляді композиції

$$\mathcal{T}=\mathcal{D}^t(T)\circ\mathcal{D}^x(X)\circ\mathcal{Z}(U^0)\circ\mathcal{D}^u(C)$$

елементарних перетворень еквівалентності

$$\begin{array}{lllll}
\mathcal{D}^t(T)\colon & \tilde t=T(t), & \tilde x=x, & \tilde u=u, & \tilde f=f/T_t,\\
\mathcal{D}^x(X)\colon & \tilde t=t, & \tilde x=X(x), & \tilde u=u, & \tilde f=f/X_x,\\
\mathcal{D}^u(C)\colon & \tilde t=t, & \tilde x=x, & \tilde u=Cu, & \tilde f=Cf,\\
\mathcal{Z}(U^0)\colon & \tilde t=t, & \tilde x=x, & \tilde u=u+U^0(t,x), & \tilde f=f+U^0_{tx},
\end{array}$$

які відповідно є довільним перетворенням змінної t, довільним перетворенням змінної x, масштабуванням змінної u і зсувом за змінною u

з довільними функціями змінних (t,x). Параметри перетворення описано в лемі 1.4, а їх значення такі ж як у перетворенні вигляду (1.7). Сім'ї елементарних перетворень $\{\mathcal{D}^t(T)\}$, $\{\mathcal{D}^x(X)\}$, $\{\mathcal{D}^u(C)\}$ та $\{\mathcal{Z}(U^0)\}$, де відповідна стала або параметр-функція не є фіксованими, є підгрупами групи $G^\sim$. Ще одне елементарне перетворення еквівалентності класу (1.1) — це перетворення $\mathcal{I}^0$, при цьому $\mathcal{I}^t = \mathcal{D}^t(-t)$, $\mathcal{I}^x = \mathcal{D}^t(-x)$ та $\mathcal{I}^u = \mathcal{D}^u(-1)$. Отже, будь-яке перетворення $\mathcal{T}$ з $G^\sim \setminus H$ можна представити як

$$\mathcal{T} = \mathcal{I}^0 \circ \mathcal{D}^t(T) \circ \mathcal{D}^x(X) \circ \mathcal{Z}(U^0) \circ \mathcal{D}^u(C).$$

Наслідок 1.8. *Алгеброю еквівалентності класу* (1.1) *є*

$$\mathfrak{g}^\sim := \big\langle \hat{D}^t(\tau),\, \hat{D}^x(\xi),\, \hat{I},\, \hat{Z}(\eta^0)\big\rangle,$$

де параметр-функції $\tau = \tau(t)$, $\xi = \xi(x)$ *та* $\eta^0 = \eta^0(t,x)$ *пробігають множину гладких функцій своїх аргументів,*

$$\hat{D}^t(\tau) := \tau(t)\partial_t - \tau_t(t) f\partial_f, \quad \hat{D}^x(\xi) := \xi(x)\partial_x - \xi_x(x) f\partial_f,$$
$$\hat{I} := u\partial_u + f\partial_f, \quad \hat{Z}(\eta^0) := \eta^0(t,x)\partial_u + \eta^0_{tx}(t,x)\partial_f.$$

За допомогою інфінітезимального критерію інваріантності [41,42,112] доводимо таке твердження:

Твердження 1.9. *Максимальну алгебру ліївської інваріантності* $\mathfrak{g}_f$ *рівняння* K_f *із класу* (1.1) *утворюють векторні поля вигляду*

$$\tau(t)\partial_t + \xi(x)\partial_x + \big(\eta^1 u + \eta^0(t,x)\big)\partial_u,$$

де параметр-функції $\tau = \tau(t)$, $\xi = \xi(x)$, $\eta^0 = \eta^0(t,x)$ *та стала* η^1 *задовольняють класифікаційне рівняння*

$$\tau f_t + \xi f_x + \big(\eta^1 u + \eta^0\big) f_u = \big(\eta^1 - \tau_t - \xi_x\big) f + \eta^0_{tx}. \tag{1.8}$$

Розглянемо лінійну оболонку $\mathfrak{g}_{\langle\rangle}$ усіх максимальних алгебр ліївської інваріантності рівнянь із класу (1.1),

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}_{\langle\rangle} &:= \textstyle\sum_f \mathfrak{g}_f = \big\{Q = \tau(t)\partial_t + \xi(x)\partial_x + (\eta^1 u + \eta^0(t,x))\partial_u\big\}\\ &= \big\langle D^t(\tau),\, D^x(\xi),\, I,\, Z(\eta^0)\big\rangle \neq \textstyle\bigcup_f \mathfrak{g}_f,\end{aligned} \tag{1.9}$$

де параметри τ, ξ та η^0 пробігають множину гладких функцій своїх аргументів, η^1 — довільна стала та

$$D^t(\tau) := \tau(t)\partial_t, \quad D^x(\xi) := \xi(x)\partial_x, \quad I := u\partial_u, \quad Z(\eta^0) := \eta^0(t,x)\partial_u.$$

Очевидно, що будь-яке векторне поле Q вищезазначеного вигляду з $(\tau,\xi) \neq (0,0)$ з алгебри $\mathfrak{g}_f$ для будь-якого f задовольняє класифікаційне рівняння з компонентами векторного поля Q, і таке значення довільного елементу f обов'язково існує. Остання нерівність у (1.9) завжди має місце, оскільки векторні поля з $\langle I, Z(\eta^0)\rangle$ не належать алгебрі $\mathfrak{g}_f$ для будь-якого f, в силу умови $f_{uu} \neq 0$ для довільного елементу f у класі (1.1). У той же час такі векторні поля можна представити як лінійні комбінації векторних полів лінійної оболонки $\mathfrak{g}_{\langle\rangle}$ з $(\tau,\xi) \neq (0,0)$. Таким чином, також має місце друга рівність у (1.9) і тому алгебра $\mathfrak{g}_{\langle\rangle}$ співпадає з проєкцією $\varpi_*\mathfrak{g}^\sim$ алгебри $\mathfrak{g}^\sim$. Більш того, лінійна оболонка $\mathfrak{g}_{\langle\rangle}$ є алгеброю Лі, оскільки вона замкнена відносно дужки Лі векторних полів.

Тут і нижче через ϖ позначаємо проєкцію простору з координатами (t,x,u,f) на простір із координатами (t,x,u). Також використовуємо позначення $\pi^{t,x}$, π^t та π^x для проєкцій простору з координатами (t,x,u) відповідно на простори з координатами (t,x), t та x.

Нетотожні дії елементарних перетворень еквівалентності на вказані векторні поля з лінійної оболонки $\mathfrak{g}_{\langle\rangle}$ мають вигляд

$$\begin{aligned}
&\big(\varpi_*\mathcal{D}^t(T)\big)_*D^t(\tau) = D^t\big(\tau(\hat T)/\hat T_t\big),\\
&\big(\varpi_*\mathcal{D}^t(T)\big)_*Z(\eta^0) = Z\big(\eta^0(\hat T,x)\big),\\
&\big(\varpi_*\mathcal{D}^x(X)\big)_*D^x(\xi) = D^x\big(\xi(\hat X)/\hat X_x\big),\\
&\big(\varpi_*\mathcal{D}^x(X)\big)_*Z(\eta^0) = Z\big(\eta^0(t,\hat X)\big),\\
&\big(\varpi_*\mathcal{Z}(U^0)\big)_*D^t(\tau) = D^t(\tau) + Z(\tau U^0_t),\\
&\big(\varpi_*\mathcal{D}^u(C)\big)_*Z(\eta^0) = Z(C\eta^0),\\
&\big(\varpi_*\mathcal{Z}(U^0)\big)_*D^x(\xi) = D^x(\xi) + Z(\xi U^0_x),\\
&\big(\varpi_*\mathcal{Z}(U^0)\big)_*I = I - Z(U^0),
\end{aligned}$$

де функції $\hat{T}=\hat{T}(t)$ та $\hat{X}=\hat{X}(x)$ — відповідно обернені до функцій T та X.

Означення 1.10 (див., наприклад, [28, 37])**.** Підалгебру $\mathfrak{s}$ алгебри $\mathfrak{g}_{\langle\rangle}$ називають придатною, якщо існує значення довільного елементу f таке, що $\mathfrak{s}=\mathfrak{g}_f$.

З леми 1.4 випливає, що задачу групової класифікації класу (1.1) можна звести до класифікації придатних підалгебр алгебри $\mathfrak{g}_{\langle\rangle}=\varpi_*\mathfrak{g}^{\sim}$ з точністю до $\varpi_*G^{\sim}$-еквівалентності.

Після розщеплення класифікаційного рівняння (1.8) відносно довільного елементу f та його похідних отримаємо тривіальну систему: $\tau=0$, $\xi=0$, $\eta^1=0$ та $\eta^0=0$. Таким чином, має місце таке твердження:

Лема 1.11. *Ядром алгебри ліївської інваріантності рівнянь із класу* (1.1) *є* $\mathfrak{g}^{\cap}=\{0\}$.

Оскільки ядро алгебри ліївської інваріантності $\mathfrak{g}^{\cap}$ є нульовим, то умова необхідного включення його в кожну придатну алгебру не приводить до обмежень на такі алгебри. Аналізуючи класифікаційне рівняння (1.8) глибше, отримаємо дійсно суттєві обмеження на такі алгебри.

Лема 1.12. (i) $\mathfrak{g}_f\cap\big\langle I,\,Z(\eta^0)\big\rangle=\{0\}$ *для будь-якої* $f=f(t,x,u)$ *з* $f_{uu}\neq 0$ *і тому* $\dim\mathfrak{g}_f=\dim\pi_*^{t,x}\mathfrak{g}_f$. *Тут* η^0 *пробігає множину гладких функцій змінних* (t,x).

(ii) $\dim\mathfrak{g}_f=\infty$ *тоді і лише тоді, коли* $f=\mathrm{e}^u \pmod{G^{\sim}}$.

(iii) *Якщо* $f\neq\mathrm{e}^u \pmod{G^{\sim}}$, *то* $\dim\mathfrak{g}_f\leqslant 4$.

Доведення. Нехай для значення довільного елементу f алгебра $\mathfrak{g}_f$ включає векторне поле $\eta^1I+Z(\eta^0)$ з $(\eta^1,\eta^0)\neq(0,0)$. З класифікаційного рівняння (1.8) випливає, що функція f задовольняє рівняння

$$(\eta^1u+\eta^0)f_u=\eta^1f+\eta^0_{tx}.$$

Розглядаючи окремо випадки $\eta^1\neq 0$ та $\eta^1=0$ отримуємо, що в обох цих випадках функція f є лінійною відносно змінної u, що суперечить умові $f_{uu}\neq 0$ для класу (1.1). Це доводить пункт (i) леми.

Диференціюємо класифікаційне рівняння (1.8) за змінною u. Оскільки $f_{uu} \neq 0$, то результат диференціювання можна поділити на f_{uu}. Далі, продиференціювавши отримане рівняння ще раз за змінною u, приходимо до рівняння

$$\tau\left(\frac{f_{ut}}{f_{uu}}\right)_u + \xi\left(\frac{f_{ux}}{f_{uu}}\right)_u + \eta^1 = -(\tau_t + \xi_x)\left(\frac{f_u}{f_{uu}}\right)_u. \tag{1.10}$$

Необхідно розглянути два випадки: рівність чи не рівність нулю співвідношення $(f_u/f_{uu})_u$.

При $(f_u/f_{uu})_u \neq 0$ рівняння (1.10) можна записати у вигляді

$$\tau_t + \xi_x = -\tau\frac{(f_{ut}/f_{uu})_u}{(f_u/f_{uu})_u} - \xi\frac{(f_{ux}/f_{uu})_u}{(f_u/f_{uu})_u} - \eta^1\frac{1}{(f_u/f_{uu})_u}.$$

При фіксованому значенні $u = u_0$ останнє рівняння набуває вигляду

$$\tau_t + \xi_x = A(t,x)\tau + B(t,x)\xi + C(t,x),$$

де коефіцієнти A, B та C очевидно можна виразити через похідні від функції f у фіксованій точці $u = u_0$. Далі додатково фіксуючи значення $t = t_0$, отримаємо неоднорідне лінійне звичайне диференціальне рівняння першого порядку

$$\xi_x = B(t_0,x)\xi - \tau_t(t_0) + A(t_0,x)\tau(t_0) + \eta^1 C(t_0,x)$$

відносно функції ξ, неоднорідність якого включає три сталі параметри $\tau(t_0)$, $\tau_t(t_0)$ та η^1. Загальний розв'язок цього рівняння можна представити у вигляді

$$\xi = C_1\xi^1(x) + \tau(t_0)\xi^2(x) + \tau_t(t_0)\xi^3(x) + \eta^1\xi^4(x),$$

де $\xi^k(x)$, $k = 1,\dots,4$, фіксовані гладкі функції змінної x. Отже, цей розв'язок лінійно параметризований щонайбільше чотирма незалежними довільними сталими. Іншими словами, $\dim \pi^x_*\mathfrak{g}_f \leqslant 4$. Аналогічно, після врахування отриманого співвідношення для ξ, при фіксованому значенні x_0 для змінної x замість t отримаємо неоднорідне лінійне звичайне диференціальне рівняння першого порядку

$$\tau_t = A(t,x_0)\tau + B(t,x_0)\big(C_1\xi^1(x_0) + \tau(t_0)\xi^2(x_0) \\ + \tau_t(t_0)\xi^3(x_0) + \eta^1\xi^4(x_0)\big) \\ - C^1\xi^1_x(x_0) - \tau(t_0)\xi^2_x(x_0) - \tau_t(t_0)\xi^3_x(x_0) - \eta^1\xi^4_x(x_0) + C(t,x_0)$$

відносно функції τ, де неоднорідність включає чотири сталі параметри $\tau(t_0)$, $\tau_t(t_0)$, η^1 та C_1. Оскільки значення τ у фіксованій точці $t = t_0$ серед цих параметрів, то загальний розв'язок цього рівняння включає ці ж параметри, тобто $\dim \pi^t_* \mathfrak{g}_f \leqslant 4$. Таким чином, $\dim \pi^{t,x}_* \mathfrak{g}_f \leqslant 4$ і з урахуванням пункту (i) леми отримаємо, що $\dim \mathfrak{g}_f \leqslant 4$.

Тепер розглянемо другий випадок: $(f_u/f_{uu})_u = 0$, тобто

$$f = \gamma(t,x)\mathrm{e}^{\alpha(t,x)u} + \beta(t,x),$$

де $\alpha\gamma \neq 0$, оскільки $f_{uu} \neq 0$ для класу (1.1). Крім того, можна вважати, що $\gamma = 1 \pmod{G^\sim}$. Підставивши отриманий вигляд функції f у класифікаційне рівняння (1.8), після групування коефіцієнтів при лінійно незалежних функціях $u\mathrm{e}^{\alpha u}$, $\mathrm{e}^{\alpha u}$ та 1, які трактуємо як функції змінної u, приходимо до системи

$$\begin{aligned} &\tau\alpha_t + \xi\alpha_x + \eta^1\alpha = 0, \quad \alpha\eta^0 = \eta^1 - \tau_t - \xi_x, \\ &\tau\beta_t + \xi\beta_x = \big(\eta^1 - \tau_t - \xi_x\big)\beta + \eta^0_{tx}. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Якщо $\alpha_x \neq 0$, то

$$\xi = -\big((\tau\alpha_t + \eta^1\alpha)/\alpha_x\big)\big|_{t=t_0},$$

тобто компонента ξ включає не більше двох довільних сталих: $\tau(t_0)$ та η^1. Аналогічно, якщо $\alpha_t \neq 0$, то

$$\tau = \big((\xi\alpha_x + \eta^1\alpha)/\alpha_t\big)\big|_{x=x_0},$$

тобто компонента τ також включає щонайбільше дві довільні сталі: $\xi(x_0)$ та η^1. Таким чином, у випадку $\alpha_t\alpha_x \neq 0$ компоненти τ та ξ загалом включають щонайбільше три різні довільні сталі. Отже, $\dim \mathfrak{g}_f \leqslant 3$. Якщо лише одна з похідних α_t та α_x є ненульовою, то з точністю до перетворення еквівалентності $\mathcal{J}^0$, можна вважати, що $\alpha_x \neq 0$ та $\alpha_t = 0$. Далі після підстановки виразів

$$\xi = -\eta^1\alpha/\alpha_x \quad \text{та} \quad \eta^0 = (\eta^1 - \tau_t - \xi_x)/\alpha,$$

які знайдено з перших двох рівнянь системи (1.11), в останнє рівняння системи (1.11), отримаємо неоднорідне лінійне звичайне диференціальне рівняння другого порядку вигляду

$$(1/\alpha)_x\tau_{tt} - (\beta\tau)_t = \eta^1(\alpha\beta/\alpha_x)_x - \eta^1\beta$$

відносно функції τ, де старший коефіцієнт $(1/\alpha)_x$ є ненульовим, а неоднорідність включає єдиний сталий параметр η^1. Аналогічно вищенаведеному розгляду, отримаємо $\dim \mathfrak{g}_f \leqslant 3$. Інакше $\alpha_t = \alpha_x = 0$, а отже $\alpha = \mathrm{const}$. Оскільки $\alpha \neq 0$, то можна покласти $\alpha = 1$ за допомогою масштабування змінної u та перетворення $\mathcal{J}^u$. Зазначену систему можна звести до вигляду

$$\eta^1 = 0, \quad \eta^0 = -\tau_t - \xi_x, \quad \tau\beta_t + \xi\beta_x = -(\tau_t + \xi_x)\beta.$$

При $\beta \neq 0$ трактуємо останнє рівняння так само як рівняння (1.10) і робимо висновок, що в цьому випадку $\dim \mathfrak{g}_f \leqslant 3$. Якщо $\beta = 0$, то рівняння K_f співпадає з рівнянням Ліувілля $u_{tx} = \mathrm{e}^u$, максимальною алгеброю ліївської інваріантності якого є

$$\mathfrak{g}_f = \langle \tau(t)\partial_t + \xi(x)\partial_x - (\tau_t(t) + \xi_x(x))\partial_u \rangle,$$

де компоненти τ та ξ пробігають відповідно множину гладких функцій змінних t або x. Таким чином, $\dim \mathfrak{g}_f = \infty$, і з точністю до $G^\sim$-нееквівалентності, це єдиний випадок із нескінченною розмірністю алгебри $\dim \mathfrak{g}_f$, що доводить пункт (ii) леми.

Для всіх інших рівнянь із класу (1.1) розмірності відповідних максимальних алгебр ліївської інваріантності не перевищують чотирьох, що й приводить до пункту (iii) леми. $\square$

Наслідок 1.13. *Якщо* $f \neq \mathrm{e}^u \pmod{G^\sim}$, *то* $\dim \pi^t_* \mathfrak{g}_f \leqslant 3$, $\dim \pi^x_* \mathfrak{g}_f \leqslant 3$.

Доведення. З пункту (iii) леми 1.12 маємо $\dim \mathfrak{g}_f \leqslant 4$, якщо $f \neq \mathrm{e}^u \pmod{G^\sim}$. Тоді $\dim \pi^t_* \mathfrak{g}_f \leqslant \dim \mathfrak{g}_f \leqslant 4$ та $\dim \pi^x_* \mathfrak{g}_f \leqslant \dim \mathfrak{g}_f \leqslant 4$, тобто $\pi^t_* \mathfrak{g}_f$ та $\pi^x_* \mathfrak{g}_f$ — скінченновимірні алгебри Лі векторних полів відповідно на t- і x-прямих. Тоді зазначені нерівності безпосередньо випливають із теореми Лі про такі алгебри. □

1.2. Результат групової класифікації

Основний результат групової класифікації нелінійних узагальнених рівнянь Клейна–Ґордона представлено у вигляді наступної теореми.

Теорема 1.14. *Повний список $G^\sim$-нееквівалентних (максимальних) розширень ліївських симетрій у класі (1.1) вичерпують такі випадки:*

0. Загальний випадок $f = f(t,x,u)$: $\{0\}$;
1. $f = \hat f(x,u)$: $\langle \partial_t \rangle$;
2. $f = \hat f(x-t,u)$: $\langle \partial_t + \partial_x \rangle$;
3. $f = \mathrm{e}^t \hat f(x, \mathrm{e}^{-t}u)$: $\langle \partial_t + u\partial_u \rangle$;
4. $f = \mathrm{e}^{x+t} \hat f(x-t, \mathrm{e}^{-x-t}u)$: $\langle \partial_t + \partial_x + 2u\partial_u \rangle$;
5. $f = \mathrm{e}^t \hat f(\mathrm{e}^{-t}u)$: $\langle \partial_t + u\partial_u,\ \partial_x \rangle$;
6. $f = \mathrm{e}^{x+t} \hat f(\mathrm{e}^{-x-t}u)$: $\langle \partial_t + u\partial_u,\ \partial_x + u\partial_u \rangle$;
7. $f = |x-t|^{-q-2} \hat f(|x-t|^q u)$, $q \neq 0$: $\langle \partial_t + \partial_x,\ t\partial_t + x\partial_x - qu\partial_u \rangle$;
8. $f = |x|^{-q-2} \hat f(|x|^q u)$, $q \neq 0$: $\langle \partial_t,\ t\partial_t + x\partial_x - qu\partial_u \rangle$;
9. $f = \hat f(u)$: $\langle \partial_t,\ \partial_x,\ t\partial_t - x\partial_x \rangle$;
10. $f = (x-t)^{-2} \hat f(u)$: $\langle \partial_t + \partial_x,\ t\partial_t + x\partial_x,\ t^2\partial_t + x^2\partial_x \rangle$;
11. $f = \mathrm{e}^{u/x}$: $\langle \partial_t,\ t\partial_t - x\partial_u,\ x\partial_x + u\partial_u \rangle$;
12. $f = |u|^p u$, $p \neq -1, 0$: $\langle \partial_t,\ \partial_x,\ t\partial_t - x\partial_x,\ -pt\partial_t + u\partial_u \rangle$;
13. $f = \mathrm{e}^u$: $\langle \tau(t)\partial_t + \xi(x)\partial_x - (\tau_t(t) + \xi_x(x))\partial_u \rangle$.

Тут $\hat{f}$ — довільна гладка функція своїх аргументів, $\hat{f}_{uu} \neq 0$, q та p — довільні сталі, які задовольняють умовам, що зазначені у відповідних випадках. У випадку 13 компоненти τ та ξ пробігають відповідно множину гладких функцій змінних t або x.

Доведення теореми 1.14 представлено у параграфі 1.3.

Зауваження 1.15. Існує два способи інтерпретації випадків класифікації, наведених у теоремі 1.14, у *слабкому* сенсі й у *сильному* сенсі. У рамках слабкої групової класифікації, розглядаємо весь підклас $\mathcal{K}_N$ рівнянь із класу $\mathcal{K}$ з функціями f вигляду, що відповідає випадку N,

$$N \in \Gamma := \{0, \dots, 6, 7_q, 8_q, 9, 10, 11, 12_p, 13 \mid q \neq 0,\ p \neq -1, 0\},$$

і тоді відповідна алгебра є ядром алгебри ліївської інваріантності $\mathfrak{g}^{\cap}_N$ рівнянь із підкласу $\mathcal{K}_N$. Тут використовуємо позначення $7_q := (7, q)$, $8_q := (8, q)$ та $12_p := (12, p)$. Говоримо про випадки 7, 8 та 12 як про набори відповідно випадків 7_q, 8_q та 12_p із фіксованими значеннями q або p. Очевидно, що $\mathcal{K}_0 = \mathcal{K}$.

У рамках сильної групової класифікації випадок N включає лише рівняння з підкласу $\mathcal{K}_N$ для яких $\mathfrak{g}_f = \mathfrak{g}^{\cap}_N$. Таким чином, із обговорення після рівняння (1.9) випливає, що $\mathfrak{g}_f = \{0\}$, а отже, K_f належить до сильного випадку 0 тоді і лише тоді, коли функція f не задовольняє класифікаційне рівняння (1.8) для будь-якої сталої η^1 та будь-яких гладких функцій $\tau = \tau(t)$, $\xi = \xi(x)$ та $\eta^0 = \eta^0(t, x)$, причому $(\tau, \xi) \neq (0, 0)$. Для отримання розширень максимальних ліївських симетрій у випадках 1–9 параметр-функції $\hat{f}$ мають набувати лише значення, для яких відповідні значення довільних елементів функції f не є $G^{\sim}$-еквівалентні іншим переліченим випадкам із максимальними алгебрами ліївської інваріантності більших розмірностей. Іншими словами, значення параметр-функції $\hat{f}$ призводить до розширення максимальної алгебри ліївських симетрій тоді і лише тоді, коли вона не задовольняє жодного рівняння серед відповідних випадків у твердженні 1.26 або твердженні 1.27 нижче. Випадок 10 є особливим, оскільки $\mathfrak{g}_f = \mathfrak{g}^{\cap}_{10}$ для будь-якого $K_f \in \mathcal{K}_{10}$, і він не залежить від інтерпретації задачі групової класифікації. У більшості випадків будемо опускати характеристики “слабка” і “сильна”, явно вказуючи всі місця, де використано слабку інтерпретацію.

Зауваження 1.16. Випадки 3–6 та 8 можна звести до наступних $G^\sim$-еквівалентних випадків, для кожного з яких довільний елемент f пробігає множину довільних гладких функцій одного або двох аргументів без додаткового множника:

$3'$. $f=\hat f\big(x,t^{-1}u\big)\colon\quad \mathfrak g_f=\langle t\partial_t+u\partial_u\rangle$;

$4'$. $f=\hat f\big(t^{-1}x,(tx)^{-1}u\big)\colon\quad \mathfrak g_f=\langle t\partial_t+x\partial_x+2u\partial_u\rangle$;

$5'$. $f=\hat f\big(t^{-1}u\big)\colon\quad \mathfrak g_f=\langle t\partial_t+u\partial_u,\,\partial_x\rangle$;

$6'$. $f=\hat f\big((tx)^{-1}u\big)\colon\quad \mathfrak g_f=\langle t\partial_t+u\partial_u,\,x\partial_x+u\partial_u\rangle$;

$8'a$. $f=\hat f\big(|x|^{q'}u\big),\ q'\neq0,-1\colon\quad \mathfrak g_f=\langle \partial_t,\,(q'+1)t\partial_t-x\partial_x+q'u\partial_u\rangle$;

$8'b$. $f=\hat f\big(\mathrm e^{-x}u\big)\colon\quad \mathfrak g_f=\langle \partial_t,\,t\partial_t+\partial_x+u\partial_u\rangle$.

Тут випадок 8 розділено на два підвипадки, $8'a$ та $8'b$, які відповідають значенням $q\neq0,-1$ та $q=-1$.

Зауваження 1.17. За допомогою точкового перетворення $\check t=x+t$, $\check x=x-t$, $\check u=u$, $\check f=f$ групову класифікацію класу (1.1) можна звести до групової класифікації нелінійних рівнянь Клейна–Ґордона у стандартних просторово-часових змінних: $\check u_{\check t\check t}-\check u_{\check x\check x}=\check f(\check t,\check x,\check u)$.

Зауваження 1.18. Знайдено вісім трійок $G^\sim$-інваріантних цілих характеристик для підалгебр $\mathfrak s$ алгебри $\mathfrak g_{\langle\rangle}$, які є достатніми для розрізнення $G^\sim$-нееквівалентних випадків розширень ліївських симетрій, див. зауваження 1.25 нижче. Найвагомішою серед цих восьми трійок є (r_3,j_1,r_2):

$$r_3=r_3(\mathfrak s):=3-\min\big\{\dim\big\langle D^t(\tau),D^x(\xi)\big\rangle\mid\exists\,\eta^0\colon\ D^t(\tau)+D^x(\xi)+I+Z(\eta^0)\in\mathfrak s\big\},$$

$$j_1=j_1(\mathfrak s):=\max(\dim\mathfrak s^1,\dim\mathfrak s^2),$$

$$r_2=r_2(\mathfrak s):=\min(\dim\pi^t_*\mathfrak s^{12},\dim\pi^x_*\mathfrak s^{12}),$$

де

$$\mathfrak{s}^1 := \mathfrak{s} \cap \big\langle D^t(\tau), Z(\eta^0)\big\rangle, \qquad \mathfrak{s}^2 := \mathfrak{s} \cap \big\langle D^x(\xi), Z(\eta^0)\big\rangle,$$
$$\mathfrak{s}^{12} := \mathfrak{s} \cap \big\langle D^t(\tau), D^x(\xi), Z(\eta^0)\big\rangle.$$

У чотирьох зауваженнях нижче обговоримо слабкі розширення ліївських симетрій, опускаючи характеристику "слабка".

Зауваження 1.19. Можемо частково впорядкувати набір розширень ліївських симетрій у класі (1.1). Тут "(випадок $N \prec$ випадок $\bar N$)" із $N, \bar N \in \Gamma$ означає, що випадок $\bar N$ є подальшим розширенням ліївських симетрій випадку N з точністю до $G^\sim$-еквівалентності, тобто існує $\mathcal{T} \in G^\sim$ таке, що $\mathfrak{s} \subsetneq (\varpi_*\mathcal{T})\bar{\mathfrak{s}}$, де $\mathfrak{s}$ та $\bar{\mathfrak{s}}$ є підалгебрами $\mathfrak{g}_{\langle\rangle}$, які відповідають випадкам N та $\bar N$. Для відповідних підкласів $\mathcal{K}_N$ та $\mathcal{K}_{\bar N}$ маємо інверсійне включення, $\mathcal{K}_N \supsetneq (\varpi_*\mathcal{T})\mathcal{K}_{\bar N}$ з тим же $\mathcal{T} \in G^\sim$.

Зауваження 1.20. Додатково до характеристик із зауваження 1.18 виділимо іще дві $G^\sim$-інваріантні цілі характеристики підалгебр $\mathfrak{s}$ алгебри $\mathfrak{g}_{\langle\rangle}$:

$$n = n(\mathfrak{s}) := \dim \mathfrak{s}, \quad k = k(\mathfrak{s}) := \min(\dim \pi^t_*\mathfrak{s}, \dim \pi^x_*\mathfrak{s}),$$

див. зауваження 1.25 нижче. Таким чином, розглядаємо набори вигляду (n, r_3, r_2, j_1, k), елементи яких впорядковано відповідно до їх важливості, див. початок параграфа 1.4. Частково впорядкуємо множину цих наборів, вважаючи, що $(n, r_3, r_2, j_1, k) < (\bar n, \bar r_3, \bar r_2, \bar j_1, \bar k)$, якщо $n < \bar n$, $r_3 \leqslant \bar r_3$, $r_2 \leqslant \bar r_2$, $j_1 \leqslant \bar j_1$ та $k \leqslant \bar k$. Нехай (n, r_3, r_2, j_1, k) та $(\bar n, \bar r_3, \bar r_2, \bar j_1, \bar k)$ відповідають алгебрам $\mathfrak{s}$ та $\bar{\mathfrak{s}}$ відповідно з випадків N та $\bar N$. Тоді відношення (випадок $N \prec$ випадок $\bar N$) є еквівалентним відношенню $(n, r_3, r_2, j_1, k) < (\bar n, \bar r_3, \bar r_2, \bar j_1, \bar k)$.

Зауваження 1.21. Діаграма Хассе для частково впорядкованої множини $G^\sim$-нееквівалентних розширень ліївських симетрій у класі (1.1) наведена на рис. 1.1. Відповідно до правила побудови діаграм Хассе,

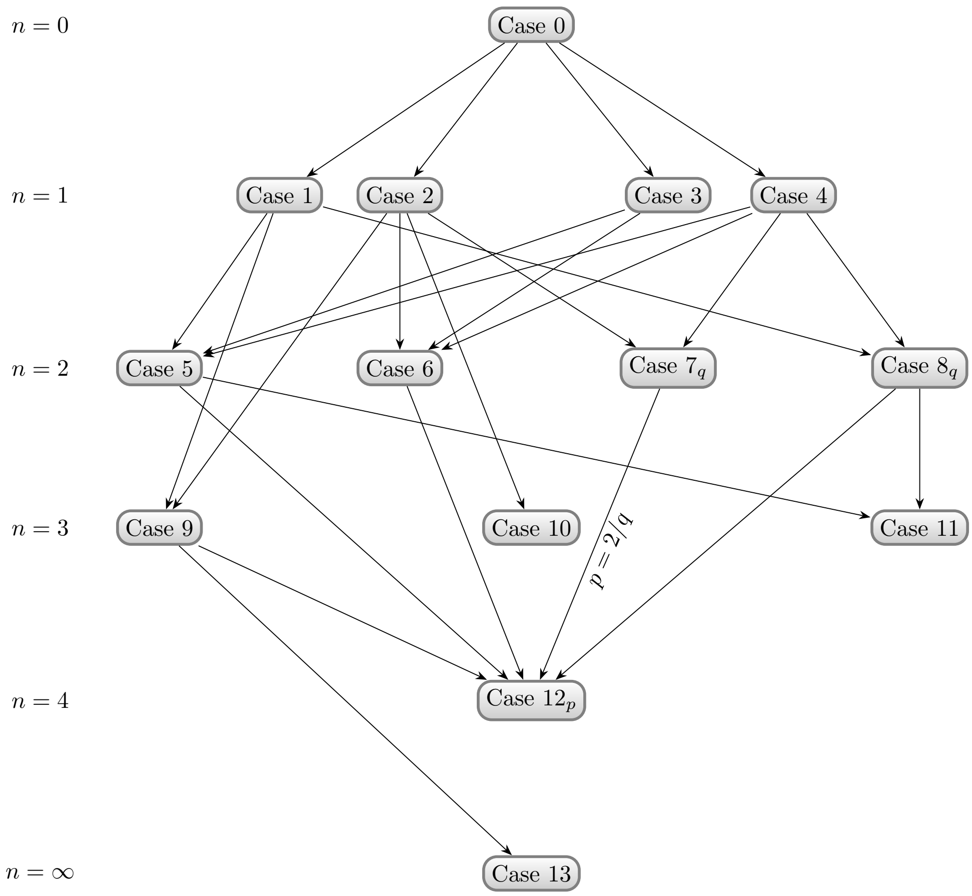

Рис. 1.1. Діаграма Хассе розширень ліївських симетрій у класі (1.1).

стрілки на рис. 1.1 зображають лише прямі розширення ліївських симетрій. Пара (випадок N, випадок $\bar{N}$) класифікаційних випадків таких, що (випадок $N \prec$ випадок $\bar{N}$), є *прямим розширенням ліївських симетрій*, якщо не існує $\check{N} \in \Gamma$ такого, що

$$\text{випадок } N \prec \text{випадок } \check{N} \prec \text{випадок } \bar{N}.$$

Зауваження 1.22. Серед пар $\{(\text{випадок } N, \text{випадок } \bar{N}),\ N, \bar{N} \in \Gamma\}$ існує низка пар, які пов'язані між собою через граничні переходи, які за необхідності потрібно модифікувати за допомогою перетворень еквівалентності.[1.1] Всі ці границі приводять до контракцій $\mathfrak{g}^{\cap}_{N} \to \mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}^{\cap}_{\bar{N}}$

[1.1] Такий граничний перехід розглядався для класу нелінійних рівнянь дифузії в [43] та [42, с. 181], де експоненціальна нелінійність була виключена з класифікаційного списку як границя степеневої нелінійності. Теорію таких граничних переходів та низку відповідних прикладів було розглянуто в роботах [82, 125, 131].

як контракції реалізацій векторними полями абстрактних алгебр Лі, де $\mathfrak{h}$ — підалгебра алгебри $\mathfrak{g}^{\cap}_{N}$, яка часто співпадає з всією алгеброю $\mathfrak{g}^{\cap}_{N}$. Найбільш очевидним граничним переходом є

$$\text{випадок } 7_q \to \text{випадок } 10 \quad \text{при} \quad q \to 0 \quad \text{з}$$
$$\mathfrak{g}^{\cap}_{7,1} \simeq \mathfrak{g}^{\cap}_{7,q} \to \langle \partial_t + \partial_x,\, t\partial_t + x\partial_x \rangle \subsetneq \mathfrak{g}^{\cap}_{10}.$$

Прикладом використання перетворень еквівалентності для алгебри, яку було утворено після контракції, є

$$\text{випадок } 8_q \to \mathcal{D}^x(-x^{-1})_*(\text{випадок } 9) \quad \text{при} \quad q \to 0 \quad \text{з}$$
$$\mathfrak{g}^{\cap}_{8,1} \simeq \mathfrak{g}^{\cap}_{8,q} \to \langle \partial_t,\, t\partial_t + x\partial_x \rangle \subsetneq \big(\varpi_* D^x(-x^{-1})\big)_* \mathfrak{g}^{\cap}_{9}.$$

Граничні переходи

$$\text{випадок } 2 \to \text{випадок } 1, \quad \text{випадок } 4 \to \text{випадок } 2,$$
$$\text{випадок } 6 \to \text{випадок } 5, \quad \text{випадок } 7 \to \text{випадок } 8,$$
$$\text{випадок } 10 \to \mathcal{D}^x(-x^{-1})_*(\text{випадок } 9)$$

при $q \to 0$ із контракціями між відповідними алгебрами Лі можна реалізувати за допомогою попереднього введення параметра q з використанням масштабного перетворення еквівалентності. Наприклад, для кожного значення параметр-функції $\hat f$ у випадку 2, візьмемо сім'ю функцій $f^q = q^{-1}\hat f(x-t,u)$ з $q \neq 0$ та діємо на кожне рівняння K_{f^q} перетворенням еквівалентності $\mathcal{D}^t(q^{-1}t)$. Для кожного $q \neq 0$ отримаємо рівняння $K_{\tilde f^q}$ з $\tilde f^q = \hat f(\tilde x - q\tilde t, \tilde u)$, яке є інваріантним відносно алгебри $\langle \partial_{\tilde t} + q\partial_{\tilde x} \rangle$. Тоді границя при $q \to 0$ дає випадок 1.

Для граничних переходів

$$\text{випадок } 7 \to \text{випадок } 6, \quad \text{випадок } 8 \to (\mathcal{I}^t \circ \mathcal{I}^0)_*(\text{випадок } 5),$$
$$\text{випадок } 12 \to \text{випадок } 13$$

використовуємо чудову границю $(1+q^{-1})^q \to \mathrm{e}$ при $q \to +\infty$. Перші два граничні переходи знову дають контракції між відповідними алгебрами

Лі, тоді як останній граничний перехід призводить до контракції власної підалгебри. Опишемо в деталях другий граничний перехід. Для кожного значення параметр-функції $\hat f$ у випадку 8 діємо на рівняння K_{f^q} із функцією $f^q = q|x|^{-q-2}\hat f(|x|^q u)$, $q\in\mathbb{R}_{\neq 0}$, за допомогою перетворення еквівалентності $\mathcal{D}^x\big(q(x-1)\big)$, у результаті отримаємо рівняння $K_{\tilde f^q}$ із функцією $\tilde f^q = |1+\tilde x/q|^{-q-2}\hat f(|1+\tilde x/q|^q\tilde u)$. Алгебра ліївської інваріантності рівняння $K_{\tilde f^q}$ — $\langle q^{-1}\tilde t\partial_{\tilde t}+(1+q^{-1}\tilde x)\partial_{\tilde x}-\tilde u\partial_{\tilde u}\rangle$. Переходячи до границі при $q\to+\infty$, отримаємо $(\mathcal{J}^t\circ\mathcal{J}^0)_*$(випадок 5). Менш стандартним граничним переходом є випадок 11 $\to$ випадок 13, де вводимо параметр q за допомогою перетворення $\mathcal{D}^t(qt)\circ\mathcal{D}^x\big(q^{-1}(x-1)\big)$ і обчислюємо границю при $q\to 0$. Контрактована алгебра $\langle\partial_t,\, t\partial_t-\partial_u,\, \partial_x\rangle$ є (власною) підалгеброю нескінченновимірної алгебри $\mathfrak{g}^{\cap}_{13}$.

1.3. Доведення результату групової класифікації

Згідно леми 1.12(ii) можна виключити з подальшого розгляду випадок 13, що відповідає рівнянню Ліувілля. Для зручності позначаємо через $\mathcal{L}$ підклас класу $\mathcal{K}$, який утворюють рівняння, які $G^{\sim}$-еквівалентні рівнянню Ліувілля. Рівняння з класу $\mathcal{K}$ зі скінченновимірними алгебрами ліївської інваріантності, для яких $f\neq \mathrm{e}^u \pmod{G^{\sim}}$, належать до $\mathcal{K}\setminus\mathcal{L}$. З урахуванням цього позначення потрібно прокласифікувати лише ліївські симетрії рівнянь із класу $\mathcal{K}\setminus\mathcal{L}$. Класифікацію таких рівнянь розщеплюємо на різні випадки залежно від таких трьох $G^{\sim}$-інваріантних цілих значень для підалгебр $\mathfrak{s}$ алгебри $\mathfrak{g}_{\langle\rangle}$:

$$\begin{aligned}&m:=\max(\dim\pi^t_*\mathfrak{s},\dim\pi^x_*\mathfrak{s}),\quad n:=\dim\mathfrak{s},\\&k:=\min(\dim\pi^t_*\mathfrak{s},\dim\pi^x_*\mathfrak{s}),\end{aligned}\tag{1.12}$$

які визначаємо залежно від функції f для $\mathfrak{s}=\mathfrak{g}_f$ (характеристики наведено у порядку відповідно до їх важливості при розщепленні на класифікаційні випадки). Відповідно до їх означення, вони задовольняють нерівність $0\leqslant n-m\leqslant k\leqslant m\leqslant n$. З леми 1.12(iii) випливає, що $n\leqslant 4$, а з наслідку 1.13 маємо, що $m \leqslant 3$. Більш того, з леми 1.12(i) випливає, що $m > 0$ для будь-якого рівняння у класі (1.1) із розширенням ліївської симетрії. Іншими словами, для пошуку $G^{\sim}$-нееквівалентних рівнянь K_f із класу $\mathcal{K} \setminus \mathcal{L}$ з ненульовою максимальною алгеброю ліївської інваріантності $\mathfrak{g}_f$, вибираємо придатні трійки (m, n, k) серед тих, що задовольняють умову

$$m \in \{1, 2, 3\}, \quad n \in \{1, 2, 3, 4\}, \quad 0 \leqslant n - m \leqslant k \leqslant m \leqslant n.$$

Оскільки клас (1.1) допускає дискретне перетворення еквівалентності $\mathcal{I}^0$, яке відповідає перестановці змінних t та x, то без обмеження загальності, можна вважати, що $m = \dim \pi^t_* \mathfrak{g}_f$. Вибираємо початковий базис алгебри $\mathfrak{g}_f$, що містить такі векторні поля

$$Q^i = \tau^i(t)\partial_t + \xi^i(x)\partial_x + \big(\eta^{1i} u + \eta^{0i}(t, x)\big)\partial_u, \quad i = 1, \dots, n \quad \text{з} \quad n \leqslant 4,$$

див. твердження 1.9. Додатково до наслідку 1.13, застосування теореми Лі для групової класифікації класу (1.1) можна обґрунтувати на тому факті, що проєкції $\pi^t_* G^{\sim}$ та $\pi^x_* G^{\sim}$ співпадають відповідно з групами дифеоморфізмів на t- та x-прямих.

Окремо розглянемо випадки для різних значень $m \in \{1, 2, 3\}$ у порядку спадання.

$\boldsymbol{m = 3}$. Таким чином, $n \in \{3, 4\}$. Змінюємо базис $(Q^1, \dots, Q^n)$ так, що τ^1, τ^2 та τ^3 є лінійно незалежними і, якщо $n = 4$, $\tau^4 = 0$. Тоді $\pi^t_* \mathfrak{g}_f = \langle \tau^1\partial_t, \tau^2\partial_t, \tau^3\partial_t \rangle$ є точною реалізацією алгебри $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ на прямій. Цей факт має декілька значень. Зокрема, алгебра $\mathfrak{f} := \langle Q^1, Q^2, Q^3 \rangle$, з точністю до комбінування Q^1, Q^2 та Q^3 з Q^4, якщо $n = 4$, є також точною реалізацією алгебри $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ та $\pi^x_* \mathfrak{f} = \langle \xi^1\partial_x, \xi^2\partial_x, \xi^3\partial_x \rangle$ є також (не обов'язково точною) реалізацією алгебри $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$.[1.2] Остання реалі-

[1.2] Дійсно, це твердження є очевидним при $n = 3$. Нехай $n = 4$. Алгебра $\mathfrak{g}_f$ є нерозв'язною, оскільки інакше обидві алгебри $\mathfrak{f}$ та проєкція $\pi^t_* \mathfrak{g}_f = \pi^t_* \mathfrak{f}$ є розв'язними, що не є можливим. Існує лише дві чотиривимірні нерозв'язні дійсні алгебри Лі, а саме $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{a}$ та $\mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{a}$, де $\mathfrak{a}$ — одновимірна абелева алгебра Лі. Алгебра $\mathfrak{g}_f$ не може бути ізоморфною алгебрі $\mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{a}$, оскільки $\pi^t_* \mathfrak{g}_f \simeq \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. Отже, $\mathfrak{g}_f \simeq \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{a}$ та існування потрібного базису є очевидним.

зація має бути або точною, або нульовою, оскільки ядро будь-якого гомоморфізму алгебри Лі $\mathfrak{g}$ в алгебру Лі є ідеалом алгебри $\mathfrak{g}$, а алгебра $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ не має власних ідеалів. Іншими словами, або $\xi^1 = \xi^2 = \xi^3 = 0$, або $\xi^1\xi^2\xi^3 \neq 0$. З теореми Лі, з точністю до лінійного комбінування Q^1, Q^2 та Q^3 одне з одним, можна вважати, що $(\tau^1,\tau^2,\tau^3) = (1,t,t^2)$ $(\bmod\ \pi^t_*G^\sim)$. Більш того, похідна алгебра $[\mathfrak{f},\mathfrak{f}]$ алгебри $\mathfrak{f}$ співпадає з алгеброю $\mathfrak{f}$, а тому $\eta^{1i} = 0$, $i = 1,2,3$.

У випадку $\xi^1 = \xi^2 = \xi^3 = 0$ маємо, що $Q^i = t^{i-1}\partial_t + \eta^{0i}\partial_u$, $i = 1,2,3$, з $\eta^{01} = 0$ $(\bmod\ G^\sim)$ і якщо $n = 4$, $\tau^4 = 0$. З комутаційних співвідношень алгебри $\mathfrak{f}$,

$$
\begin{aligned}
&[Q^1,Q^2] = \partial_t + \eta^{02}_t\partial_u = Q^1,\\
&[Q^1,Q^3] = 2t\partial_t + \eta^{03}_t\partial_u = 2Q^2,\\
&[Q^2,Q^3] = t^2\partial_t + (t\eta^{03}_t - t^2\eta^{02}_t)\partial_u = Q^3,
\end{aligned}
$$

отримаємо систему

$$
\eta^{02}_t = 0, \quad \eta^{03}_t = 2\eta^{02}, \quad t\eta^{03}_t = \eta^{03},
$$

а тому

$$
Q^1 = \partial_t, \quad Q^2 = t\partial_t - \mu(x)\partial_u, \quad Q^3 = t^2\partial_t - 2t\mu(x)\partial_u,
$$

де μ — гладка функція змінної x. Послідовно підставляючи отримані векторні поля Q^1, Q^2 та Q^3 в класифікаційне рівняння (1.8), приходимо до системи на довільний елемент f:

$$
f_t = 0, \quad \mu f_u = f, \quad 2\mu t f_u = 2tf + \mu_x.
$$

Очевидним наслідком цієї системи є умова $\mu_x = 0$, і оскільки $f \neq 0$, то також отримаємо, що $\mu \neq 0$ та $f = \nu(x)\mathrm{e}^{u/\mu}$. Таким чином, рівняння K_f — $G^\sim$-еквівалентне рівнянню Ліувілля (порівняй доведення леми 1.12), тобто $\dim\mathfrak{g}_f = \infty$, а це суперечить припущенню, що $\dim\mathfrak{g}_f \leqslant 4$.

Далі розглянемо випадок $\xi^1\xi^2\xi^3 \neq 0$ та, з точністю до $G^\sim$-еквівалентності, вважаємо, що $\xi^1 = 1$ та $\eta^{01} = 0$. З комутаційних співвідношень алгебри $\mathfrak{f}$, після групування коефіцієнтів векторних полів,

$$
\begin{aligned}
[Q^1, Q^2] &= \partial_t + \xi^2_x\partial_x + (\eta^{02}_t + \eta^{02}_x)\partial_u = Q^1,\\
[Q^1, Q^3] &= 2t\partial_t + \xi^3_x\partial_x + (\eta^{03}_t + \eta^{03}_x)\partial_u = 2Q^2,\\
[Q^2, Q^3] &= t^2\partial_t + (\xi^2\xi^3_x - \xi^3\xi^2_x)\partial_x\\
&\qquad + (t\eta^{03}_t + \xi^2\eta^{03}_x - t^2\eta^{02}_t - \xi^3\eta^{02}_x)\partial_u = Q^3,
\end{aligned}
$$

отримаємо систему

$$
\begin{aligned}
&\xi^2_x = 1, \quad \eta^{02}_t + \eta^{02}_x = 0, \quad \xi^3_x = 2\xi^2, \quad \eta^{03}_t + \eta^{03}_x = 2\eta^{02},\\
&\xi^2\xi^3_x - \xi^3\xi^2_x = \xi^3, \quad t\eta^{03}_t + \xi^2\eta^{03}_x - t^2\eta^{02}_t - \xi^3\eta^{02}_x = \eta^{03}.
\end{aligned}
$$

З першого, третього і п'ятого рівнянь цієї системи, з точністю до перетворень еквівалентності зсувів за змінною x, маємо $\xi^2 = x$ та $\xi^3 = x^2$. З другого і четвертого рівнянь знаходимо $\eta^{02} = \rho(\omega^-)$ та $\eta^{03} = \rho(\omega^-)\omega^+ + \theta(\omega^-)$, де $\omega^- := x - t$ та $\omega^+ := x + t$. Тоді шосте рівняння системи набуває вигляду $\omega^-\theta_{\omega^-} = \theta$, розв'язком якого є $\theta = \lambda\omega^-$, де λ — довільна стала. Отже,

$$
\begin{aligned}
Q^1 &= \partial_t + \partial_x,\\
Q^2 &= t\partial_t + x\partial_x + \rho(\omega^-)\partial_u,\\
Q^3 &= t^2\partial_t + x^2\partial_x + \big((x+t)\rho(\omega^-) + \lambda(x-t)\big)\partial_u,
\end{aligned}
$$

де можна покласти параметр-функцію $\rho = \rho(\omega^-)$ рівною нулю, використовуючи перетворення

$$
\tilde t = t, \quad \tilde x = x, \quad \tilde u = u - \int (\omega^-)^{-1}\rho(\omega^-)\,\mathrm{d}\omega^-,
$$

яке є проєкцією перетворення еквівалентності. Послідовно підставляємо коефіцієнти векторних полів Q^1, Q^2 та Q^3 в класифікаційне рівняння (1.8). Отримана система для довільного елементу f,

$$
\begin{aligned}
&f_t + f_x = 0, \quad tf_t + xf_x = -2f,\\
&t^2f_t + x^2f_x + \lambda(x-t)f_u = -2(x+t)f,
\end{aligned}
$$

буде сумісною при умові $f_u \neq 0$ тоді і лише тоді, коли $\lambda = 0$.

Нехай $n = 4$ та вважаємо, що $\tau^4 = 0$ та $\xi^4 \neq 0$. Оскільки $\dim \pi^x_* \mathfrak{g}_f \leqslant 3$, то компонента ξ^4 має належати до лінійної оболонки $\langle \xi^1, \xi^2, \xi^3 \rangle = \langle 1, x, x^2 \rangle$. Більш того, $[\mathfrak{f}, \langle Q^4 \rangle] \subseteq \langle Q^4 \rangle$, а тому $[\pi^x_* \mathfrak{f}, \langle \xi^4 \partial_x \rangle] \subseteq \langle \xi^4 \partial_x \rangle$, тобто $\langle \xi^4 \partial_x \rangle$ — ідеал алгебри $\pi^x_* \mathfrak{f} \simeq \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. Алгебра $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ не має власних ідеалів. Отже, $\xi^4 = 0$, що протирічить початковій умові $\xi^4 \neq 0$. Таким чином, маємо випадок 10 теореми 1.14. Більш того, випадок 10 не допускає подальших розширень ліївських симетрій шляхом подальшої специфікації функції $\hat{f}$; див. початок параграфа 1.4.

$\boldsymbol{m = 2}$**.** Виконуємо заміну базису $(Q^1, \dots, Q^n)$ так, що τ^1, τ^2 є лінійно незалежними і $\tau^i = 0$, $i = 3, \dots, n$. Тоді $\pi^t_* \mathfrak{g}_f = \langle \tau^1 \partial_t, \tau^2 \partial_t \rangle$ є точною реалізацією двовимірної алгебри Лі на t-прямій, і згідно з теоремою Лі з точністю до лінійного комбінування Q^1 та Q^2, можна покласти $(\tau^1, \tau^2) = (1, t) \pmod{\pi^t_* G^\sim}$. Можливими значеннями для $n = \dim \mathfrak{g}_f$ є 2, 3 та 4.

Нехай $n = 4$. Тоді з леми 1.12(i) випливає, що $\dim \pi^x_* \mathfrak{g}_f = \dim \langle \xi^3 \partial_x, \xi^4 \partial_x \rangle = 2$. З точністю до лінійного комбінування Q^3 та Q^4, можна покласти $(\xi^3, \xi^4) = (1, x) \pmod{\pi^x_* G^\sim}$. Оскільки $\xi^1, \xi^2 \in \langle \xi^3, \xi^4 \rangle$, то можемо далі шляхом лінійної комбінації Q^1 та Q^2 з Q^3 та Q^4 занулити коефіцієнти ξ^1 та ξ^2. Отже,

$$
\begin{aligned}
&Q^1 = \partial_t + (\eta^{11} u + \eta^{01}) \partial_u, \quad Q^2 = t\partial_t + (\eta^{12} u + \eta^{02}) \partial_u, \\
&Q^3 = \partial_x + (\eta^{13} u + \eta^{03}) \partial_u, \quad Q^4 = x\partial_x + (\eta^{14} u + \eta^{04}) \partial_u,
\end{aligned}
$$

де $\eta^{11}, \dots, \eta^{14}$ — сталі, $\eta^{01}, \dots, \eta^{04}$ — гладкі функції змінних (t, x). З комутаційних співвідношень $[Q^1, Q^2] = Q^1$ та $[Q^3, Q^4] = Q^3$ випливає, що $\eta^{11} = \eta^{13} = 0$. За допомогою перетворення $\varpi_* \mathcal{Z}(U^0)$ можна занулити коефіцієнт η^{01}. З комутаційного співвідношення $[Q^1, Q^3] = \eta^{03}_t \partial_u = 0$ отримаємо $\eta^{03}_t = 0$. Всі перетворення $\varpi_* \mathcal{Z}(U^0)$ з $U^0 = U^0(x)$ зберігають зведений вигляд векторного поля $Q^1 = \partial_t$, і серед них є перетворення, що дозволяє занулити η^{03}. Врахувавши комутаційні співвідношення

$$[Q^1,Q^2]=\partial_t+\eta^{02}_t\partial_u=Q^1,\quad [Q^3,Q^2]=\eta^{02}_x\partial_u=0,$$
$$[Q^3,Q^4]=\partial_x+\eta^{04}_x\partial_u=Q^3,\quad [Q^1,Q^4]=\eta^{04}_t\partial_u=0,$$

отримаємо

$$\eta^{02}_t=\eta^{02}_x=\eta^{04}_t=\eta^{04}_x=0,$$

тобто η^{02} та η^{04} — сталі. Підставляючи компоненти векторних полів Q^1, Q^2, Q^3 та Q^4 у класифікаційне рівняння (1.8), приходимо до системи на довільний елемент f,

$$f_t=f_x=0,\quad (\eta^{12}u+\eta^{02})f_u=f,\quad (\eta^{14}u+\eta^{04})f_u=f.$$

Ця система сумісна тоді і лише тоді, коли $\eta^{12}=\eta^{14}$ та $\eta^{02}=\eta^{04}$. Більш того, $\eta^{12}=\eta^{14}\neq 0$, оскільки в іншому випадку маємо рівняння Ліувілля. З огляду на отримані умови можемо покласти $\eta^{02}=\eta^{04}=0$ за допомогою зсуву за змінною u на сталу, який зберігає всі знайдені обмеження на компоненти векторних полів $Q^1, \dots, Q^4$. Ввівши позначення $p:=-1/\eta^{12}$, приходимо до випадку 12, де сталий множник $\hat C$ у функції f можна прибрати за допомогою перетворення $\mathcal{D}^t(\hat C t)$.

Нехай $n=3$, тоді $\xi^3\neq 0$ та $k:=\dim \pi^x_*\mathfrak{g}_f=\dim\langle\xi^1,\xi^2,\xi^3\rangle\in\{1,2\}$.

Якщо $k=2$, то з теореми Лі випливає, що $\xi^i=a_ix+b_i$ з деякими сталими a_i та b_i, $i=1,2,3$. Таким чином, потрібно дослідити випадки відносно коефіцієнтів ξ^i. При $a_3\neq 0$ можна покласти $a_3=1$ та $b_3=0$ відповідно за допомогою масштабування векторного поля Q^3 та зсуву за змінною x. Далі з використанням лінійного комбінування Q^1 та Q^2 з Q^3 можна покласти $a_1=a_2=0$. Отже, базисні елементи Q^1, Q^2 та Q^3 задовольняють комутаційні співвідношення: $[Q^1,Q^2]=Q^1$, $[Q^1,Q^3]=0$ та $[Q^2,Q^3]=0$. З двох останніх комутаційних співвідношень випливає, що $b_1=b_2=0$, а це означає, що $k=1$. Отримали протиріччя припущенню, що $k=2$. При $a_3=0$ умова $\xi^3\neq 0$ є еквівалентною умові $b_3\neq 0$. За допомогою масштабування Q^3 та лінійного комбінування Q^1 та Q^2 з Q^3

можна покласти $b_3 = 1$ та $b_1 = b_2 = 0$. З комутаційного співвідношення $[Q^1, Q^2] = Q^1$ отримаємо, що $a_1 = 0$ та $\eta^{11} = 0$, а тому $a_2 \neq 0$, оскільки $k = 2$. За допомогою перетворення $\varpi_* \mathcal{Z}(U^0)$ можна покласти $\eta^{01} = 0$. Базисні елементи набувають вигляду

$$Q^1 = \partial_t, \quad Q^2 = t\partial_t + a_2 x\partial_x + (\eta^{12}u + \eta^{02})\partial_u,$$
$$Q^3 = \partial_x + (\eta^{13}u + \eta^{03})\partial_u,$$

де η^{1i} — сталі, η^{0i} — гладкі функції змінних (t, x), $i = 2, 3$. З комутаційного співвідношення $[Q^1, Q^3] = \eta^{03}_t\partial_u = 0$ знаходимо, що $\eta^{03}_t = 0$. Оскільки всі підняття векторних полів $\varpi_* \mathcal{Z}(U^0)$ з $U^0 = U^0(x)$ зберігають зведений вигляд векторного поля $Q^1 = \partial_t$, то з урахуванням рівняння $\eta^{03}_t = 0$ можна вважати, що $\eta^{03} = 0$ з точністю до вказаних підняттів векторних полів. Додаткові умови на базисні елементи отримаємо із комутаційних співвідношень

$$[Q^1, Q^2] = \partial_t + \eta^{02}_t\partial_u = Q^1,$$
$$[Q^3, Q^2] = a_2\partial_x + (\eta^{02}_x - \eta^{13}\eta^{02})\partial_u = a_2 Q^3,$$

а саме знаходимо, що $\eta^{13} = 0$, $\eta^{02}_t = 0$, $\eta^{02}_x = 0$, тобто $\eta^{02} = \mathrm{const}$. Підставляючи коефіцієнти векторних полів Q^1, Q^2 та Q^3 у класифікаційне рівняння (1.8), отримаємо систему на довільний елемент f,

$$f_t = f_x = 0, \quad (\eta^{12}u + \eta^{02})f_u = (\eta^{12} - a_2 - 1)f.$$

Якщо $\eta^{12} = \eta^{02} = 0$, то $a_2 = -1$, оскільки $f \neq 0$, і як результат отримаємо випадок 9. При $\eta^{12} = 0$ і $\eta^{02} \neq 0$ з умови $f_u \neq 0$ випливає, що $a_2 \neq -1$, і це приводить до рівняння Ліувілля. Якщо $\eta^{12} \neq 0$, то відповідні значення довільного елементу f, з точністю до зсувів за змінною u, мають вигляд як у випадку 12, де $n = 4$.

Розглянемо випадок $k = 1$. Тоді $\xi^3 \neq 0$ і можна вважати, що $\xi^3 = 1$, $\xi^1 = \xi^2 = 0$. Аналогічно до попередніх випадків із комутаційних співвідношень $[Q^1, Q^2] = Q^1$ та $[Q^1, Q^3] = 0$ маємо $\eta^{11} = 0$ та за допомогою перетворення $\mathcal{Z}(U^0)$ можна покласти $\eta^{01}=\eta^{03}=0$. Далі з комутаційних співвідношень

$$[Q^1,Q^2]=\partial_t+\eta^{02}_t\partial_u=Q^1,$$
$$[Q^3,Q^2]=(\eta^{02}_x-\eta^{13}\eta^{02})\partial_u=0,$$

знаходимо, що $\eta^{02}_t=0$, $\eta^{02}_x=\eta^{13}\eta^{02}$. З класифікаційного рівняння (1.8) отримаємо систему на довільний елемент f,

$$f_t=0,\quad f_x+\eta^{13}uf_u=\eta^{13}f,\quad (\eta^{12}u+\eta^{02})f_u=(\eta^{12}-1)f.$$

Якщо $\eta^{13}=0$, то $f_t=f_x=0$, а тому $\langle t\partial_t-x\partial_x\rangle\in\mathfrak{g}_f$, що суперечить умові $\xi^2=0$. Отже, $\eta^{13}\neq0$, і можна покласти $\eta^{13}=1$ за допомогою масштабування змінної x, а тому $\eta^{02}=C\mathrm{e}^x$ де C — довільна стала. Якщо додатково $\eta^{12}\neq0$, то можна покласти $\eta^{02}=0$, використовуючи перетворенням $\mathcal{Z}(-pC\mathrm{e}^x)$, де $p:=-1/\eta^{12}\neq0$, яке зберігає Q^1 та Q^3. Загальний розв'язок системи на функцію f з урахуванням умови $f_{uu}\neq0$ має вигляд $f=\hat C\mathrm{e}^{-px}|u|^pu$, де $\hat C$ — довільна ненульова стала. Сім'я перетворень еквівалентності $\tilde t=\hat Ct$, $\tilde x=-\mathrm{e}^{-px}/p$, $\tilde u=u$, $\tilde f=\mathrm{e}^{px}f/\hat C$ зводить такі значення функції f до випадку 12, де $n=4$. У протилежному випадку $\eta^{12}=0$, а тому $C\neq0$, оскільки $f\neq0$. За допомогою масштабування змінної u можна покласти $C=1$. З системи на функцію f отримаємо, що $f=\hat C\mathrm{e}^{x-\mathrm{e}^{-x}u}$. У результаті з використанням перетворення еквівалентності $\tilde t=-\hat Ct$, $\tilde x=\mathrm{e}^x$, $\tilde u=-u$, $\tilde f=\mathrm{e}^{-x}f/\hat C$ приходимо до випадку 11.

Якщо $n=2$, то $k\in\{0,1,2\}$.

Нехай $k=2$. З комутаційного співвідношення $[Q^1,Q^2]=Q^1$ отримаємо, що $\eta^{11}=0$ та, з точністю до перетворень $\varpi_*\mathcal{D}^x(X)$ та $\varpi_*\mathcal{Z}(U^0)$, $\xi^1=1$, $\xi^2=x$ та $\eta^{01}=0$, і тоді $\eta^{02}_t+\eta^{02}_x=0$. Таким чином, η^{02} — функція від $x-t$, та додатково за допомогою перетворення $\varpi_*\mathcal{Z}(\theta)$, де θ — також функція від $x-t$, можна покласти $\eta^{02}=0$. Базисні векторні поля набувають вигляду

$$Q^1=\partial_t+\partial_x,\quad Q^2=t\partial_t+x\partial_x+\eta^{12}u\partial_u.$$

Підставляючи компоненти векторних полів Q^1 та Q^2 в класифікаційне рівняння (1.8), отримаємо систему на довільний елемент f,

$$f_t + f_x = 0, \quad tf_t + xf_x + \eta^{12}uf_u = (\eta^{12} - 2)f.$$

З цієї системи випливає, що $\eta^{12} \neq 0$, оскільки інакше маємо випадок 10 з $n = 3$. Умова $\eta^{12} \neq 0$ виділяє випадок 7, де $q := -\eta^{12}$.

У випадку $k = 1$ з комутаційного співвідношення $[Q^1, Q^2] = Q^1$ випливає, що $\xi^1 = 0$ та $\eta^{11} = 0$. Для зручності, використовуючи перетворення $\varpi_*\mathcal{D}^x(X)$, можна вважати, що $\xi^2 = x$. Подібно до попередніх випадків, можна одночасно покласти $\eta^{01} = 0$ та $\eta^{02} = 0$ за допомогою перетворення $\varpi_*\mathcal{Z}(U^0)$. З класифікаційного рівняння (1.8) отримаємо систему

$$f_t = 0, \quad xf_x + \eta^{12}uf_u = (\eta^{12} - 2)f,$$

з якої знаходимо, що $\eta^{12} \neq 0$, оскільки інакше знову маємо випадок 9 з $n = 3$. У результаті приходимо до випадку 8, де $q := -\eta^{12}$.

Зауваження 1.23. Параметр q (ненульовий) у випадках 7 та 8 не може бути додатково відкалібрований за допомогою перетворень еквівалентності. Покажемо це лише для випадку 8, оскільки викладки для випадку 7 є аналогічними. Для кожного значення функції f з випадку 8 похідну алгебри відповідної алгебри $\mathfrak{g}_f$ індуковано векторним полем $Q^1 = \partial_t$. Звідси проєкція $\varpi_*\mathcal{T}$ будь-якого елементу $\mathcal{T}$ з групи еквівалентності $G^{\sim}$, що відображає рівняння K_f у рівняння з того ж випадку 8, має зберігати векторне поле Q^1, тобто $(\varpi_*\mathcal{T})_*\partial_t \in \langle\partial_t\rangle$. Це означає, що t-компонента перетворення $\mathcal{T}$ — лінійна відносно змінної t. Таке перетворення не може змінити відношення коефіцієнтів при $t\partial_t$ та $u\partial_u$ у векторному полі Q^2.

Для $k = 0$ маємо $\xi^1 = \xi^2 = 0$, а тому подальший розгляд подібний до випадку $k = 1$. З точністю до $G^{\sim}$-еквівалентності отримаємо з комутаційного співвідношення $[Q^1, Q^2] = Q^1$, що $\eta^{11} = 0$ та $\eta^{01} = \eta^{02} = 0$. Відповідна система на функцію f набуває вигляду

$$f_t = 0, \quad \eta^{12}uf_u = (\eta^{12} - 1)f,$$

де $\eta^{12}\neq 0,1$, і тому при такому значенні f система може бути зведена за допомогою перетворення $\mathcal{D}^x(X)$ до вигляду з випадку 12, де $n=4$.

$\boldsymbol{m=1.}$ Тоді $n\leqslant 2$.

Якщо $n=2$, то після лінійного комбінування базисних елементів та підняття алгебри $\mathfrak{g}_f$ за допомогою перетворень $\varpi_*\mathcal{D}^t(T)$ та $\varpi_*\mathcal{Z}(U^0)$ можна вважати, що $\tau^1=1$, $\tau^2=0$ та $\eta^{01}=0$. Звідси $\xi^2\neq 0$, тобто $\xi^2=1$ $(\mathrm{mod}\ G^{\sim})$, і додатково можна покласти $\xi^1=0$ за допомогою лінійного комбінування базисних елементів та $\eta^{01}=0$ за допомогою перетворення $\varpi_*\mathcal{Z}(U^0)$. З комутаційного співвідношення $[Q^1,Q^2]=(\eta^{02}_t-\eta^{11}\eta^{02})\partial_u=0$, отримаємо, що $\eta^{02}=\mathrm{e}^{\eta^{11}t}\zeta(x)$ для деякої гладкої функції ζ змінної x. Таким чином, можна покласти $\eta^{02}=0$ за допомогою перетворення $\varpi_*\mathcal{Z}\big(\mathrm{e}^{\eta^{11}t}\theta(x)\big)$, де θ є розв'язком лінійного звичайного диференціального рівняння першого порядку $\theta_x-\eta^{12}\theta+\zeta=0$. Зауважимо, що векторне поле Q^1 збережено при такому перетворенні. Базисні елементи набувають вигляду

$$Q^1=\partial_t+\eta^{11}u\partial_u,\quad Q^2=\partial_x+\eta^{12}u\partial_u.$$

Тут $(\eta^{11},\eta^{12})\neq(0,0)$, оскільки інакше отримаємо випадок 9 з $n=3$. Якщо обидва коефіцієнти η^{11} та η^{12} — ненульові, то за допомогою масштабування змінних t та x можна вважати, що $\eta^{11}=\eta^{12}=1$. Відповідна система на довільний елемент f має вигляд

$$f_t+uf_u=f,\quad f_x+uf_u=f,$$

яка приводить до випадку 6. Якщо один із параметрів η^{11} чи η^{12} є ненульовим, то з точністю до дискретного перетворення еквівалентності $\mathcal{J}^0$, яке переставляє змінні t та x, вважаємо, що $\eta^{11}\neq 0$, і можемо покласти $\eta^{11}=1$ за допомогою масштабування змінної t. З класифікаційного рівняння (1.8) отримаємо систему

$$f_t+uf_u=f,\quad f_x=0,$$

інтегрування якої дає випадок 5.

У випадку $n=1$, оскільки $\tau^1\neq 0$, то можна покласти $\tau^1=1$, $\xi^1=\delta$, $\eta^{01}=0$ та $\eta^{11}=(1+\delta)\delta'$ з $\delta,\delta'\in\{0,1\}$ відповідно з точністю до перетворень $\varpi_*\mathcal{D}^t(T)$, $\varpi_*\mathcal{D}^x(X)$ та $\varpi_*\mathcal{Z}(U^0)$ і одночасного масштабування змінних (t,x). У результаті отримаємо такі $G^{\sim}$-нееквівалентні випадки для векторного поля Q^1:

$$\partial_t,\quad \partial_t+\partial_x,\quad \partial_t+u\partial_u,\quad \partial_t+\partial_x+2u\partial_u,$$

які відповідають випадкам 1–4.

Зауваження 1.24. Розбиття задачі групової класифікації рівнянь із класу (1.1) зі скінченновимірними максимальними алгебрами ліївської інваріантності на різні випадки залежить від значень $G^{\sim}$-інваріантних цілих трійок (m,n,k), які визначені формулами (1.12). Зрозуміло, що більшість значень у $\mathbb{Z}^3$ для (m,n,k) є неможливими. Як попередній крок класифікації це суттєво звужуємо набір кандидатів для значень таких трійок. Відповідно до леми 1.12, наслідку 1.13 та означення трійки (m,n,k) маємо наступні обмеження: $m\in\{1,2,3\}$, $n\in\{1,2,3,4\}$, та $0\leqslant n-m\leqslant k\leqslant m\leqslant n$. Але навіть (досить обмежена) множина S трійок, що задовольняють ці обмеження, містить багато елементів, які не можна реалізувати для рівнянь із класу (1.1). Можливі значення для трійок (m,n,k) є наступними:

$$\begin{aligned}&(1,1,0),\quad (1,1,1),\quad (1,2,1),\quad (2,2,2),\\ &(2,2,1),\quad (2,3,2),\quad (3,3,3),\quad (2,3,1),\quad (2,4,2),\end{aligned}$$

які відповідно пов'язані з парами випадків 1 і 3, 2 і 4, 5 і 6, та окремими випадками 7, 8, 9, 10, 11, 12 теореми 1.14. Тому непридатними трійками в множині S є $(3,4,k)$ з $k=1,2,3$, $(3,3,k)$ з $k=0,1,2$ та $(2,2,0)$, і їх кількість є значною, але меншою за кількість можливих трійок. Єдиною придатною трійкою з $m=3$ є $(3,3,3)$, тобто значення $m=3$ однозначно визначає можливі значення для n та k. Це цікаве спостереження можливо пов'язане з тим, що при $m=3$ обидві проєкції $\pi^t_*\mathfrak{g}_f$ та $\pi^x_*\mathfrak{g}_f$, а також сама алгебра $\mathfrak{g}_f$, є обов'язково ізоморфними алгебрі $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ з огляду на теорему Лі та простоту алгебри $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$. Відокремлення придатних значень від непридатних у множині S не може бути реалізоване під час попереднього аналізу ліївських симетрій рівнянь із класу (1.1), оскільки воно є невід'ємною частиною задачі групової класифікації для цього класу.

Зауваження 1.25. Для алгебраїчної перевірки $G^{\sim}$-нееквівалентності випадків теореми 1.14 необхідно більше значень, що пов'язані з максимальними алгебрами ліївської інваріантності рівнянь із класу (1.1), оскільки існують пари $G^{\sim}$-нееквівалентних випадків із однаковими трійками (m,n,k): випадки 1 та 3 з $(m,n,k)=(1,1,0)$, випадки 2 та 4 з $(m,n,k)=(1,1,1)$ і випадки 5 та 6 з $(m,n,k)=(1,2,1)$. Для введення додаткових $G^{\sim}$-інваріантних значень для повної ідентифікації випадків класифікації представляємо алгебру $\mathfrak{g}_{\langle\rangle}$ як пряму суму її підпросторів:

$$\mathfrak{g}_{\langle\rangle}=\big\langle D^t(\tau)\big\rangle\dotplus\big\langle D^x(\xi)\big\rangle\dotplus\big\langle I\big\rangle\dotplus\big\langle Z(\eta^0)\big\rangle,$$

де параметр-функції $\tau=\tau(t)$, $\xi=\xi(x)$ та $\eta^0=\eta^0(t,x)$ пробігають множини гладких функцій своїх аргументів. Через $\mathfrak{P}_i$ позначимо проєкцію алгебри $\mathfrak{g}_{\langle\rangle}$ на i-ту компоненту у вищевказаному представленні алгебри $\mathfrak{g}_{\langle\rangle}$, $i=1,\dots,4$. Хоча $\dim\mathfrak{P}_1\mathfrak{s}=\dim\pi^t_*\mathfrak{s}$ та $\dim\mathfrak{P}_2\mathfrak{s}=\dim\pi^x_*\mathfrak{s}$ для підалгебр $\mathfrak{s}$ алгебри $\mathfrak{g}_{\langle\rangle}$, але можемо визначити нові $G^{\sim}$-інваріантні цілі значення

$$
\begin{aligned}
&l=l(\mathfrak{s}):=\dim\mathfrak{P}_3\mathfrak{s},\\
&j_1=j_1(\mathfrak{s}):=\max(\dim\mathfrak{s}^1,\dim\mathfrak{s}^2),\\
&j_2=j_2(\mathfrak{s}):=\min(\dim\mathfrak{s}^1,\dim\mathfrak{s}^2),\\
&j_{12}=j_{12}(\mathfrak{s}):=\dim\mathfrak{s}^{12},\\
&j_{13}=j_{13}(\mathfrak{s}):=\max(\dim\mathfrak{s}^{13},\dim\mathfrak{s}^{23}),\\
&j_{23}=j_{23}(\mathfrak{s}):=\min(\dim\mathfrak{s}^{13},\dim\mathfrak{s}^{23}),\\
&r_1=r_1(\mathfrak{s}):=\max(\dim\pi^t_*\mathfrak{s}^{12},\dim\pi^x_*\mathfrak{s}^{12}),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&r_2 = r_2(\mathfrak{s}) := \min(\dim \pi^t_* \mathfrak{s}^{12}, \dim \pi^x_* \mathfrak{s}^{12}),\\
&r_3 = r_3(\mathfrak{s}) := 3 - \min \big\{ \dim \big\langle D^t(\tau), D^x(\xi) \big\rangle \mid \exists\, \eta^0 :\\
&D^t(\tau) + D^x(\xi) + I + Z(\eta^0) \in \mathfrak{s} \big\},
\end{aligned}
$$

де $r_3 := 0$, якщо множина у визначенні r_3 пуста,

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{s}^1 := \mathfrak{s} \cap \big\langle D^t(\tau), Z(\eta^0) \big\rangle, \quad \mathfrak{s}^2 := \mathfrak{s} \cap \big\langle D^x(\xi), Z(\eta^0) \big\rangle,\\
&\mathfrak{s}^{12} := \mathfrak{s} \cap \big\langle D^t(\tau), D^x(\xi), Z(\eta^0) \big\rangle,\\
&\mathfrak{s}^{13} := \mathfrak{s} \cap \big\langle D^t(\tau), I, Z(\eta^0) \big\rangle, \quad \mathfrak{s}^{23} := \mathfrak{s} \cap \big\langle D^x(\xi), I, Z(\eta^0) \big\rangle.
\end{aligned}
$$

Значення в наборі $(m, n, k, l, j_1, j_2, j_{12}, j_{13}, j_{23}, r_1, r_2, r_3)$ для $\mathfrak{s} = \mathfrak{g}_f$ різні для різних випадків теореми 1.14,

1. $(1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0)$;
2. $(1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0)$;
3. $(1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 2)$;
4. $(1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$;
5. $(1, 2, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 2)$;
6. $(1, 2, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 2)$;
7. $(2, 2, 2, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1)$;
8. $(2, 2, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1)$;
9. $(2, 3, 2, 0, 1, 1, 3, 1, 1, 2, 2, 0)$;
10. $(3, 3, 3, 0, 0, 0, 3, 0, 0, 3, 3, 0)$;
11. $(2, 3, 1, 1, 2, 0, 2, 2, 1, 2, 0, 2)$;
12. $(2, 4, 2, 1, 1, 1, 3, 2, 1, 2, 2, 2)$;
13. $(\infty, \infty, \infty, 0, \infty, \infty, \infty, \infty, \infty, \infty, \infty, 0)$.

А тому такі випадки є $G^{\sim}$-нееквівалентними. У той же час цей цілий набір є надмірним для розрізнення класифікаційних випадків. Найважливіший мінімальний достатній набір — трійка (r_3, j_1, r_2), де характеристики впорядковано відповідно до їх важливості. Іншими достатніми трійками є (r_3, j_1, n), (r_3, j_1, k), (r_3, j_1, j_{12}), (r_3, j_1, r_1), (r_3, r_2, n), (r_3, r_2, j_{12}), (r_3, r_2, r_1). Тим не менше, у ході дослідження послідовних розширень у наступному параграфі необхідно доповнити трійки іншими значеннями серед вищезазначених характеристик, хоча значення r_3, j_1 та r_2 разом із n все ще мають першочергове значення.

1.4. Послідовні розширення ліївських симетрій

У цьому параграфі наведені класифікаційні випадки, які перелічені в теоремі 1.14, розуміємо у слабкому сенсі. Визначимо всі пари $(\text{випадок } N, \text{випадок } \bar{N})$ випадків $G^{\sim}$-еквівалентних розширень ліївських симетрій таких, що $(\text{випадок } N \prec \text{випадок } \bar{N})$, тобто, де випадок $\bar{N}$ є додатковим розширенням ліївської симетрії випадку N з точністю до $G^{\sim}$-еквівалентності, див. зауваження 1.19. Для цього використаємо техніку аналогічну класифікації контракцій низьковимірних алгебр Лі, див., наприклад, [50, 77, 111] та літературу там. Нехай $\mathfrak{s}$ та $\bar{\mathfrak{s}}$ — підалгебри алгебри $\mathfrak{g}_{\langle\rangle}$, що пов'язані з випадками N та $\bar{N}$, і

$$(m, n, k, l, j_1, j_2, j_{12}, j_{13}, j_{23}, r_1, r_2, r_3) \quad \text{та}$$
$$(\bar{m}, \bar{n}, \bar{k}, \bar{l}, \bar{j}_1, \bar{j}_2, \bar{j}_{12}, \bar{j}_{13}, \bar{j}_{23}, \bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3)$$

є наборами їх $G^{\sim}$-інваріантних характеристик, які визначені у зауваженнях 1.24 та 1.25. Очевидно, що з відношення $(\text{випадок } N \prec \text{випадок } \bar{N})$ випливає:

$$n < \bar{n}, \quad m \leqslant \bar{m}, \quad k \leqslant \bar{k}, \quad l \leqslant \bar{l}, \quad j_1 \leqslant \bar{j}_1, \quad j_2 \leqslant \bar{j}_2,$$
$$j_{12} \leqslant \bar{j}_{12}, \quad j_{13} \leqslant \bar{j}_{13}, \quad j_{23} \leqslant \bar{j}_{23}, \quad r_1 \leqslant \bar{r}_1, \quad r_2 \leqslant \bar{r}_2, \quad r_3 \leqslant \bar{r}_3.$$

Іншими словами, якщо хоча б одна з наведених нерівностей не виконана, то $(\text{випадок } N \not\prec \text{випадок } \bar{N})$. Аналізуючи всі пари випадків із теореми 1.14, виключаємо пари $(\text{випадок } N, \text{випадок } \bar{N})$ для яких $(\text{випадок } N \not\prec \text{випадок } \bar{N})$. Для такого виключення достатньо використовувати лише набір із п'яти вищезазначених $G^{\sim}$-інваріантних цілих значень, наприклад, (n, r_3, r_2, j_1, k), який є мінімально достатнім. Інші мінімально достатні набори з п'яти характеристик можна отримати за допомогою заміни k на m чи r_1. Характеристики впорядковано відповідно до їх важливості у процедурі виключення. Основною характеристикою є розмірність n всієї алгебри ліївської інваріантності відповідного випадку, а нерівність між n та $\bar{n}$ повинна бути строгою лише для впорядкованих випадків N та $\bar{N}$. Характеристики r_3, r_2, j_1, k, m та r_1 визначають наступні випадки $n < \bar{n}$, що не дають розширень:

$$
\begin{aligned}
r_3\colon\ & \text{випадок } 3 \not\prec \text{випадки } 7, 8, 9, 10, 13,\\
& \text{випадки } 4, 5, 6, 7, 8 \not\prec \text{випадки } 9, 10, 13,\\
& \text{випадки } 11, 12 \not\prec \text{випадок } 13,\\
r_2\colon\ & \text{випадок } 2 \not\prec \text{випадки } 5, 8, 11, \quad \text{випадки } 6, 7 \not\prec \text{випадок } 11,\\
j_1\colon\ & \text{випадок } 1 \not\prec \text{випадки } 6, 7, 10, \quad \text{випадки } 5, 8 \not\prec \text{випадок } 10,\\
& \text{випадок } 11 \not\prec \text{випадок } 12,\\
k\colon\ & \text{випадок } 7 \not\prec \text{випадок } 11, \quad \text{випадок } 10 \not\prec \text{випадок } 12,\\
& \text{чи} \quad m, r_1\colon\ \text{випадок } 10 \not\prec \text{випадок } 12.
\end{aligned}
$$

Пряма перевірка показує, що решта пар (випадок N, випадок $\bar{N}$) з умовою $n < \bar{n}$ є обов'язково впорядкованими, за виключенням пар (випадок 7, випадок 10) та (випадок 8, випадок 9), які пов'язані з граничними переходами для випадків 7 та 8 при $q \to 0$. Таким чином, діаграма Хассе на рис. 1.1 представляє структуру частково впорядкованої множини розширень ліївських симетрій у класі (1.1), порівняй із зауваженням 1.21. Зазначимо, що характеристики j_2 та j_{12} не визначають випадків розширень із $n < \bar{n}$. Кожна з характеристик l, j_{13} та j_{23} виявляє лише випадки розширень з $n < \bar{n}$, які можна визначити за допомогою інших характеристик. Наприклад, за допомогою характеристики l отримаємо: випадки $3, 4, 5, 6, 7, 8 \not\prec$ випадки $9, 10, 13$ та випадки $11, 12 \not\prec$ випадок 13, які повністю можна визначити характеристикою r_3.

Під час дослідження отримано необхідні та достатні умови на параметр-функцію $\hat{f}$, за яких рівняння з випадків 1–9 мають ширші алгебри ліївської інваріантності, ніж рівняння з загальними значеннями функції $\hat{f}$. Тут опускаємо випадок 10, оскільки, як було показано в параграфі 1.3, цей випадок не допускає подальших розширень ліївських симетрій. Спочатку розглянемо випадки 1–4, для кожного з яких параметр-функція $\hat{f}$ залежить від двох аргументів і відповідна алгебра ліївської інваріантності є одновимірною. Вважаємо, що друга похідна функції $\hat f$ відносно аргументу, що включає змінну u, є ненульовою.

Випадок 1 допускає, з точністю до $G^\sim$-еквівалентності, три сім'ї подальших розширень ліївських симетрій, які визначено випадками 5, 8 та 9. Аналізуючи їх, можна зробити висновок, що для будь-якого подальшого розширення ліївської симетрії випадку 1, відповідна алгебра інваріантності включає векторне поле $Q^2\in\mathfrak g_{\langle\rangle}$, причому $\pi^x_*Q^2\neq0$ та $[Q^1,Q^2]\in\langle Q^1,Q^2\rangle$. Таким чином, $[Q^1,Q^2]\in\langle Q^1\rangle$. З точністю до масштабування векторного поля Q^2 можна вважати, що $[Q^1,Q^2]=\delta Q^1$, де $\delta\in\{0,1\}$. Розщеплюємо останнє комутаційне співвідношення покомпонентно та інтегруємо отримані рівняння для компонент векторного поля Q^2. За необхідності комбінуємо векторне поле Q^2 з векторним полем Q^1 та отримаємо представлення

$$Q^2=\delta t\partial_t+\xi(x)\partial_x+\big(\eta^1u+\eta^0(x)\big)\partial_u,$$

де ξ та η^0 — довільні гладкі функції змінної x, $\xi\neq0$, η^1 — довільна стала. Підстановка цього представлення у класифікаційне рівняння (1.8) приводить до рівняння

$$\xi\hat f_x+\big(\eta^1u+\eta^0\big)\hat f_u=\big(\eta^1-\delta-\xi_x\big)\hat f. \tag{1.13}$$

Для будь-якого значення параметр-функції $\hat f$, що задовольняє останнє рівняння, дійсно маємо ще одне розширення ліївської симетрії для випадку 1, яке належить, з точністю до $G^\sim$-еквівалентності, до випадку 5, якщо $\eta^1\neq0$ та $\delta=0$, до випадку 8, якщо $\eta^1\neq0$ та $\delta=1$, або до випадку 9, якщо $\eta^1=0$.

Випадок 3 розглядаємо аналогічно до випадку 1. Подальші розширення ліївської симетрії випадку 3 вичерпано, з точністю до $G^\sim$-еквівалентності, випадками 5 та 6. Додаткове векторне поле ліївської симетрії $Q^2\in\mathfrak g_{\langle\rangle}$ задовольняє умовам $\pi^x_*Q^2\neq0$ та $[Q^1,Q^2]=0$. Тому, без обмеження загальності, з точністю до лінійного комбінування векторного поля Q^2 з векторним полем Q^1 та масштабування Q^2, можна вважати, що

$$Q^2=\xi(x)\partial_x+(\delta u+\eta^0(x))\partial_u,$$

де ξ та η^0 — довільні гладкі функції змінної x, $\xi\neq 0$, $\delta\in\{0,1\}$. Після підстановки векторного поля Q^2 у класифікаційну умову (1.8) та послідовного розщеплення за змінною t, за припущення, що x та $\omega:=\mathrm{e}^{-t}u$ — інші незалежні змінні, отримаємо додаткове обмеження $\eta^0=0$ для компонент векторного поля Q^2, а класифікаційне рівняння набуває вигляду

$$\xi\hat f_x+\delta\omega\hat f_\omega=\big(\delta-\xi_x\big)\hat f. \tag{1.14}$$

Останнє рівняння визначає, з точністю до $G^\sim$-еквівалентності, подальші розширення ліївських симетрій до випадку 5 або випадку 6, якщо відповідно $\delta=0$ або $\delta=1$.

З точністю до $G^\sim$-еквівалентності випадок 2 допускає подальші розширення ліївської симетрії до випадків 6, 7, 9 та 10. Для додаткового векторного поля ліївських симетрій $Q^2\in\mathfrak{g}_{\langle\rangle}$ отримаємо, що $[Q^1,Q^2]=\delta Q^1+\kappa Q^2$ для деяких сталих δ та κ. Якщо $\kappa=0$, тоді з точністю до масштабування векторного поля Q^2 та лінійного комбінування векторного поля Q^2 з векторним полем Q^1, можна вважати, що

$$Q^2=(\delta t+\kappa')\partial_t+\delta x\partial_x+\big(\eta^1u+\hat\eta^0(\omega)\big)\partial_u,$$

де $\hat\eta^0$ — довільна гладка функція змінної $\omega:=x-t$, η^1 — довільна стала, $\delta\in\{0,1\}$, κ' — довільна стала, якщо $\delta=1$, $\kappa'=1$, якщо $\delta=0$. Аналогічно попереднім випадкам, підставляємо векторне поле Q^2 у класифікаційну умову (1.8) та отримаємо рівняння

$$(\delta\omega-\kappa')\hat f_\omega+\big(\eta^1u+\hat\eta^0(\omega)\big)\hat f_u=\big(\eta^1-2\delta\big)\hat f-\hat\eta^0_{\omega\omega}. \tag{1.15}$$

З цього рівняння, з точністю до $G^\sim$-еквівалентності, отримаємо подальші розширення ліївських симетрій до випадку 6, якщо $\delta=0$ та $\eta^1\neq 0$, до випадку 7, якщо $\delta=1$ та $\eta^1\neq 0$, до випадку 9, якщо $\delta=\eta^1=0$, та до випадку 10, якщо $\delta=1$ та $\eta^1=0$. Якщо $\kappa\neq 0$, то $\eta^1=0$. Лінійно комбінуючи векторне поле Q^2 з векторним полем Q^1, можна покласти $\delta = 0$. Звідси

$$Q^2 = C_1 \mathrm{e}^{\kappa t}\partial_t + C_2 \mathrm{e}^{\kappa x}\partial_x + \mathrm{e}^{\kappa t}\hat\eta^0(\omega)\partial_u,$$

де $\hat\eta^0$ — довільна гладка функція змінної $\omega := x - t$, C_1 і C_2 — довільні сталі, $(C_1, C_2) \neq (0,0)$. Класифікаційне рівняння (1.8) з таким векторним полем Q^2 набуває вигляду

$$(C_2\mathrm{e}^{\kappa\omega} - C_1)\hat f_\omega + \hat\eta^0 \hat f_u = -\kappa(C_1 + C_2\mathrm{e}^{\kappa\omega})\hat f + \kappa\hat\eta^0_\omega - \hat\eta^0_{\omega\omega}. \tag{1.16}$$

Тут умови $C_1C_2 = 0$ та $C_1C_2 \neq 0$ пов'язані з подальшими розширеннями ліївських симетрій відповідно до випадків 9 та 10.

Всі класифікаційні випадки з $n > 1$ та $l > 0$, з точністю до $G^\sim$-еквівалентності, є подальшими розширеннями ліївських симетрій випадку 4. Його прямі розширення ліївських симетрій вичерпано, з точністю до $G^\sim$-еквівалентності, випадками 5, 6, 7 та 8. З огляду на вигляд векторного поля Q^1 отримаємо наступне комутаційне співвідношення векторного поля Q^1 із додатковим векторним полем ліївських симетрій $Q^2 \in \mathfrak{g}_{\langle\rangle}$: $[Q^1, Q^2] = \kappa Q^2$ для деякої сталої κ. З комутаційного співвідношення випливає представлення

$$Q^2 = C_1 \mathrm{e}^{\kappa t}\partial_t + C_2 \mathrm{e}^{\kappa x}\partial_x + \mathrm{e}^{(\kappa+2)t}\hat\eta^0(\omega_1)\partial_u,$$

де $\hat\eta^0$ — довільна гладка функція змінної $\omega_1 := x - t$, C_1 і C_2 — довільні сталі, $(C_1, C_2) \neq (0,0)$ і, якщо $\kappa = 0$, то додатково $C_1 \neq C_2$. Після підстановки цього представлення у класифікаційне рівняння (1.8), отримаємо рівняння

$$\begin{aligned}\big(C_2\mathrm{e}^{\kappa\omega_1} - C_1\big)\hat f_{\omega_1} + \big(\mathrm{e}^{-\omega_1}\hat\eta^0(\omega_1) - C_2\omega_2\mathrm{e}^{\kappa\omega_1} - C_1\omega_2\big)\hat f_{\omega_2}\\ = -(\kappa+1)\big(C_1 + C_2\mathrm{e}^{\kappa\omega_1}\big)\hat f + (\kappa+2)\mathrm{e}^{-\omega_1}\hat\eta^0_{\omega_1} - \mathrm{e}^{-\omega_1}\hat\eta^0_{\omega_1\omega_1},\end{aligned} \tag{1.17}$$

де $\omega_2 := \mathrm{e}^{-x-t}u$. З точністю до $G^\sim$-еквівалентності, отримаємо розширення до випадку 5, якщо $\kappa = 0$ та $C_1C_2 = 0$, до випадку 6, якщо $\kappa = 0$

та $C_1C_2\neq 0$, до випадку 7, якщо $\kappa\neq 0$ та $C_1C_2\neq 0$, і до випадку 8, якщо $\kappa\neq 0$ та $C_1C_2=0$.

Підсумовуємо проведений розгляд у наступному твердженні.

Твердження 1.26. *Узагальнене нелінійне рівняння Клейна–Ґордона з випадків 1–4 допускає додаткове розширення лiївських симетрій тоді і лише тоді, коли відповідне значення параметр-функції $\hat f$ задовольняє рівняння (1.13) у випадку 1, рівняння (1.14) у випадку 3, рівняння (1.15) або (1.16) у випадку 2, або рівняння (1.17) у випадку 4.*

Далі отримаємо умови на параметр-функцію $\hat f$, щоб алгебри лiївської інваріантності у випадках 5–9 теореми 1.14 були максимальними для відповідних рівнянь із класу (1.1). У кожному з цих випадків довільний елемент f має вигляд $f=\alpha(t,x)\hat f(\omega)$, де $\omega:=\beta(t,x)u$, α та β — ненульові задані функції змінних (t,x), та $\hat f_{\omega\omega}\neq 0$, оскільки $f_{uu}\neq 0$. Підставляючи цей вигляд функції f у класифікаційне рівняння (1.8), отримаємо класифікаційне рівняння в термінах функції $\hat f$,

$$\begin{aligned}&\left(\left(\frac{\beta_t}{\beta}\tau+\frac{\beta_x}{\beta}\xi+\eta^1\right)\omega+\beta\eta^0\right)\hat f_\omega\\&\qquad+\left(\tau_t+\xi_x+\frac{\alpha_t}{\alpha}\tau+\frac{\alpha_x}{\alpha}\xi-\eta^1\right)\hat f-\frac{\eta^0_{tx}}{\alpha}=0.\end{aligned}\tag{1.18}$$

Далі застосовуємо метод розгалуженого розщеплення, див. [23,38,115] та літературу там. Фіксуючи значення змінних t та x отримаємо шаблонне рівняння для значень функції $\hat f$, при яких рівняння K_f допускає додаткове розширення лiївської симетрії,

$$(a\omega+b)\hat f_\omega+c\hat f-d=0,\tag{1.19}$$

де a, b, c та d — сталі, $(a,b)\neq(0,0)$. Додатково, оскільки $\hat f_{\omega\omega}\neq 0$, то $c\neq -a$, якщо $a\neq 0$ та $c\neq 0$, якщо $a=0$. Більш того, кількість рівнянь вигляду (1.19) з лінійно незалежними наборами (a,b,c,d) не може бути більше одного, оскільки інакше $\hat f_{\omega\omega}=0$. Іншими словами, маємо точно одне незалежне рівняння вигляду (1.19), якщо рівняння K_f допускає додаткове розширення ліївської симетрії. Це означає, що ліва частина рівняння (1.18) є пропорційною лівій частині рівняння (1.19) з ненульовим множником λ, що залежить від змінних (t, x),

$$\begin{aligned}&\left(\left(\frac{\beta_t}{\beta}\tau + \frac{\beta_x}{\beta}\xi + \eta^1\right)\omega + \beta\eta^0\right)\hat{f}_\omega \\ &\qquad + \left(\tau_t + \xi_x + \frac{\alpha_t}{\alpha}\tau + \frac{\alpha_x}{\alpha}\xi - \eta^1\right)\hat{f} - \frac{\eta^0_{tx}}{\alpha} \\ &\quad = \lambda\big((a\omega + b)\hat{f}_\omega + c\hat{f} - d\big).\end{aligned}$$

Останнє рівняння можна розщепити за $\hat{f}$ та $\hat{f}_\omega$ та отримаємо систему

$$\begin{aligned}&\frac{\beta_t}{\beta}\tau + \frac{\beta_x}{\beta}\xi + \eta^1 = a\lambda, \quad \tau_t + \xi_x + \frac{\alpha_t}{\alpha}\tau + \frac{\alpha_x}{\alpha}\xi - \eta^1 = c\lambda, \\ &\beta\eta^0 = b\lambda, \quad \eta^0_{tx} = d\alpha\lambda.\end{aligned} \tag{1.20}$$

Якщо $a \neq 0$, то можна покласти $a = 1$ за допомогою масштабування рівняння шаблонного вигляду (1.19), а тому $c \neq -1$. З перших двох рівнянь системи (1.20) отримаємо

$$\begin{aligned}&\lambda = \frac{\beta_t}{\beta}\tau + \frac{\beta_x}{\beta}\xi + \eta^1, \\ &\tau_t + \left(\frac{\alpha_t}{\alpha} - c\frac{\beta_t}{\beta}\right)\tau + \xi_x + \left(\frac{\alpha_x}{\alpha} - c\frac{\beta_x}{\beta}\right)\xi = (c+1)\eta^1,\end{aligned} \tag{1.21}$$

і лише останнє рівняння відіграє роль класифікаційної умови. Третє та четверте рівняння системи (1.20) встановлюють співвідношення між сталими параметрами b та d. Дійсно, у кожному з випадків 5–9, маємо $(1/\beta)_{tx}$ — пропорційне до α, $(1/\beta)_{tx} = C\alpha$ для деякої сталої C. Таким чином, завжди можна покласти $b = 0$ за допомогою перетворення еквівалентності $\mathcal{Z}(b/\beta)$, яке додає bC до функції $\hat{f}$ і також зануляє η^0 і d. У загальному випадку при $a \neq 0$ співвідношення між b та d має вигляд $ad = bcC$. Для фіксованих значень параметр-функцій α та β у випадках 5–9 отримаємо значення сталого параметра C і вигляди зведеного класифікаційного рівняння (1.21):

випадок 5: $\quad C = 0, \quad \tau_t + c\tau + \xi_x = (c+1)\eta^1;$

$$\begin{aligned}
&\text{випадок 6:} \quad C = 1, \quad \tau_t + c\tau + \xi_x + c\xi = (c+1)\eta^1;\\
&\text{випадок 7:} \quad C = q(q+1), \quad (x-t)(\tau_t + \xi_x) + (q+2+cq)(\tau - \xi)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = (c+1)(x-t)\eta^1;\\
&\text{випадок 8:} \quad C = 0, \quad \tau_t + \xi_x - (q+2+cq)x^{-1}\xi = (c+1)\eta^1;\\
&\text{випадок 9:} \quad C = 0, \quad \tau_t + \xi_x = (c+1)\eta^1.
\end{aligned}$$

У кожному з випадків 5, 6, 8 та 9 із відповідного класифікаційного рівняння випливає, що існує подальше розширення ліївських симетрій тоді і лише тоді, коли відповідне значення параметр-функції $\hat{f}$ задовольняє рівняння (1.19) з довільними $a \neq 0$, c та b, де $d = bcC/a$. Тут розширення дає випадок 12 з довільною ненульовою сталою p. Розгляд випадку 7 є аналогічним, але стала c пов'язана зі сталою a співвідношенням

$$c = -(1 + 2/q)a, \quad d = -(q+1)(q+2)b,$$

та розширення для фіксованого q дає випадок 12_p з $p = 2/q$.

Якщо $a = 0$, то $bc \neq 0$, і можна покласти $c = 1$ масштабуванням рівняння шаблонного вигляду (1.19). Тоді

$$\begin{aligned}
&\frac{\beta_t}{\beta}\tau + \frac{\beta_x}{\beta}\xi + \eta^1 = 0, \quad \lambda = \tau_t + \xi_x + \frac{\alpha_t}{\alpha}\tau + \frac{\alpha_x}{\alpha}\xi - \eta^1,\\
&\eta^0 = b\frac{\lambda}{\beta}, \quad \left(\frac{\lambda}{\beta}\right)_{tx} = \frac{d}{b}\alpha\lambda.
\end{aligned} \tag{1.22}$$

У випадках 5–9 перші два рівняння системи (1.22) відповідно можна звести до вигляду

$$\begin{aligned}
&\text{випадку 5:} \quad \tau = \eta^1, \quad \lambda = \xi_x;\\
&\text{випадку 6:} \quad \tau + \xi - \eta^1 = 0, \quad \lambda = \tau_t + \xi_x;\\
&\text{випадку 7:} \quad q\frac{\tau - \xi}{x - t} - \eta^1 = 0, \quad \lambda = \tau_t + \xi_x + 2\frac{\tau - \xi}{x - t};\\
&\text{випадку 8:} \quad q\xi + \eta^1 x = 0, \quad \lambda = \tau_t - 2\frac{\eta^1}{q};\\
&\text{випадку 9:} \quad \eta^1 = 0, \quad \lambda = \tau_t + \xi_x.
\end{aligned}$$

У випадку 5 не маємо додаткових обмежувальних умов на параметри b, c та d. З останніх двох рівнянь системи (1.22) з урахуванням перших рівнянь визначаємо η^0 та ξ: $\eta^0 = b\xi_x \mathrm{e}^t$, $b\xi_{xx} = d\xi_x$.

У випадках 6 та 7 із наведених вище рівнянь випливає, що $\lambda = 0$, а це суперечить нерівності $\lambda \neq 0$. Це означає, що ці випадки не мають подальших розширень ліївських симетрій при $a = 0$.

З системи (1.22) випливає, що $\tau_{tt} = 0$ та $d = 0$ у випадку 8 та $d = 0$ у випадку 9, які відповідають розширенням ліївської симетрії до випадків 11 та 13.

Об'єднуючи умови, які отримано окремо для $a \neq 0$ та $a = 0$, приходимо до твердження.

Твердження 1.27. *Узагальнене нелінійне рівняння Клейна–Ґордона у випадках 5–9 допускає додаткове розширення ліївських симетрій тоді і лише тоді, коли відповідне значення параметр-функції $\hat f$ задовольняє рівняння (1.19) з $(a,b) \neq (0,0)$, де $ad = 0$ у випадку 5, $ad = bc$ у випадку 6, $c = -(1+2/q)a$, $d = -(q+1)(q+2)b$ у випадку 7_q, і $d = 0$ у випадках 8 та 9.*

Зауваження 1.28. З урахуванням інфінітезимального аналогу твердження 10 роботи [123] всі підкласи $\mathcal{K}'_N$, $N \in \Gamma$, класу $\mathcal{K}$, які відповідають сильним розширенням у випадках 0–13 є нормалізованими, див. зауваження 1.15 для позначень та означень. У той же час, це не є вірним для більшості підкласів $\mathcal{K}_N$, $N \in \Gamma$. Більш точно, підкласи $\mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_6$, $\mathcal{K}_{7_q}$, $\mathcal{K}_{8_q}$ та $\mathcal{K}_9$ не є нормалізованими з огляду на такі аргументи:

- $\mathcal{K}_1 \supset \mathcal{K}_9$, але $G^\sim_1 \not\supseteq G^\sim_9$, оскільки $\mathcal{I}^0 \in G^\sim_9 \setminus G^\sim_1$;
- $\mathcal{K}_2 \supset \mathcal{K}_9$, але $G^\sim_2 \not\supseteq G^\sim_9$, оскільки $\mathcal{I}^t \in G^\sim_9 \setminus G^\sim_2$;
- $\mathcal{K}_3 \ni K_f$ з $f = \mathrm{e}^{-t}u^2$, але $\varpi_* G^\sim_3 \not\supseteq G_f$, оскільки $\varpi_*\big(\mathcal{D}^t(-\ln t) \circ \mathcal{I}^0 \circ \mathcal{D}^t(\mathrm{e}^{-t})\big) \in G_f \setminus \varpi_* G^\sim_3$;
- $\mathcal{K}_4 \ni K_f$ з $f = \mathrm{e}^{-p(t+x)}|u|^p u$ для будь-якого $p \neq 0$, але $\varpi_*\mathfrak{g}^\sim_4 \not\supseteq \mathfrak{g}_f$, оскільки $D^t(\mathrm{e}^{pt}) \in \mathfrak{g}_f \setminus \varpi_*\mathfrak{g}^\sim_4$;

- $\mathcal{K}_5 \ni K_f$ з $f = \mathrm{e}^{-t}u^2$, але $\varpi_* G_5^\sim \not\supseteq G_f$, оскільки $\varpi_*\big(\mathcal{D}^t(-\ln t)\circ \mathcal{I}^0 \circ \mathcal{D}^t(\mathrm{e}^{-t})\big) \in G_f \setminus \varpi_* G_5^\sim$;

- $\mathcal{K}_6 \ni K_f$ з $f = \mathrm{e}^{-p(t+x)}|u|^p u$ для будь-якого $p \neq 0$, але $\varpi_* \mathfrak{g}_6^\sim \not\supseteq \mathfrak{g}_f$, оскільки $D^t(\mathrm{e}^{pt}) \in \mathfrak{g}_f \setminus \varpi_* \mathfrak{g}_6^\sim$;

- $\mathcal{K}_{7,q} \supset \mathcal{K}_{12,p}$ з $p = 2/q$, але $G_{7,q}^\sim \not\supseteq G_{12,p}^\sim$, оскільки $\mathcal{D}^t(2t)\circ\mathcal{D}^x(x/2) \in G_{12,p}^\sim \setminus G_{7,q}^\sim$;

- $\mathcal{K}_{8,q} \supset \mathcal{K}_{12,p}$ з $p = 2/q$, але $G_{8,q}^\sim \not\supseteq G_{12,p}^\sim$, оскільки $\mathcal{I}^0 \in G_{12,p}^\sim \setminus G_{8,q}^\sim$;

- $\mathcal{K}_9 \supset \mathcal{K}_{13} = \{K_{\mathrm{e}^u}\}$, але $G_9^\sim \not\supseteq G_{13}^\sim$, оскільки $\mathcal{D}^t(-t^{-1})\circ\mathcal{Z}(2\ln|t|) \in G_{13}^\sim \setminus G_9^\sim$.

Тут G_f — точкова група симетрій рівняння K_f. Підкласи $\mathcal{K}_0$, $\mathcal{K}_{10}$, $\mathcal{K}_{11}$, $\mathcal{K}_{12,p}$ та $\mathcal{K}_{13}$ є нормалізованими, оскільки вони відповідно співпадають з $\mathcal{K}$, $\mathcal{K}'_{10}$, $\{K_{\mathrm{e}^{u/x}}\}$, $\{K_{|u|^p u}\}$ та $\{K_{\mathrm{e}^u}\}$.[1.3]

1.5. Про групову класифікацію підкласів

У попередньому параграфі вичерпно розв'язано задачу групової класифікації для класу $\mathcal{K}$, який утворюють рівняння вигляду (1.1), але це безпосередньо не приводить до розв'язання задачі групової класифікації для кожного з підкласів класу $\mathcal{K}$. Для заданого підкласу $\hat{\mathcal{K}}$ класу $\mathcal{K}$ теорему 1.14 використовуємо для групової класифікації підкласу $\hat{\mathcal{K}}$ відносно її групи еквівалентності $G^\sim_{\hat{\mathcal{K}}}$ таким чином:

- Враховуючи нормалізацію класу $\mathcal{K}$, будуємо групу еквівалентності $G^\sim_{\hat{\mathcal{K}}}$ як підгрупу групи $G^\sim$, яка утворена елементами групи $G^\sim$, що зберігають підклас $\hat{\mathcal{K}}$.

- Для кожного $N \in \Gamma$ знаходимо перетин підкласу $\hat{\mathcal{K}}$ з $G^\sim$-орбітою $G^\sim_*\mathcal{K}'_N$ підкласу $\mathcal{K}'_N$ (відповідно з $G^\sim$-орбітою $G^\sim_*\mathcal{K}_N$ підкласу $\mathcal{K}_N$).

[1.3] Очевидно, що клас, який містить фіксовану систему диференціальних рівнянь, є нормалізованим.

Це можна реалізувати за допомогою вибору тих значень довільного елементу f для рівнянь із орбіти, які задовольняють додаткову допоміжну обмежувальну умову, що виділяє підклас $\hat{\mathcal{K}}$ із класу $\mathcal{K}$. Набір перетинів визначає повний список розширень ліївських симетрій підкласу $\hat{\mathcal{K}}$.

- Для вибраних значень функції f калібруємо параметри за допомогою перетворень із групи $G^{\sim}_{\hat{\mathcal{K}}}$.

Оскільки підклас $\hat{\mathcal{K}}$ у загальному випадку не є нормалізованим, то запропонована процедура виглядає простіше, ніж пряме розв'язання задачі групової класифікації для підкласу $\hat{\mathcal{K}}$, хоча обчислювальна складність задачі є досить високою.

Підкласи $\mathcal{K}_N$, $N \in \Gamma$, класу $\mathcal{K}$, які відповідають слабким розширенням у випадках 1–9, порівняй зауваження 1.15, є особливими відносно цієї процедури. Групову класифікацію кожного з цих підкласів із точністю до еквівалентності, індукованої відповідним групоїдом еквівалентності, можна легко отримати, аналізуючи діаграму Хассе на рис. 1.1, яка описує структуру частково впорядкованої множини для цих випадків. Проте це не так для групової класифікації з точністю до еквівалентності, яка індукована відповідною групою еквівалентності, оскільки більшість із підкласів $\mathcal{K}_N$, $N \in \Gamma$, не є нормалізованими, див. зауваження 1.28. Варто зазначити, що обидва підходи до групові класифікації підкласів $\mathcal{K}_{10}$, $\mathcal{K}_{11}$, $\mathcal{K}_{12,p}$ та $\mathcal{K}_{13}$ є тривіальними, оскільки ядро алгебри ліївської інваріантності рівнянь із кожного з цих класів — це максимальна алгебра ліївської інваріантності для кожного такого рівняння.

Розглянемо детально підклас $\mathcal{K}_2$ класу (1.1), який пов'язаний із випадком 2 теореми 1.14 у слабкому сенсі, тобто клас рівнянь вигляду

$$u_{tx} = f(\omega, u), \quad \text{де} \quad \omega := x - t, \quad f_{uu} \neq 0$$

або, у змінних $(\check{t}, \check{x}, \check{u}) = (x + t, x - t, u)$ з $\check{f}(\check{x}, \check{u}) = f(\omega, u)$, рівнянь вигляду

$$\check u_{\check t\check t}-\check u_{\check x\check x}=\check f(\check x,\check u),\quad \check f_{\check u\check u}\neq 0.$$

Лема 1.29. *Групу еквівалентності $G_2^\sim$ класу $\mathcal{K}_2$ утворюють перетворення вигляду*

$$\begin{aligned}&\tilde t=c_1t+c_2,\quad \tilde x=c_1x+c_3,\quad \tilde u=c_4u+U^0(\omega),\\ &\tilde f=c_1^{-2}(c_4f-U^0_{\omega\omega})\end{aligned}\tag{1.23}$$

та дискретне перетворення еквівалентності $\mathcal{J}^0$: $\tilde t=x$, $\tilde x=t$, $\tilde u=u$, $\tilde f=f$. Тут c_1, …, c_4 — довільні сталі, $c_1c_4\neq 0$, U^0 — довільна гладка функція змінної $\omega:=x-t$.

Доведення. Оскільки клас (1.1) є нормалізованим, то група еквівалентності будь-якого підкласу з класу (1.1) — це підгрупа групи $G^\sim$, яку складають елементи групи $G^\sim$, що зберігають цей підклас. Очевидно, що перетворення $\mathcal{J}^0$ належить до групи $G_2^\sim$. Будь-яке перетворення вигляду (1.7) з групи $G_2^\sim$ задовольняє рівняння

$$T_tX_x\tilde f(X-T,U)=Cf(x-t,u)+U^0_{tx}.\tag{1.24}$$

Після дії оператора $\partial_t+\partial_x$ на рівняння (1.24) отримаємо

$$\begin{aligned}(X_x-T_t)\,\tilde f_{\tilde\omega}(X-T,U)+(U^0_t+U^0_x)\,\tilde f_{\tilde u}(X-T,U)\\ +\frac{T_{tt}X_x+T_tX_{xx}}{T_tX_x}\,\tilde f(X-T,U)=\frac{U^0_{ttx}+U^0_{txx}}{T_tX_x}.\end{aligned}$$

Оскільки функція $\tilde f$ є незв'язним значенням довільного елементу класу $\mathcal{K}_2$, то для обчислення групи $G_2^\sim$ можемо розщепити останнє рівняння відносно функції $\tilde f$ та її похідних. У результаті отримаємо рівняння $T_t=X_x$ та $U^0_t+U^0_x=0$ на параметри від яких залежить перетворення (1.7). Після інтегрування цих рівнянь отримаємо вигляд перетворень (1.23). $\square$

Придатна підалгебра $\mathfrak{s} = \langle \partial_t + \partial_x \rangle$ алгебри $\mathfrak{g}_{\langle\rangle}$ є ядром алгебри ліївської інваріантності рівнянь із класу $\mathcal{K}_2$. Іншими словами, випадок 2 — загальний випадок без розширень ліївських симетрій у цьому класі. Він ненормалізований, оскільки групоїд дії групи $G_2^\sim$ є власною підмножиною групоїда еквівалентності $\mathcal{G}_2^\sim$. Дійсно, багато рівнянь класу $\mathcal{K}_2$, наприклад, рівняння Ліувілля, допускають точкові симетрії, які не пов'язані з перетвореннями еквівалентності класу $\mathcal{K}_2$. Більш того, з теореми 1.31 нижче випливає, що клас $\mathcal{K}_2$ також не є напівнормалізованим. Таким чином, природно, що групові класифікації класу $\mathcal{K}_2$ з точністю до $\mathcal{G}_2^\sim$- та $G_2^\sim$-еквівалентностей є різними. Легко побачити з діаграми Хассе на рис. 1.1, що $\mathcal{G}_2^\sim$-нееквівалентні випадки розширень ліївських симетрій у класі $\mathcal{K}_2$ вичерпують випадки 6, 7, 9, 10, 12 та 13, і це приводить до повної групової класифікації цього класу з точністю до $\mathcal{G}_2^\sim$-еквівалентності. (У випадку 6 необхідно додатково змінити знак змінної x.)

Повна групова класифікація класу $\mathcal{K}_2$ із точністю до $G_2^\sim$-еквівалентності є більш складною задачею. Її можна отримати з групової класифікації надкласу $\mathcal{W}$ класу $\mathcal{K}_2$, який складають рівняння у змінних $(\check t, \check x, \check u)$ вигляду

$$\check u_{\check t\check t} - \check g(\check x, \check u)\check u_{\check x\check x} = \check f(\check x, \check u), \quad (\check g_{\check u}, \check f_{\check u\check u}) \neq (0, 0).$$

Очевидно, що клас $\mathcal{K}_2$ виділено із надкласу $\mathcal{W}$ за допомогою умови $\check g = 1$. Вичерпний груповий аналіз класу $\mathcal{W}$ проведено в роботі [130], де використано інше позначення для довільних елементів $\check g$ та $\check f$, $\check g \rightsquigarrow f$ та $\check f \rightsquigarrow g$. Група еквівалентності $G_{\mathcal{W}}^\sim$ та групоїд еквівалентності $\mathcal{G}_{\mathcal{W}}^\sim$ класу $\mathcal{W}$ описано відповідно в теоремах 6 та 9 роботи [130]. Групоїд дії групи еквівалентності $G_{\mathcal{W}}^\sim$ є власним підгрупоїдом групоїда $\mathcal{G}_{\mathcal{W}}^\sim$, тобто надклас $\mathcal{W}$ не є нормалізованим. Обмеження групоїда дії групи еквівалентності $G_{\mathcal{W}}^\sim$ на підклас $\mathcal{K}_2$ класу $\mathcal{W}$ співпадає з групоїдом дії групи еквівалентності $G_2^\sim$. Таким чином, повну групову класифікацію класу $\mathcal{K}_2$, з точністю до $G_2^\sim$-еквівалентності, можна виокремити із повної групової класифікації надкласу $\mathcal{W}$ з точністю до $G_{\mathcal{W}}^\sim$-еквівалентності, яка представлена в теоремі 8 роботи [130]. Оскільки калібрування $\breve{g}=1$, з точністю $G^{\sim}_{\mathcal{W}}$-еквівалентності, використовувалося для представлення можливих розширень лiївських симетрій, то для класифікації лiївських симетрій рівнянь із класу $\mathcal{K}_2$ з точністю $G^{\sim}_{2}$-еквівалентності достатньо виокремити всі випадки з таблиці 1 роботи [130] з $\breve{g}=1$, тобто $f=1$ у позначеннях роботи [130], та записати їх у змінних (t,x,u), а потім доповнити результат випадками 6 та 7 теореми 1.14, які є відповідними частинами випадків 1 та 2 з таблиці 1 в [130]. Таким чином, доведено теорему.

Теорема 1.30. *Повний список $G^{\sim}_{2}$-нееквівалентних розширень лiївських симетрій ядра алгебри лiївської інваріантності $\mathfrak{g}^{\cap}=\langle\partial_t+\partial_x\rangle$ у класі $\mathcal{K}_2$ вичерпують наступні випадки:*

2. *Загальний випадок* $f=\hat f(x-t,u)$: $\mathfrak{g}_f=\langle\partial_t+\partial_x\rangle$;

6. $f=\mathrm{e}^{-x+t}\hat f(\mathrm{e}^{x-t}u)$: $\mathfrak{g}_f=\langle\partial_t+u\partial_u,\ \partial_x-u\partial_u\rangle$;

7. $f=|x-t|^{-q-2}\hat f(|x-t|^{q}u),\ q\neq 0$:
$\mathfrak{g}_f=\langle\partial_t+\partial_x,\ t\partial_t+x\partial_x-qu\partial_u\rangle$;

9a. $f=\hat f(u)$: $\mathfrak{g}_f=\langle\partial_t,\ \partial_x,\ t\partial_t-x\partial_x\rangle$;

9b. $f=\hat f(u)\mathrm{e}^{x-t}$: $\mathfrak{g}_f=\langle\mathrm{e}^{t}\partial_t,\ \mathrm{e}^{-x}\partial_x,\ \partial_t+\partial_x\rangle$;

10a. $f=\hat f(u)(x-t)^{-2}$: $\mathfrak{g}_f=\langle\partial_t+\partial_x,\ t\partial_t+x\partial_x,\ t^2\partial_t+x^2\partial_x\rangle$;

10b. $f=\hat f(u)\cos^{-2}(x-t)$:
$\mathfrak{g}_f=\langle\partial_t+\partial_x,\ \cos 2t\,\partial_t-\cos 2x\,\partial_x,\ \sin 2t\,\partial_t-\sin 2x\,\partial_x\rangle$;

10c. $f=\hat f(u)\,\mathrm{ch}^{-2}(x-t)$:
$\mathfrak{g}_f=\langle\partial_t+\partial_x,\ \mathrm{e}^{2t}\partial_t-\mathrm{e}^{2x}\partial_x,\ \mathrm{e}^{-2t}\partial_t-\mathrm{e}^{-2x}\partial_x\rangle$;

10d. $f=\hat f(u)\,\mathrm{sh}^{-2}(x-t)$:
$\mathfrak{g}_f=\langle\partial_t+\partial_x,\ \mathrm{e}^{2t}\partial_t+\mathrm{e}^{2x}\partial_x,\ \mathrm{e}^{-2t}\partial_t+\mathrm{e}^{-2x}\partial_x\rangle$;

12a. $f=|u|^{p}u,\ p\neq -1,0$: $\mathfrak{g}_f=\langle\partial_t,\ \partial_x,\ t\partial_t-x\partial_x,\ -pt\partial_t+u\partial_u\rangle$;

12b. $f=|u|^{p}u\mathrm{e}^{x-t},\ p\neq -1,0$: $\mathfrak{g}_f=\langle\mathrm{e}^{t}\partial_t,\ \mathrm{e}^{-x}\partial_x,\ \partial_t+\partial_x,\ p\partial_t+u\partial_u\rangle$;

13. $f=\mathrm{e}^{u}$: $\mathfrak{g}_f=\langle\tau(t)\partial_t+\xi(x)\partial_x-(\tau_t(t)+\xi_x(x))\partial_u\rangle$.

Тут $\hat{f}$ — довільна гладка функція своїх аргументів із ненульовою другою похідною відносно аргументу, що включає змінну u, q та p — довільні сталі, які задовольняють умовам зазначеним у відповідних випадках. У випадку 13 компоненти τ та ξ пробігають множини гладких функцій відповідно змінних t або x.

Використовуємо дворівневу нумерацію для випадків класифікації у теоремі 1.30 для зазначення наявності додаткових еквівалентностей між цими випадками. Наприклад, номери з однаковими арабськими цифрами та різними римськими літерами відповідають випадкам, які є $G_2^\sim$-нееквівалентні, але є $\mathcal{G}_2^\sim$-еквівалентними, а тому є $G^\sim$-еквівалентними як розширення лiївських симетрій у класі $\mathcal{K}$. Відповідні випадки в теоремах 1.14 та 1.30 мають номери з однаковими арабськими цифрами.

Для знаходження всіх додаткових перетворень еквівалентності серед $G_2^\sim$-нееквівалентних класифікаційних випадків для класу $\mathcal{K}_2$, а отже, і для відповідної групової класифікації класу $\mathcal{K}_2$ з точністю до $G_2^\sim$-еквівалентності з точністю до $\mathcal{G}_2^\sim$-еквівалентності, потрібно класифікувати допустимі перетворення в класі $\mathcal{K}_2$ з точністю до $G_2^\sim$-еквівалентності. Опис групоїда еквівалентності $\mathcal{G}_2^\sim$ класу $\mathcal{K}_2$ можна отримати з теореми 9 роботи [130], аналогічно вищезазначеному отриманню групової класифікації $\mathcal{K}_2$ з точністю до $G_2^\sim$-еквівалентності. Див. необхідні поняття в [130, пункті 2].

Теорема 1.31. *Породжуюча (з точністю до $G_2^\sim$-еквівалентності) множина допустимих перетворень для класу $\mathcal{K}_2$, яка є мінімальною і несуперечливою відносно $G_2^\sim$-еквівалентності, є об'єднанням сімей допустимих перетворень $(f,\Phi,\tilde{f})$:*

T1. $f=\hat{f}(u),\quad \tilde{f}=-f,\quad \Phi\colon\quad \tilde{t}=-t,\quad \tilde{x}=x,\quad \tilde{u}=u;$

T2. $f=\hat{f}(u),\quad \tilde{f}=f,\quad \Phi\colon\quad \tilde{t}=t\mathrm{e}^{\gamma},\quad \tilde{x}=x\mathrm{e}^{-\gamma},\quad \tilde{u}=u,\quad \gamma\in\mathbb{R}_{\neq0};$

T3. $f=\hat{f}(u)\mathrm{e}^{x-t},\quad \tilde{f}=\hat{f}(\tilde{u}),\quad \Phi\colon\quad \tilde{t}=-\mathrm{e}^{-t},\quad \tilde{x}=\mathrm{e}^{x},\quad \tilde{u}=u;$

T4a. $f = \hat f(u)(x-t)^{-2}$, $\quad \tilde f = \hat f(\tilde u)(\tilde x - \tilde t)^{-2}$,

$\Phi\colon\quad \tilde t = t^{-1}, \quad \tilde x = x^{-1}, \quad \tilde u = u;$

T4b. $f = -\hat f(u)\cos^{-2}(x-t)$, $\quad \tilde f = \hat f(\tilde u)(\tilde x - \tilde t)^{-2}$,

$\Phi\colon\quad \tilde t = \operatorname{tg} t, \quad \tilde x = \operatorname{ctg} x, \quad \tilde u = u;$

T4c. $f = -\hat f(u)\operatorname{ch}^{-2}(x-t)$, $\quad \tilde f = \hat f(\tilde u)(\tilde x - \tilde t)^{-2}$,

$\Phi\colon\quad \tilde t = -\frac12 \mathrm{e}^{2t}, \quad \tilde x = \frac12 \mathrm{e}^{2x}, \quad \tilde u = u;$

T4d. $f = \hat f(u)\operatorname{sh}^{-2}(x-t)$, $\quad \tilde f = \hat f(\tilde u)(\tilde x - \tilde t)^{-2}$,

$\Phi\colon\quad \tilde t = \frac12 \mathrm{e}^{2t}, \quad \tilde x = \frac12 \mathrm{e}^{2x}, \quad \tilde u = u;$

T5. $f = \mathrm{e}^u$, $\quad \tilde f = \mathrm{e}^{\tilde u}$,

$\Phi\colon\quad \tilde t = T(t), \quad \tilde x = X(x), \quad \tilde u = u - \ln(T_t X_x),$

де (T, X) *пробігає повний набір представників класів суміжності множини* (T, X), $T_tX_x > 0$ *та* $(T_{tt}, X_{xx}) \neq (0,0)$, *відносно дії групи, утвореної перетвореннями вигляду* $\hat t = c_1 t + c_2$, $\hat x = c_1 x + c_3$, $\hat T = \tilde c_1 T + \tilde c_2$, $\hat X = \tilde c_1 X + \tilde c_3$, c_1, c_2, c_3, $\tilde c_1$, $\tilde c_2$ *та* $\tilde c_3$ *— довільні сталі,* $c_1\tilde c_1 \neq 0$.

На основі класифікації допустимих перетворень у класі $\mathcal{K}_2$ з точністю до $G_2^{\sim}$-еквівалентності можна прямо знайти всі незалежні додаткові перетворення еквівалентності серед класифікаційних випадків теореми 1.30. Цими перетвореннями є

T1: випадок $9\mathrm{a}_{\hat f} \to$ випадок $9\mathrm{a}_{-\hat f}$,

T3: випадок 9b $\to$ випадок 9a, випадок 12b $\to$ випадок 12a,

T4b: випадок 10b $\to$ випадок 10a,

T4c: випадок 10c $\to$ випадок 10a,

T4d: випадок 10d $\to$ випадок 10a.

1.6. Висновки до розділу

У даному розділі проведено повну (контактну) групову класифікацію класу (1.1) (1+1)-вимірних узагальнених нелінійних рівнянь Клейна–Ґордона з точністю до $G^{\sim}$-еквівалентності. Ці результати суттєво покращують відомі результати щодо ліївських симетрій таких рівнянь, які були отримані в новаторських роботах [92, 93]. По-перше, розширено результати роботи Лі [95] як показано в лемі 1.2, тобто будь-яке контактне допустиме перетворення у класі (1.1) є першим продовженням точкового допустимого перетворення у цьому класі. Іншими словами, дослідження структури контактних перетворень для рівнянь із класу (1.1) можна зведено до дослідження їх відповідних точкових перетворень. У лемі 1.4 доведено, що клас (1.1) є нормалізованим. Отже, за допомогою алгебраїчного методу групову класифікацію класу (1.1) зведено до класифікації придатних підалгебр проєкції $\varpi_*\mathfrak{g}^{\sim} = \mathfrak{g}_{\langle\rangle}$ алгебри еквівалентності $\mathfrak{g}^{\sim}$. Додатково до цього в процедурі класифікації використано специфічну структуру алгебри $\mathfrak{g}^{\sim}$ для подвійного застосування класичної теореми Лі про реалізації алгебр Лі векторними полями на прямій [94]. Більш того, нормалізація класу (1.1) означає, що групоїд дії [130] групи еквівалентності $G^{\sim}$ співпадає з усім групоїдом еквівалентності $\mathcal{G}^{\sim}$ класу (1.1). Отже, повна групова класифікація класу (1.1) з точністю до $G^{\sim}$-еквівалентності співпадає з його повною груповою класифікацією з точністю до $\mathcal{G}^{\sim}$-еквівалентності, яка є лише загальною точковою еквівалентністю цього класу. Іншими словами, немає додаткових точкових еквівалентностей між $G^{\sim}$-еквівалентними класифікаційними випадками.

Ліївські симетрії рівнянь із класу (1.1) розглянуто в параграфі 6 роботи [93], та випадки з дво-, три- та чотиривимірними алгебрами ліївської інваріантності наведено в таблиці 1 цієї роботи, див. також параграф V та таблицю I в роботі [92]. Випадки 1–6, 8 та 9 таблиці 1 та рівняння (5.4) в роботі [93] відповідають випадкам 5, 6, $7_{q=1}$, $8_{q=-1}$, 10, 11, 9, 12 та 13 теореми 1.14. Випадок 7 таблиці 1 в [93] потрібно виключити з класифікації, оскільки він еквівалентний випадку 9, див. обговорення випадку $(m,n,k)=(2,3,1)$ в параграфі 1.3. Випадки $7_{q\neq 1}$ та $8_{q\neq -1}$ пропущено в [93] через недопустиме нормування параметра q, див. зауваження 1.23.

Додатково вдалося покращити результати робіт [92, 93] за допомогою явного виокремлення рівнянь із класу (1.1) із нескінченновимірними максимальними алгебрами ліївської інваріантності в лемі 1.12. Показано, що будь-яке таке рівняння є $G^{\sim}$-еквівалентним рівнянню Ліувілля. Для інших рівнянь із класу (1.1), максимальні алгебри ліївської інваріантності яких є скінченновимірними, знайдено найменшу верхню межу для розмірностей таких алгебр, яка дорівнює чотирьом. Ще один інструмент для класифікації — це визначення трійок (m,n,k) $G^{\sim}$-інваріантних характеристик для кожного з випадків розширення ліївської симетрії у класі (1.1). Було строго обмежено множину кандидатів для відповідних значень трійки на етапі попереднього аналізу за допомогою леми 1.12 та теореми Лі. Остаточний відбір придатних значень було виконано у процесі групової класифікації. Важливим для спрощення обчислень на всіх етапах класифікації є те, що для рівнянь із класу (1.1), на відміну від еволюційних рівнянь, теорема Лі може бути використана як для t- так і для x-проєкцій векторних полів ліївської симетрії.

Хоча трійка характеристик (m,n,k) має просту інтерпретацію і є принциповою для доведення теореми 1.14, цієї трійки недостатньо для повного розрізнення $G^{\sim}$-нееквівалентних класифікаційних випадків. Таким чином, необхідно знайти якомога більше $G^{\sim}$-інваріантних цілих характеристик для класифікаційних випадків. Загалом було знайдено дванадцять таких характеристик: m, n, k, l, j_1, j_2, j_{12}, j_{13}, j_{23}, r_1, r_2 та r_3. Детальний аналіз показав, що повний набір цих дванадцяти характеристик є надлишковим. Як встановлено у зауваженні 1.25, ці характеристики не можуть утворювати пар і точно вісім трійок достатньо для розрізнення $G^{\sim}$-нееквівалентних класифікаційних випадків, і найбільш зручною трійкою є (r_3,j_1,r_2). Ця трійка разом із n має першочергове значення для ідентифікації пар $G^{\sim}$-нееквівалентних випадків класифікації у слабкому сенсі, які не представляють послідовних розширень ліївської симетрії, тобто пар (випадок $N,$ випадок $\bar{N}$) для яких (випадок $N \not\prec$ випадок $\bar{N}$), див. параграф 1.4. Щоб бути достатнім для цієї задачі, набір (n, r_3, r_2, j_1) слід розширити однією з характеристик k, m або r_1. І отримані таким чином три набори з п'яти характеристик вичерпують множину таких достатніх наборів мінімального розміру. У цьому ж параграфі за допомогою прямих обчислень показано, що всі інші пари $G^{\sim}$-нееквівалентні класифікаційні випадки дійсно відповідають послідовним розширенням ліївської симетрії. Результати класифікації підсумовано у вигляді діаграми Хассе на рис. 1.1, яка показує структуру частково впорядкованого набору $G^{\sim}$-нееквівалентних розширень ліївської симетрії у класі (1.1). Аналіз діаграми Хассе дозволяє легко розв'язати задачі групової класифікації для підкласів $\mathcal{K}_N$, $N \in \Gamma$, класу $\mathcal{K}$, які, при інтерпретації у слабкому сенсі, відповідають класифікаційним випадкам, наведено в теоремі 1.14; див. зауваження 1.15. Оскільки підкласи $\mathcal{K}_1$, ..., $\mathcal{K}_6$, $\mathcal{K}_{7,q}$, $\mathcal{K}_{8,q}$ та $\mathcal{K}_9$ не є нормалізованими, то групова класифікація будь-якого такого підкласу $\mathcal{K}_N$ з точністю до $G^{\sim}_N$-еквівалентності не є легкою. Останнє твердження проілюстровано в параграфі 1.5 на прикладі групової класифікації підкласу $\mathcal{K}_2$ з точністю до $G^{\sim}_N$-еквівалентності. Також обговорено процедуру використання теореми 1.14 для групової класифікації будь-якого підкласу класу $\mathcal{K}$ відносно групи еквівалентності цього підкласу.

Класифікація ліївських симетрій є першим необхідним кроком для розширеного симетрійного аналізу рівнянь із класу (1.1). Її можна використовувати для класифікації ліївських редукцій та подальшої побудови точних інваріантних розв'язків цих рівнянь. Оскільки загальний розв'язок рівняння Ліувілля є добре відомим, то ліївські редукції необхідно проводити лише для рівнянь із класу (1.1) зі скінченновимірними максимальними алгебрами ліївської інваріантності. У силу леми 1.12(iii) розмірність таких алгебр не перевищує чотири, а тому тут надзвичайно актуальною є класифікація підалгебр три- і чотиривимірних алгебр Лі, що отримана І. Патерою та П. Вінтерніцом [116]. Як приклад розглянемо випадок 10. Це єдиний випадок зі скінченнововимірною максимальною алгеброю ліївської інваріантності $\mathfrak{g}_f$, яка є нерозв'язною. Більш точно, вона ізоморфна алгебрі $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$. Її нееквівалентні одновимірні підалгебри та відповідні ліївські редукції до звичайних диференціальних рівнянь мають вигляд:

1. $\langle\partial_t+\partial_x\rangle\colon\quad u=\varphi(\omega),\quad \omega=x-t,\quad \varphi_{\omega\omega}=-\hat f(\varphi)\omega^{-2};$
2. $\langle t\partial_t+x\partial_x\rangle\colon\quad u=\varphi(\omega),\quad \omega=\frac12\ln|x|-\frac12\ln|t|,$
   $\varphi_{\omega\omega}=-\hat f(\varphi)\operatorname{sh}^{-2}\omega;$
3. $\langle(1+t^2)\partial_t+(1+x^2)\partial_x\rangle\colon\quad u=\varphi(\omega),\quad \omega=\operatorname{arctg}x-\operatorname{arctg}t,$
   $\varphi_{\omega\omega}=-\hat f(\varphi)\sin^{-2}\omega.$

Ліївські симетрії рівнянь із класу (1.1) також необхідні для класифікації операторів редукції цих рівнянь. Під час класифікації операторів редукції є природним виключати ті з них, які відповідають ліївським симетріям, тобто необхідно знаходити лише оператори редукції, що не є ліївськими. На жаль, загальний опис регулярних операторів редукції для рівнянь із класу $\mathcal{K}$ з роботи [137] не можна використовувати безпосередньо для опису операторів редукції окремих рівнянь із цього класу або для класифікації операторів редукції рівнянь, що утворюють його власні підкласи. Зазначимо, що систематичне дослідження сингулярних операторів редукції рівнянь із класу (1.1) проведено лише для рівнянь із $f=\hat f(u)$ [87, пункт 6], які утворюють підклас $\mathcal{K}_9$, тобто для випадку 9 теореми 1.14.

РОЗДІЛ 2

Допустимі перетворення та ліївські симетрії лінійних систем звичайних диференціальних рівнянь другого порядку

Трансформаційні властивості та ліївські симетрії звичайних диференціальних рівнянь — класичні об'єкти дослідження [4, 11, 40, 80, 99, 100, 112, 113, 127, 128], але нормальні системи звичайних диференціальних рівнянь, не кажучи вже про загальні системи таких рівнянь, майже не розглядалися. Найбільш дослідженими є системи звичайних диференціальних рівнянь одного і того ж порядку r. Вперше обґрунтовані верхні межі щодо розмірностей максимальних алгебр ліївської інваріантності таких систем отримано в роботах [72, 73]. Найменші верхні межі вперше знайдено виключно для частинних випадків $r = 2$ (див. [101, с. 68–69, теорема 44] для попереднього розгляду, а також [72, параграфи 4 та 5] та [62, 63] для подальших покращень) та $r = 3$ [62]. Ці межі дорівнюють $n^2 + 4n + 3$ та $n^2 + 3n + 3$, і з точністю до довільної точкової еквівалентності, їх можна досягти відповідно лише для елементарних систем $\mathrm{d}^2\boldsymbol{x}/\mathrm{d}t^2 = \mathbf{0}$ та $\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}/\mathrm{d}t^3 = \mathbf{0}$ [62]. Тут і далі n — кількість рівнянь у системах, $n \geqslant 2$, $\boldsymbol{x}(t) = \big(x^1(t), \dots, x^n(t)\big)^\mathsf{T}$ — невідома векторфункція незалежної змінної t. Див. також [74] для лінійних систем із $r = 2$, [1, 2, 106] для довільних систем із $r = 2$ та [103] для $r = 3$. Так звані фундаментальні інваріанти для систем із $r = 2$ вперше обчислено в роботах [62, 63]. Значно пізніше такі інваріанти для $r = 3$ та $r \geqslant 4$ отримано відповідно в роботах [103] та [60]. Із результатів останньої роботи випливає, що найменша верхня межа для розмірностей максимальних алгебр ліївської інваріантності систем фіксованого порядку $r \geqslant 4$ дорівнює $n^2 + rn + 3$, та з точністю до довільної точкової еквівалентності, це можливо лише для елементарної системи $\mathrm{d}^r\boldsymbol{x}/\mathrm{d}t^r = \boldsymbol{0}$. Для одного звичайного диференціального рівняння, тобто $n = 1$, аналогічні найменші верхні межі обчислено самим Софусом Лі для довільних значень r [99, с. 294–301], хоча цей результат Лі не є добре відомим і його неодноразово отримували повторно; див. обговорення у вступі до роботи [49].

Як підсумок вищезазначених результатів має місце наступна теорема.

Теорема 2.1. *Для довільного $n \in \mathbb{N}$ найменша верхня межа для розмірностей максимальних алгебр ліївської інваріантності нормальних систем n звичайних диференціальних рівнянь одного і того ж порядку r дорівнює $n^2 + 4n + 3$, якщо $r = 2$, та $n^2 + rn + 3$, якщо $r \geqslant 3$. Ця межа має місце лише для систем, які є еквівалентними відносно точкових перетворень елементарній системі $\mathrm{d}^r\boldsymbol{x}/\mathrm{d}t^r = \boldsymbol{0}$.*

Див. параграф 10 роботи [47] для подальшого обговорення випадку $r \geqslant 3$.

Нормальні системи n звичайних диференціальних рівнянь одного і того ж порядку $r = 2$ над комплексним або дійсним полем $\mathbb{F}$,

$$\boldsymbol{x}_{tt} = \boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_t), \tag{2.1}$$

є найбільш вивченими також і в інших аспектах; тут $\boldsymbol{x}_t = \mathrm{d}\boldsymbol{x}/\mathrm{d}t$, $\boldsymbol{x}_{tt} = \mathrm{d}^2\boldsymbol{x}/\mathrm{d}t^2$, $\boldsymbol{F}$ — довільна (достатньо гладка) векторнозначна функція змінних $(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_t)$. Системи звичайних диференціальних рівнянь такого вигляду закономірно виникають у різних ситуаціях у різноманітних областях математики та її застосуваннях, включаючи, зокрема, рівняння для геодезичних на многовидах у диференціальній геометрії, варіаційне числення, ньютонівські рівняння руху в класичній механіці, наприклад, у класичній задачі n тіл тощо. Деякі ліївські симетрії та трансформаційні властивості систем вигляду (2.1) описано з огляду на зв'язок таких систем із певними (рімановими, параболічними, картанівськими та ін.) геометріями при вивченні цих геометрій, див., наприклад, [55, 86] та цитовану там літературу. З цих результатів, із використанням методу фільтрованої деформації [85], випливає наступна теорема.

Теорема 2.2. *Підмаксимальна розмірність максимальних алгебр ліївської інваріантності систем вигляду* (2.1) *із* $n \geqslant 2$ *дорівнює* n^2+5*, і вона має місце лише для систем вигляду* (2.1)*, які еквівалентні відносно точкових перетворень у просторі* $\mathbb{F}_t \times \mathbb{F}^n_{\boldsymbol{x}}$ *(нелінеаризованій) системі*

$$x^1_{tt} = (x^2_t)^3, \quad x^2_{tt} = 0, \quad \dots, \quad x^n_{tt} = 0. \tag{2.2}$$

Систему (2.2) досліджено в роботах [55, с. 694] для $n = 2$ та [86, твердження 5.3.2] для довільного $n \geqslant 2$. Базис алгебри максимальної ліївської інваріантності системи (2.2) утворено векторними полями

$$\begin{gathered}\partial_{x^a}, \quad t\partial_{x^a} + \tfrac{3}{2}\delta_{a2}(x^2)^2\partial_{x^1}, \quad x^b\partial_{x^c},\ {}_{b\neq 1,\, c\neq 2}, \quad 3x^1\partial_{x^1} + x^2\partial_{x^2},\\ \partial_t, \quad t\partial_t - x^1\partial_{x^1}, \quad t^2\partial_t + tx^d\partial_{x^d} + \tfrac{1}{2}(x^2)^3\partial_{x^1},\end{gathered}$$

де $a, b, c, d = 1, \dots, n$, а за повторюваними індексами йде підсумовування, δ_{a2} — символ Кронекера. Хоча систему (2.2) не можна лінеаризувати, але її інтегрування тривіально можна звести до інтегрування (елементарних) лінійних систем.

Більш того, аналогічна теорема має місце для наступної можливої меншої розмірності n^2+4 [85].

Теорема 2.3. *З точністю до точкової еквівалентності існує єдина система вигляду* (2.1) *із* $n \geqslant 2$*, розмірність максимальної алгебри ліївської інваріантності якої дорівнює* n^2+4*. Це, наприклад, лінійна система*

$$x^1_{tt} = x^2, \quad x^2_{tt} = 0, \quad \dots, \quad x^n_{tt} = 0. \tag{2.3}$$

Максимальну алгебру ліївської інваріантності системи (2.3) утворюють векторні поля:

$$\partial_t,\quad t\partial_t+2x^1\partial_{x^1},\quad x^b\partial_{x^c},\ {}_{b\neq1,\,c\neq2},\quad x^1\partial_{x^1}+x^2\partial_{x^2},$$
$$\partial_{x^a}+\tfrac12\delta_{a2}t^2\partial_{x^1},\quad t\partial_{x^a}+\tfrac16\delta_{a2}t^3\partial_{x^1},$$

де використано позначення наведені вище. Система (2.3) — приклад системи з підмаксимальною розмірністю максимальних алгебр ліївської інваріантності лінійних систем вигляду (2.1), див. теорему 2.29. З урахуванням теореми 2.3, не є несподіваним, що систему Єгорова $\boldsymbol{x}_{tt}=2x^1x^1_tx^2_t\boldsymbol{x}_t$ [86, рівняння (5.11)], максимальна алгебра ліївської інваріантності якої (n^2+4)-вимірна [86, рівняння (5.12)], можна звести до лінійної системи (2.3) за допомогою точкового перетворення

$$\tilde t=x^1,\quad \tilde x^1=t+\frac12(x^1)^2x^2,\quad \tilde x^a=x^a,\quad a=2,\dots,n.$$

На жаль, у літературі немає загальних результатів щодо допустимих перетворень між системами вигляду (2.1) і щодо їх ліївських симетрій для довільного $n\geqslant2$, крім розглянутих вище. Більшість частинних результатів, що відомі для таких систем на сьогодні, пов'язані з їх лінеаризацією. Зокрема, необхідні та достатні умови лінеаризації за допомогою точкових перетворень систем вигляду (2.1) із $n=2$ знайдено в роботі [33]. Класи розв'язних та/або інтегрованих та/або лінеаризованих систем вигляду (2.1), які можна трактувати як динамічні системи для класичних задач багатьох тіл у розмірностях один, два та три, побудовано в серії монографій та робіт Ф. Калоджеро, див. [51,52] та цитовану там літературу. Тому навіть лінійні системи з класу (2.1) є на сьогодні привабливими і нетривіальними об'єктами для дослідження з точки зору їх ліївських симетрій та пов'язаних із ними трансформаційних властивостей. Групова класифікація таких систем приводить до прикладів алгебр Лі векторних полів, які допускають системи вигляду (2.1) як їх максимальні алгебри ліївської інваріантності, і які розмірності цих алгебр можливі крім відомих максимальних та підмаксимальних значень.

Це також важливо для розв'язання задачі лінеаризації та інтегрування систем із класу (2.1).

Нижче детально в рамках групового аналізу диференціальних рівнянь досліджено клас лінійних систем вигляду (2.1), тобто клас $\bar{\mathcal{L}}$ нормальних лінійних систем n звичайних диференціальних рівнянь другого порядку,

$$\boldsymbol{x}_{tt} = A(t)\boldsymbol{x}_t + B(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}(t), \tag{2.4}$$

з n невідомими функціями x^1, ..., x^n, $\boldsymbol{x}(t) = \big(x^1(t), \dots, x^n(t)\big)^\mathsf{T}$, $n \geqslant 2$. Розгляд проводимо над комплексним або дійсним полем, тобто $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ або $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Набір $\theta = (A, B, \boldsymbol{f})$ довільних елементів класу $\bar{\mathcal{L}}$ утворено довільними (достатньо гладкими) $n \times n$ матричнозначними функціями A та B змінної t і довільною (достатньо гладкою) векторнозначною функцією $\boldsymbol{f}$ змінної t. Розглянемо різноманітні об'єкти, що пов'язані з класом $\bar{\mathcal{L}}$, та опишемо їх властивості. Зокрема, зручні калібрування набору довільних елементів θ, ієрархію підкласів класу $\bar{\mathcal{L}}$, групоїди еквівалентності, групи еквівалентності та алгебри еквівалентності цих підкласів та їх нормалізаційні властивості, максимальні та суттєві алгебри ліївської інваріантності систем із цих підкласів, структуру таких алгебр та оцінки їх розмірності, а також використання перетворень еквівалентності та ліївських симетрій для пониження порядку систем вигляду (2.4) та для їх інтегрування.

Системи з класу $\bar{\mathcal{L}}$ з довільним значенням $n \geqslant 2$ також недостатньо вивчені в літературі, за винятком певних дуже частинних випадків. Ліївські симетрії систем із класу $\bar{\mathcal{L}}$ з $A = 0$ та сталою матрицею B розглянуто в серії робіт [53, 54, 75, 104, 132] для малих значень n (щонайбільше шість). Задача групової класифікації для таких систем у випадку довільного $n \geqslant 2$ детально досліджено в роботі [48]; системи з класу $\bar{\mathcal{L}}$ зі сталими комутативними матрицями A та B можна звести до таких систем. Розгляд ліївських симетрій всього класу $\bar{\mathcal{L}}$ для фіксованого значення $n = 2$ розпочато в роботі [133], а пізніше продовжено в роботах [105, 108, 109]; див. параграф 2.8 щодо вичерпного розв'язання задачі групової класифікації для цього класу. Випадок $n = 3$ частково розглянуто в [129].

Позначення. Нижче індекси a, b, c та d пробігають значення від 1 до n, тобто $a, b, c, d = 1, \dots, n$, та використовуємо умову підсумовування для повторюваних індексів. Функції з індексами позначають похідні за відповідними змінними. Там де суттєво, вказуємо (відкриту) область простору $\mathbb{F}$, яку пробігає змінна t в певній ситуації, і позначаємо цю область як $\mathcal{I}$. Інтерпретуємо диференціальні рівняння та точкові перетворення між ними в рамках локального підходу. У груповому аналізі диференціальних рівнянь параметр або довільні функції вважають аналітичними або, якщо $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, гладкими. Тим не менше, у багатьох випадках необхідний порядок гладкості можна понизити до скінченної неперервної диференційовності.

E — $n \times n$ одинична матриця. Для квадратної матриці M матриці $M_{\rm s}$ та $M_{\rm n}$ — напівпроста і нільпотентна частини матриці M в її розкладі Жордана–Шевальє, $M = M_{\rm s} + M_{\rm n}$. Фіксуючи базис в $\mathbb{F}^n$, ототожнюємо лінійні оператори у просторі $\mathbb{F}^n$ з їх матрицями в цьому базисі. $[M_1, M_2]$ — комутатор квадратних матриць M_1 та M_2 однієї і тієї ж розмірності, $[M_1, M_2] := M_1M_2 - M_2M_1$. У контексті рівнянь із матричнозначними функціями зручно інтерпретувати (сталі) матриці як сталі матричнозначні функції. Наприклад, рівняння вигляду $[M, V] = 0$ та $V = M$ для матричнозначних функцій V змінної t та сталої матриці M відповідно означають, що $[M, V(t)] = 0$ та $V(t) = M$ для будь-якого $t \in \mathcal{I}$.

Для заданого класу $\mathcal{K}$ систем диференціальних рівнянь із набором довільних елементів θ використовуємо також це ж позначення θ для довільного фіксованого значення цього набору довільних елементів. $\mathcal{G}^\sim_{\mathcal{K}}$, $G^\sim_{\mathcal{K}}$, $\mathfrak{g}^\sim_{\mathcal{K}}$, $G^{\rm s\sim}_{\mathcal{K}}$, $\mathfrak{g}^{\rm s\sim}_{\mathcal{K}}$ та $\mathcal{G}^{G^\sim_{\mathcal{K}}}$ — відповідно (псевдо)групоїд еквівалентності, звичайна (псевдо)група еквівалентності, звичайна (псевдо)алгебра еквівалентності, суттєва звичайна (псевдо)група еквівалентності та суттєва звичайна (псевдо)алгебра еквівалентності цього класу і групоїд дії групи $G^{\sim}_{\mathcal{K}}$. Нижче префікс "псевдо" для вищевказаних об'єктів опускаємо. Оскільки розглядаємо лише звичайні групи еквівалентності та звичайні алгебри еквівалентності, також опускаємо характеристику "звичайна" для цих об'єктів. Для фіксованого значення θ через K_θ, G_θ, $\mathfrak{g}_\theta$ та $\mathcal{G}_\theta$ позначаємо систему в класі $\mathcal{K}$ пов'язану з цим значенням θ, повну групу точкової симетрії цієї системи, максимальну алгебру ліївської інваріантності та відповідну вертексну групу у групоїді еквівалентності $\mathcal{G}^{\sim}_{\mathcal{K}}$. Див. роботу [130] та цитовану там літературу для відповідних означень пов'язаних із точковими або контактними перетвореннями у класах диференціальних рівнянь.

Позначення $\mathcal{K}' \hookleftarrow \mathcal{K}$, де $\mathcal{K}'$ також є класом систем диференціальних рівнянь із набором довільних елементів θ' (піднабір у наборі θ), означає, що клас $\mathcal{K}'$ можна вкласти в клас $\mathcal{K}$ як підклас. Іншими словами, клас $\mathcal{K}'$ можна отримати з класу $\mathcal{K}$ шляхом накладання додаткових алгебраїчних рівнянь на елементи набору θ, підставляючи вирази для головних компонент набору θ з огляду на ці рівняння в системах із класу $\mathcal{K}$ та репараметризуючи клас $\mathcal{K}$ в клас $\mathcal{K}'$ за допомогою виключення головних компонент із набору θ, і як результат отримаємо набір θ'; щодо термінології див. додаток у роботі [47]. Використовуємо термін "алгебраїчне рівняння" у значенні протилежному до "бути дійсно диференціальним".

Незалежно від розглядуваного класу через ϖ позначимо проєкцію із простору, що пробігає спільний набір незалежних і залежних змінних та довільних елементів класу, на простір, що пробігає набір незалежних та залежних змінних. Аналогічно, через π позначимо проєкцію з простору з координатами $(t, \boldsymbol{x})$ на простір однієї координати t, $\pi\colon \mathbb{F}_t \times \mathbb{F}^n_{\boldsymbol{x}} \to \mathbb{F}_t$. Використовуємо нижній індекс (відповідно верхній індекс) "$*$" для позначення підняття (відповідно опускання) векторного поля за допомогою перетворення.

Для заданої алгебри Лі $\mathfrak{g}$ та її підмножини S визначимо централізатор $\mathrm{C}_\mathfrak{g}(\mathsf{S})$ та нормалізатор $\mathrm{N}_\mathfrak{g}(\mathsf{S})$ підмножини S в алгебрі $\mathfrak{g}$:

$$\mathrm{C}_\mathfrak{g}(\mathsf{S}) := \{u \in \mathfrak{g} \mid [u, v] = 0 \ \forall v \in \mathsf{S}\},$$
$$\mathrm{N}_\mathfrak{g}(\mathsf{S}) := \{u \in \mathfrak{g} \mid [u, v] \in \mathsf{S} \ \forall v \in \mathsf{S}\}.$$

Структура цього розділу є наступною. Параграф 2.1 присвячено побудові груп еквівалентності та групоїдів еквівалентності класу $\bar{\mathcal{L}}$ та його вкладених підкласів, що отримані за допомогою калібрування набору довільних елементів $\theta = (A, B, \boldsymbol{f})$ із використанням перетворень еквівалентності. Послідовно накладаючи калібрування $\boldsymbol{f} = \mathbf{0}$, $A = 0$ та $\operatorname{tr} B = 0$, репараметризуючи виокремленні підкласи після кожного з перших двох калібрувань, виключаємо $\boldsymbol{f}$, а потім A з набору довільних елементів відповідних класів. У результаті отримано ланцюжок класів $\bar{\mathcal{L}} \hookleftarrow \mathcal{L} \hookleftarrow \mathcal{L}' \supset \mathcal{L}''$. Зокрема, клас $\mathcal{L}$ — “однорідна” частина класу $\bar{\mathcal{L}}$, тобто містить однорідні системи вигляду (2.4), де $\boldsymbol{f} = \mathbf{0}$. Доведено, що вищенаведені класи напівнормалізовані у звичайному сенсі, орбіта елементарної системи $\boldsymbol{x}_{tt} = \mathbf{0}$ у кожному з них під дією відповідної групи еквівалентності є сингулярною частиною цього класу, і є доповненням до орбіти, яку вважаємо регулярною частиною класу, і яка має кращі властивості нормалізації, ніж весь цей клас. Алгебри еквівалентності всіх класів, їх сингулярних і регулярних частин обчислено в параграфі 2.2 як інфінітезимальні аналоги відповідних груп еквівалентності. У параграфі 2.3 показано, що групові класифікації класу $\bar{\mathcal{L}}$ та каліброваних підкласів можна розбити на групові класифікації їх сингулярних та регулярних частин. Задачі групової класифікації сингулярних частин є тривіальними, оскільки їх розв’язання визначено елементарною системою $\boldsymbol{x}_{tt} = \mathbf{0}$ та її максимальною алгеброюліївської інваріантності. Отримано системи визначальних рівнянь для ліївських симетрій систем із регулярних частин класу і показано, що задачі групової класифікації для цих частин можна звести до класифікації суттєвих розширень ліївської симетрії цих регулярних підкласів. Також обчислено ядро групи точкових симетрій для всіх класів, що виникають у цьому розгляді. Властивості можливих суттєвих розширень ліївської симетрії у регулярних частинах класу досліджено в параграфі 2.4. Використовуючи отримані властивості, запропоновано два шляхи класифікації таких розширень у рамках алгебраїчного підходу в залежності від їх структури. При вивченні ліївських розширень із ненульовими проєкціями на t-пряму, потрібно розпізнати еквівалентні системи серед тих, що утворені векторними полями ліївської симетрії зі сталими t-компонентами. Необхідні та достатні умови такої еквівалентності представлено в параграфі 2.5. Отримані знання про властивості суттєвих ліївських розширень у регулярних частинах класу дозволили знайти максимальну розмірність максимальних алгебр ліївської інваріантності систем, яка є підмаксимальною для всього класу $\bar{\mathcal{L}}$ та його каліброваних підкласів, див. параграф 2.6. У цьому параграфі детально описано структуру суттєвих алгебр ліївської інваріантності систем із регулярних частин класу та охарактеризовано максимальні алгебри ліївської інваріантності систем із сингулярних частин класу. У параграфі 2.7 доведено кілька тверджень щодо пониження порядку для нормальних лінійних систем звичайних диференціальних рівнянь другого порядку та їх інтегрування з використанням відомих ліївських симетрій або перетворень еквівалентності між ними. Методи, які розроблено в параграфі 2.4, використано в параграфі 2.8 для вичерпного розв'язання задачі групової класифікації нормальних лінійних систем звичайних диференціальних рівнянь другого порядку для найнижчого частинного значення $n = 2$. У параграфі 2.9 коротко підсумовано основні результати цього розділу та обговорено деякі відкриті проблеми та можливі напрямки подальших досліджень.

Результати цього розділу висвітлено в роботах [17–20, 47].

2.1. Групоїди еквівалентності та групи еквівалентності

Очевидно, що група еквівалентності $G^{\sim}_{\bar{\mathcal{L}}}$ класу $\bar{\mathcal{L}}$ містить підгрупу, утворену перетвореннями

$$\tilde{t} = t, \quad \tilde{\boldsymbol{x}} = H(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{h}(t), \tag{2.5a}$$

$$\begin{aligned} &\tilde{A} = (HA + 2H_t)H^{-1}, \qquad \tilde{B} = (HB - \tilde{A}H_t + H_{tt})H^{-1}, \\ &\tilde{\boldsymbol{f}} = H\boldsymbol{f} + \boldsymbol{h}_{tt} - \tilde{A}\boldsymbol{h}_t - \tilde{B}\boldsymbol{h}, \end{aligned} \tag{2.5б}$$

де H — довільна невироджена $n \times n$ матричнозначна функція змінної t, $\boldsymbol{h}$ — довільна векторнозначна функція змінної t. Кожну фіксовану систему $\bar{L}_\theta$ з класу $\bar{\mathcal{L}}$ можна відобразити за допомогою перетворення вигляду (2.5), де H задовольняє матричне рівняння $H_t + \frac{1}{2}HA = 0$, а $\boldsymbol{h}$ — частинний розв'язок $\bar{L}_\theta$, в систему $\bar{L}_{\tilde{\theta}}$ з того ж класу, де $\tilde{A} = 0$, $\tilde{B} = H\big(B - \frac{1}{2}A_t + \frac{1}{4}A^2\big)H^{-1}$ та $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$. Таким чином, зводимо дослідження класу $\bar{\mathcal{L}}$ до дослідження його підкласу $\mathcal{L}'$ виокремленого за допомогою обмежень $A = 0$ та $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$. Далі тривіально репараметризуємо клас $\mathcal{L}'$, виключаючи A та $\boldsymbol{f}$ із набору довільних елементів для цього класу і повторно перепозначаючи B через V, тобто системи з класу $\mathcal{L}'$ набувають вигляду

$$\boldsymbol{x}_{tt} = V(t)\boldsymbol{x}, \tag{2.6}$$

де V — довільна $n \times n$ матричнозначна функція змінної t, тобто $V = V(t) = \big(V^{ab}(t)\big)$. Зауважимо, що згідно із загальним позначенням, введеним вище, через L'_V позначаємо систему з класу $\mathcal{L}'$, що відповідає фіксованому значенню матричнозначної параметр-функції V. Сім'я перетворень еквівалентності вигляду (2.5), де матрично- та векторнозначні параметр-функції H та $\boldsymbol{h}$ — відповідно розв'язки матричного рівняння $H_t + \frac{1}{2}HA = 0$ та системи $\bar{L}_\theta$ з початковими умовами $H(t_0) = E$ та $\boldsymbol{h}(t_0) = \boldsymbol{h}_t(t_0) = \boldsymbol{0}$ для фіксованої точки t_0 із області $\mathcal{I}$, яку пробігає змінна t, індукує відображення класу $\bar{\mathcal{L}}$ у свій підклас $\mathcal{L}'$.

Розглянемо підклас $\mathcal{L}'_0$ класу $\mathcal{L}'$, що утворено системами L'_V у класі $\mathcal{L}'$ з $V(t)=v(t)E$ для будь-якого $t\in\mathcal{I}$, де v пробігає множину функцій змінної t, $\{V(t)\mid t\in\mathcal{I}\}\subseteq\langle E\rangle$. Щодо таких матричнозначних функцій V кажемо, що V — пропорційна одиничній матриці E із залежним від часу коефіцієнтом пропорційності. Іншими словами, підклас $\mathcal{L}'_0$ виокремлено з класу $\mathcal{L}'$ за допомогою алгебраїчних рівнянь

$$V^{ab}=0,\quad a\neq b,\quad V^{11}=\dots=V^{nn}. \tag{2.7}$$

Цей підклас можна репараметризувати, вважаючи спільне значення v діагональних елементів матриці V як єдиний довільний елемент цього підкласу. Нехай $\mathcal{L}'_1:=\mathcal{L}'\setminus\mathcal{L}'_0$, а тому $\mathcal{L}'=\mathcal{L}'_0\sqcup\mathcal{L}'_1$.

Наступна теорема описує структуру групоїда $\mathcal{G}^{\sim}_{\mathcal{L}'}$.

Теорема 2.4. *(i) Групу еквівалентності $G^{\sim}_{\mathcal{L}'}$ класу $\mathcal{L}'$ утворюють перетворення вигляду*[2.1]

$$\tilde t=T(t),\quad \tilde{\boldsymbol{x}}=T_t^{1/2}C\boldsymbol{x}, \tag{2.8а}$$

$$\tilde V=\frac{1}{T_t^2}CVC^{-1}+\frac{2T_tT_{ttt}-3T_{tt}^2}{4T_t^4}E, \tag{2.8б}$$

де $T=T(t)$ — довільна функція змінної t, $T_t\neq0$, C — довільна невироджена стала $n\times n$ матриця. Група еквівалентності підкласу $\mathcal{L}'_1$ і канонічно суттєва група еквівалентності підкласу $\mathcal{L}'_0$ співпадають із групою $G^{\sim}_{\mathcal{L}'}$.

(ii) Розбиття класу $\mathcal{L}'$ на підкласи $\mathcal{L}'_0$ та $\mathcal{L}'_1$ індукує розбиття групоїда $\mathcal{G}^{\sim}_{\mathcal{L}'}$ на підгрупоїди $\mathcal{G}^{\sim}_{\mathcal{L}'_0}$ та $\mathcal{G}^{\sim}_{\mathcal{L}'_1}$, $\mathcal{G}^{\sim}_{\mathcal{L}'}=\mathcal{G}^{\sim}_{\mathcal{L}'_0}\sqcup\mathcal{G}^{\sim}_{\mathcal{L}'_1}$.

(iii) Підклас $\mathcal{L}'_1$ є однорідно напівнормалізованим відносно лінійної суперпозиції розв'язків.

(iv) Підклас $\mathcal{L}'_0$ — $G^{\sim}_{\mathcal{L}'}$-орбіта елементарної системи L'_0, і цей підклас як і весь клас $\mathcal{L}'$ є напівнормалізованими у звичайному сенсі.

[2.1] Для квадратного кореня з T_t у виразі для $\tilde x$ слід використовувати замість T_t модуль (абсолютне значення) T_t у дійсному випадку або зафіксувати гілку квадратного кореня у комплексному випадку.

Доведення. Обчислюємо групу еквівалентності $G^{\sim}_{\mathcal{L}'}$ класу $\mathcal{L}'$ використовуючи прямий метод. Цей клас формально визначаємо як сукупність систем диференціальних рівнянь із єдиною незалежною змінною t та n залежними змінними x^a, які мають загальний вигляд (2.6). Довільний елемент V пробігає множину розв'язків допоміжної системи матричних рівнянь

$$V_{x^a} = V_{x^a_t} = V_{x^a_{tt}} = 0. \tag{2.9}$$

Система (2.9) еквівалентна умові, що елементи матриці V залежать щонайбільше від змінної t. З урахуванням цього факту, простір із координатами $(t, \boldsymbol{x}, V)$ можна вибрати як простір-носій для групи $G^{\sim}_{\mathcal{L}'}$, порівняй [89, примітка 1] та [114, примітка 1]. Іншими словами, можна припустити, що група $G^{\sim}_{\mathcal{L}'}$ утворена точковими перетвореннями у просторі з координатами $(t, \boldsymbol{x}, V)$, яка проєктовна на простір із координатами $(t, \boldsymbol{x})$ і чиї власні продовження зберігають об'єднану систему (2.6) та (2.9). Загальний вигляд таких перетворень:

$$\mathcal{T}\colon\quad \tilde t = T(t, \boldsymbol{x}), \quad \tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{X}(t, \boldsymbol{x}), \quad \tilde V = \mathcal{V}(t, \boldsymbol{x}, V),$$

де $\boldsymbol{X} = (X^1, \dots, X^n)^{\mathsf{T}}$ та $\mathcal{V} = (\mathcal{V}^{ab})$. Для кожного перетворення $\mathcal{T}$ його компоненти T та X^a — функції на області $\Omega \subseteq \mathbb{F}_t \times \mathbb{F}^n_{\boldsymbol{x}}$ з $J := \big|\partial(T, \boldsymbol{X})/\partial(t, \boldsymbol{x})\big| \neq 0$ у кожній точці області Ω, компоненти $\mathcal{V}^{ab}$ — функції на області $\Omega \times \Theta$, де Θ є відкритою підмножиною $\mathbb{F}^{n^2}_V$, і якобіан елементів $\mathcal{V}$ відносно елементів V є ненульовим у кожній точці області $\Omega \times \Theta$. За допомогою опускання відносно проєкції ϖ з $\mathbb{F}_t \times \mathbb{F}^n_{\boldsymbol{x}} \times \mathbb{F}^{n^2}_V$ на $\mathbb{F}_t \times \mathbb{F}^n_{\boldsymbol{x}}$, можна вважати, що компоненти T та X^a визначені на $\Omega \times \Theta$ також. Продовження $\mathcal{T}_{(2,\boldsymbol{x})}$ перетворення $\mathcal{T}$ до $\boldsymbol{x}_t$ та $\boldsymbol{x}_{tt}$ можна обчислити за допомогою ланцюгового правила,

$$\tilde{\boldsymbol{x}}_{\tilde t} = \boldsymbol{X}^t := \frac{\mathrm{D}_t \boldsymbol{X}}{\mathrm{D}_t T}, \quad \tilde{\boldsymbol{x}}_{\tilde t \tilde t} = \boldsymbol{X}^{tt} := \frac{1}{\mathrm{D}_t T} \mathrm{D}_t \left(\frac{\mathrm{D}_t \boldsymbol{X}}{\mathrm{D}_t T} \right), \tag{2.10}$$

де $\mathrm{D}_t = \partial_t + x^a_t \partial_{x^a} + x^a_{tt} \partial_{x^a_t} + \cdots$ — оператор повної похідної за змінною t, що пов'язаний із простором струменів $\mathrm{J}^\infty(\mathbb{F}_t, \mathbb{F}^n_{\boldsymbol{x}})$. Отже, перетворення $\mathcal{T}_{(2,\boldsymbol{x})}$ діє на просторі $\mathrm{J}^2(\mathbb{F}_t, \mathbb{F}^n_{\boldsymbol{x}}) \times \mathbb{F}^{n^2}_V$, де простір струменів другого порядку $\mathrm{J}^2(\mathbb{F}_t, \mathbb{F}^n_{\boldsymbol{x}})$ можна ототожнити з $\mathbb{F}_t \times \mathbb{F}^n_{\boldsymbol{x}} \times \mathbb{F}^n_{\boldsymbol{x}_t} \times \mathbb{F}^n_{\boldsymbol{x}_{tt}}$. Подальше продовження $(\mathcal{T}_{(2,\boldsymbol{x})})_{(1,V)}$ перетворення $\mathcal{T}_{(2,\boldsymbol{x})}$ до перших похідних матриці V відносно $(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_t, \boldsymbol{x}_{tt})$ визначаємо матричними рівняннями

$$T_t\tilde{V}_{\tilde{t}} + X^a_t\tilde{V}_{\tilde{x}^a} + X^{t,a}_t\tilde{V}_{\tilde{x}^a_{\tilde{t}}} + X^{tt,a}_t\tilde{V}_{\tilde{x}^a_{\tilde{t}\tilde{t}}} = \mathcal{V}_t + V^{ab}_t\mathcal{V}_{V^{ab}}, \tag{2.11а}$$

$$T_{x^c}\tilde{V}_{\tilde{t}} + X^a_{x^c}\tilde{V}_{\tilde{x}^a} + X^{t,a}_{x^c}\tilde{V}_{\tilde{x}^a_{\tilde{t}}} + X^{tt,a}_{x^c}\tilde{V}_{\tilde{x}^a_{\tilde{t}\tilde{t}}} = \mathcal{V}_{x^c} + V^{ab}_{x^c}\mathcal{V}_{V^{ab}}, \tag{2.11б}$$

$$T_{x^c_t}\tilde{V}_{\tilde{t}} + X^a_{x^c_t}\tilde{V}_{\tilde{x}^a} + X^{t,a}_{x^c_t}\tilde{V}_{\tilde{x}^a_{\tilde{t}}} + X^{tt,a}_{x^c_t}\tilde{V}_{\tilde{x}^a_{\tilde{t}\tilde{t}}} = \mathcal{V}_{x^c_t} + V^{ab}_{x^c_t}\mathcal{V}_{V^{ab}}, \tag{2.11в}$$

$$T_{x^c_{tt}}\tilde{V}_{\tilde{t}} + X^a_{x^c_{tt}}\tilde{V}_{\tilde{x}^a} + X^{t,a}_{x^c_{tt}}\tilde{V}_{\tilde{x}^a_{\tilde{t}}} + X^{tt,a}_{x^c_{tt}}\tilde{V}_{\tilde{x}^a_{\tilde{t}\tilde{t}}} = \mathcal{V}_{x^c_{tt}} + V^{ab}_{x^c_{tt}}\mathcal{V}_{V^{ab}}. \tag{2.11г}$$

З урахуванням збереження об'єднаної системи (2.6) та (2.9) під дією перетворень $\mathcal{T}$, можемо одночасно покласти $V_{x^a} = V_{x^a_t} = V_{x^a_{tt}} = 0$ та $\tilde{V}_{\tilde{x}^a} = \tilde{V}_{\tilde{x}^a_{\tilde{t}}} = \tilde{V}_{\tilde{x}^a_{\tilde{t}\tilde{t}}} = 0$ у системі (2.11). Тоді рівняння (2.11в) та (2.11г) є тотожностями, оскільки компоненти перетворення $\mathcal{T}$ не залежать від $\boldsymbol{x}_t$ та $\boldsymbol{x}_{tt}$. Рівняння (2.11б) зводимо до рівнянь $T_{x^c}\tilde{V}_{\tilde{t}} = \mathcal{V}_{x^c}$. Оскільки ці рівняння не включають довільного елементу V та його похідних, то після подальшого розщеплення відносно незв'язних похідних $\tilde{V}^{ab}_{\tilde{t}}$ отримаємо рівняння $T_{x^c} = 0$ та $\mathcal{V}_{x^c} = 0$. Таким чином, $T = T(t)$ з $T_t \neq 0$, оскільки $J \neq 0$.

Для отримання системи визначальних рівнянь для компонент перетворення $\mathcal{T}$ послідовно підставляємо відповідно вирази $\boldsymbol{X}^{tt}$, T, $\boldsymbol{X}$ та $V\boldsymbol{x}$ для $\tilde{\boldsymbol{x}}_{\tilde{t}\tilde{t}}$, $\tilde{t}$, $\tilde{\boldsymbol{x}}$ та $\boldsymbol{x}_{tt}$ у систему $\tilde{\boldsymbol{x}}_{\tilde{t}\tilde{t}} = \tilde{V}(\tilde{t})\tilde{\boldsymbol{x}}$, враховуючи, що $T = T(t)$. Як результат приходимо до системи

$$\begin{aligned} &T_t(X^a_{tt} + 2X^a_{tb}x^b_t + X^a_{bc}x^b_tx^c_t + X^a_bV^{bc}x^c) \\ &\qquad - T_{tt}(X^a_t + X^a_dx^d_t) - T^3_t\tilde{V}^{ab}X^b = 0, \end{aligned} \tag{2.12}$$

де $X^a_b := \partial X^a/\partial x^b$ тощо. Оскільки перша похідна $\boldsymbol{x}_t$ є незв'язною, то можна розщепити систему (2.12) відносно компонент цих похідних. Збирання коефіцієнтів при доданках, які є квадратичними відносно похідних, приводить до рівнянь $X^a_{bc}T_t = 0$, тобто $X^a_{bc} = 0$. Це означає, що $\boldsymbol{X} = H(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{h}(t)$ для невиродженої $n \times n$ матричнозначної функції $H = (H^{ab})$ змінної t та векторнозначної функції

$\boldsymbol{h} = (h^1, \ldots, h^n)^\mathsf{T}$ змінної t. Для кожного b збираємо коефіцієнти при x^b_t у системі (2.12) при отриманих обмеженнях і в результаті приходимо до системи $2X^a_{tb}T_t - X^a_b T_{tt} = 0$ або в еквівалентній формі $\left(H^{ab}T_t^{-1/2}\right)_t = 0$, інтегруючи яку знаходимо $H = T_t^{1/2}C$, де C — стала невироджена $n \times n$ матриця; див. також примітку 2.1 для коректної інтерпретації $T_t^{1/2}$. Підстановка отриманих виразів для T та $\boldsymbol{X}$ в інші рівняння системи (2.12), що не включають члени з першими похідними за змінними $\boldsymbol{x}$, приводить до рівняння

$$T_t(H_{tt}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{h}_{tt} + HV\boldsymbol{x}) - T_{tt}(H_t\boldsymbol{x} + \boldsymbol{h}) - T_t{}^3\tilde{V}(H\boldsymbol{x} + \boldsymbol{h}) = \boldsymbol{0}.$$

Після подальшого розщеплення відносно $\boldsymbol{x}$ знаходимо V-компоненту в перетвореннях еквівалентності,

$$\begin{aligned}\tilde{V} &= \frac{1}{T_t{}^2}\left(H_{tt} + HV - \frac{T_{tt}}{T_t}H_t\right)H^{-1}\\ &= \frac{1}{T_t^2}CVC^{-1} + \frac{2T_tT_{ttt} - 3T_{tt}{}^2}{4T_t{}^4}E,\end{aligned}\tag{2.13}$$

та систему

$$T_t\boldsymbol{h}_{tt} - T_{tt}\boldsymbol{h} - T_t{}^3\tilde{V}\boldsymbol{h} = \boldsymbol{0}.\tag{2.14}$$

Розщеплюючи систему (2.14) відносно перетворених довільних елементів $\tilde{V}^{ab}$, отримаємо $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{0}$. Таким чином, будь-який елемент групи $G^\sim_{\mathcal{L}'}$ має вигляд (2.8) і будь-яке перетворення цього вигляду належить групі $G^\sim_{\mathcal{L}'}$.

Очевидно, що дія групи $G^\sim_{\mathcal{L}'}$ на клас $\mathcal{L}'$ зберігає його підкласи $\mathcal{L}'_0$ та $\mathcal{L}'_1$. Більш того, при обчисленні групи еквівалентності підкласу $\mathcal{L}'_1$, систему (2.12) можна розщепити так само, як і при обчисленні групи $G^\sim_{\mathcal{L}'}$, тоді отримаємо той же вигляд (2.8) для елементів цієї групи як і для елементів групи $G^\sim_{\mathcal{L}'}$. Отже, група еквівалентності підкласу $\mathcal{L}'_1$ співпадає з групою $G^\sim_{\mathcal{L}'}$.

Для підкласу $\mathcal{L}'_0$ допоміжну систему (2.9) можна доповнити алгебраїчними рівняннями (2.7). Далі повторюємо вищезазначену процедуру для цього підкласу, розщеплюючи відносно $\tilde{v}_{\tilde{t}}$ та $\tilde{v}$ замість $\tilde{V}^{ab}_{\tilde{t}}$ та $\tilde{V}^{ab}$, де $\tilde{v}$ позначає спільне значення елементів $\tilde{V}^{11}, \dots, \tilde{V}^{nn}$. Єдина різниця в результатах полягає в тому, що тепер матричне співвідношення (2.13) виконано для матриці V, яка задовольняє рівняння (2.7). Умова збереження додаткової допоміжної системи (2.7) при перетвореннях $\mathcal{T}$ є незалежною від об'єднаної системи (2.6) та (2.9). З цього випливає, що $\mathcal{V}^{ab} = 0$, $a \neq b$, $\mathcal{V}^{11} = \dots = \mathcal{V}^{nn}$ при $V^{ab} = 0$, $a \neq b$, $V^{11} = \dots = V^{nn}$. Останню умову узгоджено зі співвідношенням (2.13). Проведений розгляд означає, що канонічно суттєва група еквівалентності підкласу $\mathcal{L}'_0$ також співпадає з групою $G^{\sim}_{\mathcal{L}'}$, що завершує доведення пункту (i) теореми.

Для обчислення групоїдів еквівалентності класу $\mathcal{L}'$ також застосовуємо прямий метод. Припустимо, що трійка $(V, \Phi, \tilde{V})$ є допустимим перетворенням класу $\mathcal{L}'$. Тут Φ — точкове перетворення у просторі з координатами $(t, \boldsymbol{x})$,

$$\Phi\colon\ \tilde{t} = T(t, \boldsymbol{x}),\ \tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{X}(t, \boldsymbol{x}), \quad (t, \boldsymbol{x}) \in \Omega \subseteq \mathbb{F}^{n+1},$$

де

$$\boldsymbol{X} = (X^1, \dots, X^n)^{\mathsf{T}}, \qquad J := \left|\frac{\partial(T, \boldsymbol{X})}{\partial(t, \boldsymbol{x})}\right| \neq 0$$

що відображає систему L'_V в систему $L'_{\tilde{V}}$. Друге продовження перетворення Φ обчислюємо у відповідності з формулами (2.10). Для отримання системи визначальних рівнянь для компонент перетворення Φ та виразу для $\tilde{V}$ в термінах V, T та $\boldsymbol{X}$ підставляємо в систему $L'_{\tilde{V}}$ наведений вище вираз для $\tilde{\boldsymbol{x}}_{\tilde{t}\tilde{t}}$, а потім відповідно T, $\boldsymbol{X}$ та $V\boldsymbol{x}$ для $\tilde{t}$, $\tilde{\boldsymbol{x}}$ та $\boldsymbol{x}_{tt}$. Як результат отримаємо систему

$$\begin{aligned}(X^a_{tt} + 2X^a_{tb}x^b_t + X^a_{bc}x^b_t x^c_t + X^a_b V^{bc}x^c)(T_t + T_d x^d_t)\\ - (T_{tt} + 2T_{tb}x^b_t + T_{bc}x^b_t x^c_t + T_b V^{bc}x^c)(X^a_t + X^a_d x^d_t)\\ - \tilde{V}^{ab}X^b(T_t + T_c x^c_t)^3 = 0,\end{aligned} \tag{2.15}$$

де $T_a := \partial T/\partial x^a$ тощо, яка є аналогом системи (2.12). Для дослідження системи (2.15) зручним є інший підхід. Для кожного значення a ліва частина системи (2.15) і всі її частини є поліномами відносно компонент $\boldsymbol{x}_t$ з коефіцієнтами, що залежать від змінних $(t, \boldsymbol{x})$. Поліном $P_T := T_t + T_d x_t^d$ ділить перший і третій доданки в (2.15). Отже, він ділить і другий доданок. Якщо степінь полінома P_T (відносно компонент $\boldsymbol{x}_t$) рівний одиниці, тоді цей поліном ділить коефіцієнт у другому доданку, і він є першим коефіцієнтом, оскільки інакше $J = 0$. Подільність першого коефіцієнта на P_T є тривіальною, якщо P_T не залежить від $\boldsymbol{x}_t$. У результаті існують функції Λ^0 та Λ^a змінних $(t, \boldsymbol{x})$ такі, що

$$T_{tt} + 2T_{tb}x_t^b + T_{bc}x_t^b x_t^c + T_b V^{bc} x^c = (\Lambda^0 + \Lambda^c x_t^c)(T_t + T_d x_t^d), \tag{2.16а}$$

$$\begin{aligned} &X_{tt}^a + 2X_{tb}^a x_t^b + X_{bc}^a x_t^b x_t^c + X_b^a V^{bc} x^c \\ &\quad = (\Lambda^0 + \Lambda^c x_t^c)(X_t^a + X_d^a x_t^d) + \tilde{V}^{ab} X^b (T_t + T_c x_t^c)^2. \end{aligned} \tag{2.16б}$$

Ввівши позначення $x^0 := t$, $X^0 := T$ та $\tilde{V}^{0b} := 0$, представляємо рівняння (2.16а) та (2.16б) в уніфікованому вигляді:

$$X_{\lambda\mu}^\kappa x_t^\lambda x_t^\mu + X_b^\kappa V^{bc} x^c (x_t^0)^2 = \Lambda^\mu x_t^\mu X_\nu^\kappa x_t^\nu + \tilde{V}^{\kappa b} X^b (X_\mu^0 x_t^\mu)^2. \tag{2.17}$$

Тут і до кінця доведення, індекси κ, λ, μ та ν пробігають значення від 0 до n. Розщеплення системи (2.16) відносно $(x_t^b)_{b=1,\dots,n}$ є еквівалентним розщепленню системи (2.17) відносно $(x_t^\lambda)_{\lambda=0,\dots,n}$, що приводить до повної системи визначальних рівнянь для допустимих перетворень у класі $\mathcal{L}'$:

$$X_{\lambda\mu}^\kappa = \frac{1}{2}(\Lambda^\mu X_\lambda^\kappa + \Lambda^\lambda X_\mu^\kappa) + \tilde{V}^{\kappa b} X^b X_\lambda^0 X_\mu^0 - X_b^\kappa V^{bc} x^c \delta_{0\lambda}\delta_{0\mu}, \tag{2.18}$$

де $\delta_{0\lambda}$ — символ Кронекера.

З урахуванням тривіальної тотожності $\partial_\nu X_{\lambda\mu}^\kappa = \partial_\mu X_{\lambda\nu}^\kappa$ для кожного фіксованого значення (κ, λ, μ) диференціюємо відповідне рівняння в системі (2.18) відносно x^ν з $\nu \neq \mu$ і віднімаємо отриманий диференціальний наслідок (2.18) від аналогічного наслідку з переставленими μ та ν. У результаті отримаємо рівняння

$$\frac{1}{2}X_\lambda^\kappa K^{\mu\nu} + \frac{1}{2}X_\mu^\kappa M^{\lambda\nu} - \frac{1}{2}X_\nu^\kappa M^{\lambda\mu} + \tilde{V}^{\kappa b}(X_\nu^b X_\mu^0 - X_\mu^b X_\nu^0)X_\lambda^0$$

$$- X_b^\kappa V^{bc}(\delta_{c\nu}\delta_{0\mu} - \delta_{c\mu}\delta_{0\nu})\delta_{0\lambda} = 0, \quad \mu \neq \nu, \tag{2.19}$$

де $K^{\mu\nu} := \Lambda^\mu_\nu - \Lambda^\nu_\mu$ (звідси $K^{\mu\nu} = -K^{\nu\mu}$) та

$$M^{\lambda\nu} := \Lambda^\lambda_\nu - \frac{1}{2}\Lambda^\nu\Lambda^\lambda + \Lambda^b V^{bc} x^c \delta_{0\nu}\delta_{0\lambda}.$$

Виберемо кожну пару рівнянь вигляду (2.19) з тими ж значеннями κ, μ та ν, різними значеннями λ та λ', множимо ці рівняння відповідно на $2X^0_{\lambda'}$ та $2X^0_\lambda$ та віднімаємо друге отримане рівняння від першого. У результаті маємо

$$\begin{aligned} &K^{\mu\nu} X^0_{\lambda'} \bar{\boldsymbol{X}}_\lambda - K^{\mu\nu} X^0_\lambda \bar{\boldsymbol{X}}_{\lambda'} + (M^{\lambda\nu} X^0_{\lambda'} - M^{\lambda'\nu} X^0_\lambda)\bar{\boldsymbol{X}}_\mu \\ &\quad - (M^{\lambda\mu} X^0_{\lambda'} - M^{\lambda'\mu} X^0_\lambda)\bar{\boldsymbol{X}}_\nu \\ &\quad - 2V^{bc}(\delta_{c\nu}\delta_{0\mu} - \delta_{c\mu}\delta_{0\nu})(\delta_{0\lambda} X^0_{\lambda'} - \delta_{0\lambda'} X^0_\lambda)\bar{\boldsymbol{X}}_b = \mathbf{0}, \\ &\quad \mu \neq \nu, \quad \lambda \neq \lambda', \end{aligned} \tag{2.20}$$

де $\bar{\boldsymbol{X}} = (X^0, \dots, X^n)^\mathsf{T}$. Права частина системи (2.20) є кососиметричною відносно (μ, ν) та відносно (λ, λ'), і отже, її незалежні рівняння вичерпують, наприклад, ті, де $\mu < \nu$ та $\lambda < \lambda'$. Набори функцій $\bar{\boldsymbol{X}}_\mu$, $\mu = 0, \dots, n$, — лінійно незалежні в кожній точці $(t, \boldsymbol{x}) \in \Omega$, оскільки $J = \det(X^\kappa_\lambda) \neq 0$ на області Ω. Це означає, що можна розщепити систему (2.20), збираючи коефіцієнти при $\bar{\boldsymbol{X}}_\lambda$ для кожного фіксованого значення λ, і прирівнюючи їх до нуля.

Припустимо, що існує b таке, що $X^0_b \neq 0$.

Якщо $n \geqslant 3$, то для кожного значення з набору індексів $(\lambda, \lambda', \mu, \nu)$ з $0 = \lambda \neq \lambda'$ та $0 < \mu < \nu$ або з $\lambda \neq \lambda'$, $\lambda\lambda' \neq 0$, $0 = \mu < \nu$ та $\nu \neq \lambda$, після збирання коефіцієнтів при $\bar{\boldsymbol{X}}_\lambda$, отримаємо $K^{\mu\nu} X^0_{\lambda'} = 0$. В останній системі нижній індекс λ' пробігає значення від 1 до n, і отже, $K^{\mu\nu} = 0$ для будь-якого $\mu, \nu = 0, \dots, n$.

У випадку $n = 2$ збираємо коефіцієнти при $\bar{\boldsymbol{X}}_0$ у рівняннях із системи (2.20) із $(\lambda, \lambda', \mu, \nu) = (0, a, 1, 2)$, $a \in \{1, 2\}$, та отримаємо рівняння $K^{12} X^0_a = 0$, з яких випливає, що $K^{12} = 0$. Далі збираємо коефіцієнти при $\bar{\boldsymbol{X}}_1$ та $\bar{\boldsymbol{X}}_2$ в тих же рівняннях із системи (2.20) і це приводить до рівнянь $M^{0a}X^0_b - M^{ba}X^0_0 = 0$. Розглядаючи коефіцієнти при $\bar{\boldsymbol{X}}_2$ та $\bar{\boldsymbol{X}}_0$ у рівняннях (2.20) відповідно з $(\lambda, \lambda', \mu, \nu) = (1, 2, 0, 1)$ та $(\lambda, \lambda', \mu, \nu) = (0, 2, 0, 1)$, отримаємо $K^{01}X^0_1 = 0$ та $K^{01}X^0_2 + M^{01}X^0_2 - M^{21}X^0_0 = 0$. Звідси також $K^{01}X^0_2 = 0$, і з урахуванням рівняння $K^{01}X^0_1 = 0$ маємо, що $K^{01} = 0$. Аналогічно отримаємо, що $K^{02} = 0$. Як результат, у підсумку знову маємо, що $K^{\mu\nu} = 0$ для будь-яких $\mu, \nu = 0, \dots, n$.

Далі, враховуючи останню умову, розглянемо рівняння із системи (2.20) з $\nu = \lambda' = 0$, і отже, $\mu\lambda \neq 0$. Збираючи коефіцієнти при $\bar{\boldsymbol{X}}_b$ з $b \neq \mu$ та $\bar{\boldsymbol{X}}_\mu$, отримаємо відповідно рівняння $V^{b\mu}X^0_\lambda = 0$ з $b \neq \mu$ та $M^{\lambda 0}X^0_0 - M^{00}X^0_\lambda - 2V^{\mu\mu}X^0_\lambda = 0$. Після віднімання останнього рівняння від аналогічного рівняння, де μ замінено на $\mu' \notin \{0, \mu\}$, отримаємо $(V^{\mu\mu} - V^{\mu'\mu'})X^0_\lambda = 0$. Оскільки індекс λ тут набуває значень від 1 до n, то з отриманих рівнянь випливає, що $V^{ab} = 0$ та $V^{aa} = V^{bb}$ для $a \neq b$. (Вище немає підсумовування відносно повторюваних індексів μ, μ', a та b.)

У результаті довели, що матричнозначна функція V пропорційна одиничній матриці E із залежним від часу коефіцієнтом пропорційності, якщо $X^0_b \neq 0$ для деякого b.

Таким чином, для інших значень матричнозначної параметр-функції V маємо, що $X^0_b = 0$ для будь-якого b, тобто t-компонента T перетворення Φ залежить лише від t, $T = T(t)$ та $T_t \neq 0$, оскільки $J \neq 0$. Тоді з рівнянь (2.16а) випливає, що $\Lambda^c = 0$, а отже, збираючи коефіцієнти при квадратах від $\boldsymbol{x}_t$ у рівняннях (2.16б), отримаємо, що $X^a_{bc} = 0$ для будь-яких a, b та c. Подальші обчислення basовано на системі (2.15). Вони є аналогічними наведеним вище обчисленням групи $G^\sim_{\mathcal{L}'}$ і приводять у результаті до співвідношення (2.13) між початковим і перетвореним набором довільних елементів V та $\tilde{V}$, а також до системи (2.14), яка означає, що композиція $\boldsymbol{h} \circ \tilde{T}$ перетворення $\boldsymbol{h}$ з оберненим перетворенням $\tilde{T}$ є розв'язком системи $L'_{\tilde{V}}$. Звідси матричнозначні функції V та $\tilde{V}$ одночасно непропорційні одиничній матриці E з коефіцієнтами пропорційності, що залежать від часу. Іншими словами, дія групоїда $\mathcal{G}^{\sim}_{\mathcal{L}'}$ зберігає підклас $\mathcal{L}'_1$, а звідси також підклас $\mathcal{L}'_0$, оскільки це доповнення підкласу $\mathcal{L}'_1$ в класі $\mathcal{L}'$, що і доводить пункт (ii). Більш того, будь-яке допустиме перетворення в класі $\mathcal{L}'_1$ — це композиція двох допустимих перетворень, одне визначене перетворенням еквівалентності, що зв'язує систему L'_V з системою $L'_{\tilde V}$, а друге пов'язане з лінійною суперпозицією розв'язків системи $L'_{\tilde V}$, а отже, виконано пункт (iii). Очевидно, що підклас $\mathcal{L}'_0$ — $G^{\sim}_{\mathcal{L}'}$-орбіта системи L'_0, оскільки будь-яка система з підкласу $\mathcal{L}'_0$ є $G^{\sim}_{\mathcal{L}'}$-еквівалентною до елементарної системи L'_0. Отже, підкласи $\mathcal{L}'_0$ та $\mathcal{L}'_1$ є напівнормалізованими у звичайному сенсі і допускають ту ж групу еквівалентності, а з цього випливає напівнормалізованість всього класу $\mathcal{L}'$, що і завершує доведення пункту (iv) теореми. □

Зауваження 2.5. Група еквівалентності репараметризованого підкласу $\mathcal{L}'_0$, де $v = v(t)$ з $V = vE$ вважаємо єдиним довільним елементом замість матриці V довільних елементів, утворена точковими перетвореннями у просторі з координатами $(t, \boldsymbol{x}, v)$, $(t, \boldsymbol{x})$- та v-компоненти яких відповідно задаємо через (2.8a) та

$$\tilde v = \frac{1}{T_t^2}v + \frac{2T_tT_{ttt} - 3T_{tt}^2}{4T_t^4}.$$

Зауваження 2.6. Позначимо через $\mathcal{G}^{G^{\sim}_{\mathcal{L}'}}|_{\mathcal{L}'_0}$, $\mathcal{G}^{G^{\sim}_{\mathcal{L}'}}|_{\mathcal{L}'_1}$, $\mathcal{G}^{\rm lin}_{\mathcal{L}'_1}$ та $\mathcal{G}_0$ обмеження дії групоїда $\mathcal{G}^{G^{\sim}_{\mathcal{L}'}}$ групи еквівалентності $G^{\sim}_{\mathcal{L}'}$ відповідно на підкласи $\mathcal{L}'_0$ та $\mathcal{L}'_1$, групопоїд, що відповідає лінійній суперпозиції розв'язків у підкласі $\mathcal{L}'_0$, та вертексна група системи L'_0,

$$\mathcal{G}^{G^{\sim}_{\mathcal{L}'}}|_{\mathcal{L}'_0} = \mathcal{G}^{G^{\sim}_{\mathcal{L}'}} \cap \mathcal{G}^{\sim}_{\mathcal{L}'_0}, \quad \mathcal{G}^{G^{\sim}_{\mathcal{L}'}}|_{\mathcal{L}'_1} = \mathcal{G}^{G^{\sim}_{\mathcal{L}'}} \cap \mathcal{G}^{\sim}_{\mathcal{L}'_1}, \quad \mathcal{G}^{\rm lin}_{\mathcal{L}'_1} \subset \mathcal{G}^{\rm f}_{\mathcal{L}'_1},$$

де $\mathcal{G}^{\rm f}_{\mathcal{L}'_1}$ — фундаментальний групоїд підкласу $\mathcal{L}'_1$. Пункт (iv) теореми 2.4 можна переформульовати у термінах допустимих перетворень наступним чином: для будь-якого перетворення $\mathcal{T} \in \mathcal{G}^{\sim}_{\mathcal{L}'_0}$ існують перетворення $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_3 \in \mathcal{G}^{G^{\sim}_{\mathcal{L}'}}|_{\mathcal{L}'_0}$ та $\mathcal{T}_2 \in \mathcal{G}_0$ такі, що $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 \star \mathcal{T}_2 \star \mathcal{T}_3$. Тут "$\star$" — операція композиції допустимих перетворень [130]. Оскільки $\mathcal{G}^{\rm lin}_{\mathcal{L}'_1}$ є нормальним підгрупоїдом $\mathcal{G}^{\sim}_{\mathcal{L}'_1}$, то пункт (iii) теореми 2.4 означає, що $\mathcal{G}^{\sim}_{\mathcal{L}'_1}$ є напівпрямим добутком $\mathcal{G}^{G^{\sim}_{\mathcal{L}'}}|_{\mathcal{L}'_1}$ та $\mathcal{G}^{\mathrm{lin}}_{\mathcal{L}'_1}$.

З теореми 2.4 можемо отримати описи групоїдів еквівалентності надкласів $\bar{\mathcal{L}}$ та $\mathcal{L}$. Допоміжна система для довільних елементів класу $\bar{\mathcal{L}}$ має вигляд

$$A_{x^a} = A_{x^a_t} = A_{x^a_{tt}} = 0, \quad B_{x^a} = B_{x^a_t} = B_{x^a_{tt}} = 0,$$
$$\boldsymbol{f}_{x^a} = \boldsymbol{f}_{x^a_t} = \boldsymbol{f}_{x^a_{tt}} = 0,$$

і його доповнення до класу $\mathcal{L}$ є його підсистемою, що містить рівняння на A та B, але не на $\boldsymbol{f}$. Позначимо через $\bar{\mathcal{L}}_0$ та $\mathcal{L}_0$ відповідно $G^{\sim}_{\bar{\mathcal{L}}}$- та $G^{\sim}_{\mathcal{L}}$-орбіти елементарної системи $\boldsymbol{x}_{tt} = \boldsymbol{0}$ і нехай $\bar{\mathcal{L}}_1 := \bar{\mathcal{L}} \setminus \bar{\mathcal{L}}_0$ та $\mathcal{L}_1 := \mathcal{L} \setminus \mathcal{L}_0$. З розгляду на початку цього параграфа випливає, що підкласи $\bar{\mathcal{L}}_0$ та $\mathcal{L}_0$ відповідно виокремлено з їх надкласів $\bar{\mathcal{L}}$ та $\mathcal{L}$ за допомогою умови, що матричнозначна функція $B - \frac{1}{2}A_t + \frac{1}{4}A^2$ є пропорційною одиничній матриці E із залежним від часу коефіцієнтом пропорційності. Іншими словами, розширення допоміжних систем для $\bar{\mathcal{L}}_0$ та $\mathcal{L}_0$ визначено рівняннями

$$\left(B - \frac{1}{2}A_t + \frac{1}{4}A^2\right)^{ab} = 0, \quad a \neq b,$$
$$\left(B - \frac{1}{2}A_t + \frac{1}{4}A^2\right)^{11} = \cdots = \left(B - \frac{1}{2}A_t + \frac{1}{4}A^2\right)^{nn}.$$

Теорема 2.7. *(i) Групу еквівалентності $G^{\sim}_{\bar{\mathcal{L}}}$ класу $\bar{\mathcal{L}}$ утворюють перетворення вигляду*

$$\tilde{t} = T(t), \quad \tilde{\boldsymbol{x}} = H(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{h}(t), \tag{2.21а}$$
$$\tilde{A} = T_t^{-2}(T_tHA + 2T_tH_t - T_{tt}H)H^{-1}, \tag{2.21б}$$
$$\tilde{B} = T_t^{-3}(T_tHB - T_t^{2}\tilde{A}H_t + T_tH_{tt} - T_{tt}H_t)H^{-1}, \tag{2.21в}$$
$$\tilde{\boldsymbol{f}} = T_t^{-3}(T_tH\boldsymbol{f} + T_t\boldsymbol{h}_{tt} - T_{tt}\boldsymbol{h}_t - T_t^{2}\tilde{A}\boldsymbol{h}_t - T_t^{3}\tilde{B}\boldsymbol{h}), \tag{2.21г}$$

де $T = T(t)$ — довільна функція змінної t з $T_t \neq 0$, H — довільна невироджена $n \times n$ матричнозначна функція змінної t та $\boldsymbol{h}$ — довільна *векторнозначна функція змінної t. Групи еквівалентності підкласів $\bar{\mathcal{L}}_1$ та $\bar{\mathcal{L}}_0$ співпадають із групою $G^{\sim}_{\bar{\mathcal{L}}}$.*

(ii) Розбиття класу $\bar{\mathcal{L}}$ на його підкласи $\bar{\mathcal{L}}_0$ та $\bar{\mathcal{L}}_1$ індукує розбиття групоїда $\mathcal{G}^{\sim}_{\bar{\mathcal{L}}}$ на його підгрупоїди $\mathcal{G}^{\sim}_{\bar{\mathcal{L}}_0}$ та $\mathcal{G}^{\sim}_{\bar{\mathcal{L}}_1}$, $\mathcal{G}^{\sim}_{\bar{\mathcal{L}}} = \mathcal{G}^{\sim}_{\bar{\mathcal{L}}_0} \sqcup \mathcal{G}^{\sim}_{\bar{\mathcal{L}}_1}$.

(iii) Підклас $\bar{\mathcal{L}}_1$ є нормалізованим у звичайному сенсі.

(iv) Підклас $\bar{\mathcal{L}}_0$ та весь клас $\bar{\mathcal{L}}$ є нормалізованими у звичайному сенсі.

Доведення. За допомогою прямих обчислень легко перевірити, що будь-яке перетворення вигляду (2.21) є перетворенням еквівалентності класу $\bar{\mathcal{L}}$ та його підкласів $\bar{\mathcal{L}}_0$ та $\bar{\mathcal{L}}_1$. Доведемо одночасно з іншими твердженнями теореми, що цей клас не має інших перетворень еквівалентності.

Розглянемо будь-які дві подібні системи $\bar{L}_\theta$ та $\bar{L}_{\tilde\theta}$ з класу $\bar{\mathcal{L}}$, і нехай системи L'_V та $L'_{\tilde V}$ з класу $\mathcal{L}'$ є відповідно образами систем $\bar{L}_\theta$ та $\bar{L}_{\tilde\theta}$ при відображенні класу $\bar{\mathcal{L}}$ у клас $\mathcal{L}'$, що введені в першому абзаці цього параграфа. Якщо $\bar{L}_\theta \in \bar{\mathcal{L}}_0$, тоді $L'_V \in \mathcal{L}'_0$, $L'_{\tilde V} \in \mathcal{L}'_0$, а отже $\bar{L}_{\tilde\theta} \in \bar{\mathcal{L}}_0$. Таким чином, підклас $\bar{\mathcal{L}}_0$ можна зберегти під дією групи $\mathcal{G}^{\sim}_{\bar{\mathcal{L}}}$ на клас $\bar{\mathcal{L}}$. Тоді підклас $\bar{\mathcal{L}}_1$ також можна зберегти як доповнення до підкласу $\bar{\mathcal{L}}_0$ у класі $\bar{\mathcal{L}}$, що і доводить пункт (ii).

Нехай Φ та $\tilde\Phi$ — точкові перетворення вигляду (2.5a), які пов'язані з цими системами при вищенаведеному відображенні, $\Phi_*\bar{L}_\theta = L'_V$ та $\tilde\Phi_*\bar{L}_{\tilde\theta} = L'_{\tilde V}$, та нехай Ψ — точкове перетворення, що відображає систему $\bar{L}_\theta$ в систему $\bar{L}_{\tilde\theta}$. Тоді перетворення $\hat\Psi := \tilde\Phi \circ \Psi \circ \Phi^{-1}$ відображає систему L'_V в систему $L'_{\tilde V}$.

Розглянемо окремо випадки $\bar{L}_\theta \in \bar{\mathcal{L}}_1$ та $\bar{L}_\theta \in \bar{\mathcal{L}}_0$.

Для $\bar{L}_\theta \in \bar{\mathcal{L}}_1$ маємо, що $L'_V \in \mathcal{L}'_1$. З пункту (iii) теореми 2.4 випливає, що перетворення $\hat\Psi$ — композиція точкового перетворення вигляду (2.8a) і точкового перетворення симетрії, що відповідає лінійній суперпозиції розв'язків для системи $L'_{\tilde V}$, тоді як співвідношення між V та $\tilde V$ задано за допомогою формули (2.8б). Звідси перетворення $\Psi = \tilde\Phi^{-1} \circ \hat\Psi \circ \Phi$ має вигляд (2.21a), а набори довільних елементів θ та $\tilde\theta$ пов'язані між собою за допомогою формул (2.21б) та (2.21в). Іншими словами, будь-яке допустиме перетворення в підкласі $\bar{\mathcal{L}}_1$ індукує перетворення еквівалентності вигляду (2.21). Таким чином, підклас $\bar{\mathcal{L}}_1$ є нормалізованим у звичайному сенсі. Оскільки в цьому підкласі не існує нетотожних несуттєвих або калібрувальних перетворень еквівалентності, то його групу еквівалентності вичерпують перетворення у просторі з координатами $(t, \boldsymbol{x}, A, B, \boldsymbol{f})$, компоненти яких визначено формулами (2.21).

Для $\bar{L}_\theta \in \bar{\mathcal{L}}_0$ маємо, що $L'_V \in \mathcal{L}'_0$, і тоді тут релевантним є пункт (iv) теореми 2.4. Перетворення $\hat{\Psi}$ — композиція перетворення вигляду (2.8а) і точкового перетворення симетрії системи $L'_{\tilde{V}}$, тоді як співвідношення між V та $\tilde{V}$ все ще визначаємо за допомогою формули (2.8б). Це означає, що набори довільних елементів θ та $\tilde{\theta}$ знову пов'язані між собою за допомогою формул (2.21б) та (2.21в), а перетворення $\Psi = \tilde{\Phi}^{-1}\circ\hat{\Psi}\circ\Phi$ — композиція точкового перетворення вигляду (2.21а) і точкового перетворення симетрії системи $\bar{L}_{\tilde{\theta}}$. Таким чином, будь-яке допустиме перетворення в підкласі $\bar{\mathcal{L}}_0$ — композиція допустимого перетворення індукованого перетворенням еквівалентності вигляду (2.21) і компоненти вертексної групи для відповідного перетвореного довільного елементу. Єдиним несуттєвим або калібрувальним перетворенням еквівалентності в підкласі $\bar{\mathcal{L}}_0$ є тотожне перетворення. Це означає, що підклас $\bar{\mathcal{L}}_0$ є напівнормалізованим у звичайному сенсі, і його групу еквівалентності вичерпують ті ж перетворення, що і для підкласу $\bar{\mathcal{L}}_1$.

Оскільки групи еквівалентності підкласів $\bar{\mathcal{L}}_0$ та $\bar{\mathcal{L}}_1$ співпадають, то і ці підкласи можна зберегти під дією групоїда $\mathcal{G}^{\sim}_{\bar{\mathcal{L}}}$ на класі $\bar{\mathcal{L}}$, група еквівалентності всього класу $\bar{\mathcal{L}}$ така ж сама і, більш того, цей клас є напівнормалізованим у звичайному сенсі. □

Наслідок 2.8. *(i) Група еквівалентності $G^{\sim}_{\mathcal{L}}$ класу $\mathcal{L}$ є проекцією на простір із координатами $(t, \boldsymbol{x}, A, B)$ підгрупи групи $G^{\sim}_{\bar{\mathcal{L}}}$ виокремленої умовою $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{0}$. Групи еквівалентності підкласів $\mathcal{L}_1$ та $\mathcal{L}_0$ співпадають із групою $G^{\sim}_{\mathcal{L}}$.*

(ii) Розбиття класу $\mathcal{L}$ на підкласи $\mathcal{L}_0$ та $\mathcal{L}_1$ індукує розбиття групоїда $\mathcal{G}^{\sim}_{\mathcal{L}}$ на підгрупоїди $\mathcal{G}^{\sim}_{\mathcal{L}_0}$ та $\mathcal{G}^{\sim}_{\mathcal{L}_1}$, $\mathcal{G}^{\sim}_{\mathcal{L}} = \mathcal{G}^{\sim}_{\mathcal{L}_0} \sqcup \mathcal{G}^{\sim}_{\mathcal{L}_1}$.

(iii) Підклас $\mathcal{L}_1$ є однорідно напівнормалізованим відносно лінійної суперпозиції розв'язків.

(iv) Підклас $\mathcal{L}_0$ та весь клас $\mathcal{L}$ є напівнормалізованими у звичайному сенсі.

Доведення. Оптимальним шляхом доведення цього наслідку є модифікація доведення теореми 2.7 через заміну класів $\bar{\mathcal{L}}$, $\bar{\mathcal{L}}_0$ та $\bar{\mathcal{L}}_1$ відповідно їх "однорідними" еквівалентами $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}_0$ та $\mathcal{L}_1$. Також припускаємо, що Φ та $\tilde{\Phi}$ — точкові перетворення вигляду (2.5a) з $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{0}$.

Для будь-якого допустимого перетворення між однорідними системами в класі $\bar{\mathcal{L}}$ маємо $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$ та $\tilde{\boldsymbol{f}} = \boldsymbol{0}$, а тому композиція $\boldsymbol{h} \circ \tilde{T}$ відповідного значення параметр-функції $\boldsymbol{h}$ з оберненим перетворенням $\tilde{T}$ є розв'язком перетвореної системи. Єдиним спільним розв'язком систем у класі $\mathcal{L}$ (відповідно у підкласі $\mathcal{L}_0$ або $\mathcal{L}_1$) є нульовий. Звідси випливає, що $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{0}$ для елементів груп еквівалентності $G^{\sim}_{\mathcal{L}}$, $G^{\sim}_{\mathcal{L}_0}$ та $G^{\sim}_{\mathcal{L}_1}$. Більш того, нормалізацію підкласу $\bar{\mathcal{L}}_1$ у звичайному сенсі можна перетворити на однорідну напівнормалізацію підкласу $\mathcal{L}_1$ відносно лінійної суперпозиції розв'язків. □

Через появу параметр-функції T змінної t серед параметрів групи еквівалентності $G^{\sim}_{\mathcal{L}'}$, можна додатково калібрувати довільні елементи класу $\mathcal{L}'$. Для будь-якого вихідного значення матриці довільних елементів V елемент групи $G^{\sim}_{\mathcal{L}'}$ вигляду (2.8) з $C = E$ та T, де функція T задовольняє рівняння

$$n\frac{2T_tT_{ttt} - 3T_{tt}^2}{4T_t^2} + \operatorname{tr} V = 0, \quad \text{або} \quad \{T, t\} = -\frac{2}{n}\operatorname{tr} V,$$

відображає систему L'_V у систему $L'_{\tilde{V}}$ з $\operatorname{tr} \tilde{V} = 0$. Тут

$$\{T, t\} := T_{ttt}/T_t - \frac{3}{2}T_{tt}^2/T_t^2$$

— похідна Шварца від функції T за змінною t. Іншими словами, клас $\mathcal{L}'$ відображено за допомогою сім'ї перетворень еквівалентності, що параметризована через $\operatorname{tr} V$, у його підклас $\mathcal{L}''$, який утворений системами вигляду (2.6) із безслідовими матрицями довільних елементів V. Зауважимо, що підклас $\mathcal{L}''_0 = \mathcal{L}'' \cap \mathcal{L}'_0$ містить єдину елементарну систему L'_0: $\boldsymbol{x}_{tt} = \mathbf{0}$, а тому $\mathcal{L}''_1 = \mathcal{L}'' \cap \mathcal{L}'_1 = \mathcal{L}' \setminus \{L'_0\}$. Клас $\mathcal{L}''$ не репараметризуємо для того, щоб уникнути втрати симетрії між елементами матриці V довільних елементів, і оскільки умова $\operatorname{tr} V = 0$, яка виокремлює підклас $\mathcal{L}''$ із класу $\mathcal{L}'$, є алгебраїчною, то це призводить до появи несуттєвих перетворень еквівалентності всередині класу $\mathcal{L}''$, див. [47, додаток A] щодо відповідних означень та пояснень. Тому представляємо канонічно суттєву групу еквівалентності класу $\mathcal{L}''$ замість усієї групи еквівалентності.

Наслідок 2.9. *(i) Канонічна суттєва група еквівалентності $G^{\mathrm{s}\sim}_{\mathcal{L}''}$ класу $\mathcal{L}''$ утворена перетвореннями*

$$\tilde{t} = \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}, \quad \tilde{\boldsymbol{x}} = \frac{1}{\gamma t + \delta} C \boldsymbol{x}, \tag{2.22а}$$

$$\tilde{V} = (\gamma t + \delta)^4 C V C^{-1}, \tag{2.22б}$$

де α, β, γ та δ — довільні сталі з $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ на полем $\mathbb{C}$ та $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$ над полем $\mathbb{R}$, C — довільна стала невироджена $n \times n$ матриця.[2.2] *Канонічна суттєва група еквівалентності підкласу $\mathcal{L}''_1$ співпадає з групою $G^{\sim}_{\mathcal{L}''}$, тоді як суттєва група еквівалентності підкласу $\mathcal{L}''_0$ — тривіальне (тотожне) продовження точкової групи симетрії елементарної системи L'_0 на матрицю довільних елементів V.*

(ii) Розбиття класу $\mathcal{L}''$ на підкласи $\mathcal{L}''_0$ та $\mathcal{L}''_1$ індукує розбиття групоїда $\mathcal{G}^{\sim}_{\mathcal{L}''}$ на підгрупоїди $\mathcal{G}^{\sim}_{\mathcal{L}''_0}$ та $\mathcal{G}^{\sim}_{\mathcal{L}''_1}$, $\mathcal{G}^{\sim}_{\mathcal{L}''} = \mathcal{G}^{\sim}_{\mathcal{L}''_0} \sqcup \mathcal{G}^{\sim}_{\mathcal{L}''_1}$.

(iii) Підклас $\mathcal{L}''_1$ є однорідно напівнормалізованим відносно лінійної суперпозиції розв'язків.

[2.2] Набір параметрів $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, C)$ визначаємо з точністю до одночасної зміни знаків його компонент, $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, C) \mapsto (-\alpha, -\beta, -\gamma, -\delta, -C)$.

(iv) Підклас $\mathcal{L}''_0$ є тривіально напівнормалізованим у звичайному сенсі, оскільки $\mathcal{G}^{\sim}_{\mathcal{L}''_0} = \mathcal{G}_0$, а отже, і весь клас $\mathcal{L}''$ також є напівнормалізованим у звичайному сенсі.

Доведення. Насправді цей наслідок випливає скоріше з доведення теореми 2.4, а не з її формулювання. Зокрема, аналіз цього доведення показує, що накладання умови $\operatorname{tr} V = 0$ не впливає на розщеплення систем (2.11), (2.12) та (2.15) відносно перших похідних x^a_t і перетворених довільних елементів $\tilde V^{ab}$. Отже, з точністю до несуттєвих доданків, які залежать від $(t, \boldsymbol{x}, V)$ і які можна занулити при $\operatorname{tr} V = 0$, кожне перетворення еквівалентності в класі $\mathcal{L}''$ має вигляд (2.8). Після врахування умов $\operatorname{tr} V = 0$ та $\operatorname{tr} \tilde V = 0$, приходимо до вигляду (2.8б), що похідна Шварца від функції T дорівнює нулю, тобто функція T є дробово-лінійною відносно змінної t. □

Природно називати підкласи $\bar{\mathcal{L}}_0$ та $\bar{\mathcal{L}}_1$ *сингулярним* і *регулярним* підкласами класу $\bar{\mathcal{L}}$. Аналогічним чином також визначаємо *сингулярний* і *регулярний* підкласи для класів $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}'$ та $\mathcal{L}''$.

2.2. Алгебри еквівалентності

Алгебра еквівалентності $\mathfrak{g}^{\sim}_{\mathcal{K}}$ класу $\mathcal{K}$ систем диференціальних рівнянь містить векторні поля (на відповідному просторі незалежних та залежних змінних і довільних елементів), що є інфінітезимальними операторами однопараметричних підгруп відповідної групи еквівалентності $G^{\sim}_{\mathcal{K}}$. Якщо групу $G^{\sim}_{\mathcal{K}}$ знайдено для класів $\bar{\mathcal{L}}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}'$, $\mathcal{L}''$ та їх сингулярних і регулярних підкласів, то для обчислення $\mathfrak{g}^{\sim}_{\mathcal{K}}$ немає необхідності використовувати інфінітезимальний метод Лі.

Наслідок 2.10. *Алгебра еквівалентності $\mathfrak{g}^{\sim}_{\bar{\mathcal{L}}}$ класу $\bar{\mathcal{L}}$ — лінійна оболонка векторних полів*

$$\tau\partial_t - \tau_t A^{ab}\partial_{A^{ab}} - \tau_{tt}\partial_{A^{aa}} - 2\tau_t B^{ab}\partial_{B^{ab}} - 2\tau_t f^a\partial_{f^a},$$

$$\begin{aligned}
&\eta^{ab}x^b\partial_{x^a}+(\eta^{ac}A^{cb}-A^{ac}\eta^{cb}+2\eta^{ab}_t)\partial_{A^{ab}}\\
&\quad+(\eta^{ac}B^{cb}-B^{ac}\eta^{cb}-A^{ac}\eta^{cb}_t+\eta^{ab}_{tt})\partial_{B^{ab}}+\eta^{ab}f^b\partial_{f^a},\\
&\chi^a\partial_{x^a}+(\chi^a_{tt}-A^{ab}\chi^b_t-B^{ab}\chi^b)\partial_{f^a},
\end{aligned}$$

де τ, η^{ab} та χ^a — довільні функції змінної t.

Доведення. Для побудови сімей векторних полів, які разом утворюють лінійну оболонку алгебри $\mathfrak{g}^{\sim}_{\tilde{\mathcal{L}}}$, обчислюємо інфінітезимальні оператори для спеціальної множини однопараметричних підгруп групи $G^{\sim}_{\tilde{\mathcal{L}}}$. Більш конкретно, послідовно вибираємо одну з (скалярних, матричнозначних та векторнозначних значень) параметр-функцій T, H та $\boldsymbol{h}$ залежною від неперервного параметра ε підгрупи. Далі покладаємо інші параметр-функції рівними їх значенню, що відповідають тотожним перетворенням, які дорівнюють t, E та $\mathbf{0}$ відповідно для T, H та $\boldsymbol{h}$. І нарешті, диференціюючи компоненти перетворення відносно ε, знаходимо результат при $\varepsilon=0$. У результаті отримаємо відповідні компоненти зазначених інфінітезимальних операторів. Ввівши позначення

$$\tau:=\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0},\quad \eta^{ab}:=\frac{\mathrm{d}H^{ab}}{\mathrm{d}\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0},\quad \chi^a:=\frac{\mathrm{d}h^a}{\mathrm{d}\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0},$$

отримаємо векторні поля, які представлені у формулюванні теореми. □

Наслідок 2.11. *Алгебру еквівалентності $\mathfrak{g}^{\sim}_{\mathcal{L}}$ класу $\mathcal{L}$ утворюють векторні поля*

$$\begin{aligned}
&\tau\partial_t-\tau_tA^{ab}\partial_{A^{ab}}-\tau_{tt}\partial_{A^{aa}}-2\tau_tB^{ab}\partial_{B^{ab}},\\
&\eta^{ab}x^b\partial_{x^a}+(\eta^{ac}A^{cb}-A^{ac}\eta^{cb}+2\eta^{ab}_t)\partial_{A^{ab}}\\
&\qquad+(\eta^{ac}B^{cb}-B^{ac}\eta^{cb}-A^{ac}\eta^{cb}_t+\eta^{ab}_{tt})\partial_{B^{ab}},
\end{aligned}$$

де τ та η^{ab} — довільні функції змінної t.

Доведення. Для побудови алгебри $\mathfrak{g}^{\sim}_{\mathcal{L}}$ достатньо покласти параметр-функції χ^a рівними нулю і спроєктувати отримані векторні поля на простір із координатами $(t,\boldsymbol{x},A,B)$. □

Наслідок 2.12. *Алгебра еквівалентності* $\mathfrak{g}^{\sim}_{\mathcal{L}'}$ *класу* $\mathcal{L}'$ *— лінійна оболонка векторних полів*

$$\hat{D}(\tau) = \tau\partial_t + \tfrac{1}{2}\tau_t x^a\partial_{x^a} - 2\tau_t V^{ab}\partial_{V^{ab}} + \tfrac{1}{2}\tau_{ttt}\partial_{V^{aa}},$$
$$\hat{I}^{ab} = x^b\partial_{x^a} + V^{bc}\partial_{V^{ac}} - V^{ca}\partial_{V^{cb}},$$

де τ *— довільна функція змінної* t.

Доведення. На відміну від доведення наслідку 2.10, тут знаходимо всі інфінітезимальні оператори Q групи еквівалентності $G^{\sim}_{\mathcal{L}'}$. Вибираємо довільну однопараметричну підгрупу цієї групи, припускаючи, що в (2.8) функція T та матриця C додатково залежать від параметра ε, тобто $T = T(t,\varepsilon)$ та $C = C(\varepsilon)$, $T(t,0) = t$ та $C(0) = E$. Нехай $\tau(t) := T_\varepsilon(t,0)$ та $\Gamma := C_\varepsilon(0)$. Диференціюючи загальний елемент підгрупи відносно параметра ε при $\varepsilon = 0$, отримаємо загальний вигляд інфінітезимальних операторів для групи $G^{\sim}_{\mathcal{L}'}$,

$$Q = \tau\partial_t + \big(\tfrac{1}{2}\tau_t x^a + \Gamma^{ab}x^b\big)\partial_{x^a} + \big(\tfrac{1}{2}\tau_{ttt}\delta_{ab} - 2\tau_t V^{ab} + [\Gamma, V]^{ab}\big)\partial_{V^{ab}},$$

де $\tau = \tau(t)$ — довільна функція змінної t, $\Gamma = (\Gamma^{ab})$ — довільна стала $n\times n$ матриця, δ_{ab} — символ Кронекера. □

Наслідок 2.13. *Базис суттєвої алгебри еквівалентності* $\mathfrak{g}^{\mathrm{s}\sim}_{\mathcal{L}''}$ *класу* $\mathcal{L}''$ *утворюють такі векторні поля:*

$$\hat{D}(1) = \partial_t, \quad \hat{D}(t) = t\partial_t + \tfrac{1}{2}x^a\partial_{x^a} - 2V^{ab}\partial_{V^{ab}},$$
$$\hat{D}(t^2) = t^2\partial_t + tx^a\partial_{x^a} - 4tV^{ab}\partial_{V^{ab}},$$
$$\hat{I}^{ab} = x^b\partial_{x^a} + V^{bc}\partial_{V^{ac}} - V^{ca}\partial_{V^{cb}}.$$

Доведення. Оскільки суттєва група еквівалентності $G^{\mathrm{s}\sim}_{\mathcal{L}''}$ класу $\mathcal{L}''$ є підгрупою групи $G^{\sim}_{\mathcal{L}'}$, яку виокремлено умовою, що параметр-функція T є дробово-лінійною відносно змінної t, то алгебра $\mathfrak{g}^{\mathrm{s}\sim}_{\mathcal{L}''}$ є підалгеброю алгебри $\mathfrak{g}^{\sim}_{\mathcal{L}'}$ з τ, що пробігає $\langle 1, t, t^2\rangle$. □

Із тверджень параграфа 2.1 та цього параграфа очевидно випливає, що $\mathfrak{g}^{\sim}_{\bar{\mathcal{L}}_0} = \mathfrak{g}^{\sim}_{\bar{\mathcal{L}}_1} = \mathfrak{g}^{\sim}_{\bar{\mathcal{L}}}$, $\mathfrak{g}^{\sim}_{\mathcal{L}_0} = \mathfrak{g}^{\sim}_{\mathcal{L}_1} = \mathfrak{g}^{\sim}_{\mathcal{L}}$, $\mathfrak{g}^{\mathrm{s}\sim}_{\mathcal{L}'_0} = \mathfrak{g}^{\sim}_{\mathcal{L}'_1} = \mathfrak{g}^{\sim}_{\mathcal{L}'}$ та $\mathfrak{g}^{\mathrm{s}\sim}_{\mathcal{L}''_1} = \mathfrak{g}^{\mathrm{s}\sim}_{\mathcal{L}''}$.

2.3. Попередній аналіз ліївських симетрій

Для кожної пари $(\mathcal{K}, \tilde{\mathcal{K}})$ класів у кожному з ланцюжків

$$\begin{aligned} &\bar{\mathcal{L}} \hookleftarrow \mathcal{L} \hookleftarrow \mathcal{L}' \supset \mathcal{L}'', \quad \bar{\mathcal{L}}_0 \hookleftarrow \mathcal{L}_0 \hookleftarrow \mathcal{L}'_0 \supset \mathcal{L}''_0, \\ &\bar{\mathcal{L}}_1 \hookleftarrow \mathcal{L}_1 \hookleftarrow \mathcal{L}'_1 \supset \mathcal{L}''_1, \end{aligned} \tag{2.23}$$

де $\tilde{\mathcal{K}}$ є підкласом для класу $\mathcal{K}$, будь-яку систему з класу $\mathcal{K}$ можна відобразити елементом групи еквівалентності $G^{\sim}_{\mathcal{K}}$ в систему з класу $\tilde{\mathcal{K}}$. Іншими словами, клас $\mathcal{K}$ можна відобразити у його підклас $\tilde{\mathcal{K}}$ за допомогою сім'ї перетворень еквівалентності, яка параметризована довільними елементами класу $\mathcal{K}$. Більш того, $G^{\sim}_{\mathcal{K}}$- та $G^{\sim}_{\tilde{\mathcal{K}}}$-еквівалентності відповідно в класах $\mathcal{K}$ та $\tilde{\mathcal{K}}$ є послідовними в тому сенсі, що системи з класу $\mathcal{K}$ є $G^{\sim}_{\mathcal{K}}$-еквівалентними тоді і лише тоді, коли їх аналоги в класі $\tilde{\mathcal{K}}$ є $G^{\sim}_{\tilde{\mathcal{K}}}$-еквівалентними. Це випливає з того, що будь-який клас $\mathcal{K}$ серед вищезазначених є напівнормалізованим у звичайному сенсі, і отже, $G^{\sim}_{\mathcal{K}}$-еквівалентність співпадає з $\mathcal{G}^{\sim}_{\mathcal{K}}$-еквівалентністю. У результаті розв'язання задачі групової класифікації для класу $\mathcal{K}$ зводимо до задачі групової класифікації його підкласу $\tilde{\mathcal{K}}$, і не є принциповим, який тип еквівалентності ($G^{\sim}$-еквівалентність або $\mathcal{G}^{\sim}$-еквівалентність) використовувати. Оскільки члени ланцюжка на тих же позиціях, за винятком класу-рівняння $\mathcal{L}''_0$, мають однакові групи еквівалентності (з точністю до нехтування несуттєвими перетвореннями еквівалентності для сингулярних підкласів), то групову класифікацію класу в першому ланцюжку можна розщепити на групову класифікацію відповідних класів у другому та третьому ланцюжках.

Групова класифікація кожного класу з другого ланцюжка є тривіальною, а оптимальний класифікаційний список містить єдину елементарну систему $\boldsymbol{x}_{tt} = \mathbf{0}$ з відомою алгеброю ліївської інваріантності $\mathfrak{g}_0$, яка ізоморфна алгебрі $\mathfrak{sl}(n+2, \mathbb{F})$,

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_0 = \langle &\partial_t,\, \partial_{x^a},\, t\partial_t,\, x^a\partial_t,\, t\partial_{x^a}, \\ &x^a\partial_{x^b},\, tx^a\partial_t + x^a x^c\partial_{x^c},\, t^2\partial_t + tx^c\partial_{x^c}\rangle; \end{aligned} \tag{2.24}$$

відповідна повна група точкових симетрій G_0 є загальною проєктивною групою $\mathbb{F}^{n+1}$, що утворена перетвореннями вигляду [97, с. 554]

$$\tilde{x}^\iota = \frac{\alpha_{\iota 0}x^0 + \dots + \alpha_{\iota n}x^n + \alpha_{\iota,n+1}}{\alpha_{n+1,0}x^0 + \dots + \alpha_{n+1,n}x^n + \alpha_{n+1,n+1}}, \qquad \iota = 0, \dots, n,$$

де α_{00}, α_{01}, …, $\alpha_{n+1,n+1}$ — однорідні групові параметри, $x^0 = t$. Див. [32] для обчислення групи G_0 за допомогою прямого методу.

У той же час покажемо, що для третього (отже, і першого) ланцюжка, найзручніше використовувати клас $\mathcal{L}'_1$ (відповідно клас $\mathcal{L}'$) як основний під час групової класифікації, перехід до класу $\mathcal{L}''_1$ для класифікації деяких частинних випадків і до класу $\mathcal{L}_1$ для інтерпретації деяких результатів, див. параграф 2.4 і особливо зауваження 2.23 нижче. Будь-яку систему $\bar{L}_\theta$ з класу $\bar{\mathcal{L}}_1$ можна відобразити в однорідний аналог за допомогою простого віднімання частинного розв'язку системи $\bar{L}_\theta$ з $\boldsymbol{x}$, і природно обирати однорідні системи як канонічні представники $G^\sim_{\bar{\mathcal{L}}_1}$-суміжних класів у підкласі $\bar{\mathcal{L}}_1$. Таким чином, починаємо розгляд ліївських симетрій для систем із класу $\mathcal{L}_1$, а потім також проводимо попередній аналіз ліївських симетрій для систем із класів $\mathcal{L}'_1$ та $\mathcal{L}''_1$. Нехай ϑ — набір довільних елементів (A, B) класу $\mathcal{L}_1$, $\vartheta = (A, B)$.

Замість застосування стандартної інфінітезимальної техніки та інфінітезимального критерію ліївської інваріантності простіше отримати визначальні рівняння для ліївських симетрій систем класу $\mathcal{L}_1$ (відповідно для його підкласів $\mathcal{L}'_1$ та $\mathcal{L}''_1$), використовуючи результати параграфа 2.1.

Лема 2.14. *Максимальна алгебра ліївської інваріантності $\mathfrak{g}_\vartheta$ системи L_ϑ з класу $\mathcal{L}_1$ утворена векторними полями вигляду*

$$Q = \tau\partial_t + (\eta^{ab}x^b + \chi^a)\partial_{x^a}, \tag{2.25}$$

де вектор-функція $\boldsymbol{\chi} = (\chi^1, \dots, \chi^n)^\mathsf{T}$ змінної t — довільний розв'язок системи L_ϑ, тоді як τ — довільна функція змінної t та $\eta = (\eta^{ab})$ — довільна $n \times n$ матричнозначна функція змінної t, що задовольняють *класифікаційну умову*

$$\tau A_t = [\eta, A] - \tau_t A + 2\eta_t - \tau_{tt} E, \tag{2.26а}$$

$$\tau B_t = [\eta, B] - 2\tau_t B - A\eta_t + \eta_{tt}. \tag{2.26б}$$

Доведення. З огляду на пункт (iii) наслідку 2.8 підклас $\mathcal{L}_1$ є однорідно напівнормалізованим відносно лінійної суперпозиції розв'язків, тому будь-який елемент вертексної групи $\mathcal{G}_\vartheta \subset \mathcal{G}^{\sim}_{\mathcal{L}_1}$ є композицією елементу групоїда дії $\mathcal{G}^{G^{\sim}_{\mathcal{L}_1}}$ групи еквівалентності $G^{\sim}_{\mathcal{L}_1}$ та елементу групоїда $\mathcal{G}^{\mathrm{lin}}_{\mathcal{L}_1}$, який пов'язаний із лінійною суперпозицією розв'язків у класі $\mathcal{L}_1$. Отже, точкова група симетрій G_ϑ системи $L_\vartheta \in \mathcal{L}_1$ містить перетворення вигляду (2.21а), де $\boldsymbol{h}$ — частинний розв'язок L_ϑ, а параметр-функція T і матричнозначна параметр-функція H задовольняють рівняння

$$A \circ T = \frac{1}{T_t^2}\big(T_t H A + 2T_t H_t - T_{tt} H\big) H^{-1}, \tag{2.27а}$$

$$B \circ T = \frac{1}{T_t^3}\big(T_t H B - T_t^2 (A \circ T) H_t + T_t H_{tt} - T_{tt} H_t\big) H^{-1}. \tag{2.27б}$$

Ці умови для T, H та $\boldsymbol{h}$ випливають із рівнянь (2.21б)–(2.21г) при підстановці $\tilde{A} = A \circ T$, $\tilde{B} = B \circ T$, $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$ та $\tilde{\boldsymbol{f}} = \boldsymbol{0}$. Тут $A \circ T$ та $B \circ T$ — відповідно матричнозначні функції A та B утворені композицією зі скалярної функції T.

Аналогічно до доведення наслідку 2.12 обчислюємо всі інфінітезимальні оператори Q групи G_ϑ. Вибираємо довільну однопараметричну підгрупу цієї групи, припускаючи, що в перетвореннях (2.21а) функція T, матричнозначна функція H і векторнозначна функція $\boldsymbol{h}$ додатково залежать від параметра ε, тобто $T = T(t, \varepsilon)$, $H = H(t, \varepsilon)$ та $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{h}(t, \varepsilon)$, і $T(t, 0) = t$, $H(t, 0) = E$ та $\boldsymbol{h}(t, 0) = \boldsymbol{0}$. Нехай $\tau(t) := T_\varepsilon(t, 0)$, $\eta(t) := H_\varepsilon(t, 0)$ та $\boldsymbol{\chi}(t) := \boldsymbol{h}_\varepsilon(t, 0)$. Диференціюючи довільний елемент підгрупи відносно ε при $\varepsilon = 0$, отримаємо загальний вигляд (2.25) інфінітезимальних операторів Q групи G_ϑ. Класифікаційна умова (2.26) є інфінітезимальним аналогом умови (2.27). □

Наслідок 2.15. *Максимальна алгебра ліївської інваріантності $\mathfrak{g}_\theta$ системи L_θ з класу $\bar{\mathcal{L}}_1$ утворена векторними полями вигляду*

$$Q = \tau\partial_t + (\eta^{ab}x^b + \tau h^a_t - \eta^{ab}h^b + \chi^a)\partial_{x^a},$$

де векторнозначна функція $\boldsymbol{h} = (h^1, \dots, h^n)^\mathsf{T}$ змінної t — фіксований частинний розв'язок системи L_θ, векторнозначна функція $\boldsymbol{\chi} = (\chi^1, \dots, \chi^n)^\mathsf{T}$ змінної t — довільний розв'язок відповідної однорідної системи, тоді як τ — довільна функція змінної t та $\eta = (\eta^{ab})$ — довільна $n \times n$ матричнозначна функція змінної t, що задовольняють класифікаційну умову (2.26).

Аналогічним чином отримуємо більш специфічні твердження щодо ліївських симетрій систем із класів $\mathcal{L}'_1$ та $\mathcal{L}''_1$ відповідно з теореми 2.4 та наслідку 2.9. Однак простіше отримати ці твердження послідовно як прямі наслідки леми 2.14 при додаткових умовах на довільні елементи A та B.

Наслідок 2.16. *Максимальна алгебра ліївської інваріантності $\mathfrak{g}_V$ системи L'_V з класу $\mathcal{L}'_1$ утворена векторними полями вигляду*

$$Q = \tau\partial_t + \left(\tfrac{1}{2}\tau_t x^a + \Gamma^{ab}x^b + \chi^a\right)\partial_{x^a},$$

де векторнозначна функція $\boldsymbol{\chi} = (\chi^1, \dots, \chi^n)^\mathsf{T}$ змінної t — довільний розв'язок системи L'_V, тоді як τ — довільна функція змінної t та $\Gamma = (\Gamma^{ab})$ — довільна стала $n \times n$ матриця, що задовольняють класифікаційну умову

$$\tau V_t = [\Gamma, V] - 2\tau_t V + \tfrac{1}{2}\tau_{ttt}E. \tag{2.28}$$

Доведення. Поклавши $A = 0$ у рівнянні (2.26a), отримаємо $\eta_t = \frac{1}{2}\tau_{tt}E$, тобто $\eta = \frac{1}{2}\tau_t E + \Gamma$, де Γ — матриця сталих інтегрування. Далі після перепозначення $B = V$ з рівняння (2.26a) випливає класифікаційна умова (2.28). $\square$

Наслідок 2.17. *Якщо система L'_V належить до вужчого класу $\mathcal{L}''_1$, тоді його максимальна алгебра ліївської інваріантності $\mathfrak{g}_V$ задовольняє наслідок 2.16, де додатково $\tau_{ttt} = 0$.*

Доведення. При умові $\operatorname{tr} V = 0$, що виокремлює підклас $\mathcal{L}''_1$ з класу $\mathcal{L}'_1$, після обчислення сліду матричної умови (2.28) випливає, що $\tau_{ttt} = 0$. □

Лема 2.18. *Ядро груп точкових симетрій систем для кожного з розглянутих класів є таким:*

$$
\begin{aligned}
&G^\cap_{\mathcal{L}''_1} = G^\cap_{\mathcal{L}''} = G^\cap_{\mathcal{L}'_1} = G^\cap_{\mathcal{L}'} = G^\cap_{\mathcal{L}_1} = G^\cap_{\mathcal{L}} = G^\cap_{\mathcal{L}_0}\\
&\qquad = \big\{\Phi\colon \tilde t = t,\ \tilde{\boldsymbol{x}} = \gamma\boldsymbol{x} \mid \gamma \in \mathbb{F}\setminus\{0\}\big\},\\
&G^\cap_{\mathcal{L}''_0} = G_0, \quad G^\cap_{\mathcal{L}'_0} = \big\{\Phi\colon \tilde t = t,\ \tilde{\boldsymbol{x}} = C\boldsymbol{x} \mid C \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{F})\big\},\\
&G^\cap_{\bar{\mathcal{L}}} = G^\cap_{\bar{\mathcal{L}}_0} = G^\cap_{\bar{\mathcal{L}}_1} = \big\{\mathrm{id}\colon \tilde t = t,\ \tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}\big\}.
\end{aligned}
$$

Доведення. Наведемо лише деякі ідеї щодо обчислення цих груп. Так як клас $\mathcal{L}''_0$ утворено єдиною системою L'_0, то обчислення його групи еквівалентності $G^\cap_{\mathcal{L}''_0}$ є тривіальним.

Для класів $\mathcal{L}'_0$ та $\mathcal{L}''_1$ розглянемо визначальні рівняння (2.15) з $\tilde V^{ab} = V^{ab}\circ T$ і додатково замінимо V^{ab} на λV^{ab}, де λ — довільна стала. Далі повторюємо процедуру розщеплення, представлену після системи (2.15) у модифікованих визначальних рівняннях і отримаємо співвідношення (2.8а) для компонент перетворень із груп $G^\cap_{\mathcal{L}'_0}$ та $G^\cap_{\mathcal{L}''_1}$. Розщеплення модифікованої умови (2.8б) за параметром λ приводить до умови $CV = T_t^2(V\circ T)C$ з якої випливає, що $T_t = \pm1$ за допомогою обчислення визначників лівої та правої частин для сталих невироджених значень матриці V. Більш того, для $\mathcal{L}''_1$ після варіювання сталих значень матриці V отримаємо, що $C = \gamma E$ для деякої ненульової сталої γ. Вибираючи частинні значення V, наприклад, $V = tK$ із довільною сталою ненульовою безслідовою матрицею K, отримаємо також, що $T = t$.

З огляду на вкладення підкласів (2.23) маємо, що

$$
G^\cap_{\mathcal{L}''_1} \supseteq G^\cap_{\mathcal{L}'_1} \supseteq G^\cap_{\mathcal{L}_1} \supseteq G^\cap_{\bar{\mathcal{L}}_1}, \quad G^\cap_{\mathcal{L}'_0} \supseteq G^\cap_{\mathcal{L}_0} \supseteq G^\cap_{\bar{\mathcal{L}}_0},
$$

$$G^{\cap}_{\mathcal{L}''} = G^{\cap}_{\mathcal{L}''_0} \cap G^{\cap}_{\mathcal{L}''_1}, \quad G^{\cap}_{\mathcal{L}'} = G^{\cap}_{\mathcal{L}'_0} \cap G^{\cap}_{\mathcal{L}'_1}, \quad G^{\cap}_{\mathcal{L}} = G^{\cap}_{\mathcal{L}_0} \cap G^{\cap}_{\mathcal{L}_1},$$
$$G^{\cap}_{\bar{\mathcal{L}}} = G^{\cap}_{\bar{\mathcal{L}}_0} \cap G^{\cap}_{\bar{\mathcal{L}}_1}.$$

За допомогою прямого обчислення перевіряємо, що дійсно виконана тотожність $G^{\cap}_{\mathcal{L}'_1} = G^{\cap}_{\mathcal{L}_1} = G^{\cap}_{\mathcal{L}''_1}$. З огляду на включення $G^{\cap}_{\mathcal{L}'_0} \supseteq G^{\cap}_{\mathcal{L}_0}$, подальші умови на елементи групи $G^{\cap}_{\mathcal{L}_0}$ отримаємо за допомогою розщеплення (2.21б) із $T = t$, $H = C$ та $\tilde{A} = A$ відносно A. Звідси $C = \gamma E$ для довільної ненульової сталої γ, тобто $G^{\cap}_{\mathcal{L}_0} = G^{\cap}_{\mathcal{L}'_1}$. З включень $G^{\cap}_{\mathcal{L}_1} \supseteq G^{\cap}_{\bar{\mathcal{L}}_1}$ та $G^{\cap}_{\mathcal{L}_0} \supseteq G^{\cap}_{\bar{\mathcal{L}}_0}$ випливає, що для спільних точкових симетрій систем із класу $\bar{\mathcal{L}}_1$ (відповідно $\bar{\mathcal{L}}_0$), рівняння (2.21г) вироджено в рівняння $(1-\gamma)\boldsymbol{f} = \mathbf{0}$, тобто $\gamma = 1$. □

Наслідок 2.19. *Ядра алгебр ліївської інваріантності систем для кожного з розглянутих класів є такими:*

$$\mathfrak{g}^{\cap}_{\mathcal{L}''_1} = \mathfrak{g}^{\cap}_{\mathcal{L}''} = \mathfrak{g}^{\cap}_{\mathcal{L}'_1} = \mathfrak{g}^{\cap}_{\mathcal{L}'} = \mathfrak{g}^{\cap}_{\mathcal{L}_1} = \mathfrak{g}^{\cap}_{\mathcal{L}} = \mathfrak{g}^{\cap}_{\mathcal{L}_0} = \langle x^a\partial_{x^a}\rangle, \quad \mathfrak{g}^{\cap}_{\mathcal{L}''_0} = \mathfrak{g}_0,$$
$$\mathfrak{g}^{\cap}_{\mathcal{L}'_0} = \langle x^b\partial_{x^a}\rangle, \quad \mathfrak{g}^{\cap}_{\bar{\mathcal{L}}} = \mathfrak{g}^{\cap}_{\bar{\mathcal{L}}_0} = \mathfrak{g}^{\cap}_{\bar{\mathcal{L}}_1} = \{0\}.$$

Доведення. Ці алгебри можна отримати як набір інфінітезимальних операторів однопараметричних підгруп відповідних ядер точкових груп симетрій. Алгебри $\mathfrak{g}^{\cap}_{\mathcal{L}_1}$, $\mathfrak{g}^{\cap}_{\mathcal{L}'_1}$ та $\mathfrak{g}^{\cap}_{\mathcal{L}''_1}$ також можна обчислити використовуючи лему 2.14 та наслідки 2.16 і 2.17 відповідно за допомогою розщеплення класифікаційних умов (2.26), (2.28) та (2.28) з $\tau_{ttt} = 0$ відносно відповідних довільних елементів. □

Зауваження 2.20. Хоча системи з класу $\mathcal{L}$ є лінійними та однорідними, операторний підхід [66, 107] дозволяє знайти всі ліївські симетрії (з точністю до тривіальних, які пов'язані з лінійною суперпозицією розв'язків) лише для систем із регулярного підкласу $\mathcal{L}_1$.

З леми 2.14 випливає, що для будь-якої системи L_ϑ з класу $\mathcal{L}_1$, її максимальну алгебру ліївської інваріантності $\mathfrak{g}_\vartheta$ можна представити як напівпряму суму алгебр:

$$\mathfrak{g}_\vartheta = \mathfrak{g}^{\mathrm{ess}}_\vartheta \Subset \mathfrak{g}^{\mathrm{lin}}_\vartheta.$$

Тут

$$\mathfrak{g}^{\rm lin}_\vartheta := \big\{\chi^a(t)\partial_{x^a} \mid \boldsymbol{\chi}=(\chi^1,\dots,\chi^n)^{\mathsf T} \text{ розв'язок } L_\vartheta\big\}$$

— $2n$-вимірний абелевий ідеал, що відповідає *лінійній* суперпозиції розв'язків системи L_ϑ, та доповняльна підалгебра

$$\mathfrak{g}^{\rm ess}_\vartheta := \big\{\tau(t)\partial_t+\eta^{ab}(t)x^b\partial_{x^a} \mid (\tau,\eta) \text{ розв'язок } (2.26)\big\},$$

яку будемо називати *суттєвою* алгеброю ліївської інваріантності системи L_ϑ, порівняй [88, 124]. Очевидно, що для будь-якої системи L_ϑ з класу $\mathcal{L}$, маємо наступне представлення $\mathfrak{g}^{\rm ess}_\vartheta=\mathfrak{g}_\vartheta\cap\varpi_*\mathfrak{g}^\sim_{\mathcal L}$, де ϖ — проєкція з простору $\mathbb{F}_t\times\mathbb{F}^n_{\boldsymbol x}\times\mathbb{F}^{2n^2}_\vartheta$ на простір $\mathbb{F}_t\times\mathbb{F}^n_{\boldsymbol x}$. Більш того, алгебра $\mathfrak{g}^{\rm ess}_\vartheta$ обов'язково містить векторне поле $I:=x^a\partial_{x^a}$, а тому $\mathfrak{g}_\vartheta\supseteq\langle I\rangle\ltimes\mathfrak{g}^{\rm lin}_\vartheta$. З класифікаційної умови (2.26) також випливає, що $\mathfrak{g}^{\rm ess}_\vartheta=\langle I\rangle$ і $\mathfrak{g}_\vartheta=\langle I\rangle\ltimes\mathfrak{g}^{\rm lin}_\vartheta$ для довільних систем у класі $\mathcal{L}_1$. Таким чином, мінімальна розмірність максимальних алгебр ліївської інваріантності систем із класу $\mathcal{L}_1$, а отже, і систем із класу $\mathcal{L}$, дорівнює $2n+1$.

З вищезазначених властивостей, які є досить поширеними для класів однорідних лінійних систем диференціальних рівнянь, є більш природним класифікувати суттєві алгебри ліївської інваріантності для систем із класу $\mathcal{L}_1$ замість їх максимальних алгебр ліївської інваріантності.

Зауваження 2.21. Означення суттєвої алгебри ліївської інваріантності $\mathfrak{g}^{\rm ess}_V$ системи L'_V з класу $\mathcal{L}'_1$ є аналогічним до означення алгебри $\mathfrak{g}^{\rm ess}_\vartheta$,

$$\mathfrak{g}^{\rm ess}_V := \big\{\tau(t)\partial_t+\big(\tfrac12\tau_tx^a+\Gamma^{ab}x^b\big)\partial_{x^a} \mid \tau \text{ та } \Gamma \text{ задовольняють } (2.28)\big\}.$$

Також маємо представлення $\mathfrak{g}_V=\mathfrak{g}^{\rm ess}_V\ltimes\mathfrak{g}^{\rm lin}_V$ та $\mathfrak{g}^{\rm ess}_V=\mathfrak{g}_V\cap\varpi_*\mathfrak{g}^\sim_{\mathcal{L}'}$, де ϖ — проєкція з простору $\mathbb{F}_t\times\mathbb{F}^n_{\boldsymbol x}\times\mathbb{F}^{n^2}_V$ на простір $\mathbb{F}_t\times\mathbb{F}^n_{\boldsymbol x}$. З іншої сторони, для будь-якої неоднорідної системи $\bar L_\theta$ з класу $\bar{\mathcal{L}}_1$ її суттєва алгебра ліївської інваріантності не може бути визначена однозначно, а отже, не є єдиною. Більш точно, ідеал $\mathfrak{g}^{\rm lin}_\theta$ максимальної алгебри ліївської інваріантності $\mathfrak{g}_\theta$ системи $\bar L_\theta$ пов'язаний із можливістю додавання розв'язків відповідної однорідної системи $\bar L_{\theta_0} \simeq L_\vartheta$ до розв'язків системи $\bar L_\theta$,

$$\mathfrak g^{\rm lin}_\theta := \big\{\chi^a(t)\partial_{x^a} \mid \boldsymbol\chi = (\chi^1,\dots,\chi^n)^\mathsf{T} \text{ розв'язок } L_\vartheta\big\}.$$

Тут $\theta_0 := (A,B,0)$ та $\vartheta := (A,B)$ для $\theta = (A,B,\boldsymbol f)$. Систему $\bar L_\theta$ можна звести до системи $\bar L_{\theta_0}$ за допомогою точкового перетворення Φ_χ: $\tilde t = t$, $\tilde{\boldsymbol x} = \boldsymbol x - \boldsymbol\chi(t)$, де $\boldsymbol\chi$ — довільний частинний розв'язок системи $\bar L_\theta$. Для будь-якого частинного розв'язку $\boldsymbol\chi$ системи $\bar L_\theta$ опускання $(\Phi_\chi)^*\mathfrak g^{\rm ess}_{\theta_0}$ алгебри $\mathfrak g^{\rm ess}_{\theta_0} := \mathfrak g^{\rm ess}_\vartheta$ за допомогою перетворення Φ_χ є доповняльною підалгеброю до підалгебри $\mathfrak g^{\rm lin}_\theta$ в алгебрі $\mathfrak g_\theta$. Більш того, кожна доповняльна підалгебра $\mathfrak g^{\rm ess}_\theta$ до підалгебри $\mathfrak g^{\rm lin}_\theta$ в алгебрі $\mathfrak g_\theta$ є опусканням алгебри $\mathfrak g^{\rm ess}_{\theta_0}$ за допомогою перетворення Φ_χ для деякого частинного розв'язку $\boldsymbol\chi$ системи $\bar L_\theta$. З цього випливає існування і не єдиність таких підалгебр. Таким чином, алгебра $\mathfrak g_\theta$ допускає представлення $\mathfrak g_\theta = \mathfrak g^{\rm ess}_\theta \ni\!\!\!\!\!+ \mathfrak g^{\rm lin}_\theta$. Хоча підалгебру $\mathfrak g^{\rm ess}_\theta$ алгебри $\mathfrak g_\theta$ не визначено однозначно, її все ж можна називати *суттєвою* алгеброю ліївської інваріантності системи $\bar L_\theta$. Оскільки клас $\bar{\mathcal L}_1$ є нормалізованим та $G^\sim_{\bar{\mathcal L}_1} = G^\sim_{\bar{\mathcal L}}$, то включення $\mathfrak g_\theta \subset \varpi_*\mathfrak g^\sim_{\bar{\mathcal L}}$ має місце для будь-якої системи $\bar L_\theta \in \bar{\mathcal L}_1$, а тому $\mathfrak g_\theta \cap \varpi_*\mathfrak g^\sim_{\bar{\mathcal L}} = \mathfrak g_\theta \neq \mathfrak g^{\rm ess}_\theta$.

Аналогічно до означень регулярних і сингулярних розширень ліївських симетрій, які введено в роботі [130, означення 4], розглянемо означення регулярних і сингулярних суттєвих розширень ліївських симетрій для класів лінійних систем диференціальних рівнянь.

Означення 2.22. Нехай $\mathcal K$ — клас лінійних систем диференціальних рівнянь параметризований набором довільних елементів θ та K_θ — система з цього класу, суттєва алгебра ліївської інваріантності $\mathfrak g^{\rm ess}_\theta$ якої добре визначена, тоді алгебру $\mathfrak g^{\rm ess}_\theta$ називаємо *регулярною* для класу $\mathcal K$, якщо $\mathfrak g^{\rm ess}_\theta \subseteq \varpi_*\mathfrak g^\sim_{\mathcal K}$, та *сингулярною* для класу $\mathcal K$ в іншому випадку.

Як обговорювалося вище, для будь-якої системи з одного з класів $\bar{\mathcal L}_1$, $\mathcal L_1$, $\mathcal L_1'$ та $\mathcal L_1''$ її суттєва алгебра ліївської інваріантності добре визначена. Більш того, оскільки клас $\bar{\mathcal L}_1$ є нормалізованим у звичайному сенсі, а класи $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}'_1$ та $\mathcal{L}''_1$ — однорідно напівнормалізовані відносно лінійної суперпозиції розв'язків, то всі суттєві розширення ліївської симетрії у цих класах є регулярними.

2.4. Опис суттєвих розширень ліївської симетрії

Твердження, що представлені в кінці попереднього параграфа 2.3, безумовно можна виконати для систем із класу $\mathcal{L}'_1$ та його підкласу $\mathcal{L}''_1$, якщо замінити ϑ на V. Зокрема, з класифікаційної умови (2.28) випливає, що суттєва алгебра ліївської інваріантності $\mathfrak{g}_V^{\rm ess}$ системи $L'_V \in \mathcal{L}'_1$ обов'язково містить векторне поле $I = x^a\partial_{x^a}$, яке відповідає значенням параметрів $\tau = 0$, $\Gamma = E$ та $\boldsymbol{\chi} = \mathbf{0}$, $\mathfrak{g}_V^{\rm ess} = \langle I\rangle$ для довільного значення матриці V. У цьому параграфі досліджуємо розширення ліївської симетрії у класі $\mathcal{L}'_1$.

Розглянемо систему L'_V з цього класу. Нехай π — проєкція з простору $\mathbb{F}_t\times\mathbb{F}^n_{\boldsymbol{x}}$ на простір $\mathbb{F}_t$ та нехай

$$k = k_V := \dim\pi_*\mathfrak{g}_V^{\rm ess} = \dim\pi_*\mathfrak{g}_V.$$

Дії групи $G^\sim_{\mathcal{L}'}$ на просторах $\mathbb{F}_t\times\mathbb{F}^n_{\boldsymbol{x}}$ та $\mathbb{F}_t$ добре визначені за допомогою $\varpi_*G^\sim_{\mathcal{L}'}$ та $\pi_*(\varpi_*G^\sim_{\mathcal{L}'})$. Відповідно до теореми 2.4 та наслідку 2.16, відображення π є еквіваріантним під дією групи $G^\sim_{\mathcal{L}'}$, та підняття π_* за допомогою перетворення π є добре визначеним для всіх векторних полів із алгебр $\mathfrak{g}_V^{\rm ess}$ та $\mathfrak{g}_V$ для будь-якої матриці V. Звідси значення k є $G^\sim_{\mathcal{L}'}$-інваріантним. З наслідку 2.17 виливає, що $k\leqslant 3$ для будь-якої системи з підкласу $\mathcal{L}''_1$, а, отже, для будь-якої системи з усього класу $\mathcal{L}'_1$. Окремо досліджуємо кожне з можливих значень k, а саме 0, 1, 2 та 3. З теореми Лі про реалізацію скінченновимірних алгебр Лі векторними полями на дійсній або комплексній прямій [94, твердження 6, с. 455] (див. також [113, теорема 2.70]), наслідку 2.16 та пункту (i) теореми 2.4 випливає, що з точністю до $G^\sim_{\mathcal{L}_1}$-еквівалентності $\pi_*\mathfrak{g}_V^{\rm ess} = \{0\}$, $\pi_*\mathfrak{g}_V^{\rm ess} = \langle\partial_t\rangle$, $\pi_*\mathfrak{g}_V^{\rm ess} = \langle\partial_t, t\partial_t\rangle$ та $\pi_*\mathfrak{g}_V^{\rm ess} = \langle\partial_t, t\partial_t, t^2\partial_t\rangle$ відповідно у випадках $k = 0$,

$k = 1$, $k = 2$ та $k = 3$. Зазначимо, що для вичерпної групової класифікації класу $\mathcal{L}'_1$ для фіксованого значення n необхідна класифікація підалгебр $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{F})$ з точністю до $\mathrm{SL}(n,\mathbb{F})$-еквівалентності. Повний список $\mathrm{SL}(n,\mathbb{F})$-нееквівалентних підалгебр алгебри $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{F})$ є добре відомим для $n = 2$, див. також [116,121], а випадок $n = 3$ розглянуто П. Вінтерніцом у роботі [136] (слід зауважити, що ці результати вимагають додаткової перевірки). У той же час наскільки відомо, то таких списків для більших значень n у літературі не існує.

Таким чином, алгебра $\mathfrak{g}^{\rm ess}_V$ утворена за допомогою

- базисного векторного поля $I = x^a\partial_{x^a}$, ядра алгебри ліївської інваріантності $\mathfrak{g}^{\cap}_{\mathcal{L}'}$,
- p векторних полів $Q_s = \Gamma^{ab}_s x^b\partial_{x^a}$, $s = 1,\dots,p$, де матриці $\Gamma_s = (\Gamma^{ab}_s)$ утворюють базис підалгебри $\mathfrak{s} = \mathfrak{s}_V$ алгебри $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{F})$, $0 \leqslant p := \dim\mathfrak{s} \leqslant \dim\mathfrak{sl}(n,\mathbb{F}) = n^2 - 1$, та
- k векторних полів $Q_{p+\iota} = \tau^\iota\partial_t + \big(\tfrac12\tau^\iota_t x^a + \Gamma^{ab}_{p+\iota}x^b\big)\partial_{x^a}$ з лінійно незалежними t-компонентами τ^ι, $\iota = 1,\dots,k$, де $k \in \{0,1,2,3\}$.

Іншими словами, алгебру $\mathfrak{g}^{\rm ess}_V$ можна представити як

$$\mathfrak{g}^{\rm ess}_V = \mathfrak{i} \oplus (\mathfrak{t} \in \mathfrak{s}^{\rm vf}),$$

де $\mathfrak{i} := \langle I\rangle$ — ідеал алгебри $\mathfrak{g}^{\rm ess}_V$, що є спільним для всіх систем $L'_V \in \mathcal{L}'_1$,

$$\mathfrak{s}^{\rm vf} = \mathfrak{s}^{\rm vf}_V := \langle Q_s,\ s = 1,\dots,p\rangle = \{\Gamma^{ab}x^b\partial_{x^a} \mid \Gamma \in \mathfrak{s}\}$$

— ідеал алгебри $\mathfrak{g}^{\rm ess}_V$, а

$$\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_V := \langle Q_{p+\iota},\ \iota = 1,\dots,k\rangle$$

— підпростір алгебри $\mathfrak{g}^{\rm ess}_V$. Більш точний опис структури алгебри $\mathfrak{g}^{\rm ess}_V$ наведено в теоремі 2.30. Зокрема, завжди можна вибрати $\mathfrak{t}$ як підалгебру алгебри $\mathfrak{g}^{\rm ess}_V$. Більш того, фактично $k = \dim\mathfrak{t} \in \{0,1,2\}$ та $p = \dim\mathfrak{s}^{\rm vf} \leqslant n^2 - 2n + 1$.

$\boldsymbol{k=0}$**.** Для зручності вважаємо з самого початку, що $\operatorname{tr} V = 0$, тобто $L'_V \in \mathcal{L}''_1$ (це можливо завдяки $G^{\sim}_{\mathcal{L}'_1}$-еквівалентності). Відповідне розширення алгебри $\mathfrak{g}^{\rm ess}_V$ утворено векторними полями $Q_s := \Gamma^{ab}_s x^b \partial_{x^a}$, $s=1,\dots,p$. Достатньо розглянути лише $\mathrm{SL}(n,\mathbb{F})$-нееквівалентні підалгебри алгебри $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{F})$ як кандидати для побудови розширень ліївської симетрії у випадку $k=0$ з точністю до $G^{\sim}_{\mathcal{L}'_1}$-еквівалентності. З класифікаційної умови (2.28) випливає, що $Q_s \in \mathfrak{g}^{\rm ess}_V$ тоді і лише тоді, коли $[\Gamma_s, V]=0$, $s=1,\dots,p$, тобто матричнозначна функція V є лінійною комбінацією матриць із централізатора $\mathrm{C}_{\mathfrak{sl}(n,\mathbb{F})}(\mathfrak{s})$ підалгебри $\mathfrak{s}$ в алгебрі $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{F})$ з коефіцієнтами, що залежать від змінної t. Таким чином, $\mathfrak{s}$ — власна підалгебра алгебри $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{F})$, оскільки підалгебра $\{0\}$ відповідає випадку, що не допускає розширення ліївської симетрії, а $\{V(t)\mid t\in\mathcal{I}\}\subseteq\langle E\rangle$, якщо $\mathfrak{s}=\mathfrak{sl}(n,\mathbb{F})$.

У подальшому розгляді використовуємо наступні властивості централізаторів підалгебр алгебр Лі [83]:

1. Нехай $\mathfrak{g}$ — алгебра Лі, для будь-якої підмножини S алгебри $\mathfrak{g}$ з означення централізатора випливає, що $\mathsf{S}\subseteq \mathrm{C}_{\mathfrak{g}}\big(\mathrm{C}_{\mathfrak{g}}(\mathsf{S})\big)$. Якщо $\mathsf{S}_1\subseteq\mathsf{S}_2\subseteq\mathfrak{g}$, то $\mathrm{C}_{\mathfrak{g}}(\mathsf{S}_1)\supseteq\mathrm{C}_{\mathfrak{g}}(\mathsf{S}_2)$. Тому підалгебра $\mathfrak{s}$ алгебри $\mathfrak{g}$ співпадає з $\mathrm{C}_{\mathfrak{g}}(\mathsf{S})$ з деякої підмножини S алгебри $\mathfrak{g}$ тоді і лише тоді, коли $\mathfrak{s}=\mathrm{C}_{\mathfrak{g}}\big(\mathrm{C}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{s})\big)$. Дійсно, достатність цього твердження випливає безпосередньо з того, що $\mathsf{S}=\mathrm{C}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{s})$. Якщо $\mathfrak{s}=\mathrm{C}_{\mathfrak{g}}(\mathsf{S})$, то з включень $\mathfrak{s}\subseteq\mathrm{C}_{\mathfrak{g}}\big(\mathrm{C}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{s})\big)$, $\mathsf{S}\subseteq\mathrm{C}_{\mathfrak{g}}\big(\mathrm{C}_{\mathfrak{g}}(\mathsf{S})\big)=\mathrm{C}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{s})$ маємо $\mathfrak{s}=\mathrm{C}_{\mathfrak{g}}(\mathsf{S})\supseteq\mathrm{C}_{\mathfrak{g}}\big(\mathrm{C}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{s})\big)$, а отже, $\mathfrak{s}=\mathrm{C}_{\mathfrak{g}}\big(\mathrm{C}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{s})\big)$, що й доводить необхідність вищенаведеного твердження.

2. Для будь-якої підалгебри $\mathfrak{c}$ алгебри $\mathfrak{g}$, яка є централізатором підмножини алгебри $\mathfrak{g}$, множина Σ усіх підмножин алгебри $\mathfrak{g}$ з централізатором $\mathfrak{c}$ має максимальний елемент $\mathfrak{s}$ відносно включення, який співпадає з $\mathrm{C}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{c})$. Дійсно, якщо $\mathfrak{s}=\mathrm{C}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{c})$, то $\mathrm{C}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{s})=\mathfrak{c}$, тобто $\mathfrak{s}\in\Sigma$. Більш того, для будь-якого $\mathsf{S}\subseteq\mathfrak{g}$ з $\mathrm{C}_{\mathfrak{g}}(\mathsf{S})=\mathfrak{c}$ маємо $\mathsf{S}\subseteq\mathrm{C}_{\mathfrak{g}}\big(\mathrm{C}_{\mathfrak{g}}(\mathsf{S})\big)=\mathrm{C}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{c})=\mathfrak{s}$, тобто підалгебра $\mathfrak{s}$ включає будь-яку підмножину з множини Σ. Іншими

словами, елемент $\mathfrak{s}$ множини Σ є максимальним тоді і лише тоді, коли $\mathfrak{s} = \mathrm{C}_{\mathfrak{g}}\big(\mathrm{C}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{s})\big)$.

3. Нехай G — група Лі, а $\mathfrak{g}$ — відповідна алгебра Лі. Якщо підалгебри $\mathfrak{s}_1$ та $\mathfrak{s}_2$ алгебри $\mathfrak{g}$ є G-еквівалентними, то їх централізатори $\mathrm{C}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{s}_1)$ та $\mathrm{C}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{s}_2)$ є також G-еквівалентними один одному. Більш того, для будь-якої підалгебри $\mathfrak{s}$ алгебри $\mathfrak{g}$ стабілізатор підгрупи $\mathrm{St}_G(\mathfrak{s})$ групи G відносно алгебри $\mathfrak{s}$ має місце в стабілізаторі підгрупи $\mathrm{St}_G\big(\mathrm{C}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{s})\big)$ групи G відносно $\mathrm{C}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{s})$. Очевидно, що $\mathrm{St}_G(\mathfrak{s}) = \mathrm{St}_G\big(\mathrm{C}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{s})\big)$, якщо $\mathfrak{s} = \mathrm{C}_{\mathfrak{g}}\big(\mathrm{C}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{s})\big)$.

Процедура класифікації. Таким чином, можна запропонувати алгоритм класифікації розширень ліївської симетрії у випадку $k = 0$, щонайменше для невеликих значень n.

- Для кожної підалгебри з повного списку $\mathrm{SL}(n, \mathbb{F})$-нееквівалентних підалгебр алгебри $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{F})$ обчислюємо централізатор його централізатора.
- Вибираємо всі власні підалгебри $\mathfrak{s}$ зі списку підалгебр для яких $\mathfrak{s} = \mathrm{C}_{\mathfrak{sl}(n,\mathbb{F})}\big(\mathrm{C}_{\mathfrak{sl}(n,\mathbb{F})}(\mathfrak{s})\big)$.
- Повний список нееквівалентних суттєвих розширень ліївської симетрії у випадку $k = 0$ для класу $\mathcal{L}_1'$ вичерпують алгебри $\mathfrak{g}_V^{\mathrm{ess}} = \langle I \rangle \oplus \mathfrak{s}^{\mathrm{vf}}$ для всіх отриманих підалгебр $\mathfrak{s} \subsetneq \mathfrak{sl}(n, \mathbb{F})$, де матриця довільних елементів V приймає довільні значення вигляду $V = v^l(t)K_l$ для базису $(K_l,\ l = 1, \dots, m)$ централізатора $\mathrm{C}_{\mathfrak{sl}(n,\mathbb{F})}(\mathfrak{s})$.

Необхідна умова щодо частинного значення V для того, щоб вищенаведена форма була загальною полягає в тому, що після представлення його як $V = \tilde{v}^{l'}(t)\tilde{K}_{l'}$ з лінійно незалежними функціями $\tilde{v}^{l'}$ та лінійно незалежними матрицями $\tilde{K}_{l'}$, $l' = 1, \dots, m' \leqslant m$ маємо

$$\mathrm{C}_{\mathfrak{sl}(n,\mathbb{F})}\big(\{V(t) \mid t \in \mathcal{I}\}\big) = \mathrm{C}_{\mathfrak{sl}(n,\mathbb{F})}\big(\{\tilde{K}_1, \dots, \tilde{K}_{m'}\}\big) = \mathfrak{s}.$$

Це представлення точно включає значення матриці V з лінійно незалежними v^1, …, v^m. Достатні умови для довільних значень V у цих випадках класифікації додатково містять більш делікатні умови, які пов'язані з накладеною умовою $k=0$, див. випадки для інших значень k нижче. Очевидно, що у представленні $V=\tilde v^{l'}(t)\tilde K_{l'}$, коефіцієнти $\tilde v^1$, …, $\tilde v^{m'}$ та матриці $\tilde K_1$, …, $\tilde K_{m'}$ визначено з точністю до перетворень вигляду $\tilde v^{l'}\to\tilde v^{l''}\alpha^{l'l''}$, $\tilde K_{l'}\to\hat\alpha^{l'l''}\tilde K_{l''}$ з невиродженою $m'\times m'$ матрицею $(\alpha^{l'l''})$ та $(\hat\alpha^{l'l''})=(\alpha^{l'l''})^{-1}$. Системи $L'_V, L'_{\tilde V}\in\mathcal L''_1$ з тією ж суттєвою алгеброю ліївської інваріантності $\langle I\rangle\oplus\mathfrak s^{\rm vf}$ є $G^\sim_{\mathcal L'_1}$-еквівалентними тоді і лише тоді, коли існує перетворення з (суттєвої) групи еквівалентності $G^{\rm s\sim}_{\mathcal L''}$ класу $\mathcal L''$, з матрицею C зі стабілізатора підгрупи ${\rm St}_{{\rm SL}(n,\mathbb F)}(\mathfrak s)$ групи ${\rm SL}(n,\mathbb F)$ відносно $\mathfrak s$, що відображає матрицю V в матрицю $\tilde V$, див. наслідок 2.9.

У наведеному алгоритмі можна поміняти місцями ролі підалгебр утворених матрицями Γ_s і підалгебр утворених матрицями K_l, вибираючи серед підалгебр алгебри $\mathfrak{sl}(n,\mathbb F)$ пов'язані з представленнями для матриці V, що співпадають із централізаторами їх централізаторів. Тоді елементи Γ їх централізаторів відповідають векторним полям, що відповідають розширенням ліївської симетрії.

$\boldsymbol{k=1.}$ З точністю до $G^\sim_{\mathcal L'_1}$-еквівалентності алгебра $\mathfrak g^{\rm ess}_V$ містить векторне поле $P:=\partial_t+\Upsilon^{ab}x^b\partial_{x^a}$ з деякою (сталою) матрицею $\Upsilon\in\mathfrak{sl}(n,\mathbb F)$. З класифікаційної умови (2.28) після підстановки компонент цього векторного поля випливає, що $V(t)={\rm e}^{t\Upsilon}V(0){\rm e}^{-t\Upsilon}$. Звідси систему L'_V зведено за допомогою точкового перетворення $\tilde t=t$, $\tilde{\boldsymbol x}={\rm e}^{-t\Upsilon}\boldsymbol x$ до системи $\tilde{\boldsymbol x}_{\tilde t\tilde t}=-2\Upsilon\tilde{\boldsymbol x}_{\tilde t}+\big(V(0)-\Upsilon^2\big)\tilde{\boldsymbol x}$, матричнозначні коефіцієнти якої є сталими. Отже, систему L'_V легко можна інтегрувати.

Можемо представити матрицю $V(0)$ у вигляді $V(0)=W+\varepsilon E$, де W — ненульова (стала) безслідова матриця, $\varepsilon=n^{-1}\operatorname{tr}V(0)$, і покладемо $\varepsilon\in\mathcal E$, з точністю до перетворень еквівалентності, що масштабують змінну t, де $\mathcal E:=\{-1,0,1\}$, якщо $\mathbb F=\mathbb R$ та $\mathcal E:=\{0,1\}$, якщо $\mathbb F=\mathbb C$. Тоді за формулою Бекера–Хаусдорфа маємо

$$V(t)=\varepsilon E+{\rm e}^{t\Upsilon}W{\rm e}^{-t\Upsilon}=\varepsilon E+\sum_{l=0}^{\infty}\frac{t^l}{l!}K_l,\tag{2.29}$$

де

$$K_0 := W, \quad K_l := [\Upsilon, K_{l-1}], \quad l = 1, 2, \dots .$$

Зауважимо, що $W \neq 0$, оскільки $L'_V \notin \mathcal{L}'_0$. З класифікаційної умови (2.28) випливає, що векторне поле $Q_\Gamma = \Gamma^{ab}x^b\partial_{x^a}$ з $\Gamma \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{F})$ належить алгебрі $\mathfrak{g}_V^{\rm ess}$ тоді і лише тоді, коли $[V(t), \Gamma] = 0$ для будь-якого t з області визначення матриці V, що еквівалентно умові

$$[K_l, \Gamma] = 0, \quad l \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{2.30}$$

Множина $\mathfrak{s}$ всіх таких матриць Γ — централізатор множини $\{K_l,\ l \in \mathbb{N}_0\}$, тобто $\mathfrak{s} = \mathrm{C}_{\mathfrak{sl}(n,\mathbb{F})}(\{K_l,\ l \in \mathbb{N}_0\})$, а тому це підалгебра алгебри $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{F})$. Насправді, $\mathfrak{s} = \mathrm{C}_{\mathfrak{sl}(n,\mathbb{F})}(\{K_0, \dots, K_m\})$, де m — максимум значення l таке, що K_0, …, K_l — лінійно незалежні. (Оскільки $K_{m+1} \in \langle K_0, \dots, K_m \rangle$, то за індукцією можна показати, що $K_l \in \langle K_0, \dots, K_m \rangle$ для будь-якого $l > n$.) Таким чином, підалгебру $\mathfrak{s}$ можна конструктивно знайти, якщо матриці Υ та W задано, і $\mathfrak{s} \neq \mathfrak{sl}(n, \mathbb{F})$. З огляду на тотожність Якобі, умову (2.30) виконано тоді і лише тоді, коли

$$[\Upsilon, \Gamma] \in \mathfrak{s}, \quad [W, \Gamma] = 0,$$

тобто $\Upsilon \in \mathrm{N}_{\mathfrak{sl}(n,\mathbb{F})}(\mathfrak{s})$ та $W \in \mathrm{C}_{\mathfrak{sl}(n,\mathbb{F})}(\mathfrak{s})$. Умова $[\Upsilon, \Gamma] \in \mathfrak{s}$ є природною, оскільки для $\Gamma \in \mathfrak{s}$ маємо $Q_\Gamma := \Gamma^{ab}x^b\partial_{x^a} \in \mathfrak{g}_V^{\rm ess}$, і тому $[P, Q_\Gamma] = [\Upsilon, \Gamma]^{ab}x^b\partial_{x^a} \in \mathfrak{g}_V^{\rm ess}$, а це означає, що $[\Upsilon, \Gamma] \in \mathfrak{s}$. Як і у випадку $k = 0$, нехай $\mathfrak{s}^{\rm vf} := \{Q_\Gamma \mid \Gamma \in \mathfrak{s}\}$. Зауважимо, що зміна параметра ε не впливає на алгебру $\mathfrak{s}^{\rm vf}$ і векторне поле P, а отже, також не впливає на всю алгебру $\mathfrak{g}_V^{\rm ess}$.

Оскільки $\varepsilon = n^{-1}\,\mathrm{tr}\,V(0)$ та $W = V(0) - \varepsilon E$, то ε та W визначено через V єдиним чином, але це невірно для Υ. Більш точно, набори $(\varepsilon, W, \Upsilon)$ та $(\tilde\varepsilon, \tilde W, \tilde\Upsilon)$ відповідають тим же значенням $V = \tilde V$ тоді і лише тоді, коли $\varepsilon = \tilde\varepsilon$, $W = \tilde W$ та $\Upsilon - \tilde\Upsilon \in \mathfrak{s}$. Це твердження випливає з другого представлення для матриці V в формулі (2.29). Дійсно, достатність є очевидною, оскільки тоді $\tilde K_0 = K_0$ та за індукцією $\tilde K_l = [\tilde\Upsilon, \tilde K_{l-1}] = [\Upsilon, K_{l-1}] = K_l$,

$l\in\mathbb{N}$, з цього випливає, що $V=\tilde V$ в силу формули (2.29). І навпаки, якщо $V=\tilde V$, то $\varepsilon=\tilde\varepsilon$, $W=\tilde W$, $K_l-\tilde K_l=[\Upsilon-\tilde\Upsilon,K_{l-1}]=0$, $l\in\mathbb{N}$, а тому $\Upsilon-\tilde\Upsilon\in\mathfrak{s}$. Доведене твердження є природним із точки зору інтерпретації ліївських симетрій матриці Υ та матриць із множини $\mathfrak{s}$, оскільки матрицю Υ, що параметризує векторне поле ліївської симетрії P системи L'_V, визначено з точністю до додавання довільної матриці з множини $\mathfrak{s}$ через те, що є можливість лінійно комбінувати векторне поле P з елементами алгебри $\mathfrak{s}^{\rm vf}$.

Процедура класифікації. Аналогічно до випадку $k=0$, і знову принаймні для невеликих значень n, існує два способи класифікації розширень ліївських симетрій при $k=1$, але на відміну від попереднього випадку, ці способи неспряжені між собою.

Спосіб, який починаємо з класифікації можливих алгебр ліївської симетрії, є повністю подібним до його аналогу у випадку $k=0$, і також на основі властивостей централізаторів. Припускаємо, що виконано перші два кроки алгоритму для $k=0$, тобто побудовано повний список ${\rm SL}(n,\mathbb{F})$-нееквівалентних підалгебр $\mathfrak{s}$ алгебри $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{F})$, які задовольняють умову $\mathfrak{s}={\rm C}_{\mathfrak{sl}(n,\mathbb{F})}\big({\rm C}_{\mathfrak{sl}(n,\mathbb{F})}(\mathfrak{s})\big)\neq\mathfrak{sl}(n,\mathbb{F})$. На відміну від випадку $k=0$, підалгебра $\mathfrak{s}=\{0\}$ може бути придатною тут. Тоді повний список нееквівалентних суттєвих розширень ліївських симетрій для випадку $k=1$ у класі $\mathcal{L}'_1$ містить підалгебри $\mathfrak{g}^{\rm ess}_V=\langle I\rangle\oplus\big(\langle P\rangle\mathbin{\in\!\!\!\!+}\mathfrak{s}^{\rm vf}\big)$ для всіх отриманих підалгебр $\mathfrak{s}\subsetneq\mathfrak{sl}(n,\mathbb{F})$, де довільний елемент V набуває довільних значень вигляду (2.29) з $\varepsilon\in\mathcal{E}$, ненульовою матрицею $W\in\mathfrak{c}:={\rm C}_{\mathfrak{sl}(n,\mathbb{F})}(\mathfrak{s})$ та Υ з (фіксованого) доповняльного підпростору s до $\mathfrak{s}$ в ${\rm N}_{\mathfrak{sl}(n,\mathbb{F})}(\mathfrak{s})$. Для довільних матриць $W\in\mathfrak{c}$ та $\Upsilon\in\mathsf{s}$ маємо, що $K_l\in\mathfrak{c}$ для всіх матриць K_l, які визначено в (2.29), або еквівалентно $\mathfrak{s}\subseteq{\rm C}_{\mathfrak{sl}(n,\mathbb{F})}(\{K_l,\ l\in\mathbb{N}_0\})$. Випадок розширення суттєвої ліївської симетрії, що відповідає підалгебрі $\mathfrak{s}$ є “справжнім” тоді і лише тоді, коли існують такі матриці $W\in\mathfrak{c}$ та $\Upsilon\in\mathsf{s}$ такі, що $\mathfrak{s}={\rm C}_{\mathfrak{sl}(n,\mathbb{F})}(\{K_l,\ l\in\mathbb{N}_0\})$ та $\dim\pi_*\mathfrak{g}^{\rm ess}_V<2$. Аналогічно до випадку $k=0$ називаємо такі значення пари параметр-матриць (Υ,W) загальними. Іншими словами, алгебра $\langle I\rangle\oplus\big(\langle P\rangle\Subset\mathfrak s^{\rm vf}\big)$ дійсно співпадає з усією алгеброю $\mathfrak g^{\rm ess}_V$ для $V=\varepsilon E+{\rm e}^{t\Upsilon}W{\rm e}^{-t\Upsilon}$ тоді і лише тоді, коли пара (Υ,W) приймає довільне значення з $\mathsf s\times\mathfrak c$. Додатково до $\mathfrak s$, приєднані дії матриць зі стабілізатора підгрупи ${\rm St}_{{\rm SL}(n,\mathbb F)}(\mathfrak s)$ групи ${\rm SL}(n,\mathbb F)$ відносно $\mathfrak s$ зберігають $\mathfrak c$ та ${\rm N}_{\mathfrak{sl}(n,\mathbb F)}(\mathfrak s)$. Тому вони індукують добре визначені дії на фактор-просторі ${\rm N}_{\mathfrak{sl}(n,\mathbb F)}(\mathfrak s)/\mathfrak s$, а тому і на $\mathsf s$ як на множині представлень для класів суміжності з цього фактор-простору. Системи L'_V та $L'_{\tilde V}$ з $\varepsilon,\tilde\varepsilon\in\mathcal E$ та довільними значеннями $(\Upsilon,W),(\tilde\Upsilon,\tilde W)\in\mathsf s\times\mathfrak c$ є $G^\sim_{\mathcal L'}$-еквівалентними тоді і лише тоді, коли $\varepsilon=\tilde\varepsilon$ та існує матриця з ${\rm St}_{{\rm SL}(n,\mathbb F)}(\mathfrak s)$, приєднана дія якої відображає (Υ,W) в $(\tilde\Upsilon,\tilde W)$, якщо $\varepsilon\ne0$ або в $(\alpha\tilde\Upsilon,\alpha^2\tilde W)$ з $\alpha\in\mathbb F\setminus\{0\}$ в іншому випадку.

Початковою точкою другого способу є вигляд матричнозначної параметр-функції V, яку визначено для $k=1$ за допомогою формули (2.29) та значення параметра $\varepsilon\in\mathcal E$ і сталих безслідових параметр-матриць W та Υ. Беремо повний список ${\rm SL}(n,\mathbb F)$-нееквівалентних пар матриць (Υ,W). Такі списки побудовано (і можна побудувати) лише для невеликих значень n, див., наприклад, [29] для $n=4$. Для довільного значення n задачу класифікації пар $n\times n$ матриць із точністю до подібності матриць вважаємо дикою, див. роботи [35, 36, 64] та літературу там щодо дискусій і відповідних результатів. Далі обчислюємо максимальну кількість лінійно незалежних матриць K_0, …, K_m відповідно до формули (2.29) та $\mathfrak s$, $\mathfrak s:={\rm C}_{\mathfrak{sl}(n,\mathbb F)}(\{K_0,\dots,K_m\})$. Пари (Υ,W) та $(\tilde\Upsilon,\tilde W)$ з $\tilde W={\rm e}^{t_0\Upsilon}W{\rm e}^{-t_0\Upsilon}$ для деякого $t_0\in\mathbb F$ та $\tilde\Upsilon-\Upsilon\in\mathfrak s$ визначають одне і те ж значення функції V з точністю до зсуву за змінною t, що дає додаткове співвідношення еквівалентності на парах матриць. Редукуємо вибраний повний список ${\rm SL}(n,\mathbb F)$-нееквівалентних пар матриць за допомогою цього співвідношення еквівалентності. Якщо $\mathfrak g^{\rm ess}_V=\langle I\rangle\oplus\big(\langle P\rangle\Subset\mathfrak s^{\rm vf}\big)$, то пара (Υ,W) дає відповідний випадок розширення ліївської симетрії для $k=1$.

Зауваження 2.23. На відміну від випадку $k=0$, клас $\mathcal L'_1$ є кращим вибором для групової класифікації у випадку $k=1$, ніж його підклас $\mathcal L''_1$.

Це обґрунтовано тим, що при розгляді класу $\mathcal{L}_1''$ єдине канонічне (з точністю до $G^\sim_{\mathcal{L}'}$-еквівалентності) значення $\tau = 1$ для векторних полів ліївської симетрії із ненульовими t-компонентами τ у класі $\mathcal{L}_1'$ відповідає трьом або двом різним $G^\sim_{\mathcal{L}''}$-нееквівалентним значенням, $\tau \in \{1, t, t^2 + 1\}$ або $\tau \in \{1, t\}$, якщо відповідно $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ або $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Див. наслідки 2.9 та 2.17 і добре відомі класифікації підалгебр алгебри $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{F})$ для $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ [116] та $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Інше пояснення полягає в тому, що параметр ε не впливає на розв'язання задачі групової класифікації для класу $\mathcal{L}_1'$, але роблячи матричнозначну функцію V безслідовою, якщо $\varepsilon \neq 0$, виконуємо точкове перетворення (для зручності, після масштабування ε до $1/4$ або до $-1/2$, лише якщо $\varepsilon < 0$ у дійсному випадку) $\tilde{t} = T(t)$, $\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}$, де $T(t) = \mathrm{e}^t$, якщо $\varepsilon = 1/4$ та $T(t) = \operatorname{tg} t$, якщо $\varepsilon = -1/2$. У результаті замість єдиної пари

$$\big(\mathrm{e}^{t\Upsilon} V(0) \mathrm{e}^{-t\Upsilon},\ \partial_t + \Upsilon^{ab} x^b \partial_{x^a}\big)$$

представлень для (V, P) з точністю до $G^\sim_{\mathcal{L}'}$-еквівалентності у класі $\mathcal{L}_1'$, отримаємо додатково дві або одну (більш складних) пар над $\mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$, відповідно

$$\big(\mathrm{e}^{\ln|t|\,\Upsilon} V(1) \mathrm{e}^{-\ln|t|\,\Upsilon},\ t\partial_t + \Upsilon^{ab} x^b \partial_{x^a}\big),$$
$$\big(\mathrm{e}^{\operatorname{arctg}(t)\Upsilon} V(0) \mathrm{e}^{-\operatorname{arctg}(t)\Upsilon},\ (t^2+1)\partial_t + \Upsilon^{ab} x^b \partial_{x^a}\big)$$

або першу з цих пар із $\ln|t|$ замінено на $\operatorname{Log} t$ з точністю до $G^\sim_{\mathcal{L}''}$-еквівалентності у класі $\mathcal{L}_1''$. Тут Log — головне значення логарифма. Вигляд систем, що допускають векторні поля ліївської симетрії із ненульовими t-компонентами має належну і чітку інтерпретацію лише після специфічного відображення цих систем у надклас $\mathcal{L}_1$. У той же час, цей клас не зовсім зручний для прямого виконання групової класифікації, оскільки параметр-функції η^{ab} у векторних полях ліївської симетрії систем із класу $\mathcal{L}_1$ можуть приймати несталі значення, див. лему 2.14, яка потребує додаткових зусиль у процесі класифікації таких систем.

$\boldsymbol{k = 2.}$ Алгебра $\mathfrak{g}^{\rm ess}_V$ містить два векторні поля з лінійно незалежними t-компонентами, які можна вибрати, з точністю до їх лінійної рекомбінації та $G^{\sim}_{\mathcal{L}'_1}$-еквівалентності, у вигляді $P := \partial_t + \Upsilon^{ab}x^b\partial_{x^a}$ та $D := t\partial_t + \Lambda^{ab}x^b\partial_{x^a}$ з деякими (сталими) матрицями $\Upsilon, \Lambda \in \mathfrak{sl}(n,\mathbb{F})$. Аналогічно до випадку $k=1$, з класифікаційної умови (2.28), у яку підставлено компоненти векторного поля P, випливає загальний вигляд матриці V, $V(t) = \mathrm{e}^{t\Upsilon}W\mathrm{e}^{-t\Upsilon}$, де $W := V(0)$. Умова $L'_V \notin \mathcal{L}'_0$ еквівалентна умові $W \notin \langle E\rangle$. Далі визначаємо обмеження на V, які виникають внаслідок інваріантності системи L'_V відносно векторного поля D. Після підстановки компонентів цього векторного поля в класифікаційну умову (2.28) отримаємо матричне рівняння $tV_t + 2V = [\Lambda, V]$. Диференціюючи це рівняння $l \in \mathbb{N}_0$ разів відносно змінної t, приходимо до рівняння

$$t\partial_t^{l+1}V_t + (l+2)\partial_t^l V = [\Lambda, \partial_t^l V],$$

а потім визначаємо результат при $t=0$. Це приводить до послідовності матричних рівнянь

$$[\Lambda, K_l] = (l+2)K_l, \quad l \in \mathbb{N}_0, \tag{2.31}$$

з матрицями K_l, що визначено формулами (2.29), оскільки $\partial_t^l V(0) = (\mathrm{ad}_\Upsilon)^l W = K_l$. Тут і далі розглянемо приєднану дію $\mathrm{ad}_M := [M, \cdot]$ для матриці M як лінійний оператор на $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{F})$. З рівнянь (2.31) та леми 4 роботи [83, с. 44] випливає, що для кожного $l \in \mathbb{N}_0$ матриця K_l є нільпотентною. Більш того, якщо ця матриця ненульова, то вона є власним вектором оператора ad_Λ із власним значенням $l+2$. Оскільки лінійний оператор на скінченновимірному лінійному просторі має скінченне число власних значень, і власні вектори, що відповідають різним власним значенням, лінійно незалежні, то існує лише скінченна кількість ненульових матриць K_l. Нагадаємо, принаймні матриця $K_0 := W$ є ненульовою, а тому $\Lambda \neq 0$. Нехай m — мінімальне значення l таке, що $K_{l+1} = 0$. Тоді $K_l = 0$ для всіх $l > m$. Іншими словами, матричнозначна функція V є поліномом відносно змінної t з ненульовими нільпотентними матричними коефіцієнтами,

$$V = \mathrm{e}^{t\Upsilon} W \mathrm{e}^{-t\Upsilon} = \sum_{l=0}^{m} \frac{t^l}{l!} K_l, \tag{2.32}$$

де

$$K_0 := W \neq 0, \quad K_l := [\Upsilon, K_{l-1}] \neq 0, \quad l = 1, 2, \ldots, m.$$

З комутаційних співвідношень (2.31) випливає, що

$$[\Lambda, K_l K_{l'}] = (l + l' + 4) K_l K_{l'}, \quad l, l' \in \mathbb{N}_0,$$

а тому

$$[\Lambda, [K_l, K_{l'}]] = (l + l' + 4)[K_l, K_{l'}], \quad l, l' \in \mathbb{N}_0.$$

За індукцією доводимо аналогічні співвідношення для комутаторів Λ із кратними добутками і комутаторами матриць K_l. Звідси асоціативна алгебра $\mathfrak{K}$ та алгебра Лі $\mathfrak{k}$, що утворенні за допомогою матриць $\{K_0, \ldots, K_m\}$ є градуйованими нільпотентними алгебрами, які утворені нільпотентними матрицями, $\mathfrak{K} = \bigoplus_{l\geqslant 2} \mathfrak{K}_l$ з $\mathfrak{K}_l \mathfrak{K}_{l'} \subseteq \mathfrak{K}_{l+l'}$, $\mathfrak{k} = \bigoplus_{l\geqslant 2} \mathfrak{k}_l$ з $[\mathfrak{k}_l, \mathfrak{k}_{l'}] \subseteq \mathfrak{k}_{l+l'}$. $[\Lambda, M] = lM$ для будь-якої матриці $M \in \mathfrak{K}_l$, а також для будь-якої $M \in \mathfrak{k}_l$. Оскільки алгебра Лі $\mathfrak{k}$ містить нільпотентні матриці, то за теоремою Енгеля всі ці матриці можна одночасно звести до строго верхньотрикутного вигляду з точністю до подібності матриць. Іншими словами, *з точністю до* $\mathrm{SL}(n, \mathbb{F})$*-еквівалентності, матричнозначна функція* V *є поліномом відносно змінної* t *зі строго верхньотрикутними матричними коефіцієнтами*, порівняй це речення із представленням (2.32).

Нехай як і в попередніх випадках $\mathfrak{s} := \mathrm{C}_{\mathfrak{sl}(n,\mathbb{F})}(\{K_0, \ldots, K_m\})$ та $\mathfrak{s}^{\rm vf} := \{Q_\Gamma := \Gamma^{ab} x^b \partial_{x^a} \mid \Gamma \in \mathfrak{s}\}$, тоді $\mathfrak{g}_V^{\rm ess} = \langle I \rangle \oplus \big(\langle P, D \rangle \Subset \mathfrak{s}^{\rm vf}\big)$ та $\mathfrak{s} \neq \mathfrak{sl}(n, \mathbb{F})$. Зокрема, мають місце матричні комутаційні співвідношення

$$[\Lambda, \Upsilon] - \Upsilon \in \mathfrak{s}, \quad [\Upsilon, \Gamma], [\Lambda, \Gamma] \in \mathfrak{s} \text{ для будь-якої } \Gamma \in \mathfrak{s},$$

а матриці Υ і Λ визначаємо з точністю до додавання будь-якої матриці з алгебри $\mathfrak{s}$. Неоднозначність матриці Υ також випливає із представлення (2.32). Оскільки алгебра Лі $\mathfrak{k}$ є нільпотентною, то її центр $\mathrm{Z}(\mathfrak{k}) := \mathrm{C}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{k})$ є ненульовим. Таким чином, $\mathfrak{s} = \mathrm{C}_{\mathfrak{sl}(n,\mathbb{F})}(\mathfrak{k}) \supseteq \mathrm{Z}(\mathfrak{k}) \neq \{0\}$, тобто $\dim \mathfrak{s}^{\mathrm{vf}} \geqslant 1$.

Далі спочатку розглянемо випадок $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, а потім покажемо, що дійсний випадок можна легко звести до комплексного випадку.

Нехай $\sigma(\Lambda) = \{\mu_1, \dots, \mu_r\}$ — спектр матриці Λ, тобто множина її власних значень, а тому $r \in \{1, \dots, n\}$. Далі індекси i та j пробігають значення від 1 до r. Нехай $\mathfrak{U}_i$ — узагальнений власний простір для власного значення μ_i. Отже, $\mathbb{F}^n = \bigoplus_i \mathfrak{U}_i$, $n_i := \dim \mathfrak{U}_i$ — алгебраїчна кратність власного значення μ_i, і звідси $n_1 + \dots + n_r = n$. Вибираємо канонічний базис у кожному просторі $\mathfrak{U}_i$ для обмеження $\Lambda\big|_{\mathfrak{U}_i}$ матриці Λ на простір $\mathfrak{U}_i$, який повністю складено з ланцюжків Жордана для $\Lambda\big|_{\mathfrak{U}_i}$, і послідовно об'єднуємо вибрані базиси у базис $\mathbb{F}^n$. Розбиваємо кожну матрицю M на блоки відповідно до розкладу $\mathbb{F}^n = \bigoplus_i \mathfrak{U}_i$, $M = (M_{ij})$, де M_{ij} — $n_i \times n_j$ підматриця матриці M, яку отримано видаленням рядків і стовпців, крім тих, що відповідають базисним елементам відповідно просторів $\mathfrak{U}_i$ та $\mathfrak{U}_j$. Зокрема, $\Lambda = \bigoplus_i \Lambda_{ii}$.

Для будь-якого $\mu \in \mathbb{F}$ з комутаційних співвідношень (2.31) випливає, що

$$(\Lambda - (\mu + l + 2)E)K_l = K_l(\Lambda - \mu E),$$

а тому

$$(\Lambda - (\mu + l + 2)E)^{l'} K_l = K_l(\Lambda - \mu E)^{l'}, \quad l, l' \in \mathbb{N}_0.$$

Зокрема, це означає, що $K_l \mathfrak{U}_j \subseteq \mathfrak{U}_i$ для (i, j) з $\mu_i = \mu_j + l + 2$, або еквівалентно $K_{l,ij} = 0$, якщо $\mu_i \neq \mu_j + l + 2$. Розглянемо розклад Жордана–Шевальє матриці Λ, $\Lambda = \Lambda_{\mathrm{s}} + \Lambda_{\mathrm{n}}$. Таким чином, $\Lambda_{\mathrm{s},ii} = \Lambda_{ii,\mathrm{s}} = \mu_i E_{ii}$, $\Lambda_{\mathrm{n},ii} = \Lambda_{ii,\mathrm{n}}$, та $\Lambda_{\mathrm{s},ij} = \Lambda_{\mathrm{n},ij} = 0$, якщо $i \neq j$. Розіб'ємо матричні комутаційні співвідношення (2.31) на блоки,

$$[\Lambda, K_l]_{ij} = \Lambda_{ii} K_{l,ij} - K_{l,ij}\Lambda_{jj} = (l+2)K_{l,ij}.$$

Остання умова є тривіальною рівністю нульових матриць для (i,j) з $\mu_i \neq \mu_j + l + 2$. В іншому випадку умова набуває вигляду

$$((\mu_j + l + 2)E_{ii} + \Lambda_{ii,\mathrm{n}})K_{l,ij} - K_{l,ij}(\mu_j E_{jj} + \Lambda_{jj,\mathrm{n}}) = (l+2)K_{l,ij}.$$

Звідси $[\Lambda_\mathrm{n}, K_l]_{ij} = \Lambda_{ii,\mathrm{n}} K_{l,ij} - K_{l,ij}\Lambda_{jj,\mathrm{n}} = 0$. Очевидно, маємо ту ж рівність для (i,j) з $\mu_i \neq \mu_j + l + 2$. Таким чином, $[\Lambda_\mathrm{n}, K_l] = 0$, $l \in \mathbb{N}_0$, тобто $\Lambda_\mathrm{n} \in \mathfrak{s}$. З огляду на невизначеність матриці Λ, можна покласти $\Lambda_\mathrm{n} = 0$ за допомогою віднімання Λ_n від матриці Λ, тобто, без обмеження загальності, завжди можна замінити матрицю Λ на матрицю Λ_s, яка обов'язково є ненульовою, і вважати, що матриця Λ є напівпростою (або еквівалентно діагональною, оскільки тут $\mathbb{F} = \mathbb{C}$).

Розкладаємо матрицю Υ як $\Upsilon = \hat{\Upsilon} + \check{\Upsilon}$, де $\hat{\Upsilon}_{ij} := \Upsilon_{ij}$, якщо $\mu_i = \mu_j + 1$, та $\hat{\Upsilon}_{ij} := 0$ в іншому випадку, а $\check{\Upsilon} := \Upsilon - \hat{\Upsilon}$. Тому $\check{\Upsilon}_{ij} := 0$, якщо $\mu_i = \mu_j + 1$ та $\check{\Upsilon}_{ij} := \Upsilon_{ij}$ в іншому випадку. Тоді $[\Upsilon, K_l]$ у формулі (2.32) можна представити як $[\Upsilon, K_l] = [\hat{\Upsilon}, K_l] + [\check{\Upsilon}, K_l] = K_{l+1}$. Розіб'ємо цю рівність на блоки, $[\hat{\Upsilon}, K_l]_{ij} + [\check{\Upsilon}, K_l]_{ij} = K_{l+1,ij}$.

Нагадаємо, що $K_{l,ij} = 0$, якщо $\mu_i \neq \mu_j + l + 2$. Тому $[\check{\Upsilon}, K_l]_{ij} = \check{\Upsilon}_{ij'} K_{l,j'j} - K_{l,ii'}\check{\Upsilon}_{i'j} = 0$, якщо $\mu_i = \mu_j + l + 3$. Дійсно, $K_{l,j'j} \neq 0$ лише, якщо $\mu_{j'} = \mu_j + l + 2$, і звідси $\mu_i = \mu_{j'} + 1$, з чого випливає, що $\check{\Upsilon}_{ij'} = 0$. Аналогічно $K_{l,ii'} \neq 0$ лише, якщо $\mu_i = \mu_{i'} + l + 2$, а тому $\mu_{i'} = \mu_j + 1$ та $\check{\Upsilon}_{i'j} = 0$.

Також маємо, що $[\hat{\Upsilon}, K_l]_{ij} = \hat{\Upsilon}_{ij'} K_{l,j'j} - K_{l,ii'}\hat{\Upsilon}_{i'j} = 0$, якщо $\mu_i \neq \mu_j + l + 3$. Дійсно, перший (відповідно другий) матричний добуток може бути ненульовим лише, якщо обидва його множники ненульові, для цього необхідно $\mu_i = \mu_{j'} + 1$ та $\mu_{j'} = \mu_j + l + 2$ (відповідно $\mu_i = \mu_{i'} + l + 2$ та $\mu_{i'} = \mu_j + 1$), тобто $\mu_i = \mu_j + l + 3$. Оскільки $K_{l+1,ij} = 0$, якщо $\mu_i \neq \mu_j + l + 3$, то отримаємо, що $[\check{\Upsilon}, K_l]_{ij} = K_{l+1,ij} - [\hat{\Upsilon}, K_l]_{ij} = 0$, якщо $\mu_i \neq \mu_j + l + 3$.

У результаті $[\check{\Upsilon}, K_l] = 0$, $l \in \mathbb{N}_0$, тобто $\check{\Upsilon} \in \mathfrak{s}$. З огляду на невизначеність Υ, можна покласти $\check{\Upsilon} = 0$ за допомогою віднімання матриці $\check{\Upsilon}$ від матриці Υ, тобто, без обмеження загальності, *завжди можемо замінити матрицю* Υ *на матрицю* $\hat{\Upsilon}$ *відносно* Λ. Тоді $[\Lambda, \Upsilon]_{ij} = \mu_i E_{ii} \Upsilon_{ij} - \Upsilon_{ij} \mu_j E_{jj} = (\mu_i - \mu_j)\Upsilon_{ij}$. Звідси $[\Lambda, \Upsilon]_{ij} = \Upsilon_{ij}$, якщо $\mu_i = \mu_j + 1$ та $[\Lambda, \Upsilon]_{ij} = 0 = \Upsilon_{ij}$ в іншому випадку, тобто $[\Lambda, \Upsilon] = \Upsilon$. Іншими словами, після заміни матриці Υ на $\hat{\Upsilon}$, отримаємо замість $[\Lambda, \Upsilon] - \Upsilon \in \mathfrak{s}$ більш жорстке комутаційне співвідношення

$$[\Lambda, \Upsilon] = \Upsilon.$$

Перевпорядкуємо і розіб'ємо набір $(\mu_1, \dots, \mu_r)$ на максимальні піднабори, і відповідно модифікуємо вибраний базис $\mathbb{F}^n$, так, що в кожному з цих піднаборів його елементи занумеровані в порядку спадання їх дійсних частин, а $\mu_i - \mu_{i+1} \in \{1, 2\}$ для кожної пари послідовних елементів. Будемо називати такі піднабори *ланцюжками власних значень* матриці Λ. Тоді матриці Υ, $W = K_0$ та всі інші K_l стають строго верхньотрикутними, тобто довели ще одним способом, що з точністю до $G^{\sim}_{\mathcal{L}_1}$-еквівалентності, матричнозначна функція V є поліномом відносно змінної t зі строго верхньотрикутними матричними коефіцієнтами. Степінь m цього полінома є меншим ніж максимум серед довжин ланцюжків власних значень матриці Λ, який зменшено на два. Більш того, $\Upsilon_{ij} = K_{l,ij} = 0$, $l \in \mathbb{N}_0$, якщо μ_i та μ_j належать до різних ланцюжків.

Вищезазначені умови, що матриця Λ є напівпростою і матриця Υ співпадає з її $\hat{\Upsilon}$ частиною відносно Λ, все одно ще не визначають ці матриці однозначно. Отже, матрицю Λ визначаємо з точністю до додавання довільної матриці вигляду $\bigoplus_i \nu_i E_{ii}$ у вибраному базисі, де $\nu_i = \nu_j$, якщо μ_i та μ_j належать до одного ланцюжка. Іншими словами, у кожному з ланцюжків власних значень матриці Λ, суттєвими є лише різниці цих власних значень, які є цілими за побудовою. Структуру такого ланцюжка повністю визначено набором різниць (рівних 1 або 2) послідовних власних значень цього ланцюжка.

У випадку $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ виконуємо комплексифікацію простору $\mathbb{R}^n$ до простору $\mathbb{C}^n$. Враховуючи вищезазначене, можна вважати, що після комплексифікації матриці Λ матриця $\Lambda^{\mathbb{C}}$ є діагональною. Якщо матриця $\Lambda^{\mathbb{C}}$ має ланцюжок комплексних власних значень із ненульовими уявними частинами, тоді це ланцюжок комплексно спряжених власних значень. Очевидно, що структури вихідного ланцюжка та його спряженого ланцюжка співпадають, тобто різниці послідовних власних значень рівні між собою для відповідних пар таких власних значень із цих двох ланцюжків. Можемо вибрати канонічний базис для матриці $\Lambda^{\mathbb{C}}$ таким чином, що відповідні узагальнені власні вектори з цього базису, які відповідають цим ланцюжкам, є комплексно спряженими один одному. Через неоднозначність визначення матриці $\Lambda^{\mathbb{C}}$ можемо замінити власні значення в обох ланцюжках їх дійсними частинами. Дійсні та уявні частини вищезазначених узагальнених власних векторів є узагальненими власними векторами матриці, що отримана за допомогою цієї заміни. Далі додатково заміняємо кожну пару спряжених початкових узагальнених власних векторів у вибраному канонічному базисі на пару, що містить дійсну та уявну частини першого власного вектора цієї пари. Для того, щоб уникнути об'єднання нових ланцюжків один з одним або зі збереженими старими ланцюжками, зсуваємо власні значення з тих же ланцюжків на одне і те ж дійсне число, яке потрібно вибрати так, щоб зсуви були незалежними для різних ланцюжків. У побудованій матриці $\Lambda^{\mathbb{C}}_{\mathrm{new}}$ всі власні значення є дійсними, і вона має канонічний базис, що утворений узагальненими власними векторами з дійсними компонентами. Загальна структура ланцюжка матриці $\Lambda^{\mathbb{C}}_{\mathrm{new}}$ співпадає зі структурами ланцюжків матриці $\Lambda^{\mathbb{C}}$, а $\Lambda^{\mathbb{C}} - \Lambda^{\mathbb{C}}_{\mathrm{new}} \in \mathfrak{s}^{\mathbb{C}}$. Розглянемо аналог матриці Λ_{new} для матриці $\Lambda^{\mathbb{C}}_{\mathrm{new}}$ у випадку $\mathbb{R}^n$. Її можна діагоналізувати над полем $\mathbb{R}$, а $\Lambda - \Lambda_{\mathrm{new}} \in \mathfrak{s}$.

Як результат, в обох випадках $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ та $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, без обмеження загальності, можна вважати, що *матриця Λ є діагональною.*

Процедура класифікації. Для випадку $k=2$ можна запропонувати два підходи до класифікації розширень ліївської симетрії, які аналогічні до випадків $k=0$ або $k=1$.

У рамках першого способу починаємо з повного списку $\mathrm{SL}(n,\mathbb{F})$-нееквівалентних підалгебр $\mathfrak{s}$ алгебри $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{F})$ і вибираємо ті, що задовольняють умову $\mathfrak{s}=\mathrm{C}_{\mathfrak{sl}(n,\mathbb{F})}\big(\mathrm{C}_{\mathfrak{sl}(n,\mathbb{F})}(\mathfrak{s})\big)\notin\big\{\mathfrak{sl}(n,\mathbb{F}),\,\{0\}\big\}$. Нагадаємо, що на відміну від випадку $k=1$, підалгебра $\mathfrak{s}=\{0\}$ тут не є придатною. Повний список нееквівалентних суттєвих розширень ліївської симетрії у випадку $k=2$ у класі $\mathcal{L}'_1$ містить алгебри $\mathfrak{g}^{\rm ess}_V=\langle I\rangle\oplus\big(\langle P,D\rangle\in\mathfrak{s}^{\rm vf}\big)$ для всіх отриманих підалгебр $\mathfrak{s}$, де $P:=\partial_t+\Upsilon^{ab}x^b\partial_{x^a}$ та $D:=t\partial_t+\Lambda^{ab}x^b\partial_{x^a}$, а матриця довільних елементів V приймає довільні значення вигляду (2.32). Потрібно прокласифікувати, з точністю до $G^{\sim}_{\mathcal{L}'}$-еквівалентності, всі можливі довільні значення матричних трійок (Λ,Υ,W), які визначено з точністю до додавання довільних елементів підалгебри $\mathfrak{s}$ до матриць Λ та Υ. Аналогічно випадку $k=1$ фіксуємо доповняльний підпростір s до $\mathfrak{s}$ в $\mathrm{N}_{\mathfrak{sl}(n,\mathbb{F})}(\mathfrak{s})$ і нехай $\mathfrak{c}:=\mathrm{C}_{\mathfrak{sl}(n,\mathbb{F})}(\mathfrak{s})$. У той же час модифікуємо вибір матриць. Спочатку вибираємо ненільпотентні матриці $Z\in\mathsf{s}$, обчислюємо їх напівпросту частину $Z_{\rm s}$ та покладаємо $\Lambda:=Z_{\rm s}$. Впорядковуємо і розбиваємо спектр $\sigma(\Lambda)=\{\mu_1,\dots,\mu_r\}$ матриці Λ на (максимальні) ланцюжки, де $\mu_i-\mu_{i+1}\in\{1,2\}$ для власних значень у кожному з ланцюжків. Якщо $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ і $\sigma(\Lambda)\not\subset\mathbb{R}$, то модифікуємо матрицю Λ за допомогою додавання такої матриці з $\mathfrak{s}$, що для нової матриці Λ: $\sigma(\Lambda)\subset\mathbb{R}$. Тоді вибираємо матрицю $Y\in\mathsf{s}$ та беремо її $\hat Y$ частину відносно Λ як Υ, тобто $\Upsilon_{ij}:=Y_{ij}$, якщо $\mu_i=\mu_j+1$ та $\Upsilon_{ij}:=0$ в іншому випадку у блочному вигляді відповідно до розкладу $\mathbb{F}^n$ на власні простори матриці Λ. Оскільки $Z,Y\in\mathrm{N}_{\mathfrak{sl}(n,\mathbb{F})}(\mathfrak{s})$ та $Z-\Lambda,Y-\Upsilon\in\mathfrak{s}$, то матриці Λ та Υ також належать до $\mathrm{N}_{\mathfrak{sl}(n,\mathbb{F})}(\mathfrak{s})$. Нарешті, вибираємо ненульову матрицю $W\in\mathfrak{c}$ для якої $W_{ij}=0$, якщо $\mu_i\neq\mu_j+2$. Відповідно до побудови обов'язково $[\Lambda,\Upsilon]=\Upsilon$, $[\Lambda,K_l]=(l+2)K_l$, $K_l\in\mathfrak{c}$ для всіх матриць K_l визначених у (2.32) та $\mathfrak{s}\subseteq\mathrm{C}_{\mathfrak{sl}(n,\mathbb{F})}(\{K_0,\dots,K_m\})$, де m — максимальне значення l таке, що $K_l \neq 0$. Суттєвий випадок розширення ліївської симетрії, що пов'язаний із підалгеброю $\mathfrak{s}$, дійсно існує і є "справжнім" тоді і лише тоді, коли існують матриці Z, Y та W, які задовольняють вищезазначені умови і, більш того, $\mathfrak{s} = \mathrm{C}_{\mathfrak{sl}(n,\mathbb{F})}(\{K_0, \dots, K_m\})$. Це значення трійки параметр-матриць (Z, Y, W), які будемо називати загальними серед придатних. Іншими словами, алгебра $\mathfrak{g}_V^{\mathrm{ess}} = \langle I \rangle \oplus \big(\langle P, D \rangle \Subset \mathfrak{s}^{\mathrm{vf}}\big)$ дійсно співпадає зі всією алгеброю $\mathfrak{g}_V^{\mathrm{ess}}$ для $V = \mathrm{e}^{t\Upsilon} W \mathrm{e}^{-t\Upsilon} = \mathrm{e}^{tY} W \mathrm{e}^{-tY}$ тоді і лише тоді, коли трійка (Z, Y, W) набуває загального значення серед придатних значень у $\mathsf{s} \times \mathsf{s} \times \mathfrak{c}$. Використовуємо добре визначену дію підгрупи стабілізаторів $\mathrm{St}_{\mathrm{SL}(n,\mathbb{F})}(\mathfrak{s})$ на $\mathsf{s} \times \mathsf{s} \times \mathfrak{c}$ для подальшого вибору трійки (Z, Y, W) з точністю до $G^{\sim}_{\mathcal{L}'}$-еквівалентності. Системи L'_V та $L'_{\tilde{V}}$, що відповідають $(Z, Y, W), (\tilde{Z}, \tilde{Y}, \tilde{W}) \in \mathsf{s} \times \mathsf{s} \times \mathfrak{c}$ є $G^{\sim}_{\mathcal{L}'}$-еквівалентними тоді і лише тоді, коли у групі $\mathrm{St}_{\mathrm{SL}(n,\mathbb{F})}(\mathfrak{s})$ існує матриця, приєднана дія якої відображає трійку (Λ, Υ, W) у трійку $(\tilde{\Lambda}, \alpha\tilde{\Upsilon}, \alpha^2\tilde{W})$, або еквівалентно, трійку (Z, Y, W) у трійку $(\tilde{Z}, \alpha\tilde{Y}, \alpha^2\tilde{W})$ для деякого $\alpha \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$, див. лему 2.27 нижче.[2.3]

Другий спосіб використовує класифікацію трійок параметр-матриць (Λ, Υ, W), що задовольняють вищезазначеним умовам, які були отримані з точністю до $\mathrm{SL}(n, \mathbb{F})$-еквівалентності і з точністю до додавання елементів підалгебри $\mathfrak{s}$ до матриць Λ та Υ. Тут $\mathfrak{s}$ визначаємо як максимальну підалгебру алгебри $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{F})$ таку, що $[\Upsilon, \mathfrak{s}] \subseteq \mathfrak{s}$ та $[W, \mathfrak{s}] = \{0\}$, або еквівалентно, $\mathfrak{s} := \mathrm{C}_{\mathfrak{sl}(n,\mathbb{F})}(\{K_0, \dots, K_m\})$, де $K_0, \dots, K_m$ — ненульові матриці, які визначені в (2.32). Без обмеження загальності, можна вважати, що матриця Λ є діагональною. Розглядаємо повний набір ланцюжкових структур для матриці Λ, які є нееквівалентними відносно перестановок

[2.3] З урахуванням комутаційних співвідношень $[\Lambda, \Upsilon] = \Upsilon$ та $[\Lambda, W] = 2W$, що визначають специфічну структуру матриць Υ та W, матричне перетворення $\tilde{\Upsilon} = \alpha\Upsilon$, $\tilde{W} = \alpha^2 W$ з $\alpha \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$, яке індуковане масштабуванням $\tilde{t} = t/\alpha$ змінної t, співпадає з приєднаною дією матриці $M \in \mathrm{St}_{\mathrm{SL}(n,\mathbb{F})}(\mathfrak{s})$. Якщо $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$, то придатною матрицею M є, наприклад, $M = \mathrm{e}^{-\ln(\alpha)\Lambda}$. Для довільного значення $\alpha \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ вибираємо $M = \bigoplus_{i=1}^{r} \alpha^{\mu_{i'} - \mu_i} E_{n_i}$, де $\mu_{i'}$ — перший елемент ланцюжка, що містить μ_i, та E_{n_i} — $n_i \times n_i$ одинична матриця. Тому під час перевірки еквівалентності матричних трійок можемо вважати, що $\alpha = 1$.

у ланцюжку. Нагадаємо, що власні значення μ_i матриці Λ визначено з точністю до однорідних зсувів всіх ланцюжків. Для кожної ланцюжкової структури з вищенаведеної множини вибираємо довільні матриці Υ та W у блочному вигляді відповідно до розкладу $\mathbb{F}^n$ на узагальнені власні простори $\mathfrak{U}_i$ матриці Λ так, що $\Upsilon_{ij}=0$, якщо $\mu_i\neq\mu_j+1$ та $W_{ij}=0$, якщо $\mu_i\neq\mu_j+2$. Додатково, достатньо розглянути лише регулярні значення набору (Υ,W) для фіксованої матриці Λ, тобто такі значення, що для кожного з яких ланцюжкова структура матриці Λ є найкращою серед можливих. За побудовою обов'язково $[\Lambda,\Upsilon]=\Upsilon$, $[\Lambda,W]=2W$, а тому $[\Lambda,K_l]=(l+2)K_l$, $l\in\mathbb{N}_0$. Обчислюємо $m:=\max\{l\in\mathbb{N}_0\mid K_l\neq 0\}$ та $\mathfrak{s}:=\mathrm{C}_{\mathfrak{sl}(n,\mathbb{F})}(\{K_0,\dots,K_m\})$. Класифікуємо такі матриці Υ та W з точністю до еквівалентності, яка визначена перетвореннями

$$\tilde\Upsilon=M(\Upsilon+\Gamma)M^{-1},\quad \tilde W=MWM^{-1},$$

де M та Γ — довільні матриці відповідно з $\mathrm{SL}(n,\mathbb{F})$ та $\mathfrak{s}$ такі, що $M_{ij}=0$, якщо $i\neq j$ та $\Gamma_{ij}=0$, якщо $\mu_i\neq\mu_j+1$, див. примітку 2.3. Отримані різні набори $(K_0,\dots,K_m)$ з однаковим значенням m слід додатково перевірити на одночасну подібність їх відповідних компонентів відносно тієї ж матриці з $\mathrm{SL}(n,\mathbb{F})$.

Зауваження 2.24. Для групової класифікації класу $\mathcal{L}_1$ вимагатимемо, щоб всі $G^\sim_{\mathcal{L}}$-нееквівалентні випадки розширень ліївської симетрії з $k\geqslant 1$ були представлені системами зі сталими матричними коефіцієнтами. Більш точно, будь-яку систему L'_V з $V(t)=\mathrm{e}^{t\Upsilon}V(0)\mathrm{e}^{-t\Upsilon}$ зводимо за допомогою точкового перетворення Φ: $\tilde t=t$, $\tilde{\boldsymbol{x}}=\mathrm{e}^{-t\Upsilon}\boldsymbol{x}$ до системи L_ϑ: $\tilde{\boldsymbol{x}}_{\tilde t\tilde t}=A\tilde{\boldsymbol{x}}_{\tilde t}+B\tilde{\boldsymbol{x}}$, матричнозначні коефіцієнти якої $A=-2\Upsilon$ та $B=V(0)-\Upsilon^2$ є сталими матрицями. Векторні поля $P=\partial_t+\Upsilon^{ab}x^b\partial_{x^a}$ та $Q_\Gamma=\Gamma^{ab}x^b\partial_{x^a}$ ліївських симетрій системи L'_V, де $\Gamma\in\mathfrak{s}$, піднімаємо за допомогою перетворення Φ до векторних полів $\tilde P:=\partial_{\tilde t}$ та $\tilde Q_\Gamma:=(\mathrm{e}^{-\tilde t\Upsilon}\Gamma\mathrm{e}^{\tilde t\Upsilon})^{ab}\tilde x^b\partial_{\tilde x^a}$ ліївських симетрій системи L_ϑ. У випадку $k=2$ матриці Υ та Λ можна вибрати таким чином, що $[\Lambda,\Upsilon]=\Upsilon$, а далі векторне поле $D = t\partial_t + \Lambda^{ab}x^b\partial_{x^a}$ з $\mathfrak{g}_V^{\rm ess}$ піднімаємо за допомогою перетворення Φ до векторного поля $\tilde D := \tilde t\partial_{\tilde t} + \Lambda^{ab}\tilde x^b\partial_{\tilde x^a}$ з алгебри $\mathfrak{g}_\vartheta^{\rm ess}$. Отже, зводячи системи з класу $\mathcal{L}_1'$, що інваріантні відносно зсувів за змінною t, до еквівалентних систем зі сталими матричними коефіцієнтами із класу $\mathcal{L}_1$, отримаємо більш складні вигляди для векторних полів Q_Γ, компоненти яких можуть залежати від змінної t, на відміну від початкових виглядів векторних полів Q_Γ.

Зауваження 2.25. Найпростішим частинним підвипадком для обох випадків $k = 1$ та $k = 2$ є $m = 0$, тобто випадок комутуючих матриць Υ та W [48]. Тоді відповідна матриця V є сталою матрицею, $V = W$, $\mathfrak{s} = {\rm C}_{\mathfrak{sl}(n,\mathbb{F})}(\{W\})$, і можна покласти $\Upsilon = 0$ із точністю до додавання елементів алгебри $\mathfrak{s}$, що є очевидним, оскільки у цьому випадку $\partial_t \in \mathfrak{g}_V^{\rm ess}$. Класифікацію систем із класу $\mathcal{L}_1'$ зі сталими матричнозначними параметр-функціями V можна звести до розгляду всіх можливих жорданових нормальних форм таких матриць V. Знаходження $\mathfrak{s}$ для сталої матриці V є стандартною задачею Фробеніуса в теорії матриць, розв'язання якої добре відомо, див., наприклад, [69, розділ VIII].

***k* = 3.** У цьому випадку є три векторні поля з лінійно незалежними t-компонентами з доповняльної підалгебри до підалгебри $\langle I\rangle$ в алгебрі $\mathfrak{g}_V^{\rm ess}$. Із точністю до $G^\sim_{\mathcal{L}'}$-еквівалентності вони мають вигляд $P := \partial_t + \Upsilon^{ab}x^b\partial_{x^a}$, $D := t\partial_t + \Lambda^{ab}x^b\partial_{x^a}$ та $S := t^2\partial_t + \Theta^{ab}x^b\partial_{x^a}$ з деякими (сталими) матрицями $\Upsilon, \Lambda, \Theta \in \mathfrak{sl}(n,\mathbb{F})$. Відповідно до розгляду у випадку $k = 2$, з інваріантності системи L_V' відносно векторних полів P та D випливає, що матричнозначну функцію V визначаємо за допомогою формули (2.32). Збираючи коефіцієнти при t^{m+1} у матричному рівнянні $t^2V_t + 4tV = [\Theta, V]$, яке отримано після підстановки компонент векторного поля S у класифікаційну умову (2.28), приходимо до рівняння $(m+4)K_m = 0$, яке суперечить нерівності $K_m \neq 0$. Таким чином, *випадок $k = 3$ є неможливим.*

Оскільки $G^{\sim}_{\bar{\mathcal{L}}}$-орбіта будь-якої системи з класу $\bar{\mathcal{L}}_1$ містить системи з підкласу $\mathcal{L}'_1$, то з теореми 2.7 випливає, що t-компонента будь-якого елементу групи $G^{\sim}_{\bar{\mathcal{L}}}$ залежить лише від змінної t, що і доводить теорему:

Теорема 2.26. $\dim \pi_* \mathfrak{g}_\theta \leqslant 2$ *для будь-якої* $L_\theta \in \bar{\mathcal{L}}_1$.

Нагадаємо, що π — проєкція з простору $\mathbb{F}_t \times \mathbb{F}^n_{\boldsymbol{x}}$ на простір $\mathbb{F}_t$.

З теорем 2.7 та 2.26 випливає, що нормальна лінійна система звичайних диференціальних рівнянь другого порядку допускає більше двох векторних полів лієвської симетрії із лінійно незалежними t-компонентами тоді і лише тоді, коли вона є $G^{\sim}_{\bar{\mathcal{L}}}$-еквівалентною до елементарної системи $\boldsymbol{x}_{tt} = \mathbf{0}$, тобто система належить до класу $\bar{\mathcal{L}}_0$. Аналогічне твердження щодо лінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку є тривіальним.

2.5. Критерії подібності

Використовуючи позначення та результати параграфа 2.4, представляємо явні критерії подібності систем із класів $\mathcal{L}'_1$ та $\mathcal{L}_1$, які допускають зсуви за змінною t, і для яких можна розглядати композицію із перетвореннями відносно змінної $\boldsymbol{x}$ у випадку класу $\mathcal{L}'_1$. Ці критерії корисні для проведення повної групової класифікації класів $\mathcal{L}'_1$ та $\mathcal{L}_1$ для частинних значень n.

Будемо називати систему L'_V із класу $\mathcal{L}'_1$ (відповідно систему L_ϑ із класу $\mathcal{L}_1$ зі сталими матричними коефіцієнтами $\vartheta = (A, B)$) *правильно t-зсув-інваріантною*, якщо $\pi_*\mathfrak{g}^{\rm ess}_V$ (відповідно $\pi_*\mathfrak{g}^{\rm ess}_\vartheta$) належить до $\big\{\langle\partial_t\rangle,\ \langle\partial_t, t\partial_t\rangle\big\}$. Отже, *неправильна t-зсув-інваріантність* такої системи означає, що $\pi_*\mathfrak{g}^{\rm ess}_V$ (відповідно $\pi_*\mathfrak{g}^{\rm ess}_\vartheta$) співпадає з $\langle\partial_t, {\rm e}^{\gamma t}\partial_t\rangle$ для деякого $\gamma \in \mathbb{F}\setminus\{0\}$.

Лема 2.27. *Правильно t-зсув-інваріантні системи L'_V та $L'_{\tilde V}$ з класу $\mathcal{L}'_1$,*

$$V(t) = {\rm e}^{t\Upsilon}V(0){\rm e}^{-t\Upsilon}, \quad \tilde V(\tilde t) = {\rm e}^{\tilde t\tilde\Upsilon}\tilde V(0){\rm e}^{-\tilde t\tilde\Upsilon}, \tag{2.33}$$

подібні відносно точкового перетворення тоді і лише тоді, коли існує ненульове $\alpha \in \mathbb{F}$, *невироджена матриця* M *та матриця* $\Gamma \in \mathfrak{s} := \mathrm{C}_{\mathfrak{sl}(n,\mathbb{F})}\big(\{K_l,\ l \in \mathbb{N}_0\}\big)$, *де* $K_0 := V(0)$, $K_{l+1} := [\Upsilon, K_l]$, $l \in \mathbb{N}_0$ *такі, що*

$$\tilde{\Upsilon} = \alpha M(\Upsilon + \Gamma)M^{-1}, \quad \tilde{V}(0) = \alpha^2 M V(0) M^{-1}.$$

Доведення. Необхідність може бути перевірена безпосереднім обчисленням. Точкове перетворення, що встановлює подібність систем L'_V та $L'_{\tilde{V}}$ має, наприклад, вигляд $\tilde{t} = t/\alpha$, $\tilde{\boldsymbol{x}} = M\boldsymbol{x}$.

Доведемо достатність. Нехай системи L'_V та $L'_{\tilde{V}}$ із твердження леми подібні відносно точкового перетворення. Це означає, що в силу теореми 2.4 ці системи є $G^{\sim}_{\mathcal{L}'}$-еквівалентними, і нехай перетворення еквівалентності $\mathcal{T} \in G^{\sim}_{\mathcal{L}'}$ вигляду (2.8) встановлює їх еквівалентність, $\mathcal{T}_* L'_V = L'_{\tilde{V}}$. Матрицю Υ визначаємо з точністю до додавання матриці S з $\mathrm{C}_{\mathfrak{sl}(n,\mathbb{F})}\big(\{K_l,\ l \in \mathbb{N}_0\}\big)$. Системи L'_V та $L'_{\tilde{V}}$ відповідно допускають векторні поля $P := \partial_t + \Upsilon^{ab}x^b\partial_{x^a}$ та $\tilde{P} := \partial_{\tilde{t}} + \tilde{\Upsilon}^{ab}\tilde{x}^b\partial_{\tilde{x}^a}$. Внаслідок подібності маємо, що $k_V := \dim \pi_*\mathfrak{g}^{\rm ess}_V = k_{\tilde{V}} := \dim \pi_*\mathfrak{g}^{\rm ess}_{\tilde{V}} \in \{1, 2\}$.

З умови $k_V = k_{\tilde{V}} = 1$ випливає, що $(\varpi_*\mathcal{T}^{-1})_*\tilde{P} = \alpha P + Q_\Gamma$ для деякого ненульового $\alpha \in \mathbb{F}$ та $\Gamma \in \mathfrak{s}$, де $Q_\Gamma := \Gamma^{ab}x^b\partial_{x^a} \in \mathfrak{g}^{\rm ess}_V$. Нагадаємо, що для класу $\mathcal{L}'$ через ϖ визначаємо проєкцію з $\mathbb{F}_t \times \mathbb{F}^n_{\boldsymbol{x}} \times \mathbb{F}^{n^2}_V$ на $\mathbb{F}_t \times \mathbb{F}^n_{\boldsymbol{x}}$.

Якщо $k_V = k_{\tilde{V}} = 2$, то з дослідження відповідного випадку в параграфі 2.4 випливає, що можна вибрати векторні поля P та $\tilde{P}$ з похідних алгебр $(\mathfrak{g}^{\rm ess}_V)'$ та $(\mathfrak{g}^{\rm ess}_{\tilde{V}})'$ відповідно алгебр $\mathfrak{g}^{\rm ess}_V$ та $\mathfrak{g}^{\rm ess}_{\tilde{V}}$, $P \in (\mathfrak{g}^{\rm ess}_V)' \subseteq \langle P \rangle \Subset \mathfrak{s}^{\rm vf}$ і $\tilde{P} \in (\mathfrak{g}^{\rm ess}_{\tilde{V}})'$. Оскільки підняття векторних полів за допомогою перетворення $\varpi_*\mathcal{T}^{-1}$ індукує ізоморфізм з $\mathfrak{g}^{\rm ess}_{\tilde{V}}$ на $\mathfrak{g}^{\rm ess}_V$, і будь-який такий ізоморфізм відображає $(\mathfrak{g}^{\rm ess}_{\tilde{V}})'$ на $(\mathfrak{g}^{\rm ess}_V)'$, то $(\varpi_*\mathcal{T}^{-1})_*(\mathfrak{g}^{\rm ess}_{\tilde{V}})' = (\mathfrak{g}^{\rm ess}_V)'$. Звідси вищевказану умову $(\varpi_*\mathcal{T}^{-1})_*\tilde{P} = \alpha P + Q_\Gamma$ для деякого ненульового $\alpha \in \mathbb{F}$ та $\Gamma \in \mathfrak{s}$ тут також виконано.

Таким чином, в обох випадках $T_t = 1/\alpha$, тобто $T = (t + \beta)/\alpha$ для деякого $\beta \in \mathbb{F}$. Вибираючи $M := |\alpha|^{-1/2}Ce^{\beta\Upsilon}$, завершуємо доведення. □

Наслідок 2.28. *Правильно t-зсув-інваріантні системи L_ϑ та $L_{\tilde\vartheta}$ з класу $\mathcal{L}_1$ зі сталими матричними коефіцієнтами $\vartheta = (A, B)$ та $\tilde\vartheta = (\tilde A, \tilde B)$ подібні відносно точкового перетворення тоді і лише тоді, коли існує ненульове значення $\alpha \in \mathbb{F}$, невироджена матриця M та матриця $\check\Gamma \in \mathfrak{s} := \mathrm{C}_{\mathfrak{sl}(n,\mathbb{F})}\big(\{K_l,\ l \in \mathbb{N}_0\}\big)$, де $K_0 := B$, $K_{l+1} := [A, K_l]$, $l \in \mathbb{N}_0$ такі, що*

$$\tilde A = \alpha M\big(A + \check\Gamma\big)M^{-1}, \quad \tilde B = \alpha^2 M\big(B - \tfrac14(A\check\Gamma + A\check\Gamma + \check\Gamma^2)\big)M^{-1}.$$

Доведення. Системи L_ϑ та $L_{\tilde\vartheta}$ можна відобразити в системи L'_V та $L'_{\tilde V}$ з V та $\tilde V$ вигляду (2.33) у змінних $(\hat t, \hat{\boldsymbol{x}})$ відповідно за допомогою перетворень $\hat t = t$, $\hat{\boldsymbol{x}} = \mathrm{e}^{-t\Upsilon}\boldsymbol{x}$ та $\hat t = t$, $\hat{\boldsymbol{x}} = \mathrm{e}^{-t\tilde\Upsilon}\boldsymbol{x}$, де $\Upsilon = -\frac12 A$, $V(0) = B + \Upsilon^2$, $\tilde\Upsilon = -\frac12\tilde A$, $\tilde V(0) = \tilde B + \tilde\Upsilon^2$. Системи L_ϑ та $L_{\tilde\vartheta}$ подібні відносно точкового перетворення тоді і лише тоді, коли системи L'_V та $L'_{\tilde V}$ подібні відносно точкового перетворення. Співвідношення між ϑ та $\tilde\vartheta$ випливає зі співвідношень між $(\Upsilon, V(0))$ та $(\tilde\Upsilon, \tilde V(0))$ з леми 2.27, де $\check\Gamma = -\frac12\Gamma$. □

2.6. Властивості алгебр ліївської інваріантності

Використовуючи результати параграфа 2.4, можемо точніше охарактеризувати алгебри ліївської інваріантності систем не лише з регулярних підкласів $\bar{\mathcal{L}}_1$, $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}'_1$ та $\mathcal{L}''_1$, а також із їх сингулярних доповнень.

Теорема 2.29. *Для будь-якої системи з класу $\bar{\mathcal{L}}_1$ (відповідно $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}'_1$ або $\mathcal{L}''_1$) розмірність її максимальної алгебри ліївської інваріантності більша або дорівнює $2n+1$ і менша або дорівнює n^2+4. Нижня межа є найбільшою і справедлива для довільної системи із класу. Верхня межа є найменшою і вона має місце лише для систем із орбіти системи (2.3) відносно відповідної групи еквівалентності.*

Доведення. Твердження щодо нижньої межі є тривіальним, див. кінець параграфа 2.3.

Для кожного з класів $\bar{\mathcal{L}}_1$, $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}'_1$ та $\mathcal{L}''_1$ система (2.3) допускає формальну інтерпретацію як елемент цього класу. Різницю в цих інтерпретаціях просто пояснюємо різними параметризаціями класів. Таким чином, відповідні значення довільних елементів для класу $\bar{\mathcal{L}}_1$: $A = 0$, $B = J$ та $\boldsymbol{f} = \mathbf{0}$; для класу $\mathcal{L}_1$: ті ж A та B; для класів $\mathcal{L}'_1$ та $\mathcal{L}''_1$: $V = J$. Тут і далі $J = J_0^2 \oplus \big(\bigoplus_{i=1}^{n-2} J_0^1\big)$, J_μ^m — жордановий блок розмірності m із власним значенням μ. Крім того, рівність вигляду $V = M$ для матриці довільних елементів V та сталої матриці M означає, що $V(t) = M$ для будь-якого $t \in \mathcal{I}$, і тоді можемо використовувати позначення L'_M та $\mathfrak{g}_M$ замість L'_V та $\mathfrak{g}_V$ для цього частинного значення матриці довільних елементів V.

Клас $\bar{\mathcal{L}}_1$ (відповідно $\mathcal{L}_1$) можна відобразити за допомогою сім'ї його перетворень еквівалентності до його підкласу, який є вкладеним доповненням класу $\mathcal{L}'_1$. Клас $\mathcal{L}''_1$ є підкласом класу $\mathcal{L}'_1$. Перетворення еквівалентності в кожному з вищезазначених класів зберігають необхідні властивості алгебр ліївської інваріантності. Тому достатньо довести теорему лише для класу $\mathcal{L}'_1$.

Очевидно, що для будь-якої системи L'_V з класу $\mathcal{L}'_1$ $\mathfrak{g}_V = \mathfrak{g}_V^{\rm ess} \Subset \mathfrak{g}_V^{\rm lin}$ та $\dim \mathfrak{g}_V^{\rm lin} = 2n$. Отже, доведення зводимо до оцінки розмірностей суттєвих алгебр ліївської інваріантності систем із цього класу.

Для заданої системи L'_V, де незалежна змінна t пробігає область $\mathcal{I}$, для будь-якого фіксованого $t_0 \in \mathcal{I}$ розглядаємо систему L'_{V_0} із класу $\mathcal{L}'_1$, де $V_0(t) := V(t_0)$ для будь-якого $t \in \mathcal{I}$. Обов'язково має місце нерівність $\dim \mathfrak{g}_V^{\rm ess} \leqslant \dim \mathfrak{g}_{V_0}^{\rm ess}$. Дійсно,

$$\dim \mathfrak{g}_V^{\rm ess} = \dim\langle I\rangle + \dim \mathfrak{s}_V + k_V, \quad \dim \mathfrak{g}_{V_0}^{\rm ess} = \dim\langle I\rangle + \dim \mathfrak{s}_{V_0} + k_{V_0},$$

де $I := x^a\partial_{x^a}$, $k_V := \dim \pi_*\mathfrak{g}_V^{\rm ess}$, $k_{V_0} := \dim \pi_*\mathfrak{g}_{V_0}^{\rm ess}$ та

$$\begin{aligned}\mathfrak{s}_V &:= \mathrm{C}_{\mathfrak{sl}(n,\mathbb{F})}\big(\{V(t) \mid t \in \mathcal{I}\}\big)\\ &\subseteq \mathrm{C}_{\mathfrak{sl}(n,\mathbb{F})}\big(\{V(t_0)\}\big) = \mathrm{C}_{\mathfrak{sl}(n,\mathbb{F})}\big(\{V_0(t) \mid t \in \mathcal{I}\}\big) =: \mathfrak{s}_{V_0};\end{aligned} \tag{2.34}$$

див. позначення та результати в параграфі 2.4, особливо ті, що пов'язані з випадком $k = 2$. Останнє включення означає, що $\dim \mathfrak{s}_V \leqslant \dim \mathfrak{s}_{V_0}$.

Оскільки V_0 є сталою (матричнозначною) функцією, то очевидно, що система L'_{V_0} допускає векторне поле ∂_t як її ліївську симетрію, тобто $k_{V_0} \geqslant 1$. Якщо $k_V = 2$, тоді $V(t)$ є нільпотентною матрицею для будь-якого $t \in \mathcal{I}$, включаючи t_0, а отже, і $k_{V_0} = 2$. Таким чином, у будь-якому випадку $k_V \leqslant k_{V_0}$, що остаточно доводить необхідне твердження.

Отже, максимальну розмірність суттєвих алгебр ліївської інваріантності систем із класу $\mathcal{L}'_1$ можна отримати для системи зі сталою матрицею довільних елементів V, $V = K_0$ для деякої $K_0 \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{F}) \setminus \langle E \rangle$. Для цієї системи $\mathfrak{s}_V = \mathrm{C}_{\mathfrak{sl}(n,\mathbb{F})}(\{K_0\})$. Як результат приходимо до задачі Фробеніуса: знайти всі матриці Γ, які комутують із фіксованою матрицею K_0, що є стандартною матричною задачею [69, розділ VIII]. Нехай $N(K_0)$ — кількість лінійно незалежних матриць, що комутують із K_0, тобто $\dim \mathfrak{s}_V = N(K_0) - 1$. Оскільки матриця K_0 не є пропорційною одиничній матриці, то значення $N(K_0)$ може щонайбільше дорівнювати $n^2 - 2n + 2$ і його можна досягти лише для матриць подібних або до матриці $M_{1\nu} := J^2_\nu \oplus \big(\bigoplus_{i=1}^{n-2} J^1_\nu\big)$, або до матриці $M_{2\nu_1\nu_2} := \big(\bigoplus_{i=1}^{n-1} J^1_{\nu_1}\big) \oplus J^1_{\nu_2}$ з $\nu_1 \neq \nu_2$, див. доведення наслідків 2 та 3 в роботі [48]. Перша матриця з $\nu = 0$ співпадає з J та є нільпотентною. Поклавши $K_0 = J$, маємо $k_J = 2$, і тоді $\dim \mathfrak{g}^{\rm ess}_J = N(J) + k_J = n^2 - 2n + 4$, що є максимальним значенням для розмірності алгебри ліївської симетрії систем у класі $\mathcal{L}'_1$.

Далі покажемо, що будь-яка система L'_V з класу $\mathcal{L}'_1$ з $\dim \mathfrak{g}^{\rm ess}_V = n^2 - 2n + 4$ належить до $G^\sim_{\mathcal{L}'}$-орбіти системи L'_J. Значення розмірності $\dim \mathfrak{g}^{\rm ess}_V$ є максимальним тоді і лише тоді, коли обидва значення $\dim \mathfrak{s}_V$ та k_V є також максимальними,

$$\dim \mathfrak{s}_V = n^2 - 2n + 2 \qquad \text{та} \qquad k_V = 2. \tag{2.35}$$

У силу рівняння (2.34) з першої рівності в (2.35) випливає, що для будь-якого фіксованого $t \in \mathcal{I}$, де матриця $V(t)$ — ненульова, і вона подібна до $M_{1\nu}$ для деякого $\nu \in \mathbb{F}$ або $M_{2\nu_1\nu_2}$ для деяких $\nu_1, \nu_2 \in \mathbb{F}$, $\nu_1 \neq \nu_2$. Друга рівність у (2.35) означає, що алгебра $\mathfrak{g}^{\rm ess}_V$ містить два векторні поля з лінійно незалежними t-компонентами τ^1 та τ^2. З точністю до $G^\sim_{\mathcal{L}'}$-

еквівалентності вважаємо, що $\tau^1 = 1$ та $\tau^2 = t$, тобто $\mathfrak{g}_V^{\rm ess} \ni P, D$, де $P := \partial_t + \Upsilon^{ab}x^b\partial_{x^a}$ and $D := t\partial_t + \Lambda^{ab}x^b\partial_{x^a}$ з деякими (сталими) матрицями $\Upsilon, \Lambda \in \mathfrak{sl}(n,\mathbb{F})$. Тоді з розгляду випадку $k = 2$ у параграфі 2.4 випливає, що для будь-якого $t \in \mathcal{I}$ матриця $V(t)$ є нільпотентною, і отже, обов'язково подібна до $M_{10} = J$, якщо $V(t)$ ненульова. Фіксуємо точку $t_0 \in \mathcal{I}$ з $V(t_0) \neq 0$. З точністю до $G^{\sim}_{\mathcal{L}'}$-еквівалентності, можна вважати, що $V(t_0) = J$. (Для цього слід використовувати перетворення еквівалентності (2.8) з $T = t$ та матрицею C, яка визначає подібність J до $V(t_0)$, $V(t_0) = C^{-1}JC$.) Відповідно до (2.34),

$$\mathfrak{s}_V := \bigcap_{t\in\mathcal{I}} \mathrm{C}_{\mathfrak{sl}(n,\mathbb{F})}\big(\{V(t)\}\big) \subseteq \mathrm{C}_{\mathfrak{sl}(n,\mathbb{F})}\big(\{V(t_0)\}\big) = \mathrm{C}_{\mathfrak{sl}(n,\mathbb{F})}\big(\{J\}\big) = \mathfrak{s}_J.$$

З іншої сторони $\dim \mathfrak{s}_V = n^2 - 2n + 2 = \dim \mathfrak{s}_J$, а тому $\mathfrak{s}_V = \mathfrak{s}_J$. Це означає, що для будь-якого $t \in \mathcal{I}$ з $V(t) \neq 0$ справедлива рівність $\mathrm{C}_{\mathfrak{sl}(n,\mathbb{F})}\big(\{V(t)\}\big) = \mathrm{C}_{\mathfrak{sl}(n,\mathbb{F})}\big(\{J\}\big)$, тобто $V(t) \in \mathrm{C}_{\mathfrak{sl}(n,\mathbb{F})}\big(\mathrm{C}_{\mathfrak{sl}(n,\mathbb{F})}\big(\{J\}\big)\big) = \langle J\rangle$. (Останню рівність можна перевірити за допомогою прямого двокрокового обчислення відповідних централізаторів.) Для точок t з $V(t) = 0$ також маємо, що $V(t) \in \langle J\rangle$. Іншими словами, матричнозначну функцію V визначаємо через $V(t) = v(t)J$ для будь-якого $t \in \mathcal{I}$, де v — ненульова функція змінної t. Послідовно підставляючи векторні поля P та D у класифікаційну умову (2.28) з цією матрицею V, приходимо до рівнянь $v_tJ = v[\Lambda, J]$ та $(tv_t + 2v)J = v[\Upsilon, J]$. Таким чином, $[\Lambda, J] = \lambda_1 J$ та $[\Upsilon, J] = \lambda_2 J$ для деяких сталих λ_1 та λ_2, а отже, $v_t = \lambda_1 v$ та $(tv_t + 2v) = \lambda_2 v$. Остання система двох звичайних диференціальних рівнянь відносно v є сумісною тоді і лише тоді, коли $(\lambda_1, \lambda_2) = (0, 2)$, тобто v є ненульовою сталою функцією, яка дорівнює одиниці з точністю до $G^{\sim}_{\mathcal{L}'}$-еквівалентності. Це означає, що початкова система L'_V є $G^{\sim}_{\mathcal{L}'}$-еквівалентною до системи L'_J, що і завершує доведення. □

Теорема 2.30. *Для будь-якої системи L'_V з класу $\mathcal{L}'_1$ її суттєва алгебра ліївської інваріантності $\mathfrak{g}_V^{\rm ess}$ може бути представлена як $\mathfrak{g}_V^{\rm ess} = \mathfrak{i} \oplus (\mathfrak{t}_V \Subset \mathfrak{s}_V^{\rm vf})$, де*

- $\mathfrak{i} := \langle x^a\partial_{x^a}\rangle$ — *ідеал алгебри* $\mathfrak{g}^{\rm ess}_V$*, який є спільним для всіх систем із класу* $\mathcal{L}'_1$,
- $\mathfrak{s}^{\rm vf}_V := \{\Gamma^{ab}x^b\partial_{x^a} \mid \Gamma\in\mathfrak{sl}(n,\mathbb{F})\colon [\Gamma,V]=0\}$ — *ідеал алгебри* $\mathfrak{g}^{\rm ess}_V$ *з* $\dim\mathfrak{s}^{\rm vf}_V\leqslant n^2-2n+1$*, та*
- $\mathfrak{t}_V := \big\langle\tau^\iota\partial_t+\big(\frac12\tau^\iota_t x^a+\Lambda^{ab}_\iota x^b\big)\partial_{x^a},\ \iota=1,\dots,k_V\big\rangle$ — *підалгебра алгебри* $\mathfrak{g}^{\rm ess}_V$ *з* $\dim\mathfrak{t}_V=k_V\in\{0,1,2\}$*, компоненти* $\tau^\iota=\tau^\iota(t)$ *є лінійно незалежними, а кожна функція* τ^ι *задовольняє* (2.28) *з* $\Gamma=\Lambda_\iota\in\mathfrak{sl}(n,\mathbb{F})$.

Доведення. Згідно наслідку 2.16 кожне векторне поле з алгебри $\mathfrak{g}^{\rm ess}_V$ має вигляд

$$Q=\tau\partial_t+\big(\tfrac12\tau_t x^a+\Gamma^{ab}x^b\big)\partial_{x^a}, \tag{2.36}$$

де t-компонента τ залежить лише від змінної t та задовольняє, спільно з (сталою) матрицею $\Gamma=(\Gamma^{ab})$, класифікаційну умову (2.28). Очевидним розв'язком рівняння (2.28) для будь-якої матриці V є $\tau=0$ та $\Gamma=E$. Відповідне векторне поле $I:=x^a\partial_{x^a}$ комутує з будь-яким векторним полем вигляду (2.36). Отже, $\mathfrak{i}$ — ідеал алгебри $\mathfrak{g}^{\rm ess}_V$ незалежно від вигляду матриці V. Множина $\mathfrak{s}^{\rm vf}_V$ містить елементи Q алгебри $\mathfrak{g}^{\rm ess}_V$ з $\pi_*Q=0$ і очевидно є ідеалом алгебри $\mathfrak{g}^{\rm ess}_V$. Оцінка $\dim\mathfrak{s}^{\rm vf}_V\leqslant n^2-2n+1$ випливає з доведення теореми 2.29.

У параграфі 2.4 було доведено, що $k_V:=\dim\pi_*\mathfrak{g}^{\rm ess}_V\in\{0,1,2\}$. Зауважимо, що $\dim\mathfrak{t}_V=k_V$. Далі покажемо, що завжди можна вибрати доповняльний підпростір $\mathfrak{t}_V$ до $\mathfrak{i}\oplus\mathfrak{s}^{\rm vf}_V$ в алгебрі $\mathfrak{g}^{\rm ess}_V$ таким чином, що $\mathfrak{t}_V$ буде підалгеброю алгебри $\mathfrak{g}^{\rm ess}_V$. Випадки $k_V=0$ та $k_V=1$ є тривіальними. Дійсно, $\mathfrak{t}_V=\{0\}$, якщо $k_V=0$, і ця множина є невласною підалгеброю алгебри $\mathfrak{g}^{\rm ess}_V$. Якщо $k_V=1$, тоді лінійна оболонка $\mathfrak{t}_V$ — є одновимірною і, отже, це знову підалгебра алгебри $\mathfrak{g}^{\rm ess}_V$. Доведемо твердження у випадку $k_V=2$, яке не є таким очевидним, як попередні випадки.

З розгляду випадку $k=2$ в параграфі 2.4 випливає, що два векторні поля з лінійно незалежними t-компонентами з алгебри $\mathfrak{g}^{\rm ess}_V$, з точністю до їх лінійної перекомбінації та $G^{\sim}_{\mathcal{L}'_1}$-еквівалентності, можна вибрати у вигляді $P := \partial_t + \Upsilon^{ab}x^b\partial_{x^a}$ та $D := t\partial_t + \Lambda^{ab}x^b\partial_{x^a}$ з деякими (сталими) матрицями $\Upsilon, \Lambda \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{F})$. Нехай $\Lambda_{\rm s}$ та $\Lambda_{\rm n}$ — напівпроста та нільпотентна частини в розкладі Жордана–Шевальє матриці $\Lambda = (\Lambda^{ab})$, $\Lambda = \Lambda_{\rm s} + \Lambda_{\rm n}$. Векторне поле $\Lambda^{ab}_{\rm n}x^b\partial_{x^a}$ належить алгебрі $\mathfrak{s}^{\rm vf}_V \subset \mathfrak{g}^{\rm ess}_V$. Звідси векторне поле $D - \Lambda^{ab}_{\rm n}x^b\partial_{x^a} = t\partial_t + \Lambda^{ab}_{\rm s}x^b\partial_{x^a}$ — також елемент алгебри $\mathfrak{g}^{\rm ess}_V$, тобто можна вважати з самого початку, що матриця Λ є напівпростою. Тоді $\Upsilon = \hat\Upsilon + \check\Upsilon$, де $\hat\Upsilon$ та $\check\Upsilon$ є "кришечка"- та "галочка"-частини матриці Υ відносно (напівпростої) матриці Λ, які визначені в параграфі 2.4. Там показано, що векторне поле $\check\Upsilon^{ab}x^b\partial_{x^a}$ також належить алгебрі $\mathfrak{s}^{\rm vf}_V \subset \mathfrak{g}^{\rm ess}_V$. Це означає, що можемо замінити векторне поле P векторним полем $P - \check\Upsilon^{ab}x^b\partial_{x^a}$, тим самим замінюючи матрицю Υ на матрицю $\hat\Upsilon$. Тоді $[\Lambda, \Upsilon] = \Upsilon$, що приводить до комутаційного співвідношення $[P, D] = P$. Іншими словами, лінійна оболонка $\mathfrak{t}_V := \langle P, D\rangle$ є підалгеброю алгебри $\mathfrak{g}^{\rm ess}_V$. Для завершення доведення твердження, просто зауважимо, що елементи групи $G^{\sim}_{\mathcal{L}'_1}$ індукують ізоморфізми між суттєвими алгебрами ліївської інваріантності еквівалентних систем із класу $\bar{\mathcal{L}}_1$.

Очевидно, що $\mathfrak{i} \cap \mathfrak{s}^{\rm vf}_V = \mathfrak{i} \cap \mathfrak{t}_V = \mathfrak{s}^{\rm vf}_V \cap \mathfrak{t}_V = \{0\}$, $[\mathfrak{i}, \mathfrak{s}^{\rm vf}_V] = [\mathfrak{i}, \mathfrak{t}_V] = \{0\}$, та $[\mathfrak{s}^{\rm vf}_V, \mathfrak{t}_V] \subseteq \mathfrak{s}^{\rm vf}_V$. □

Наслідок 2.31. *Для будь-якої системи L_ϑ з класу $\mathcal{L}_1$ її суттєву алгебру ліївської інваріантності $\mathfrak{g}^{\rm ess}_\vartheta$ можна представити як $\mathfrak{g}^{\rm ess}_\vartheta = \mathfrak{i} \oplus (\mathfrak{t}_\vartheta \ltimes \mathfrak{s}^{\rm vf}_\vartheta)$, де $\mathfrak{i} := \langle I\rangle$ — ідеал алгебри $\mathfrak{g}^{\rm ess}_\vartheta$, який є спільним для всіх систем із класу $\mathcal{L}_1$, $\mathfrak{s}^{\rm vf}_\vartheta$ — ідеал алгебри $\mathfrak{g}^{\rm ess}_\vartheta$ з $\pi_*\mathfrak{s}^{\rm vf}_\vartheta = \{0\}$ та $\dim \mathfrak{s}^{\rm vf}_\vartheta \leqslant n^2 - 2n + 1$, а $\mathfrak{t}_\vartheta$ є підалгеброю алгебри $\mathfrak{g}^{\rm ess}_\vartheta$ з $\dim \mathfrak{t}_\vartheta = \dim \pi_*\mathfrak{t}_\vartheta \in \{0, 1, 2\}$.*

Доведення. Для того, щоб отримати цей наслідок із теореми 2.30, використовуємо ті ж аргументи, що і в третьому абзаці доведення теореми 2.29. Більш точно, клас $\mathcal{L}_1$ відображаємо за допомогою сім'ї його перетворень еквівалентності у вкладене доповнення класу $\mathcal{L}'_1$, див. дискусію, пов'язану з вкладеннями підкласів (2.23). Перетворення еквівалентності у класі $\mathcal{L}_1$ зберігають структуру суттєвих алгебр ліївської інваріантності систем із цього класу. $\square$

Твердження, аналогічне наслідку 2.31, також справедливе для всіх систем із регулярного підкласу $\bar{\mathcal{L}}_1$ класу $\bar{\mathcal{L}}$ із модифікаціями, що враховують специфічні особливості поняття суттєвих алгебр ліївської інваріантності в класі неоднорідних лінійних систем диференціальних рівнянь, див. зауваження 2.21.

У наступному твердженні зведено різні властивості ліївських симетрій систем із сингулярного підкласу $\bar{\mathcal{L}}_0$ класу $\bar{\mathcal{L}}$. Частково це твердження над комплексним полем доведено в [74, теорема 1]. Для доведення комбінуємо теорему 2.7, опис підкласу $\bar{\mathcal{L}}_0$ перед цією теоремою, загальновідомі факти, представлені в цьому параграфі, з рівнянням (2.24) та теоремою 2.29.

Твердження 2.32. *Наступні твердження є еквівалентними для системи $\bar{L}_\theta$ вигляду* (2.4)*:*

(i) Максимальна алгебра ліївської інваріантності $\mathfrak{g}_\theta$ системи $\bar{L}_\theta$ ізоморфна алгебрі $\mathfrak{sl}(n+2,\mathbb{F})$.

(ii) $\dim\mathfrak{g}_\theta=(n+2)^2-1$.

(iii) $\dim\mathfrak{g}_\theta>n^2+4$.

(iv) Система $\bar{L}_\theta$ інваріантна відносно алгебри Лі векторних полів із нульовими t-компонентами, яка ізоморфна алгебрі $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{F})$.

(v) Систему $\bar{L}_\theta$ можна звести за допомогою точкового перетворення в просторі $\mathbb{F}_t\times\mathbb{F}^n_{\boldsymbol{x}}$ до системи $\boldsymbol{x}_{tt}=\mathbf{0}$.

(vi) Матриця $B-\frac12A_t-\frac14A^2$ пропорційна одиничній матриці із залежним від часу коефіцієнтом пропорційності.

2.7. Пониження порядку та інтегрування за допомогою ліївських симетрій та перетворень еквівалентності

Ліївські симетрії нормальних лінійних систем n звичайних диференціальних рівнянь другого порядку і точкові перетворення еквівалентності між такими системами можна ефективно використовувати для пониження їх порядку та інтегрування.

Почнемо із сингулярного підкласу $\bar{\mathcal{L}}_0$ класу $\bar{\mathcal{L}}$. Нагадаємо, що належність систем до цього підкласу легко встановити за допомогою перевірки умови пропорційності матричнозначної функції $B - \frac{1}{2}A_t + \frac{1}{4}A^2$ одиничній матриці E із залежним від часу коефіцієнтом пропорційності.

Твердження 2.33. *Інтегрування будь-якої системи $\bar{L}_\theta$ з класу $\bar{\mathcal{L}}_0$ можна звести до максимум $2n$ квадратур шляхом знаходження фундаментальної матриці системи n звичайних диференціальних рівнянь першого порядку $\boldsymbol{y}_t + \frac{1}{2}A^{\mathsf{T}}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ відносно векторнозначної функції $\boldsymbol{y}$ змінної t і фундаментальної множини розв'язків звичайного диференціального рівняння другого порядку $n\varphi_{tt} = \operatorname{tr}\big(B - \frac{1}{2}A_t + \frac{1}{4}A^2\big)\varphi$ відносно функції φ змінної t.*

Доведення. Фіксуємо значення набору довільних елементів $\theta = (A, B, \boldsymbol{f})$. Нехай матричнозначна функція M змінної t — фундаментальна матриця системи $\boldsymbol{y}_t + \frac{1}{2}A^{\mathsf{T}}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ та нехай функції φ^1 та φ^2 — фундаментальна множина розв'язків рівняння $\varphi_{tt} = U\varphi$ з $U := n^{-1}\operatorname{tr}\big(B - \frac{1}{2}A_t + \frac{1}{4}A^2\big)$, де $\varphi^2(t) \neq 0$ для змінної t з розглядуваного інтервалу. Тоді відношення $\varphi^1/\varphi^2 =: T$ задовольняє звичайне диференціальне рівняння $\{T, t\} = -2U$, де $\{T, t\}$ — похідна Шварца від функції T за змінною t. Звідси перетворення еквівалентності $\mathcal{T}$ вигляду (2.21) з такою функцією T, $H := M^{\mathsf{T}}$ та $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{0}$ зводить систему $\bar{L}_\theta$ до системи $\tilde{\boldsymbol{x}}_{\tilde{t}\tilde{t}} = \tilde{\boldsymbol{f}}(\tilde{t})$, де $\tilde{\boldsymbol{f}} \circ T = T_t^{-2}H\boldsymbol{f}$, яку, очевидно, можна інтегрувати за допомогою щонайбільше $2n$ квадратур. $\square$

Іншими словами, для систем із класу $\bar{\mathcal{L}}_0$ порядок інтегрованих систем, можна ефективно понизити на $n-2$. Очевидно, що далі не потрібно більше квадратур після перетворення еквівалентності $\mathcal{T}$, якщо система $\bar{L}_\theta$ є однорідною, тобто належить до класу $\mathcal{L}_0$ з точністю до нехтування довільними елементами $\boldsymbol{f}$.

Розв'язування систем із класу $\bar{\mathcal{L}}_1$ потребує більш делікатних підходів, що використовують лiївські симетрії цих систем. Спочатку розглянемо підхід, що основано на знанні окремих симетрій систем із класу $\mathcal{L}_1$.

Твердження 2.34. *Якщо система L_ϑ із класу $\mathcal{L}_1$ допускає відоме векторне поле лiївської симетрії із ненульовою t-компонентою, тоді її інтегрування можна звести за допомогою однієї квадратури та алгебраїчних операцій до побудови фундаментальної матриці лінійної системи n звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, тобто загальний порядок інтегрованої системи, можна ефективно понизити на n.*

Доведення. Відповідно до припущення, система L_ϑ є інваріантною відносно векторного поля Q вигляду (2.25) з відомими функціями τ, η^{ab} та χ^a змінної t, причому $\tau \neq 0$. Тоді ця система також є інваріантною відносно векторного поля $\hat{Q}$ з тими ж значеннями τ та η^{ab}, але $\chi^a = 0$. Можемо звести векторне поле $\hat{Q}$ до векторного поля $\partial_{\tilde{t}}$ за допомогою точкового перетворення Φ: $\tilde{t} = T(t)$, $\tilde{\boldsymbol{x}} = H(t)\boldsymbol{x}$, де $\tau T_t = 1$ та $\tau H_t + H\eta = 0$. У змінних $(\tilde{t}, \tilde{\boldsymbol{x}})$ система L_ϑ набуває вигляду $\tilde{\boldsymbol{x}}_{\tilde{t}\tilde{t}} = \tilde{A}\tilde{\boldsymbol{x}}_{\tilde{t}} + \tilde{B}\tilde{\boldsymbol{x}}$, де $\tilde{A}$ та $\tilde{B}$ — сталі матриці з огляду на інваріантність системи відносно векторного поля $\partial_{\tilde{t}}$. Оскільки системи L_ϑ такого вигляду розв'язуємо лише за допомогою алгебраїчних операцій, то розв'язок початкової системи зводимо до знаходження функції T з рівняння $T_t = 1/\tau$ за допомогою однієї квадратури та побудови матриці H у результаті транспонування фундаментальної матриці системи n звичайних диференціальних рівнянь першого порядку $\tau \boldsymbol{y}_t + \eta \boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$. □

На основі доведення твердження 2.34 сформулюємо наступну покрокову процедуру інтегрування системи L_ϑ із класу $\mathcal{L}_1$, що використовує відоме векторне поле ліївської симетрії $Q = \tau\partial_t + (\eta^{ab}x^b + \chi^a)\partial_{x^a}$ цієї системи з ненульовою t-компонентою τ:

1. Замінимо векторне поле Q його відповідником $Q' = \tau\partial_t + \eta^{ab}x^b\partial_{x^a}$ з нульовими значеннями компонент χ^a.
2. Знаходимо матрицю H у результаті транспонування фундаментальної матриці розв'язків системи n звичайних диференціальних рівнянь першого порядку $\tau\boldsymbol{y}_t + \eta\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$.
3. За допомогою формул (2.21б)–(2.21в) знаходимо матриці $\tilde{A}$ та $\tilde{B}$, які обов'язково є сталими.
4. Розв'язуємо систему $L_{\tilde{\vartheta}}$ зі сталими матричними коефіцієнтами $\tilde{\vartheta} = (\tilde{A}, \tilde{B})$.
5. Знаходимо функцію T, проінтегрувавши рівняння $T_t = 1/\tau$.
6. Відображаємо знайдений загальний розв'язок системи $L_{\tilde{\vartheta}}$ у загальний розв'язок системи L_ϑ за допомогою перетворення Φ^{-1}, а саме $\boldsymbol{x}(t) = H^{-1}(t)\tilde{\boldsymbol{x}}\big(T(t)\big)$.

Наслідок 2.35. *Якщо система $\bar{L}_\theta$ з класу $\bar{\mathcal{L}}_1$ допускає відоме векторне поле ліївської симетрії із ненульовою t-компонентою, то її інтегрування можна звести до знаходження фундаментальної матриці лінійної системи n звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, $n+1$ квадратури та алгебраїчних операцій, тобто загальний порядок інтегрованої системи, можна ефективно понизити на n.*

Доведення. Єдина відмінність від доведення твердження 2.34 полягає в тому, що необхідно випрямити векторне поле Q (а не векторне поле $\hat{Q}$) до векторного поля $\partial_{\tilde{t}}$, використовуючи точкове перетворення Φ: $\tilde{t} = T(t)$, $\tilde{\boldsymbol{x}} = H(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{h}(t)$, де $\tau T_t = 1$, $\tau H_t + H\eta = 0$ та $\tau\boldsymbol{h}_t + H\boldsymbol{\chi} = 0$. Таким чином, додатково потрібно n квадратур для знаходження $\boldsymbol{h}$ із системи $\boldsymbol{h}_t = -H\boldsymbol{\chi}/\tau$. $\square$

Для того, щоб вищеописану процедуру інтегрування можна було застосовувати до систем із класу $\bar{\mathcal{L}}_1$, достатньо лише змінити два останні кроки цієї процедури на додаткову побудову $\boldsymbol{h}$ як розв'язку системи $\boldsymbol{h}_t = -H\boldsymbol{\chi}/\tau$ на кроці 5 та модифікувати перетворення на кроці 6 як

$$\boldsymbol{x}(t) = H^{-1}(t)\tilde{\boldsymbol{x}}\big(T(t)\big) - H^{-1}(t)\boldsymbol{h}(t).$$

Нехай задано систему L_ϑ з класу $\mathcal{L}_1$, яка інваріантна відносно двох векторних полів із лінійно незалежними t-компонентами. Одночасне використання цих двох симетрій для інтегрування L_ϑ є більш складнішим, ніж вищеописана процедура.

Теорема 2.36. *Нехай система L_ϑ з класу $\mathcal{L}_1$ допускає алгебру ліївської інваріантності, що натягнуто на два відомі векторні поля ліївської симетрії з лінійно незалежними t-компонентами. Тоді інтегрування цієї системи можна звести за допомогою алгебраїчних операцій до побудови фундаментальної матриці лінійної системи n звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, яку можна розщепити на незачеплені між собою підсистеми, і кожна з цих підсистем є частково зачепленою (див. кінець доведення для більш специфічного опису блочної структури системи).*

Доведення. Перша частина доведення аналогічна до початку доведення твердження 2.34. Відповідно до припущення теореми, з леми 2.14 випливає, що система L_ϑ інваріантна відносно двох векторних полів вигляду (2.25), $Q_\iota = \tau^\iota\partial_t + (\eta^{\iota ab}x^b + \chi^{\iota a})\partial_{x^a}$, $\iota = 1, 2$, з відомими коефіцієнтами τ^ι, $\eta^{\iota ab}$ та $\chi^{\iota a}$, які залежать щонайбільше від змінної t, причому t-компоненти τ^1 та τ^2 є лінійно незалежними. Тоді ця система також інваріантна відносно векторних полів Q'_ι з тими ж значеннями компонент τ^ι та $\eta^{\iota ab}$, тоді як $\chi^{\iota a} = 0$. Іншими словами, $Q'_\iota \in \mathfrak{g}^{\rm ess}_\vartheta$. Розглянемо відкриту область $\mathcal{I}$ з $\mathbb{F}$ таку, що $\tau^1(t) \neq 0$ для будь-якого $t \in \mathcal{I}$. Алгебра $\langle Q'_1, Q'_2 \rangle$ — некомутативна, оскільки інакше $\tau^1\tau^2_t - \tau^2\tau^1_t = 0$, тобто t-компоненти τ^1 та τ^2 лінійно залежні на області $\mathcal{I}$. Лінійно перекомбіновуючи векторні поля Q'_1 та Q'_2, можна звести комутаційне співвідношення до вигляду $[Q'_1, Q'_2] = Q'_1$, а звідси $\tau^1\tau^2_t - \tau^2\tau^1_t = \tau^1$, тобто $(\tau^2/\tau^1)_t = 1/\tau^1$ на області $\mathcal{I}$.

На області $\mathcal{I} \times \mathbb{R}^n$ виконуємо точкове перетворення Φ: $\tilde{t} = \tau^2(t)/\tau^1(t)$, $\tilde{\boldsymbol{x}} = H(t)\boldsymbol{x}$, де H — невироджена матричнозначна функція на області $\mathcal{I}$, яка задовольняє матричне диференціальне рівняння $\tau^1 H_t + H\eta^1 = 0$. Перетворення Φ випрямляє векторне поле Q'_1 до векторного поля $\tilde{Q}_1 := \partial_{\tilde{t}}$, і отже, відображає систему L_ϑ в систему зі сталими матричними коефіцієнтами, яку можна легко інтегрувати за допомогою алгебраїчних операцій.

На цьому етапі зводимо інтегрування системи L_ϑ до знаходження частинного невиродженого розв'язку H матричного диференціального рівняння $\tau^1 H_t + H\eta^1 = 0$ та алгебраїчних операцій.

Векторне поле Q'_2 зводимо за допомогою перетворення Φ до векторного поля $\tilde{Q}_2 := \tilde{t}\partial_{\tilde{t}} + \Lambda^{ab}\tilde{x}^b\partial_{\tilde{x}^a}$, де матриця $\Lambda = (\Lambda^{ab}) := (\tau^2 H_t + H\eta^2)H^{-1}$ є сталою в силу комутаційного співвідношення $[Q'_1, Q'_2] = Q'_1$, яке за допомогою перетворення Φ зводимо до вигляду $[\tilde{Q}_1, \tilde{Q}_2] = \tilde{Q}_1$. Комбінуючи матричні рівняння $\tau^1 H_t + H\eta^1 = 0$ та $\tau^2 H_t + H\eta^2 = \Lambda H$, отримаємо співвідношення

$$H\zeta H^{-1} = \Lambda, \quad \text{де} \quad \zeta := \eta^2 - \frac{\tau^2}{\tau^1}\eta^1.$$

Іншими словами, матриця ζ, яка залежить від змінної t є подібною до сталої матриці Λ відносно матриці H^{-1}, яка також залежить від змінної t. Без обмеження загальності, вважаємо, що матриця Λ приведена до жорданової нормальної форми, і тоді H^{-1} є узагальненою матрицею власних векторів (модальною матрицею) для матриці ζ. (Якщо це не так, то зводимо матрицю Λ до її жорданової нормальної форми за допомогою лінійного перетворення $\tilde{\boldsymbol{x}}$ зі сталою невиродженою матрицею C та комбінуємо цю матрицю з H, $CH \rightsquigarrow H$.) Оскільки матриця ζ відома, то, використовуючи лише алгебраїчні операції, можна знайти її жорданову нормальну форму Λ та невироджену матрицю $\hat H$, обернена до якої встановлює подібність матриці ζ до матриці Λ, $\hat H\zeta\hat H^{-1}=\Lambda$.

Якщо $\mathbb F=\mathbb R$ та матриця Λ має комплексні власні значення (з ненульовою уявною частиною), то її можна модифікувати, а відповідно і матриці $\hat H^{-1}$, ζ та η^2, таким чином, що система L_ϑ буде інваріантною відносно нового векторного поля Q_2', причому усі власні значення нової матричнозначної функції η^2 є сталими і дійсними, а також виконана рівність $\hat H\zeta\hat H^{-1}=\Lambda$; порівняй обговорення для $\mathbb F=\mathbb R$ у кінці розгляду випадку $k=2$ в параграфі 2.4.

Нехай $\check H:=H\hat H^{-1}$, тоді $H=\check H\hat H$ та $\check H\Lambda\check H^{-1}=\Lambda$, тобто $[\Lambda,\check H]=0$. Таким чином, $\check H$ — це розв'язок задачі Фробеніуса [69, розділ VIII] для матриці Λ. Зокрема, кожен узагальнений власний простір матриці Λ або, більш того, підпростір $\ker(\Lambda-\lambda E)^l$ для довільних $\lambda\in\mathbb F$ та $l\in\mathbb N$ є інваріантним відносно $\check H$. Оскільки $L_\vartheta\in\mathcal L_1$, то матриця Λ обов'язково має різні власні значення; див. знову розгляд випадку $k=2$ у параграфі 2.4. З цього випливає, що матриця $\check H$ має блочно-діагональний вигляд відповідно до розбиття $\mathbb F^n=\bigoplus_{i=1}^r\mathfrak U_i$ простору $\mathbb F^n$ на узагальнені власні підпростори $\mathfrak U_i$ матриці Λ, і кожен із діагональних блоків матриці H має блочнотрикутний вигляд, пов'язаний із прапором

$$\ker(\Lambda-\mu_iE)\subset\ker(\Lambda-\mu_iE)^2\subset\dots\subset\ker(\Lambda-\mu_iE)^{m_i},\tag{2.37}$$

де μ_i — власне значення матриці Λ, що відповідає цьому блоку, m_i — індекс власного значення μ_i, тобто максимальний ранг узагальнених власних векторів матриці Λ для цього власного значення.

Представимо перетворення Φ як композицію $\Phi=\check\Phi\circ\hat\Phi$ перетворень $\hat\Phi$: $\check t=t$, $\check{\boldsymbol x}=\hat H(t)\boldsymbol x$ та $\check\Phi$: $\tilde t=\tau^2(\check t)/\tau^1(\check t)$, $\tilde{\boldsymbol x}=\check H(\check t)\check{\boldsymbol x}$. Перетворення $\hat\Phi$ зводить векторні поля Q_ι' відповідно до векторних полів $\check Q_\iota=\tau^\iota(\check t)\partial_{\check t}+\check\eta^{\iota ab}(\check t)\check x^b\partial_{\check x^a}$, $\iota=1,2$, де $\check\eta^\iota=(\tau^\iota\hat H_t+\hat H\eta^\iota)\hat H^{-1}$. З цих співвідношень для $\check{\eta}^\iota$ отримаємо, що

$$\check{\zeta} := \check{\eta}^2 - \frac{\tau^2}{\tau^1}\check{\eta}^1 = \hat{H}\zeta\hat{H}^{-1} = \Lambda.$$

З комутаційного співвідношення $[\check{Q}_2, \check{Q}_1] = \check{Q}_1$, яке отримано з комутаційного співвідношення $[Q_1', Q_2'] = Q_1'$ за допомогою перетворення $\hat{\Phi}$, випливає, що $[\Lambda, \check{\eta}^1] = 0$, тобто будь-який підпростір $\ker(\Lambda - \lambda E)^l$ з $\lambda \in \mathbb{F}$ та $l \in \mathbb{N}$ є інваріантним відносно $\check{\eta}^1$. Таким чином, матриця $\check{\eta}^1$ має таку ж блочну структуру, що й описана вище матриця $\check{H}$.

Матричне рівняння $\tau^1 H_t + H\eta^1 = 0$ для H зводимо до матричного рівняння

$$\tau^1\check{H}_t + \check{H}\check{\eta}^1 = 0 \tag{2.38}$$

для $\check{H}$, яке є природним, оскільки це еквівалентно тому, що перетворення $\check{\Phi}$ випрямляє векторне поле $\check{Q}_1$ до векторного поля $\tilde{Q}_1 := \partial_{\tilde{t}}$. Рівняння (2.38), яке розглядаємо як система для елементів матриці $\check{H}$, можна розщепити на підсистеми, що відповідають діагональним блокам $\check{H}_{ii}$ матриці $\check{H}$, $\tau^1\check{H}_{ii,t} + \check{H}_{ii}\check{\eta}^1_{ii} = 0$, де матричні коефіцієнти $\check{\eta}^1_{ii}$ — відповідні діагональні блоки матриці $\check{\eta}^1$. Кожна така підсистема має частково зачеплену структуру, що узгоджено з прапором (2.37) для відповідного власного значення матриці Λ. Таким чином, можна знайти матрицю $\check{H}$ як результат транспонування фундаментальної матриці системи n звичайних диференціальних рівнянь першого порядку $\tau^1\boldsymbol{y}_t + \check{\eta}^1\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$.

Опишемо детальніше структуру діагональних блоків $\check{\eta}^1_{ii}$, $i = 1, \dots, r$, матриці $\check{\eta}^1$, що необхідно для розуміння того як інтегрувати цю систему. Нагадаємо, що $\sigma(\Lambda) = \{\mu_1, \dots, \mu_r\}$ — спектр матриці Λ. Для кожного $i \in \{1, \dots, r\}$ через p_i та n_{i1}, …, n_{ip_i} позначимо відповідно кількість елементарних дільників матриці Λ, що пов'язані з власним значенням μ_i, і його степені. Звідси $n_{i1} + \dots + n_{ip_i} = n_i$, $i = 1, \dots, r$, та $n_1 + \dots + n_r = n$. Виберемо канонічний базис матриці Λ таким чином, що не зростає послідовність довжин базисних ланцюжків Жордана, що відповідають власним значенням μ_i, або еквівалентно послідовність степенів пов'язаних із елементарними дільниками. Іншими словами, існують $s_i \in \{1, \dots, p_i\}$ та $q_{i1}, \dots, q_{i,s_i-1} \in \mathbb{N}_0$ з $0 =: q_{i0} < q_{i1} < \dots < q_{is_i} := p_i$ такі, що

$$n_{i,q_{i,j-1}+1} = \dots = n_{iq_{ij}} > n_{i,q_{ij}+1}, \quad j = 1, \dots, s_i, \quad \text{з} \quad n_{i,p_i+1} := 0.$$

Далі впорядкуємо базисні елементи в узагальненому власному просторі $\mathcal{U}_i$ таким чином. Дотримуючись фіксованого порядку ланцюжків, послідовно вибираємо перші вектори в ланцюжках, другі вектори в ланцюжках довжиною більше одиниці, треті вектори в ланцюжках довжиною більше двох і т.д. У модифікованому базисі підматриця $\check\eta^1_{ii}$ є блочно-трикутною. Діагональні блоки матриці $\check\eta^1_{ii}$ в першій частині цих блоків мають порядок $q'_{ij} := q_{ij} - q_{i,j-1}$, $j = 1, \dots, s_i$. Таким чином, q'_{ij} — кількість базисних ланцюжків Жордана тієї ж довжини $n_{iq_{ij}}$. Для j-ї частини діагональних блоків матриці $\check\eta^1_{ii}$, $j = 2, \dots, s_i$, повторюємо ті ж блоки, лише виключаючи блоки, які відповідають ланцюжкам довжиною менше ніж $n_{iq_{ij}}$.

Завдяки блочній структурі матриці $\check\eta^1$, систему $\tau^1\boldsymbol{y}_t + \check\eta^1\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ можна розщепити на r підсистем, що незачеплені одна з одною, і відповідають діагональним блокам $\check\eta^1_{ii}$, $i = 1, \dots, r$. Більш того, кожна така підсистема є частково зачеплена. Для інтегрування i-ої підсистеми необхідно розв'язати s_i однорідних лінійних систем відповідно для q'_{i1}, …, q'_{is_i} звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, а потім виконати $n_i - q'_{i1}$ квадратур для знаходження частинних розв'язків розглядуваних неоднорідних систем, які мають такі ж матриці, що й вищенаведені однорідні системи.

Знаходження матриці $\check H$ завершує побудову перетворення Φ. $\square$

Підсумовуючи доведення теореми 2.36, можна сформулювати наступну покрокову процедуру інтегрування системи L_ϑ з класу $\mathcal{L}_1$, що одночасно використовує специфічну пару її відомих векторних полів ліївської симетрії, $Q_\iota = \tau^\iota\partial_t + (\eta^{\iota ab}x^b + \chi^{\iota a})\partial_{x^a}$, $\iota = 1, 2$, де t-компоненти τ^1 та τ^2 є лінійно незалежними:

1. Замінюємо векторні поля Q_ι на їх відповідники $Q'_\iota = \tau^\iota\partial_t + \eta^{\iota ab}x^b\partial_{x^a}$ з нульовими значеннями для $\chi^{\iota a}$.
2. Лінійно перекомбінуємо векторні поля Q'_1 та Q'_2, щоб звести комутаційне співвідношення до вигляду $[Q'_1, Q'_2] = Q'_1$.
3. Покладемо $T := \tau^2/\tau^1$ та $\zeta := \eta^2 - T\eta^1$.
4. Будуємо нормальну жорданову форму Λ матриці ζ та узагальнену модальну матрицю M для матриці ζ, яка пов'язана з матрицею Λ. Виберемо $\hat{H} := M^{-1}$. Отже, $\hat{H}\zeta\hat{H}^{-1} = \Lambda$.
5. Обчислюємо матрицю $\check{\eta}^1 := (\tau^1\hat{H}_t + \hat{H}\eta^1)\hat{H}^{-1}$, яка є блочнодіагональною.
6. Знаходимо $\check{H}$ як результат транспонування (блочнодіагональної) фундаментальної матриці розв'язків розщепленої системи n звичайних диференціальних рівнянь першого порядку $\tau^1\boldsymbol{y}_t + \check{\eta}^1\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$.
7. Покладемо $H = \check{H}\hat{H}$ та, відповідно до формул (2.21б)–(2.21в), обчислюємо матриці $\tilde{A}$ та $\tilde{B}$, які обов'язково є сталими.
8. Розв'язуємо систему $L_{\tilde{\vartheta}}$ зі сталими матричними коефіцієнтами $\tilde{\vartheta} = (\tilde{A}, \tilde{B})$.
9. Записуємо загальний розв'язок системи L_ϑ з отриманого загального розв'язку системи $L_{\tilde{\vartheta}}$ за допомогою перетворення Φ^{-1}: $\boldsymbol{x}(t) = H^{-1}(t)\tilde{\boldsymbol{x}}\big(T(t)\big)$.

Єдиний крок, де потрібно інтегрувати лінійні системи звичайних диференціальних рівнянь — це крок 6. На кроці 9 зручно обчислити обернену матрицю H^{-1} до матриці H як $H^{-1} = M\check{H}^{-1}$.

Якщо всі елементарні дільники матриці Λ різні, то структура матриці $\check{\eta}^1$ особливо проста, і з теореми 2.36 випливає наступне твердження.

Наслідок 2.37. *Нехай система L_ϑ з класу $\mathcal{L}_1$ допускає алгебру ліївської інваріантності, що натягуто на два відомі векторні поля ліївської симетрії $Q_\iota = \tau^\iota\partial_t + \eta^{\iota ab}x^b\partial_{x^a}$, $\iota = 1, 2$, з лінійно незалежними τ^1 та τ^2, де*

$[Q_1, Q_2] = Q_1$, та нехай матриця $\zeta := \eta^2 - (\tau^2/\tau^1)\eta^1$ не має елементарних дільників, що співпадають. Тоді цю систему можна повністю проінтегрувати за допомогою алгебраїчних операцій і щонайбільше $n+p-r$ квадратур, де p — кількість елементарних дільників матриці ζ та r — кількість різних власних значень матриці ζ.

Доведення. Матриця $\check\eta^1$ обов'язково є блочнодіагональною з r блоками на головній діагоналі, де i-й блок $\check\eta^1_{ii}$ відповідає i-му власному значенню μ_i матриці Λ (або, еквівалентно, матриці ζ), $i = 1, \dots, r$. Оскільки елементарні дільники матриці Λ для власного значення μ_i є різними, то можемо змінити порядок канонічного базису для матриці Λ таким чином, щоб підматриця $\check\eta^1_{ii}$ була трикутною, а послідовність її діагональних елементів можна розщепити у підпослідовності, що перебувають у взаємно однозначній відповідності з елементарними дільниками матриці Λ для власного значення μ_i. Кожна з цих підпослідовностей містить однакові елементи, а їх довжина співпадає зі степенем відповідного елементарного дільника. Для системи $\tau\boldsymbol{y}_t + \check\eta^1\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$ це означає, що її обов'язково можна розщепити на r підсистеми, які незачеплені між собою, та i-а підсистема буде інтегрованою щонайбільше за допомогою $n_i + p_i - 1$ квадратур, де n_i — алгебраїчна кратність власного значення μ_i матриці Λ, та p_i — число елементарних дільників матриці Λ для власного значення μ_i. $\square$

Зауваження 2.38. За певних додаткових умов інтегрування допоміжних лінійних систем диференціальних рівнянь першого порядку, що виникають у твердженнях цього параграфу або під час відображення систем із класу $\mathcal{L}_1$ у системи з класу $\mathcal{L}_1'$, також є алгоритмічним, наприклад, у рамках підходу Вея–Нормана [134, 135]. Конкретніше, нехай матричнозначна функція F змінної t представлена у вигляді $F(t) = \sum_{l=1}^m \varphi^l(t)K_l$, де φ^1, …, φ^m — скалярні функції змінної t, K_1, …, K_m — лінійно незалежні сталі матриці, що утворюють алгебру Лі $\mathfrak{k}$. Тоді розв'язок матричної задачі Коші $H_t = F(t)H$, $H(0) = E$ допускає представлення $H(t) = \prod_{l=1}^m \exp(\psi^l(t)K_l)$. Набір $(\psi^1, \dots, \psi^m)$ — розв'язок задачі Коші $\psi^l_t=\sum_{l'=1}^m\varrho^{ll'}(\psi^1,\dots,\psi^m)\varphi^{l'}(t)$, $\psi^l(0)=0$, $l=1,\dots,m$. Тут коефіцієнти $\varrho^{ll'}$ — аналітичні функції змінних $(\psi^1,\dots,\psi^m)$, які визначено лише за допомогою коефіцієнтів φ^1, …, φ^m та структурних констант алгебри $\mathfrak f$ у базисі $(K_1,\dots,K_m)$. Отже, система звичайних диференціальних рівнянь для функцій $(\psi^1,\dots,\psi^m)$ у загальному випадку є нелінійною. У той же час, якщо $\mathbb F=\mathbb C$ і алгебра $\mathfrak f$ є розв'язною, тоді базис $(K_1,\dots,K_m)$ можна вибрати таким чином, що $\varrho^{ll'}=0$, $l'>l$, а $\varrho^{ll'}$ залежить лише від $\psi^{l''}$ з $l''<l$. Це означає, що систему для функцій ψ^1, …, ψ^m можна проінтегровати в квадратурах у випадку таких алгебр $\mathfrak f$. У результаті розв'язання матричного рівняння $H_t=F(t)H$ для відповідної розв'язної алгебри Лі $\mathfrak f$ можна звести до обчислення експонент сталих матриць. Випадок абелевої алгебри $\mathfrak f$ особливо простий; тоді $\psi^l(t)=\int_0^t\varphi^l(t')\,\mathrm dt'$, $l=1,\dots,m$.

2.8. Випадок двох залежних змінних

Як ілюстративний приклад використання запропонованого підходу, виконаємо повну групову класифікацію нормальних лінійних систем звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, тобто $n=2$. Для цього значення n системи L'_V з класу $\mathcal L'_1$ набувають вигляду

$$\boldsymbol x_{tt}=V(t)\boldsymbol x,\quad V(t)=\begin{pmatrix}V^{11}(t)&V^{12}(t)\\V^{21}(t)&V^{22}(t)\end{pmatrix},$$

де $\boldsymbol x=(x^1,x^2)$, набір довільних елементів V пробігає множину 2×2 матричнозначних функцій змінної t, що непропорційні 2×2 одиничній матриці E з коефіцієнтами пропорційності, що залежать від часу.

Нагадаємо, що для будь-якої системи L'_V з класу $\mathcal L'_1$, її максимальна алгебра ліївської інваріантності $\mathfrak g_V$ є напівпрямою сумою $\mathfrak g_V=\mathfrak g^{\rm ess}_V\Subset\mathfrak g^{\rm lin}_V$, де

$$\mathfrak g^{\rm lin}_V:=\big\{\chi^a(t)\partial_{x^a}\mid\boldsymbol\chi=(\chi^1,\chi^2)^{\mathsf T}\text{ є розв'язком системи }L'_V\big\},$$

$$\mathfrak{g}_V^{\mathrm{ess}} := \big\{\tau(t)\partial_t + \eta^{ab}(t)x^b\partial_{x^a} \mid (\tau,\eta) \text{ є розв'язком системи (2.28)}\big\}$$

— відповідно чотиривимірний абелевий ідеал, який відповідає лінійній суперпозиції розв'язків, а її доповняльну підалгебру називаємо суттєвою алгеброю ліївської інваріантності системи L'_V, порівняй кінець параграфа 2.3 та початок параграфа 2.4. (У наведених вище формулах та нижче індекси a та b пробігають значення від 1 до 2.) Таким чином, більш природно класифікувати суттєві алгебри ліївської інваріантності систем із класу $\mathcal{L}'_1$, ніж максимальні алгебри ліївської інваріантності цих систем.

Суттєва алгебра ліївської інваріантності $\mathfrak{g}_V^{\mathrm{ess}}$ будь-якої системи L'_V з класу $\mathcal{L}'_1$ містить підалгебру $\mathfrak{s}^{\mathrm{vf}} := \{Q_\Gamma \mid \Gamma \in \mathfrak{s}\}$, де $Q_\Gamma := \Gamma^{ab}x^b\partial_{x^a}$, $\mathfrak{s}$ — підалгебра алгебри $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{F})$, подвійний централізатор якої співпадає з нею, $\mathrm{C}_{\mathfrak{sl}(2,\mathbb{F})}(\mathrm{C}_{\mathfrak{sl}(2,\mathbb{F})}(\mathfrak{s})) = \mathfrak{s}$. Вибираємо як базис алгебри $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{F})$ такий набір матриць:

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad S_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, $[S_1,S_2] = -2S_1$, $[S_2,S_3] = -2S_3$, $[S_1,S_3] = -S_2$. У випадку $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ повний список $\mathrm{SL}(2,\mathbb{F})$-нееквівалентних підалгебр $\mathfrak{s}$ алгебри $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{F})$ вичерпують підалгебри $\{0\}$, $\langle S_1\rangle$, $\langle S_2\rangle$, $\langle S_1,S_2\rangle$ та сама $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{F})$, тоді як у випадку $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ список необхідно розширити ще однією підалгеброю $\langle S_1+S_3\rangle$. Подвійними централізаторами $\mathrm{C}_{\mathfrak{sl}(2,\mathbb{F})}(\mathrm{C}_{\mathfrak{sl}(2,\mathbb{F})}(\mathfrak{s}))$ цих підалгебр відповідно є $\{0\}$, $\langle S_1\rangle$, $\langle S_2\rangle$, $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{F})$, $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{F})$ та $\langle S_1+S_3\rangle$. Оскільки $\mathrm{C}_{\mathfrak{sl}(2,\mathbb{F})}(\mathrm{C}_{\mathfrak{sl}(2,\mathbb{F})}(\mathfrak{s})) \neq \mathfrak{s}$ тоді і лише тоді, коли $\mathfrak{s} = \langle S_1,S_2\rangle$, то це єдина власна підалгебра алгебри $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{F})$, яка непридатна для групової класифікації класу $\mathcal{L}'_1$ з $n=2$. Підалгебра $\mathfrak{s} = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{F})$ також нерелевантна для цієї класифікації, оскільки будь-яка система, яка допускає відповідну алгебру $\mathfrak{s}^{\mathrm{vf}}$ належить класу $\mathcal{L}''_0$.

Теорема 2.39. *Для $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ повний список $G^{\sim}_{\mathcal{L}'}$-нееквівалентних суттєвих розширень ліївської симетрії у класі $\mathcal{L}'_1$ з $n=2$ вичерпують наступними випадками:*

0. Загальний випадок $V(t)$: $\mathfrak{g}^{\rm ess}_V=\langle I\rangle$;

1. $V=v(t)S_1$: $\mathfrak{g}^{\rm ess}_V=\langle I,\, x^2\partial_{x^1}\rangle$;

2. $V=v(t)S_2$: $\mathfrak{g}^{\rm ess}_V=\langle I,\, x^1\partial_{x^1}-x^2\partial_{x^2}\rangle$;

3. $V=\varepsilon E+(\beta_1-2\beta_2t+\beta_3t^2)S_1+(\beta_2-\beta_3t)S_2+\beta_3S_3$, $(\beta_2,\beta_3)\neq(0,0)$: $\mathfrak{g}^{\rm ess}_V=\langle I,\, \partial_t+x^2\partial_{x^1}\rangle$;

4. $V=\varepsilon E+\beta_1{\rm e}^{2t}S_1+\beta_2S_2+\beta_3{\rm e}^{-2t}S_3$, $(\beta_1\beta_2,\beta_2\beta_3,\beta_3\beta_1)\neq(0,0,0)$: $\mathfrak{g}^{\rm ess}_V=\langle I,\, \partial_t+x^1\partial_{x^1}-x^2\partial_{x^2}\rangle$;

5. $V=\varepsilon E+{\rm e}^{2\gamma t}S_1$, $4\varepsilon\neq\gamma^2$: $\mathfrak{g}^{\rm ess}_V=\langle I,\, x^2\partial_{x^1},\, \partial_t+\gamma(x^1\partial_{x^1}-x^2\partial_{x^2})\rangle$;

6. $V=\varepsilon E+S_2$: $\mathfrak{g}^{\rm ess}_V=\langle I,\, x^1\partial_{x^1}-x^2\partial_{x^2},\, \partial_t\rangle$;

7. $V=S_1$: $\mathfrak{g}^{\rm ess}_V=\langle I,\, x^2\partial_{x^1},\, \partial_t,\, t\partial_t+2x^1\partial_{x^1}\rangle$.

Якщо $\mathbb F=\mathbb R$, тоді цей список необхідно доповнити ще трьома випадками,

$1^{\mathbb R}$. $V=v(t)(S_1+S_3)$: $\mathfrak{g}^{\rm ess}_V=\langle I,\, x^1\partial_{x^2}-x^2\partial_{x^1}\rangle$;

$4^{\mathbb R}$. $V=\varepsilon E+\mu(S_1+S_3)+\nu\cos(2t)(S_1-S_3)+\nu\sin(2t)S_2$, $\nu\neq0$: $\mathfrak{g}^{\rm ess}_V=\langle I,\, \partial_t+x^2\partial_{x^1}-x^1\partial_{x^2}\rangle$;

$6^{\mathbb R}$. $V=\varepsilon E+S_1+S_3$: $\mathfrak{g}^{\rm ess}_V=\langle I,\, x^1\partial_{x^2}-x^2\partial_{x^1},\, \partial_t\rangle$.

Тут $\varepsilon,\gamma,\mu,\nu,\beta_1,\beta_2,\beta_3\in\mathbb F$, $I:=x^1\partial_{x^1}+x^2\partial_{x^2}$, v пробігає множину функцій змінної t з $\tau v_t\neq(\kappa-2\tau_t)v$ для будь-якої сталої $\kappa\in\mathbb F$ і будь-якої функції τ змінної t, $\tau_{ttt}=0$. З точністю до $G^\sim_{\mathcal L'}$-еквівалентності, матриця V — ненульова безслідова матричнозначна функція змінної t у випадку 0, $\beta_2=0$, якщо $\beta_3\neq0$ або $\beta_1=0$, якщо $\beta_3=0$ та $\beta_2\neq0$ у випадку 3, одне ненульове значення β_1 або β_3 дорівнює 1 у випадку 4, $\gamma\in\{0,1\}$ у випадку 5, та $\nu>0$ у випадку $4^{\mathbb R}$.

Доведення. Базуючись на обговоренні на початку параграфа 2.4, з класифікаційної умови (2.28) випливає, що $I\in\mathfrak{g}^{\rm ess}_V$ для будь-якої системи L'_V

з класу $\mathcal{L}'_1$, причому $\mathfrak{g}^{\rm ess}_V = \langle I\rangle$ для довільної системи в цьому класу, і як результат маємо випадок 0.

Відповідно до розгляду в параграфі 2.4 для знаходження суттєвих розширень ліївської симетрії у класі $\mathcal{L}'_1$ окремо досліджуємо випадки $k=0$, $k=1$ та $k=2$.

$\boldsymbol{k=0.}$ З точністю до $G^\sim_{\mathcal{L}'}$-еквівалентності, зручно вважати з самого початку, що $\operatorname{tr} V=0$, тобто $L'_V\in\mathcal{L}''_1$. Тут підалгебра $\mathfrak{s}=\{0\}$ алгебри $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{F})$ не підходить, оскільки вона відповідає загальному випадку без розширення ліївської симетрії. Підалгебри $\langle S_1\rangle$, $\langle S_2\rangle$ та для $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ додатково $\langle S_1+S_3\rangle$ приводять відповідно до випадків 1, 2 та $1^{\mathbb{R}}$, де $V=v(t)\Gamma$ та $\mathfrak{g}^{\rm ess}_V=\langle I,Q_\Gamma\rangle$ з матрицею Γ, яка є базисним елементом відповідної підалгебри $\mathfrak{s}$. Із наслідку 2.17 подальші розширення ліївської симетрії є тоді і лише тоді, коли $\tau v_t=(\kappa-2\tau_t)v$ з деякою сталою κ та деякою функцією τ змінної t з $\tau_{ttt}=0$.

$\boldsymbol{k=1.}$ Тоді $\mathfrak{g}^{\rm ess}_V=\langle I\rangle\oplus\big(\langle P\rangle\Subset\mathfrak{s}^{\rm vf}\big)$, де $P:=\partial_t+\Upsilon^{ab}x^b\partial_{x^a}$. Матричнозначна параметр-функція V має вигляд (2.29) з $W\neq0$. Окремо розглянемо кожен із відповідних елементів повного списку ${\rm SL}(2,\mathbb{F})$-нееквівалентних підалгебр алгебри $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{F})$: $\{0\}$, $\langle S_1\rangle$, $\langle S_2\rangle$ та для $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ додатково $\langle S_1{+}S_3\rangle$ як кандидати для $\mathfrak{s}$.

У випадку $\mathfrak{s}=\{0\}$ немає жорстких попередніх обмежень щодо матриць Υ та W. Єдиним очевидним обмеженням для матриці Υ є те, що вона ненульова, оскільки інакше ${\rm C}_{\mathfrak{sl}(2,\mathbb{F})}\big(\{K_l,l\in\mathbb{N}_0\}\big)=\langle W\rangle\neq\{0\}=\mathfrak{s}$. Таким чином, розгляд цього випадку зводимо до класифікації пар ненульових 2×2 матриць із точністю до подібності матриць. Розглядаємо всі можливі 2×2 жорданові нормальні форми як значення для параметр-матриці Υ: $\Upsilon=S_1$, $\Upsilon=\gamma S_2$ та над полем $\mathbb{R}$ додатково $\Upsilon=\gamma(S_1{+}S_3)$, де $\gamma\neq0$, а тому $\gamma=1$ з точністю до масштабування змінної t. Для кожної з цих матриць Υ виконано співвідношення ${\rm C}_{\mathfrak{sl}(2,\mathbb{F})}(\{\Upsilon\})=\langle\Upsilon\rangle$, а отже, будь-яка невироджена матриця M, що комутує з фіксованим виглядом матриці Υ, є пропорційною до ${\rm e}^{\beta\Upsilon}$ для деякого $\beta\in\mathbb{F}$. Відповідно до леми 2.27, можемо перетворити матрицю W: $\tilde{W} = \mathrm{e}^{\beta\Upsilon} W \mathrm{e}^{-\beta\Upsilon}$, при цьому не змінюючи матрицю Υ. Вибираючи загальний вигляд для матриці W, $W =: K_0 = \beta_1 S_1 + \beta_2 S_2 + \beta_3 S_3$ з $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) \neq (0,0,0)$, розглянемо можливі зведення матриці W за допомогою зазначених вище перетворень.

Якщо $\Upsilon = S_1$, то $K_1 = -2\beta_2 S_1 - \beta_3 S_2$, $K_2 = 2\beta_3 S_1$, $K_l = 0$, $l \geqslant 3$, а централізатор $\mathrm{C}_{\mathfrak{sl}(2,\mathbb{F})}\big(\{K_0, K_1, K_2\}\big)$ має потрібне значення $\{0\}$ тоді і лише тоді, коли $(\beta_2, \beta_3) \neq (0,0)$. З точністю до $G^{\sim}_{\mathcal{L}'}$-еквівалентності можна покласти $\beta_2 = 0$, якщо $\beta_3 \neq 0$, або $\beta_1 = 0$, якщо $\beta_3 = 0$ та $\beta_2 \neq 0$. У результаті маємо випадок 3.

Якщо $\Upsilon = S_2$, то $K_l = [\Upsilon, K_{l-1}] = 2^l \beta_1 S_1 + (-2)^l \beta_3 S_3$, $l \in \mathbb{N}$, і централізатор $\mathrm{C}_{\mathfrak{sl}(2,\mathbb{F})}\big(\{K_l, l \in \mathbb{N}_0\}\big)$ співпадає з $\mathfrak{s} = \{0\}$ тоді і лише тоді, коли щонайменше дві з трьох сталих β_1, β_2 та β_3 є ненульовими. Можемо покласти одну з ненульових сталих β_1 або β_3 рівною 1 з точністю до зсуву за змінною t, що приводить до випадку 4.

У випадку $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ та $\Upsilon = S_1 + S_3$ можна покласти $\beta_2 = 0$, тобто $W =: K_0 = \beta_1 S_1 + \beta_3 S_3$, $K_{2l+1} = (\beta_1 - \beta_3)(-4)^l S_2$, $K_{2l+2} = 2(\beta_1 - \beta_3)(-4)^l (S_3 - S_1)$, $l \in \mathbb{N}_0$, а тому $\mathrm{C}_{\mathfrak{sl}(2,\mathbb{F})}\big(\{K_l, l \in \mathbb{N}_0\}\big) = \{0\} = \mathfrak{s}$ тоді і лише тоді, коли $\beta_1 - \beta_3 \neq 0$. З точністю до зсувів за змінною t кратних $\pi/2$ можна вважати, що $\beta_1 - \beta_3 > 0$. Ввівши позначення $\mu := (\beta_1 + \beta_3)/2$ та $\nu := (\beta_1 - \beta_3)/2$, отримаємо випадок $4^{\mathbb{R}}$.

Для підалгебри $\mathfrak{s} = \langle S_1 \rangle$ вибираємо $\langle S_2 \rangle$ як його доповняльний підпростір s в $\mathrm{N}_{\mathfrak{sl}(n,\mathbb{F})}(\mathfrak{s}) = \langle S_1, S_2 \rangle$ та $\Upsilon \in \langle S_2 \rangle$, тобто $\Upsilon = \gamma S_2$ з $\gamma \in \mathbb{F}$. Більш того, $W \in \mathrm{C}_{\mathfrak{sl}(n,\mathbb{F})}(\mathfrak{s}) = \langle S_1 \rangle$ та $W \neq 0$, тобто $W = \beta S_1$ з $\beta \neq 0$, а тому $K_l = \beta(2\gamma)^l S_1$, $l \in \mathbb{N}_0$. У результаті маємо випадок 5, де додатково $4\varepsilon \neq \gamma^2$ (інакше $k = 2$; див. розгляд нижче). Використовуючи масштабування та зсув за змінною t, можна покласти відповідно $\gamma \in \{0, 1\}$ та $\beta = 1$.

Якщо $\mathfrak{s} = \langle S_2 \rangle$, то $\mathrm{N}_{\mathfrak{sl}(2,\mathbb{F})}(\mathfrak{s}) = \mathfrak{s}$, $\mathsf{s} = \{0\}$, а отже, єдиним придатним вибором для матриці Υ є $\Upsilon = 0$. Далі $K_0 := W = \beta S_2$ з $\beta \neq 0$, оскільки $W \in \mathrm{C}_{\mathfrak{sl}(2,\mathbb{F})}(\mathfrak{s}) = \langle S_2 \rangle$ та $W \neq 0$, $K_l = 0$ для $l \geqslant 1$ та $\mathrm{C}_{\mathfrak{sl}(2,\mathbb{F})}(\{K_0\}) = \mathfrak{s}$.

Використовуючи масштабування змінної t та перестановку змінних x^1 та x^2, можна покласти $\beta=1$, і у результаті отримаємо випадок 6.

Для $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ та підалгебри $\mathfrak{s}=\langle S_1+S_3\rangle$ нормалізатор $\mathrm{N}_{\mathfrak{sl}(2,\mathbb{F})}(\mathfrak{s})$ знову співпадає з $\mathfrak{s}$. Таким чином, $\mathsf{s}=\{0\}$, $\Upsilon=0$, $W=:K_0=\beta(S_1+S_3)$ з $\beta\neq 0$, та $K_l=0$, $l\geqslant 1$. Знову використовуючи масштабування змінної t та перестановку змінних x^1 та x^2, можемо покласти $\beta=1$ і отримаємо випадок $6^{\mathbb{R}}$.

$\boldsymbol{k=2.}$ Оскільки $W\neq 0$, то матриця Λ може мати лише один ланцюжок із двох власних значень, різниця яких дорівнює двом. Більш того, суттєва лише різниця власних значень, а матрицю Λ можна вважати діагональною, див. відповідний випадок у параграфі 2.4. Таким чином, з самого початку можемо вибрати матрицю Λ у вигляді $\Lambda=\mathrm{diag}(2,0)$. Тоді $\Upsilon=0$, $W=:K_0=S_1$ з точністю до $\mathrm{SL}(2,\mathbb{F})$-еквівалентності, $K_l=0$, $l\in\mathbb{N}$, та $\mathrm{C}_{\mathfrak{sl}(2,\mathbb{F})}(\{K_0\})=\langle S_1\rangle=\mathfrak{s}$, що приводить до випадку 7. Помилковою, інваріантною відносно зсувів за змінною t, версією цього випадку є $V=\frac{1}{4}E+\mathrm{e}^{2t}S_1$ з $\mathfrak{g}_V^{\mathrm{ess}}=\langle I,\ x^2\partial_{x^1},\ \mathrm{e}^{-t}\partial_t,\ \partial_t+2x^1\partial_{x^1}\rangle$. $\square$

Наслідок 2.40. *Нехай $n=2$.*

(i) $\dim\mathfrak{g}_V\in\{5,6,7,8\}$ для будь-якої системи L'_V з класу $\mathcal{L}'_1$.

(ii) $\dim\mathfrak{g}_\theta\in\{5,6,7,8\}$ для будь-якої системи $\bar L_\theta$ з класу $\bar{\mathcal{L}}_1$.

(iii) $\dim\mathfrak{g}_\theta\in\{5,6,7,8,15\}$ для будь-якої системи $\bar L_\theta$ з класу $\bar{\mathcal{L}}$.

(iv) Будь-яка система $\bar L_\theta\in\bar{\mathcal{L}}$ з $\dim\mathfrak{g}_\theta>8$ є $G^{\sim}_{\bar{\mathcal{L}}}$-еквівалентною елементарній системі $\boldsymbol{x}_{tt}=\mathbf{0}$.

(v) Будь-яка система $\bar L_\theta\in\bar{\mathcal{L}}$ з $\dim\mathfrak{g}_\theta\geqslant 7$ є $G^{\sim}_{\bar{\mathcal{L}}}$-еквівалентною однорідній системі зі сталими матричними коефіцієнтами.

Теорема 2.39 покращує всі результати щодо ліївських симетрій нормальних лінійних систем двох звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, які відомі в літературі; порівняй [75,108,109,133]. У дисертації проведено класифікацію таких симетрій у випадку обох базисних полів $\mathbb{C}$ та $\mathbb{R}$ з акуратним їх розрізненням. Випадки $1^{\mathbb{R}}$, $4^{\mathbb{R}}$ та $6^{\mathbb{R}}$ теореми 2.39, які специфічні для $\mathbb{F}=\mathbb{R}$, над комплексним полем є еквівалентними відповідно випадкам 1, 4 та 6. Більш того, розгляд класу $\mathcal{L}_1'$ замість його підкласу $\mathcal{L}_1''$, де на матрицю довільних елементів V не накладено умову нульового сліду, значно спрощує як процедуру класифікації так і побудований список класифікаційних випадків, шляхом зменшення як кількості випадків класифікації так і їх складності. Див. зауваження 2.23 для більш детального обговорення цієї оптимізації у випадку довільних n.

Враховуючи це зауваження, можна трансформувати список класифікаційних випадків теореми 2.39 до списку класифікаційних випадків для класу $\mathcal{L}_1''$ з $n=2$ за допомогою рутинних обчислень, зводячи матриці V до матриць із нульовим слідом. Необхідно лише трансформувати всі матриці V з випадків 3–6, $4^{\mathbb{R}}$ та $6^{\mathbb{R}}$ з $\varepsilon\neq 0$ до безслідових матриць за допомогою перетворень із групи еквівалентності $G^{\sim}_{\mathcal{L}'}$.

З огляду на обговорення на початку параграфа 2.3, очевидно, що список випадків теореми 2.39 також можна інтерпретувати як розв'язання задач групової класифікації для ширших класів $\mathcal{L}_1$ та $\bar{\mathcal{L}}_1$. Тобто можна модифікувати цей класифікаційний список для класів $\mathcal{L}_1$ та $\bar{\mathcal{L}}_1$ аналогічно тому, як це обговорювалося в зауваженні 2.24. У результаті отримаємо наступне твердження.

Наслідок 2.41. *Для $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ повний список $G^{\sim}_{\mathcal{L}}$-нееквівалентних суттєвих розширень лiївської симетрії у класі $\mathcal{L}_1$ з $n=2$ вичерпують наступні випадки:*

0. Загальний випадок, $A=0$, $B=V(t)$: $\mathfrak{g}^{\rm ess}_{\vartheta}=\langle I\rangle$;
1. $A=0$, $B=v(t)S_1$: $\mathfrak{g}^{\rm ess}_{\vartheta}=\langle I,\, x^2\partial_{x^1}\rangle$;
2. $A=0$, $B=v(t)S_2$: $\mathfrak{g}^{\rm ess}_{\vartheta}=\langle I,\, x^1\partial_{x^1}-x^2\partial_{x^2}\rangle$;
3. $A=-2S_1$, $B=\varepsilon E+\beta_1S_1+\beta_2S_2+\beta_3S_3$, $(\beta_2,\beta_3)\neq(0,0)$: $\mathfrak{g}^{\rm ess}_{\vartheta}=\langle I,\,\partial_t\rangle$;
4. $A=-2S_2$, $B=\varepsilon E+\beta_1S_1+\beta_2S_2+\beta_3S_3$, $(\beta_1\beta_2,\beta_2\beta_3,\beta_3\beta_1)\neq(0,0,0)$: $\mathfrak{g}^{\rm ess}_{\vartheta}=\langle I,\,\partial_t\rangle$;

5. $A=-2\gamma S_2$, $B=(\varepsilon-\gamma^2)E+S_1$, $4\varepsilon\neq\gamma^2$: $\mathfrak g^{\rm ess}_\vartheta=\langle I,\,{\rm e}^{-2\gamma t}x^2\partial_{x^1},\,\partial_t\rangle$;

6. $A=0$, $B=\varepsilon E+S_2$: $\mathfrak g^{\rm ess}_\vartheta=\langle I,\,x^1\partial_{x^1}-x^2\partial_{x^2},\,\partial_t\rangle$;

7. $A=0$, $B=S_1$: $\mathfrak g^{\rm ess}_\vartheta=\langle I,\,x^2\partial_{x^1},\,\partial_t,\,t\partial_t+2x^1\partial_{x^1}\rangle$.

Якщо $\mathbb F=\mathbb R$, то цей список необхідно доповнити іще трьома випадками:

$1^{\mathbb R}$. $A=0$, $B=v(t)(S_1+S_3)$: $\mathfrak g^{\rm ess}_\vartheta=\langle I,\,x^1\partial_{x^2}-x^2\partial_{x^1}\rangle$;

$4^{\mathbb R}$. $A=-2(S_1+S_3)$, $B=\varepsilon E+\beta_1S_1+\beta_3S_3$, $\beta_1\neq\beta_3$: $\mathfrak g^{\rm ess}_\vartheta=\langle I,\,\partial_t\rangle$;

$6^{\mathbb R}$. $A=0$, $B=\varepsilon E+S_1+S_3$: $\mathfrak g^{\rm ess}_\vartheta=\langle I,\,x^1\partial_{x^2}-x^2\partial_{x^1},\,\partial_t\rangle$.

Тут $\varepsilon,\gamma,\beta_1,\beta_2,\beta_3\in\mathbb F$, $I:=x^1\partial_{x^1}+x^2\partial_{x^2}$, v пробігає множину функцій змінної t з $\tau v_t\neq(\kappa-2\tau_t)v$ для будь-якої сталої $\kappa\in\mathbb F$ і будь-якої функції τ змінної t з $\tau_{ttt}=0$. З точністю до $G^\sim_{\mathcal L}$-еквівалентності, V — ненульова безслідова матричнозначна функція змінної t у випадку 0, $\beta_2=0$, якщо $\beta_3\neq0$, або $\beta_1=0$, якщо $\beta_3=0$ та $\beta_2\neq0$, у випадку 3, одне ненульове значення β_1 або β_3 дорівнює 1 у випадку 4, $\gamma\in\{0,1\}$ у випадку 5, $\beta_1>\beta_3$ у випадку $4^{\mathbb R}$.

Розглянемо класи $\bar{\mathcal L}$, $\mathcal L$, $\mathcal L'$ та $\mathcal L''$ з $n=2$. У теоремі 2.39 представлено повний список нееквівалентних регулярних суттєвих розширень ліївської симетрії для перших трьох із цих класів; див. означення 2.22. Шляхом зведення всіх представлених у списку матриць V до еквівалентних безслідових матриць, відповідно до зауваження 2.23, отримаємо повний список таких розширень для класу $\mathcal L''$ з $n=2$. Список із наслідку 2.41 при $n=2$ є списком як для класу $\bar{\mathcal L}$ так і для класу $\mathcal L$. Для повного розв'язання задач групової класифікації для наведених класів достатньо доповнити відповідний повний список нееквівалентних регулярних суттєвих розширень ліївської симетрії єдиним сингулярним випадком, що канонічно задано елементарною системою $\boldsymbol x_{tt}=\mathbf 0$. Максимальна алгебра ліївської інваріантності $\mathfrak g_0$ якої добре відома та ізоморфна алгебрі

$\mathfrak{sl}(4,\mathbb{F})$, див. (2.24). (Поняття суттєвої алгебри ліївської інваріантності не є релевантним для цієї системи.)

2.9. Висновки до розділу

Хоча нормальні лінійні системи звичайних диференціальних рівнянь другого порядку виглядають легкими для дослідження у рамках групового аналізу диференціальних рівнянь, але для опису їх ліївських симетрій необхідно застосовувати різноманітні просунуті методи та сучасні техніки. Базовий для дослідження алгебраїчний метод групової класифікації у дисертації доповнено калібруванням довільних елементів за допомогою сімей перетворень еквівалентності, розбиттям розглянутого класу на підкласи з кращими трансформаційними властивостями, знаходженням цілочисельних значень, що характеризують випадки розширень ліївської симетрії і є інваріантними відносно дії відповідної групи еквівалентності, тощо.

У контексті вищенаведеного опису важливим інструментом стала теорема Лі про реалізації скінченновимірних алгебр Лі на прямій. Раніше ця теорема успішно використовувалася для розв'язання задач групової класифікації низки класів диференціальних рівнянь, включаючи багатовимірні нелінійні рівняння Шредінгера з модульною нелінійністю в роботах [123, параграф 7] та [89, лема 42], лінійні звичайні диференціальні рівняння довільного порядку $r \geqslant 3$ [49, параграф 3], (1+1)-вимірні лінійні еволюційні рівняння довільного порядку $r \geqslant 3$ [39, лема 14], узагальнені рівняння Бюргерса–Кортевега–де Фріза [114, лема 18] та (1+1)-вимірні лінійні рівняння Шредінгера [88, лема 2]. Теорема Лі виявилася особливо ефективною при класифікації ліївських симетрій (1+1)-вимірних узагальнених рівнянь Клейна–Ґордона в конусних змінних, оскільки її можна використовувати як відносно змінної t, так і відносно змінної x; див. наслідок 12 і параграф 4 у роботі [46] або параграф 1.3.

У рамках класичного підходу Лі першим кроком для розв'язання задачі групової класифікації для класу $\mathcal{K}$ (систем) диференціальних рівнянь є побудова групи еквівалентності цього класу. Більш того, як правило знаходять не усю групу еквівалентності, а лише її інфінітезимальну складову, що відповідає алгебрі еквівалентності класу $\mathcal{K}$, таким чином, опускаючи дискретні перетворення еквівалентності. У той же час, опис групоїда еквівалентності класу $\mathcal{K}$ дає набагато більше інформації про трансформаційні властивості класу $\mathcal{K}$, ніж група еквівалентності, і дозволяє правильно обрати оптимальний шлях класифікації лiївських симетрій систем із класу $\mathcal{K}$.

На відміну від класичного підходу Лі, першим кроком розгляду є не вичерпний опис групи еквівалентності класу $\bar{\mathcal{L}}$, а калібрування довільних елементів класу за допомогою перетворення еквівалентності. Використано очевидний факт, що будь-яке перетворення вигляду (2.21) є перетворенням еквівалентності класу $\bar{\mathcal{L}}$, що встановлюємо прямою перевіркою. Це дозволяє поетапно виконувати калібрування $\boldsymbol{f} = \mathbf{0}$, $A = 0$ та $\operatorname{tr} B = 0$. Після кожного з перших двох калібрувань виключаємо $\boldsymbol{f}$, а потім A з набору довільних елементів виокремлених підкласів, тобто репараметризуючи їх у класи, які є більш зручними для дослідження. У результаті калібрування та репараметризації будуємо ланцюжок класів $\bar{\mathcal{L}} \hookleftarrow \mathcal{L} \hookleftarrow \mathcal{L}' \supset \mathcal{L}''$.

Виявилося, що найбільш зручним для обчислення допустимих перетворень є клас $\mathcal{L}'$, набір довільних елементів якого — єдина матрично-значна функція V. Виокремлено підклас $\mathcal{L}'_0$ класу $\mathcal{L}'$ за допомогою обмеження, що матриця довільних елементів V є пропорційною до одиничної матриці E з коефіцієнтом пропорційності, що залежить від часу. Це обмеження можна записати як систему алгебраїчних рівнянь відносно елементів матриці V. Недиференціальна природа обмеження призводить до певних ускладнень при обчисленні та представленні перетворень еквівалентності для підкласу $\mathcal{L}'_0$, див. додаток А в роботі [47]. Пізніше показано, що підклас $\mathcal{L}'_0$ співпадає з $G^{\sim}_{\mathcal{L}'}$-орбітою елементарної системи $\boldsymbol{x}_{tt} = \mathbf{0}$, а отже, це сингулярна частина класу $\mathcal{L}'$, тоді як її доповнення $\mathcal{L}'_1$ є регулярною частиною. Далі побудовано групоїди еквівалентності та групи еквівалентності класу $\mathcal{L}'$, а також його підкласів $\mathcal{L}'_0$ та $\mathcal{L}'_1$. Група еквівалентності підкласу $\mathcal{L}'_1$ та канонічна суттєва група еквівалентності підкласу $\mathcal{L}'_0$ співпадають із групою еквівалентності $G^{\sim}_{\mathcal{L}'}$ усього класу $\mathcal{L}'$. Розбиття $\mathcal{L}' = \mathcal{L}'_0 \sqcup \mathcal{L}'_1$ класу $\mathcal{L}'$ індукує розбиття

$$\mathcal{G}^{\sim}_{\mathcal{L}'} = \mathcal{G}^{\sim}_{\mathcal{L}'_0} \sqcup \mathcal{G}^{\sim}_{\mathcal{L}'_1}$$

його групоїда еквівалентності $\mathcal{G}^{\sim}_{\mathcal{L}'}$. Як і регулярний підклас класу $\mathcal{L}'$, підклас $\mathcal{L}'_1$ є однорідно напівнормалізованим відносно лінійної суперпозиції розв'язків. Групоїд еквівалентності $\mathcal{G}^{\sim}_{\mathcal{L}'_0}$ класу $\mathcal{L}'_0$ є добутком Фробеніуса вертексної групи $\mathcal{G}_0$ елементарної системи L'_0 та обмеження групоїда дії групи $G^{\sim}_{\mathcal{L}'}$ на підклас $\mathcal{L}'_0$, що є окремим випадком напівнормалізованості у звичайному сенсі. Результати, отримані для класу $\mathcal{L}'$, розширено на класи $\bar{\mathcal{L}}$ та $\mathcal{L}$ за допомогою відображень цих класів у клас $\mathcal{L}'$, які визначено вищезазначеними калібруваннями та репараметризаціями. Аналогічні результати для класу $\mathcal{L}''$ отримано за допомогою модифікації відповідних доведень для класу $\mathcal{L}'$ з врахуванням обмеження $\operatorname{tr} V = 0$, яке виокремлює $\mathcal{L}''$ як підклас класу $\mathcal{L}'$. Оскільки обмеження на V, які пов'язані з $\mathcal{L}''$, $\mathcal{L}''_0$ та $\mathcal{L}''_1$ як підкласами класу $\mathcal{L}'$, є алгебраїчними, тобто недиференціальної природи, то розгляд суттєвих груп еквівалентності замість усіх груп еквівалентності є релевантним для цих підкласів як і для $\mathcal{L}'_0$. Алгебри еквівалентності відповідних типів для всіх вищенаведених класів легко обчислити як множини векторних полів (на асоційованому просторі незалежних та залежних змінних і довільних елементів), які є інфінітезимальними генераторами однопараметричних підгруп відповідних груп еквівалентності.

З огляду на розбиття відповідних групоїдів еквівалентності розв'язання задачі групової класифікації для кожного класу з ланцюжка $\bar{\mathcal{L}} \hookleftarrow \mathcal{L} \hookleftarrow \mathcal{L}' \supset \mathcal{L}''$ можна розщепити на дві незалежні частини — для їх сингулярних і регулярних підкласів. Задача групової класифікації сингулярного підкласу є тривіальною, а її розв'язок визначають елементарною системою з максимальною алгеброю ліївської інваріантності $\mathfrak{g}_0$, яку представлено в (2.24). Для систем із регулярного підкласу поняття суттєвої алгебри ліївської інваріантності є добре визначеним і тому достатньо класифікувати такі алгебри замість відповідних максимальних алгебр ліївської інваріантності. Клас $\mathcal{L}'_1$ є оптимальним як для проведення класифікації так і для представлення остаточних результатів класифікації. З огляду на однорідну напівнормалізацію всіх регулярних підкласів та узгодженість їх груп еквівалентності, результати класифікації для класу $\mathcal{L}'_1$ можна також легко поширити на класи $\bar{\mathcal{L}}_1$, $\mathcal{L}_1$ та $\mathcal{L}''_1$, а суттєві алгебри ліївської інваріантності систем для кожного з наведених класів будуть регулярними.

Використовуючи еквіваріантність проєкції π з $\mathbb{F}_t \times \mathbb{F}^n_{\boldsymbol{x}}$ на $\mathbb{F}_t$ під дією групи $G^{\sim}_{\mathcal{L}'}$, введено $G^{\sim}_{\mathcal{L}'}$-інваріантну цілочисельну невід'ємну характеристику k_V для максимальної $\mathfrak{g}_V$ та суттєвої $\mathfrak{g}^{\rm ess}_V$ алгебр ліївської інваріантності систем L'_V з класу $\mathcal{L}'_1$,

$$k = k_V := \dim \pi_* \mathfrak{g}_V = \dim \pi_* \mathfrak{g}^{\rm ess}_V.$$

Верхнє можливе значення 3 для k можна легко знайти за допомогою відображення $\mathcal{L}'_1$ на $\mathcal{L}''_1$ за допомогою сім'ї перетворень еквівалентності, див. наслідок 2.17. Оскільки для будь-якої системи L'_V, $\pi_* \mathfrak{g}^{\rm ess}_V$ є скінченновимірною алгеброю Лі векторних полів на t-прямій, то тут можна ефективно застосовувати теорему Лі про такі алгебри для перебору можливих t-проєкцій суттєвих алгебр ліївської інваріантності систем із класу $\mathcal{L}'_1$ з точністю до $G^{\sim}_{\mathcal{L}'}$-еквівалентності. Окремо досліджено кожен із випадків $k = 0$, $k = 1$ та $k = 2$, описано структуру відповідних суттєвих алгебр ліївської інваріантності та запропоновано методи їх класифікації. Доведено, що k не може дорівнювати трьом. Для повної групової класифікації для фіксованого n необхідна класифікація підалгебр алгебри $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{F})$. Повні списки $\mathrm{SL}(n, \mathbb{F})$-нееквівалентних підалгебр алгебри $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{F})$ побудовано лише для $n \in \{2,3\}$. Використовуючи добре відомий список для $n=2$, проведено повну групову класифікацію нормальних лінійних систем звичайних диференціальних рівнянь другого порядку з двома залежними змінними. Навіть ця специфічна задача вичерпно і належним чином не вивчена в літературі, незважаючи на низку робіт, де ця задача раніше розглядалася. Список Павла Вінтерніца [136] підалгебр алгебри $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{F})$ є основою аналогічної класифікації у випадку трьох залежних змінних. Проте ця класифікація є нетривіальною та громіздкою і потребує окремого розгляду. Класифікація підалгебр алгебри $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{F})$ для довільних значень n є дикою задачею, а тому дикою задачею є повна класифікація ліївських симетрій нормальних лінійних систем звичайних диференціальних рівнянь другого порядку з довільною кількістю залежних змінних.

Для кожного класу в ланцюжку $\bar{\mathcal{L}} \hookleftarrow \mathcal{L} \hookleftarrow \mathcal{L}' \supset \mathcal{L}''$ оцінки розмірностей максимальних алгебр ліївської інваріантності систем із його регулярного підкласу в теоремі 2.29 можна об'єднати з описом його сингулярного підкласу в параграфі 2.1 та з обговоренням, що пов'язане з рівнянням (2.24) у твердженні про розмірності максимальних алгебр ліївської інваріантності систем із усього класу.

Теорема 2.42. *Для будь-якої системи з класу $\bar{\mathcal{L}}$ (відповідно $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}'$ або $\mathcal{L}''$) розмірність її максимальної алгебри ліївської інваріантності більша або дорівнює $2n+1$ і менша або дорівнює $(n+2)^2-1$. Нижня межа є найбільшою і справедлива для загальної системи класу. Верхня межа є найменшою і вона має місце лише для систем із орбіти елементарної системи $\boldsymbol{x}_{tt}=\mathbf{0}$ відносно відповідної групи еквівалентності. Підмаксимальну розмірність n^2+4, яка є максимальною для систем із доповнення до вищезазначеної орбіти, можна отримати лише для систем, які еквівалентні системі (2.3) відносно відповідної групи еквівалентності.*

Розроблено симетрійні підходи для пониження порядку та інтегрування нормальних лінійних систем n звичайних диференціальних рівнянь другого порядку. Ці підходи суттєво залучають явний опис перетворень еквівалентності між такими системами. Друга необхідна складова для інтегрування систем із $G^{\sim}_{\bar{\mathcal{L}}}$-орбіти $\bar{\mathcal{L}}_0$ елементарної системи $\boldsymbol{x}_{tt} = \mathbf{0}$, що є обмеженням на θ для виокремлення $\bar{\mathcal{L}}_0$ як підклас класу $\bar{\mathcal{L}}$, є добре відомою. Необхідною передумовою для використання симетрійних підходів для пониження порядку та інтегрування системи $\bar{L}_\theta$ з підкласу $\bar{\mathcal{L}}_1$, який є доповненням до підкласу $\bar{\mathcal{L}}_0$ у класі $\bar{\mathcal{L}}$, є те, що система $\bar{L}_\theta$ допускає векторні поля ліївських симетрій із ненульовими t-компонентами і, більш того, ці векторні поля є відомими. При додаткових умовах на такі векторні поля відповідні системи можна повністю інтегрувати лише за допомогою алгебраїчних операцій та квадратур.

Хоча клас $\bar{\mathcal{L}} =: \bar{\mathcal{L}}_{2,n}$ є сингулярним класом серед класів $\bar{\mathcal{L}}_{r,n}$ нормальних систем n звичайних диференціальних рівнянь того ж порядку $r \in \{2, 3, \dots\}$ внаслідок сингулярності елементарної системи $\mathrm{d}^r\boldsymbol{x}/\mathrm{d}t^r = \mathbf{0}$ з $r = 2$, але результати дисертації можна поширити на випадок довільного значення r, див. відповідні обговорення в параграфі 10 роботи [47]. Також в літературі інтенсивно досліджують симетрійні властивості класу $\bar{\mathcal{L}}_{r,n}$, принаймні для $(r, n) = (3, 2)$, аналогічно до того як це було зроблено для $(r, n) = (2, 2)$ в параграфі 2.8. Однак класифікація ліївських симетрій систем звичайних диференціальних рівнянь змішаного порядку є повністю іншою задачею, див. [61].

ВИСНОВКИ

У дисертації проведено розширений симетрійний аналіз класів (1+1)-вимірних нелінійних узагальнених рівнянь Клейна–Ґордона та нормальних лінійних систем звичайних диференціальних рівнянь другого порядку. Основними результати дисертаційного дослідження є:

- Узагальнюючи результат Софуса Лі, доведено, що будь-яке контактне перетворення рівняння з класу (1+1)-вимірних нелінійних узагальнених рівнянь Клейна–Ґордона є першим продовженням його точкового перетворення; показано, що цей клас є нормалізованим відносно точкових перетворень, і побудовано його групу еквівалентності та відповідну алгебру еквівалентності.

- Проведено повну групову класифікацію (1+1)-вимірних нелінійних узагальнених рівнянь Клейна–Ґордона з точністю до $G^{\sim}$-еквівалентності, отримані результати представлено у вигляді діаграми Хассе. У процедурі класифікації використано специфічну структуру алгебри $\mathfrak{g}^{\sim}$ для подвійного застосування класичної теореми Лі про реалізації алгебр Лі векторними полями на прямій.

- Запропоновано низку цілочисельних характеристик, що розрізняють випадки розширень ліївських симетрій у класі (1+1)-вимірних нелінійних узагальнених рівнянь Клейна–Ґордона, та вичерпно описано структуру частково впорядкованої множини $G^{\sim}$-нееквівалентних розширень ліївської симетрії у цьому класі.

- Описано допустимі перетворення для класу нормальних лінійних систем звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, побудовано групи еквівалентності та групоїди еквівалентності розглядуваного класу та його підкласів. Показано, що групові класифікації класу лінійних систем звичайних диференціальних рівнянь другого порядку та його каліброваних підкласів можна звести до групових класифікацій їх сингулярних та регулярних частин.

- Розвинуто два шляхи класифікації суттєвих розширень ліївської симетрії у регулярних частинах класу лінійних систем звичайних диференціальних рівнянь другого порядку за допомогою алгебраїчного методу. Досліджено структуру суттєвих алгебр ліївської інваріантності систем із регулярних частин класу лінійних систем звичайних диференціальних рівнянь другого порядку.
- Запропоновано методи пониження порядку та інтегрування лінійних систем звичайних диференціальних рівнянь другого порядку на основі використання відомих ліївських симетрій або перетворень еквівалентності.
- Виконано повну групову класифікацію класу лінійних систем звичайних диференціальних рівнянь другого порядку у випадку двох залежних змінних, яка суттєво спрощує та покращує попередньо відомі результати.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Аминова А.В., Аминов Н.А.-М., Проективная геометрия систем дифференциальных уравнений второго порядка, *Матем. сб.* **197** (2006), № 7, 3–28.
2. Аминова А.В., Аминов Н.А.-М., Проективно-геометрическая теория систем дифференциальных уравнений второго порядка: теоремы выпрямления и симметрии, *Матем. сб.* **201** (2010), № 5, 3–16.
3. Ахатов И.Ш., Газизов Р.К., Ибрагимов Н.Х., Нелокальные симметрии. Эвристический подход, *Итоги науки и техн.*, т. 34, ВИНИТИ, Москва, 1989, 3–83.
4. Беркович Л.М., Факторизация и преобразования дифференциальных уравнений. Методы и приложения, РХД, Москва, 2002.
5. Бойко В.М., Узагальнені оператори Казіміра, сингулярні модулі редукції та симетрії диференціальних рівнянь: дис. … док. фіз.-мат. наук, Київ, Інститут математики НАН України, 2017, 338 с., https://www.imath.kiev.ua/~boyko/BoykoThesis.pdf.
6. Бойко В.М., Локазюк О.В., (1+1)-вимірні нелінійні еволюційні рівняння другого порядку з максимальними ліївськими симетріями, *Збірник праць Ін-ту мат. НАН України* **16** (2019), № 1, 16–21, http://trim.imath.kiev.ua/index.php/trim/article/view/364.
7. Бойко В.М., Локазюк О.В., Попович Р.О., Реалізації алгебр Лі на прямій та групова класифікація (1+1)-вимірних узагальнених нелінійних рівнянь Клейна–Ґордона, Тези доповідей Міжнародного онлайн-семінару з нагоди 85-ї річниці від народження Вільгельма Фущича, Київ, Інститут математики НАН України, 2021, https://www.imath.kiev.ua/~appmath/Abstracts2021/Lokaziuk.html.

8. Бойко В.М., Попович В.О., Групова класифікація галілей-інваріантних рівнянь високого порядку, *Праці Ін-ту мат. НАН України* **36** (2001), 45–50.

9. Ванєєва О.О., Групоїди еквівалентності в задачах групової класифікації: дис. … док. фіз.-мат. наук, Київ, Інститут математики НАН України, 2020, 399 с., https://events.imath.kiev.ua/event/476/attachments/27/68/pdf.

10. Жибер А.В., Шабат А.Б., Уравнение Клейна–Гордона с нетривиальной группой, *Докл. Акад. наук СССР* **247** (1979), 1103–1107.

11. Ибрагимов Н.Х., Групповой анализ обыкновенных дифференциальных уравнений и принцип инвариантности в математической физике (к 150-летию со дня рождения Софуса Ли), *Успехи мат. наук* **47** (1992), № 4, 83–144.

12. Ічанська Н.В., Еволюційні рівняння та системи інваріантні відносно конформної алгебри, *Збірник праць Ін-ту мат. НАН України* **3** (2006), № 2, 159–169.

13. Локазюк О.В., Групова класифікація та точні розв'язки рівнянь типу нелінійної теплопровідності, Тези доповідей Міжнародного семінару до 40-річчя від створення відділу прикладних досліджень, Київ, Інститут математики НАН України, 2018, https://www.imath.kiev.ua/~appmath/Abstracts2018/Lokazyuk_ua.html.

14. Локазюк О.В., Нелінійні еволюційні рівняння другого порядку з алгебрами ліївських симетрій максимальної розмірності, Тези доповідей Міжнародної конференції молодих математиків, Київ, Інститут математики НАН України, 2019, С. 62.

15. Локазюк О.В., Контактні перетворення нелінійних еволюційних рівнянь з максимальними ліївськими симетріями, Тези доповідей V Міжнародної науково-практичної конференції "Інформаційні тех-

нології в освіті, науці і техніці" ІТОНТ, Черкаси, Черкаський державний технологічний університет, 2020, С. 100–102.

16. Локазюк О.В., Групова класифікація (1+1)-вимірних нелінійних узагальнених рівнянь Клейна–Ґордона, Тези доповідей Міжнародної конференції молодих математиків, Київ, Інститут математики НАН України, 2021, С. 68, https://www.imath.kiev.ua/~young/youngconf2021/Abstracts_2021.pdf.
17. Локазюк О.В., Ліївські симетрії лінійних систем двох звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, *Доп. НАН України* (2021), № 5, 3–11.
18. Локазюк О.В., Ліївські симетрії лінійних систем двох диференціальних рівнянь другого порядку з залежними від часу коефіцієнтами, Тези доповідей Міжнародної конференції молодих вчених "Підстригачівські читання – 2021", Львів, Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2021, http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2021/abstracts/Lokazyuk.pdf.
19. Локазюк О.В., Групи еквівалентності лінійних систем звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, Тези доповідей Міжнародної конференції молодих вчених "Підстригачівські читання – 2022", Львів, Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2022, http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2022/abstracts/Lokaziuk.pdf.
20. Локазюк О.В., Пониження порядку та інтегрування нормальних лінійних систем звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, Тези доповідей Міжнародної наукової конференції "Прикладна математика та інформаційні технології – 2022", Чернівці, Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича, 2022, С. 70–71, http://www.amit60.fmi.org.ua/?page=materials.

21. Магадеев Б.А., О групповой классификации нелинейных эволюционных уравнений, *Алгебра анализ* **5** (1993), № 2, 141–156.

22. Нестеренко М.О., Реалізації та контракції алгебр Лі, орбіт-функції та квазікристали: дис. … док. фіз.-мат. наук, Київ, Інститут математики НАН України, 2021, 327 с., https://events.imath.kiev.ua/event/753/attachments/59/177/dis_Nesterenko.pdf.

23. Нікітін А.Г., Попович Р.О. Групова класифікація нелінійних рівнянь Шрьодінгера, *Укр. мат. журн.* **53** (2001), 1053–1060, arXiv:math-ph/0301009.

24. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, Наука, Москва, 1978, 400 с.

25. Опанасенко С.В., Узагальнені групи еквівалентності та розширений симетрійний аналіз диференціальних рівнянь: дис. … канд. фіз.-мат. наук, Київ, Інститут математики НАН України, 2020, 196 с., https://events.imath.kiev.ua/event/622/attachments/32/95/pdf.

26. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Справочник по нелинейным уравнениям математической физики. Точные решения, Физматлит, Москва, 2002, 432 с.

27. Попович Р.О., Класифікаційні задачі групового аналізу диференціальних рівнянь: дис. … док. фіз.-мат. наук, Київ, Інститут математики НАН України, 2009, 396 с., https://www.imath.kiev.ua/~rop/DScThesis.pdf.

28. Почекета О.А., Розширений груповий аналіз узагальнених рівнянь Бюргерса: дис. … канд. фіз.-мат. наук, Київ, Інститут математики НАН України, 2016, 159 с., https://imath.kiev.ua/zahyst/files/30/diss.pdf

29. Сергейчук В.В., Галинский Д.В., Классификация пар линейных операторов в четырехмерном векторном пространстве, *Бесконечные*

группы и примыкающие алгебраические структуры, Киев, Институт математики НАН Украины, 1993, 413–430.

30. Соколов В.В., О симметриях эволюционных уравнений, *Усп. мат. наук* **43** (1988), 133–163.

31. Фущич В.І., Бойко В.М., Галілей-інваріантні рівняння типу Бюргерса та Кортевега–де Фріза високого порядку, *Укр. мат. журн.* **48** (1996), 1589–1601.

32. Шаповал Н.М., Група точкових симетрій системи вільних рівнянь другого порядку, *Доп. НАН України* (2014), № 6, 32–36.

33. Bagderina Yu.Yu., Linearization criteria for a system of two second-order ordinary differential equations, *J. Phys. A: Math. Theor.* **43** (2010), 465201, 14 pp.

34. Basarab-Horwath P., Lahno V., Zhdanov R., The structure of Lie algebras and the classification problem for partial differential equations, *Acta Appl. Math.* **69** (2001), 43–94, arXiv:math-ph/0005013.

35. Belitskii G., Normal forms in matrix spaces, *Integral Equations Operator Theory* **38** (2000), 251–283.

36. Belitskii G.R., Sergeichuk V.V., Complexity of matrix problems, *Linear Algebra Appl.* **361** (2003), 203–222.

37. Bihlo A., Dos Santos Cardoso-Bihlo E., Popovych R.O., Complete group classification of a class of nonlinear wave equations, *J. Math. Phys.* **53** (2012), 123515, arXiv:1106.4801.

38. Bihlo A., Poltavets N., Popovych R.O., Lie symmetries of two-dimensional shallow water equations with variable bottom topography, *Chaos* **30** (2020), 073132, arXiv:1911.02097.

39. Bihlo A., Popovych R.O., Group classification of linear evolution equations, *J. Math. Anal. Appl.* **448** (2017), 982–2015, arXiv:1605.09251.

40. Bluman G.W., Anco S.C., Symmetry and integration methods for differential equations, *Applied Mathematical Sciences*, vol. 154, Springer-Verlag, New York, 2002.

41. Bluman G.W., Cheviakov A.F., Anco S.C., Application of symmetry methods to partial differential equations, Springer, New York, 2010.

42. Bluman G., Kumei S., Symmetries and differential equations, Springer, New York, 1989.

43. Bluman G.W., Reid G.J., Kumei S., New classes of symmetries for partial differential equations, *J. Math. Phys.* **29** (1988), 806–811.

44. Boyko V.M., On new generalizations of the Burgers and Korteweg–de Vries equations, in Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics (Kyiv, 1997), Inst. Math. of NAS of Ukraine, Kiev, 1997, Vol. 1, 122–129.

45. Boyko V.M., Kunzinger M., Popovych R.O., Singular reduction modules of differential equations, *J. Math. Phys.* **57** (2016), 101503, 34 pp., arXiv:1201.3223.

46. Boyko V.M., Lokaziuk O.V., Popovych R.O., Realizations of Lie algebras on the line and the new group classification of (1+1)-dimensional generalized nonlinear Klein–Gordon equations, *Anal. Math. Phys.* **11** (2021), 127, 38 pp., arXiv:2008.05460.

47. Boyko V.M., Lokaziuk O.V., Popovych R.O., Admissible transformations and Lie symmetries of linear systems of second-order ordinary differential equations, arXiv:2105.05139, 2021, 49 pp.

48. Boyko V.M., Popovych R.O., Shapoval N.M., Lie symmetries of systems of second-order linear ordinary differential equations with constant coefficients, *J. Math. Anal. Appl.* **397** (2013), 434–440, arXiv:1203.0387.

49. Boyko V.M., Popovych R.O., Shapoval N.M., Equivalence groupoids of classes of linear ordinary differential equations and their group classification, *J. Phys. Conf. Ser.* **621** (2015), 012001, 17 pp., for extended and revised version see arXiv:1403.6062.

50. Burde D., Steinhoff C., Classification of orbit closures of 4-dimensional complex Lie algebras, *J. Algebra* **214** (1999), 729–739.

51. Calogero F., Classical many-body problems amenable to exact treatments. (Solvable and/or integrable and/or linearizable...) in one-, two- and three-dimensional space, *Lecture Notes in Physics. New Series m: Monographs*, vol. 66, Springer-Verlag, Berlin, 2001, xviii+749 pp.

52. Calogero F., Zeros of polynomials and solvable nonlinear evolution equations, Cambridge University Press, Cambridge, 2018, x+168 pp.

53. Campoamor-Stursberg R., Systems of second-order linear ODE's with constant coefficients and their symmetries, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **16** (2011), 3015–3023.

54. Campoamor-Stursberg R., Systems of second-order linear ODE's with constant coefficients and their symmetries. II. The case of non-diagonal coefficient matrices, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **17** (2012), 1178–1193.

55. Casey S., Dunajski M., Tod P., Twistor geometry of a pair of second order ODEs, *Commun. Math. Phys.* **321** (2013), 681–701, arXiv:1203.4158.

56. Clarkson P.A., McLeod J.B., Olver P.J., Ramani R., Integrability of Klein–Gordon equations, *SIAM J. Math. Anal.* **17** (1986), 798–802.

57. Dodd R.K., Bullough R.K., Polynomial conserved densities for the sine-Gordon equations, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A* **352** (1977), 481–503.

58. Dodd R.K., Eilbeck J.C., Gibbon J.D., Morris H.C., Solitons and nonlinear wave equations, Academic Press, London – New York, 1982, x+630 pp.

59. Dos Santos Cardoso-Bihlo E., Bihlo A., Popovych R.O., Enhanced preliminary group classification of a class of generalized diffusion equations, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* **16** (2011), 3622–3638, arXiv:1012.0297.

60. Doubrov B., Medvedev A., Fundamental invariants of systems of ODEs of higher order, *Differential Geom. Appl.* **35** (2014), suppl., 291–313, arXiv:1312.0574.

61. Doubrov B., Zelenko I., Symmetries of trivial systems of ODEs of mixed order, *Differential Geom. Appl.* **33** (2014), suppl., 123–143, arXiv:1302.7119.

62. Fels M.E., Some applications of Cartan's method of equivalence to the geometric study of ordinary and partial differential equations, Ph.D. Thesis, McGill University, Montréal, 1993, vii+104 pp.

63. Fels M.E., The equivalence problem for systems of second-order ordinary differential equations, *Proc. London Math. Soc. (3)* **71** (1995), 221–240.

64. Friedland S., Simultaneous similarity of matrices, *Adv. Math.* **50** (1983), 189–265.

65. Fox D., Goertsches O., Higher-order conservation laws for the nonlinear Poisson equation via characteristic cohomology, *Selecta Math. (N.S.)* **17** (2011), 795–831, arXiv:0906.3143.

66. Fushchich W.I., Nikitin A.G., Symmetries of equations of quantum mechanics, Allerton Press, Inc., New York, 1994, xvi+465 pp.

67. Fushchich W.I., Shtelen W.M., Serov N.I., Symmetry analysis and exact solutions of equations of nonlinear mathematical physics, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1993, xxiv+435 pp.

68. Gagnon L., Winternitz P., Symmetry classes of variable coefficient nonlinear Schrödinger equations, *J. Phys. A: Math. Gen.* **26** (1993), 7061–7076.

69. Gantmacher F.R., The theory of matrices, Vols. 1, 2, Chelsea Publishing Co., New York, 1959, Vol. 1, x+374 pp., Vol. 2, ix+276 pp.

70. Gazeau J.P., Winternitz P., Symmetries of variable coefficient Korteweg–de Vries equations, *J. Math. Phys.* **33** (1992), 4087–4102.

71. Gazizov R.K., Potential filtration equation, in CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations, Vol. 1, Boca Raton, Chemical Rubber Company, 1994, 131–132.

72. González-Gascón F., González-López A., Symmetries of differential equations. IV, *J. Math. Phys.* **24** (1983), 2006–2021.

73. González-Gascón F., González-López A., New results concerning systems of differential equations and their symmetry vectors, *Phys. Lett. A* **108** (1985), 319–321; Errata: *Phys. Lett. A* **109** (1985), 465.

74. González-López A., Symmetries of linear systems of second-order ordinary differential equations, *J. Math. Phys.* **29** (1988), 1097–1105.

75. Gorringe V.M., Leach P.G.L., Lie point symmetries for systems of second order linear ordinary differential equations, *Quaestiones Math.* **11** (1988), 95–117.

76. Grundland A.M., Infeld E., A family of nonlinear Klein–Gordon equations and their solutions, *J. Math. Phys.* **33** (1992), 2498–2503.

77. Grunewald F., O'Halloran J., Varieties of nilpotent Lie algebras of dimension less than six, *J. Algebra* **112** (1988), 315–325.

78. Güngör F., Lahno V.I., Zhdanov R.Z., Symmetry classification of KdV-type nonlinear evolution equations, *J. Math. Phys.* **45** (2004), 2280–2313, arXiv:nlin/0201063.

79. Ibragimov N.H., Transformation groups applied to mathematical physics, *Mathematics and its Applications (Soviet Series)*, D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1985, xv+394 pp.

80. Ibragimov N.H., Elementary Lie group analysis and ordinary differential equations, *Wiley Series in Mathematical Methods in Practice*, vol. 4, John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 1999, xviii+347 pp.

81. Ibragimov N.H., Torrisi M., Valenti A., Preliminary group classification of equations $v_{tt} = f(x, v_x)v_{xx} + g(x, v_x)$, *J. Math. Phys.* **32** (1991), 2988–2995.

82. Ivanova N.M., Popovych R.O., Sophocleous C., Group analysis of variable coefficient diffusion–convection equations. II. Contractions and exact solutions, arXiv:0710.3049.

83. Jacobson N., Lie algebras, Dover Publications, Inc., New York, 1962, ix+331 pp.

84. Kingston J.G., Sophocleous C., On form-preserving point transformations of partial differential equations, *J. Phys. A: Math. Gen.* **31** (1998), 1597–1619.

85. Kruglikov B., Privite communication, 2021.

86. Kruglikov B., The D., The gap phenomenon in parabolic geometries, *J. Reine Angew. Math.* **723** (2017), 153–215, arXiv:1303.1307.

87. Kunzinger M., Popovych R.O., Singular reduction operators in two dimensions, *J. Phys. A: Math. Theor.* **41** (2008), 505201, 24 pp., arXiv:0808.3577.

88. Kurujyibwami C., Basarab-Horwath P., Popovych R.O., Algebraic method for group classification of (1+1)-dimensional linear Schrödinger equations, *Acta Appl. Math.* **157** (2018), 171–203, arXiv:1607.04118.

89. Kurujyibwami C., Popovych R.O., Equivalence groupoids and group classification of multidimensional nonlinear Schrödinger equations, *J. Math. Anal. Appl.* **491** (2020), 124271, 35 pp., arXiv:2003.02781.

90. Kushner A.G., Classification of Monge–Ampère equations, in Differential equations: geometry, symmetries and integrability, *Abel Symp.*, vol. 5, Springer, Berlin, 2009, 223–256.

91. Kushner A.G., On contact equivalence of Monge–Ampère equations to linear equations with constant coefficients, *Acta Appl. Math.* **109** (2010), 197–210.

92. Lahno V., Zhdanov R., Group classification of nonlinear wave equations, *J. Math. Phys.* **46** (2005), 053301, 37 pp.

93. Lahno V., Zhdanov R., Magda O., Group classification and exact solutions of nonlinear wave equations, *Acta Appl. Math.* **91** (2006), 253–313, arXiv:nlin.SI/0405069.

94. Lie S., Theorie der Transformationsgruppen I, *Math. Ann.* **16** (1880), 441–528.

95. Lie S., Diskussion der Differentialgleichung $d^2z/dx\,dy = F(z)$, *Arch. for Math.* **6** (1881), 112–124. (Reprinted in: Lie S., *Gesammelte Abhandlungen*, Vol. 3, B.G. Teubner, Leipzig and H. Aschehoug & Co, Kristiania, 469–478.)

96. Lie S., Über die Integration durch bestimmte Integrale von einer Klasse linearer partieller Differentialgleichungen, *Arch. for Math.* **6** (1881), 328–368. (Translation by N.H. Ibragimov: S. Lie, On integration of a class of linear partial differential equations by means of definite integrals, CRC Handbook of Lie group analysis of differential equations. Vol. 2. Applications in engineering and physical sciences, CRC Press, Boca Raton, FL, 1995, 473–508.)

97. Lie S., Theory of Transformation Groups, Vol. I, Teubner, Leipzig, 1888, x+645 s.

98. Lie S., Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen, B.G. Teubner, Leipzig, 1891, xiv+568 s.

99. Lie S., Vorlesungen über continuierliche Gruppen mit geometrischen und anderen Adwendungen, Teubner, Leipzig, 1893, xii+810 s.

100. Mahomed F.M., Symmetry group classification of ordinary differential equations: survey of some results, *Math. Methods Appl. Sci.* **30** (2007), 1995–2012.

101. Markus L., Group theory and differential equations, Lecture Notes, University of Minnesota, 1960, 227 pp.

102. McLeod J.B., Olver P.J., The connection between partial differential equations soluble by inverse scattering and ordinary differential equations of Painlevé type, *SIAM J. Math. Anal.* **14** (1983), 488–506.

103. Medvedev A., Third order ODEs systems and its characteristic connections, *SIGMA* **7** (2011), 076, 15 pp., arXiv:1104.0965.

104. Meleshko S., Comment on "Symmetry breaking of systems of linear second-order ordinary differential equations with constant coefficients", *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **16** (2011), 3447–3450.

105. Meleshko S.V., Moyo S., Oguis G.F., On the group classification of systems of two linear second-order ordinary differential equations with constant coefficients, *J. Math. Anal. Appl.* **410** (2014), 341–347.

106. Merker J., Characterization of the Newtonian free particle system in $m \geqslant 2$ dependent variables, *Acta Appl. Math.* **92** (2006), 125–207, arXiv:math/0411165.

107. Miller W. Jr., Symmetry and separation of variables, *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, vol. 4, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, MA, 1977, xxx+285 pp.

108. Mkhize T.G., Moyo S., Meleshko S.V., Complete group classification of systems of two linear second-order ordinary differential equations: the algebraic approach, *Math. Methods Appl. Sci.* **38** (2015), 1824–1837.

109. Moyo S., Meleshko S.V., Oguis G.F., Complete group classification of systems of two linear second-order ordinary differential equations, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **18** (2013), 2972–2983.

110. Momoniat E., Mahomed F.M., The existence of contact transformations for evolution-type equations, *J. Phys. A: Math. Gen.* **32** (1999), 8721–8730.

111. Nesterenko M., Popovych R.O., Contractions of low-dimensional Lie algebras, *J. Math. Phys* **47** (2006), 123515, 45 pp., arXiv:math-ph/0608018.

112. Olver P.J., Application of Lie groups to differential equations, Springer, New York, 1993, xxviii+513 pp.

113. Olver P.J., Equivalence, invariants, and symmetry, Cambridge University Press, Cambridge, 1995, xvi+525 pp.

114. Opanasenko S., Bihlo A., Popovych R.O., Group analysis of general Burgers–Korteweg–de Vries equations, *J. Math. Phys.* **58** (2017), 081511, 37 pp., arXiv:1703.06932.

115. Opanasenko S., Boyko V., Popovych R.O., Enhanced group classification of nonlinear diffusion–reaction equations with gradient-dependent diffusion, *J. Math. Anal. Appl.* **484** (2020), 123739, 30 pp., arXiv:1804.08776.

116. Patera J., Winternitz P., Subalgebras of real three- and four-dimensional Lie algebras, *J. Math. Phys.* **18** (1977), 1449–1455.

117. Polyanin A.D., Zaitsev V.F., Handbook of nonlinear partial differential equations, 2nd ed., Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2012, xxxvi+876 pp.

118. Popovych R.O., Classification of admissible transformations of differential equations, in *Collection of Works of Institute of Mathematics*, vol. 3, Institute of Mathematics, Kyiv, 2006, 239–254.

119. Popovych R.O., Point and contact equivalence groupoids of two-dimensional quasilinear hyperbolic equations, *Appl. Math. Lett.* **116** (2021), 107068, 8 pp., arXiv:2009.07383.

120. Popovych R.O., Bihlo A., Symmetry preserving parameterization schemes, *J. Math. Phys.* **53** (2012), 073102, 36 pp., arXiv:1010.3010.

121. Popovych R.O., Boyko V.M., Nesterenko M.O., Lutfullin M.W., Realizations of real low-dimensional Lie algebras, *J. Phys. A: Math. Gen.* **36** (2003), 7337–7360, arXiv:math-ph/0301029.

122. Popovych R.O., Eshraghi H., Admissible point transformations of nonlinear Schrödinger equations, in Proceedings of 10th International Conference in MOdern GRoup ANalysis (MOGRAN X) (Larnaca, Cyprus, 2004), University of Cyprus, Nicosia, 2005, 167–174.

123. Popovych R.O., Kunzinger M., Eshraghi H., Admissible transformations and normalized classes of nonlinear Schrödinger equations, *Acta Appl. Math.* **109** (2010), 315–359, arXiv:math-ph/0611061.

124. Popovych R.O., Kunzinger M., Ivanova N.M., Conservation laws and potential symmetries of linear parabolic equations, *Acta Appl. Math.* **100** (2008), 113–185, arXiv:0706.0443.

125. Popovych R.O., Ivanova N.M., Potential equivalence transformations for nonlinear diffusion-convection equations, *J. Phys. A: Math. Gen.* **38** (2005), 3145–3155, arXiv:math-ph/0402066.

126. Pukhnachov V.V., Nonlocal symmetries in nonlinear heat equations, in Energy Methods in Continuum Mechanics (Oviedo, 1994), Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1996, 75–99.

127. Schwarz F., Solving second-order differential equations with Lie symmetry, *Acta Appl. Math.* **60** (2000), 39–113.

128. Schwarz F., Algorithmic Lie theory for solving ordinary differential equations, *Pure and Applied Mathematics*, vol. 291, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2008, x+434 pp.

129. Suksern S., Moyo S., Meleshko S.V., Application of group analysis to classification of systems of three second-order ordinary differenti-

al equations, *Math. Methods Appl. Sci.* **38** (2015), 5097–5113, arXiv:1310.52039.

130. Vaneeva O.O., Bihlo A., Popovych R.O., Generalization of the algebraic method of group classification with application to nonlinear wave and elliptic equations, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **91** (2020), 105419, 28 pp., arXiv:2002.08939.

131. Vaneeva O.O., Popovych R.O., Sophocleous C., Extended group analysis of variable coefficient reaction-diffusion equations with exponential nonlinearities, *J. Math. Anal. Appl.* **396** (2012), 225–242, arXiv:1111.5198.

132. Wafo Soh C., Symmetry breaking of systems of linear second-order ordinary differential equations with constant coefficients, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **15** (2010), 139–143.

133. Wafo Soh C., Mahomed F.M., Symmetry breaking for a system of two linear second-order ordinary differential equations, *Nonlinear Dynam.* **22** (2000), 121–133.

134. Wei J., Norman E., Lie algebraic solution of linear differential equations, *J. Math. Phys.* **4** (1963), 575–581.

135. Wei J., Norman E., On global representations of the solutions of linear differential equations as a product of exponentials, *Proc. Amer. Math. Soc.* **15** (1964), 327–334.

136. Winternitz P., Subalgebras of Lie algebras. Example of $\mathrm{sl}(3,\mathbb{R})$, in Symmetry in Physics, *CRM Proc. Lecture Notes*, vol. 34, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004, 215–227.

137. Yehorchenko I., Conditional symmetry and reductions for the two-dimensional nonlinear wave equation. I. General case, arXiv:1010.4913.

138. Zhdanov R.Z., Separation of variables in the non-linear wave equation, *J. Phys. A: Math. Gen.* **27** (1994), L291–L297.

139. Zhdanov R.Z., On relation between potential and contact symmetries of evolution equations, *J. Math. Phys.* **50** (2009), 053522, 9 pp.

140. Zhdanov R.Z., Lahno V.I., Group classification of heat conductivity equations with a nonlinear source, *J. Phys. A: Math. Gen.* **32** (1999), 7405–7418, arXiv:math-ph/9906003.

Додаток А

(1+1)-вимірні нелінійні еволюційні рівняння другого порядку з максимальними ліївськими симетріями

Розглянемо клас (1+1)-вимірних еволюційних рівнянь порядку n

$$u_t = F(t, x, u, u_1, \ldots, u_n), \tag{A.1}$$

де $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$, $u_i = \frac{\partial^i u}{\partial x^i}$, $i = 0, \ldots, n$, $u_0 \equiv u$, $n \geq 2$, F — довільна гладка функція. Також будемо використовувати позначення $u_x, u_{xx}, \ldots$ для похідних за змінною x.

Симетрійним властивостям рівнянь із класу (A.1) присвячено багато досліджень. Крім того, у багатьох випадках саме еволюційні рівняння з класу (A.1), як правило, виступають базовими прикладами в симетрійному аналізі диференціальних рівнянь (див., наприклад, монографії [24, 42, 67, 112]).

Відповідно до результатів В.В. Соколова [30, с. 173] та Б.А. Магадєєва [21, с. 346] (див. також статтю Р.З. Жданова [139]) контактні перетворення, які зберігають вигляд еволюційних рівнянь (A.1), вичерпують перетворення

$$\tilde{t} = \varkappa(t), \quad \tilde{x} = \phi(t, x, u, u_x), \quad \tilde{u} = \psi(t, x, u, u_x),$$

де функції ϕ та ψ задовольняють умову контактності

$$\phi_{u_x}(u_x\psi_u + \psi_x) = \psi_{u_x}(u_x\phi_u + \phi_x).$$

Б.А. Магадєєвим [21, теорема 0.1] доведено, що розмірність алгебри контактних симетрій (Cont) (1+1)-вимірних еволюційних рівнянь (A.1) не перевищує $n+5$ або дорівнює ∞. В останньому випадку еволюційні рівняння можна звести до лінійних за допомогою контактних перетворень. У цій же роботі автором отримано повний перелік алгебр скінченновимірних контактних симетрій еволюційних рівнянь та показано, як описати еволюційні рівняння, які допускають задану алгебру контактної симетрії. Зокрема, згідно з [21, теорема 3.5], будь-яке рівняння з класу (A.1) з максимальною $(n+5)$-вимірною алгеброю контактних симетрій, еквівалентне рівнянню

$$u_t = u_n^{\frac{1-n}{1+n}}.$$

При цьому відповідна алгебра контактних симетрій має вигляд [21, див. доведення теореми 3.5 та додаток]:

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}_{\mathrm{M}1} = \big\langle 1,\, x,\, \ldots,\, x^k,\, u_x,\, -\tfrac{n-1}{2}u + xu_x,\, x^2u_x - (n-1)xu,\\ u_t,\, tu_t + \lambda u\big\rangle,\end{aligned} \tag{A.2}$$

де $k = 1, \ldots, n-1$, $\lambda \neq 0$, $\lambda = -\frac{n+1}{2n}$, $\varphi = \{1, x, \ldots, tu_t + \lambda u\}$ — $(n+5)$-компонентна генеруюча функція інфінітезимального оператора

$$\begin{aligned}Q = {}& \tau(t)\partial_t + \xi(t,x,u,u_x)\partial_x + \eta(t,x,u,u_x)\partial_u\\ &+ \zeta(t,x,u,u_x)\partial_{u_t} + \rho(t,x,u,u_x)\partial_{u_x}\end{aligned}$$

з коефіцієнтами τ, ξ, η, ζ, ρ, які визначаємо таким чином [79, 139]:

$$\begin{aligned}&\tau = -\phi_{u_t}, \quad \xi = -\phi_{u_x}, \quad \eta = \phi - u_t\phi_{u_t} - u_x\phi_{u_x},\\ &\zeta = \phi_t + u_t\phi_u, \quad \rho = \phi_x + u_x\phi_u.\end{aligned}$$

Для довільного $n \geq 2$ всі базисні елементи алгебри (A.2) є продовженнями відповідних ліївських симетрій (тобто алгебра (A.2) є тривіальною алгеброю контактних симетрій). Зокрема, для $n = 2$ ця алгебра має вигляд

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}_{n=2} = \langle & \partial_t,\, \partial_x,\, \partial_u,\, 2x\partial_x + u\partial_u + u_t\partial_{u_t} - u_x\partial_{u_x},\, x\partial_u + \partial_{u_x},\\ & 4t\partial_t + 3u\partial_u - u_t\partial_{u_t} + 3u_x\partial_{u_x},\, x^2\partial_x + xu\partial_u + xu_t\partial_{u_t} - xu_x\partial_{u_x}\rangle\end{aligned}$$

і є першим продовженням алгебри ліївських (точкових) симетрій рівняння $u_t = u_{xx}^{-1/3}$ (див. реалізацію (A.5) нижче). Умови на функцію F, при яких клас (A.1) допускає лише тривіальні контактні перетворення, отримано в роботі [110].

У роботі [139] Р.З. Ждановим встановлено зв'язок між потенціальними та контактними симетріями еволюційних рівнянь (A.1), а також запропоновано підхід до класифікації таких рівнянь. Свіжий огляд та останні результати щодо некласичних симетрій еволюційних рівнянь можна знайти в роботі [45].

Значне місце в літературі приділено знаходженню ліївських симетрій еволюційних рівнянь. Крім того, вивчають симетрійні властивості різноманітних підкласів класу (A.1) при $n = 2, 3$. У роботі [3], І.Ш. Ахатов, Р.К. Газізов та Н.Х. Ібрагімов розглянули локальні та нелокальні симетрії для деяких класів еволюційних рівнянь другого порядку, а саме для рівнянь нелінійної теплопровідності, нелінійної фільтрації та газової динаміки. Зокрема, у цій роботі знайдено групу еквівалентності та виконано повну групову класифікацію класу $u_t = H(u_{xx})$. Якщо виключити з розгляду лінійний випадок, то при довільній функції H цей клас допускає 5-вимірну алгебру ліївських симетрій. Крім того, існує 5 нееквівалентних випадків розширення цієї 5-вимірної алгебри. У випадку степеневої, логарифмічної та експоненціальної нелінійності, алгебра інваріантності — 6-вимірна, а 7-вимірну алгебру допускають лише два рівняння [3]

$$u_t = u_{xx}^{-1/3}, \tag{A.3}$$
$$u_t = u_{xx}^{1/3}. \tag{A.4}$$

Згідно з [3], максимальні ліївські алгебри інваріантності рівнянь (A.3) та (A.4) мають вигляд

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_{\text{AGI1}} = \langle &\partial_t,\ \partial_x,\ \partial_u,\ 2t\partial_t + x\partial_x + 2u\partial_u,\ x\partial_u,\ 4t\partial_t + 3u\partial_u, \\ &x^2\partial_x + xu\partial_u\rangle, \end{aligned} \tag{A.5}$$

$$\mathfrak{g}_{\mathrm{AGI2}} = \langle \partial_t,\, \partial_x,\, \partial_u,\, 2t\partial_t + x\partial_x + 2u\partial_u,\, x\partial_u,\\ 2t\partial_t + 3u\partial_u,\, u\partial_x \rangle. \tag{A.6}$$

У роботах [31, 44] вивчено симетрійні властивості класу

$$u_t + uu_x = F(u_n).$$

Зокрема, показано, що рівняння

$$u_t + uu_x = u_{xx}^{1/3} \tag{A.7}$$

допускає 7-вимірну алгебру Лі

$$\mathfrak{g}_{\mathrm{BF}} = \langle \partial_t,\, \partial_x,\, t\partial_x + \partial_u,\, 4t\partial_t + 5x\partial_x + u\partial_u,\\ u\partial_x,\, (2t - x)\partial_x + u\partial_u,\, (tu - x)(t\partial_x + \partial_u) \rangle. \tag{A.8}$$

У роботах [8, 12] за допомогою техніки розгалуженого розщеплення виконано повну групову класифікацію ліїських симетрій відповідно підкласів $u_t + uu_x = H(u_n)$ та $u_t = H(u_n)$, де $n \geq 3$. Див. [115] та список літератури в цій роботі щодо методу розгалуженого розщеплення та інших сучасних алгебраїчних технік симетрійної класифікації диференціальних рівнянь.

Оскільки, згідно з результатом Б.А. Магадєєва [21], існує єдине з точністю до контактних перетворень еквівалентності (1+1)-вимірне еволюційне рівняння другого порядку з 7-вимірною максимальною алгеброю контактних симетрій, то існують перетворення, що пов'язують нелінійні (1+1)-вимірні еволюційні рівняння (A.3), (A.4) та (A.7).

Відомо, що рівняння (A.4) можна звести до рівняння (A.3) за допомогою контактного перетворення (див. [71, 126])

$$t = -\tilde t, \quad x = \tilde u_{\tilde x}, \quad u = \tilde x \tilde u_{\tilde x} - \tilde u, \quad u_t = \tilde u_{\tilde t}, \quad u_{xx} = \frac{1}{\tilde u_{\tilde x \tilde x}}, \tag{A.9}$$

де $\tilde u$ — нова залежна змінна та $\tilde t$, $\tilde x$ — нові незалежні змінні.

Зауважимо, що рівняння (A.4) інваріантне щодо перетворення годографа [26, с. 409]

$$t=\widetilde{t},\quad x=\widetilde{u}(\widetilde{t},\widetilde{x}),\quad u(t,x)=\widetilde{x},\quad u_t=-\widetilde{u}_{\widetilde{t}},\quad u_{xx}=-\frac{1}{\widetilde{u}_{\widetilde{x}\widetilde{x}}}.$$

Отже, рівняння нелінійної теплопровідності (A.4) — ще один приклад годограф-інваріантного еволюційного рівняння другого порядку поряд із рівняннями швидкої дифузії $u_t=u_{xx}u_x^{-1}$ та фільтрації $u_t=u_{xx}\bigl(1+u_x^2\bigr)^{-1}$.

У роботі [6] запропоновано модифіковане перетворення годографа

$$\begin{gathered}t=\widetilde{t},\quad x=\widetilde{u}(\widetilde{t},\widetilde{x})+\widetilde{x}\widetilde{t},\quad u(t,x)=\widetilde{x},\\ u_t=-\frac{\widetilde{u}_{\widetilde{x}}+\widetilde{x}}{\widetilde{u}_{\widetilde{x}}+\widetilde{t}},\quad u_x=\frac{1}{\widetilde{u}_{\widetilde{x}}+\widetilde{t}},\quad u_{xx}=-\frac{\widetilde{u}_{\widetilde{x}\widetilde{x}}}{(\widetilde{u}_{\widetilde{x}}+\widetilde{t})^3},\end{gathered}\tag{A.10}$$

яке зводить рівняння (A.7) до рівняння (A.4).

Таким чином, нелінійні рівняння (A.4) та (A.7) з 7-вимірними максимальними алгебрами інваріантності можна звести до нелінійного рівняння теплоровідності (A.3) з класифікації Б.А. Магадєєва за допомогою контактного перетворення (A.9) та узагальненого перетворення годографа (A.10), а відповідні алгебри (A.6) та (A.8) ізоморфні, з точністю до контактних перетворень, алгебрі (A.5).

Додаток Б

Список публікацій та апробація результатів

Цей додаток містить список публікацій здобувача на тему дисертації, а також відомості про апробацію результатів дисертаційної роботи.

Наукові праці, у яких опубліковані наукові результати дисертації:

1. Бойко В.М., Локазюк О.В., (1+1)-вимірні нелінійні еволюційні рівняння другого порядку з максимальними ліївськими симетріями, *Збірник праць Ін-ту мат. НАН України* **16** (2019), № 1, 16–21, http://trim.imath.kiev.ua/index.php/trim/article/view/364.

2. Boyko V.M., Lokaziuk O.V., Popovych R.O., Realizations of Lie algebras on the line and the new group classification of (1+1)-dimensional generalized nonlinear Klein–Gordon equations, *Anal. Math. Phys.* **11** (2021), 127, 38 pp., https://doi.org/10.1007/s13324-021-00550-z, arXiv:2008.05460. (SJR – Q2, Scopus – Q1, WoS – Q1).

3. Локазюк О.В., Ліївські симетрії лінійних систем двох звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, *Доп. НАН України* (2021), № 5, 3–11, https://doi.org/10.15407/dopovidi2021.05.003.

4. Boyko V.M., Lokaziuk O.V., Popovych R.O., Admissible transformations and Lie symmetries of linear systems of second-order ordinary differential equations, arXiv:2105.05139, 2021, 49 pp.

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

1. Локазюк О.В., Групова класифікація та точні розв'язки рівнянь типу нелінійної теплопровідності, Тези доповідей Міжнародного семінару до 40-річчя від створення відділу прикладних досліджень, Київ, Інститут математики НАН України, 2018, https://www.imath.kiev.ua/~appmath/Abstracts2018/Lokazyuk_ua.html.

2. Локазюк О.В., Нелінійні еволюційні рівняння другого порядку з алгебрами ліївських симетрій максимальної розмірності, Тези доповідей Міжнародної конференції молодих математиків, Київ, Інститут математики НАН України, 2019, С. 62.

3. Локазюк О.В., Контактні перетворення нелінійних еволюційних рівнянь з максимальними ліївськими симетріями, Тези доповідей V Міжнародної науково-практичної конференції "Інформаційні технології в освіті, науці і техніці" ІТОНТ, Черкаси, Черкаський державний технологічний університет, 2020, С. 100–102.

4. Локазюк О.В., Ліївські симетрії лінійних систем двох диференціальних рівнянь другого порядку з залежними від часу коефіцієнтами, Тези доповідей Міжнародної конференції молодих вчених "Підстригачівські читання – 2021", Львів, Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2021, http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2021/abstracts/Lokazyuk.pdf.

5. Локазюк О.В., Групова класифікація (1+1)-вимірних нелінійних узагальнених рівнянь Клейна–Ґордона, Тези доповідей Міжнародної конференції молодих математиків, Київ, Інститут математики НАН України, 2021, С. 68, https://www.imath.kiev.ua/~young/youngconf2021/Abstracts_2021.pdf.

6. Бойко В.М., Локазюк О.В., Попович Р.О., Реалізації алгебр Лі на прямій та групова класифікація (1+1)-вимірних узагальнених нелінійних рівнянь Клейна–Ґордона, Тези доповідей Міжнародного онлайн-семінару з нагоди 85-ї річниці від народження Вільгельма Фущича, Київ, Інститут математики НАН України, 2021, https://www.imath.kiev.ua/~appmath/Abstracts2021/Lokaziuk.html.

7. Локазюк О.В., Групи еквівалентності лінійних систем звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, Тези доповідей Міжнародної конференції молодих вчених “Підстригачівські читання – 2022”, Львів, Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2022, http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2022/abstracts/Lokaziuk.pdf.

8. Локазюк О.В., Пониження порядку та інтегрування нормальних лінійних систем звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, Тези доповідей Міжнародної наукової конференції “Прикладна математика та інформаційні технології – 2022”, Чернівці, Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича, 2022, С. 70–71, http://www.amit60.fmi.org.ua/?page=materials.

Відомості про апробацію результатів дисертації

Основні результати дисертації доповідалися й обговорювалися на:

- Міжнародному семінарі з нагоди 40-ї річниці створення відділу прикладних досліджень (зараз відділ математичної фізики) (Київ, Інститут математики НАН України, 2018);
- Міжнародній конференції молодих вчених (Київ, 2019);
- V Міжнародній науково-практичній конференції “Інформаційні технології в освіті, науці і техніці” ІТОНТ (Черкаси, 2020);
- Міжнародній конференції молодих учених “Підстригачівські читання – 2021” (Львів, 2021);
- Міжнародній конференції молодих математиків (Київ, Інститут математики НАН України, 2021);
- Міжнародному онлайн-семінарі з нагоди 85-ї річниці від народження Вільгельма Фущича (Київ, Інститут математики НАН України, 2021);
- Міжнародній конференції молодих учених “Підстригачівські читання – 2022” (Львів, 2022);
- Міжнародній науковій конференції “Прикладна математика та інформаційні технології – 2022”, (Чернівці, 2022);
- семінарі відділу математичної фізики Інституту математики НАН України (керівник семінару: член-кореспондент НАН України, професор А.Г. Нікітін).

Документ підписано у сервісі Вчасно (продовження)
Lokaziuk_OV_thesis__PhD_2022.pdf

Документ відправлено: 01:06 07.11.2022

Власник документу

Електронний підпис
01:06 07.11.2022
Ідентифікаційний код: 3427410649
ЛОКАЗЮК ОЛЕКСАНДРА ВІКТОРІВНА
Власник ключа: ЛОКАЗЮК ОЛЕКСАНДРА ВІКТОРІВНА
Час перевірки КЕП/ЕЦП: 01:06 07.11.2022
Статус перевірки сертифікату: Сертифікат діє
Серійний номер: 248197DDFAB977E50400000045B9DC003C12B803
Тип підпису: удосконалений