Відгук

офіційного опонента на дисертаційну роботу
Бурилка Олександра Андрійовича
“Колективна динаміка та біфуркації у мережах зв’язаних фазових осциляторів”
подану на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук
за спеціальністю 01.01.02 – диференціальні рівняння, 111 – математика

Актуальність теми. Дисертаційна робота О. А. Бурилка присвячена математичному опису явищ колективної динаміки (узагальнення поняття синхронізації) у складних системах взаємозв’язаних активних елементів. Мережі зв’язаних елементів (networks), кожен з яких має свою власну індивідуальну динаміку описують дуже широке коло об’єктів та явищ фактично у всіх галузях природознавства. Відмітимо задачу електроенергетики про синхронізацію декількох генераторів змінного струму в енергомережі для досягнення стабільності напруги в мережі. У радіофізиці інтенсивно досліджують колективну поведінку лазерів та мікрохвильових генераторів. У сучасних економічних дослідженнях в якості мережі взаємозв’язаних елементів розглядають світову торгівельну мережу, вузлами якої є країни, а ребрами – потоки імпорту-експорту між ними. Модель економічного циклу для окремої країни асоційована з осцилятором, що співставляється з кожним вузлом мережі. При цьому під час фінансових криз проявляється колективне явище аномального зростання кореляційних і синхронізаційних процесів в окремих вузлів мережі.

У останній час основна увага досліджень таких задач змістилася в бік вивчення біологічних систем, де синхронізація зустрічається на самих різних рівнях, наприклад, підлаштування серцевого ритму до дихання, різноманітні форми колективної поведінки комах і тварин, а також у зв’язку зі значними успіхами у розробці штучних нейронних мереж та машинного навчання.

Динаміка кожного з елементів мережі суттєво змінюється під дією колективного впливу цих елементів один на одного. Типи взаємодії можуть бути як простими (лінійними) так і достатньо складними (нелінійними). Важливе значення також має топологія зв’язків. Взаємодія елементів мережі може бути локальною (взаємодія тільки з найближчими сусідами), нелокальною (наявність зв’язків з віддаленими елементами), а також глобальною (кожен елемент взаємодіє з усіма елементами мережі).

Систематичне вивчення та значний розвиток теорії синхронізації відноситься до першої половини минулого століття, коли були опубліковані класичні роботи Б. ван дер Поля, О.О.Андронова, О.А.Вітта та ін. Відмітимо, що певні колективні природні ефекти були спочатку знайдені в роботах А.Ляпунова, І.Блехмана, Ю.Неймарка, С.Кузнєцова, В.Аніщенко, Ю.Майстренко, О.Дмітрієва, А.Піковського у вигляді особливих розв'язків математичних моделей, що моделюються системами диференціальних та різницевих рівнянь.

Формування сучасного математичного апарату теорії синхронізації відбувалось завдяки дослідженням А.Данжуа, В.І.Арнольда, Й.Курамото та ін. на основі глибокого вивчення фазової динаміки на торі і зведення до відображень кола.

У даній дисертаційній роботі вивчаються мережі зв'язаних фазових осциляторів, що задаються за допомогою диференціальних рівнянь з параметрами. У роботі досліджуються як добре відомі моделі, так і пропонуються до розгляду та вивчаються цілком нові системи, що будуються з урахуванням тих чи інших природних потреб (у нейронауці та фізиці). У дисертаційній роботі можна прослідкувати прямий та зворотній зв'язок: математичне моделювання природних явищ і змістовна інтерпретація отриманих математичних результатів. Важливим є описання переходів між різними колективними станами системи при зміні параметрів за допомогою класичної теорії біфуркацій. Наявність параметрів у складних системах дозволяє не лише модифікувати способи взаємодії, а й надає можливість впливати на систему, корегуючи ці параметри. Біфуркаційна теорія систем, заданих на мережах, має свої особливості, пов'язані з симетріями, ієрархічними структурами зв'язків та іншими явищами. Також побудова та дослідження математичних моделей мереж може призводити до виявлення та описання нових типів біфуркацій.

Складність та багатогранність задач теорії нелінійних динамічних систем, що розглядаються в дисертаційній роботі пояснює інтерес до їх дослідження і в силу цього тема дисертаційної роботи є важливою і актуальною.

Основні результати роботи. Дисертаційна робота складається зі вступу, семи розділів, висновків, списку використаних джерел (353 найменування) та 6 додатків.

У вступі обґрунтовано актуальність теми дисертації, вказано мету, задачі й методи дослідження, наукову новизну та практичне значення отриманих результатів, їх апробацію тощо

У першому розділі наведено добрий історичний та методичний аналіз появи теорії синхронізації та її розвитку. У даному розділі обгрунтовується важливість та значення досліджень моделей зв'язаних фазових осциляторів, а особливо, моделі Курамото та її узагальнень.

Другий розділ присвячено описанню колективних режимів у системах ідентичних глобально зв'язаних фазових осциляторів: стандартній моделі Курамото, моделі Курамото-Сакагучі (з фазовим зсувом у функції взаємодії) та моделі Піковського-Розенблюма (з нелінійним фазовим зсувом, залежним від параметру порядку). Для досліджень у даному розділі, автор об'єднує власну методику досліджень з відомою теорією Ватанабе-Строгатца. Було показано, що система має стійкі розв'язки, що відповідають режиму повної синхронізації, дво-кластерним режимам, режиму повної антифази (що описується (N-2)-вимірним інваріантним многовидом), а також система має граничні та гетероклінічні цикли і їхні багатовимірні сім'ї. Вивчено за яких умов ці режими мають локальні та глобальні біфуркації. Більш детально досліджено випадок, коли система має квадратичну нелінійність фазового зсуву. Слід відзначити, що підхід, запропонований у роботі, дозволяє описати біфуркації на кластерних многовидах, де теорія Ватанабе-Строгатца не працює.

У третьому розділі дисертації розглядається глобальна осциляторна мережа, але вже з функцією взаємодії, що має дві та більше гармонік у розкладі в ряд Фур'є. Головна увага приділяється описанню симетрій системи, встановленню впливу симетрій на існування інваріантних многовидів та інваріантних областей, а також на виникнення біфуркацій певних специфічних типів. Відзначимо доведені тут твердження про існування та стійкість повністю синхронного стану та дво-кластерних станів, а також режимів рівномірно розподілених частот. Важливим є встановлений в Теоремі 3.3.3 результат, що режим повної антифази є інваріантним для 2, 3 та 4-вимірних систем та не є таким для систем більших розмірностей. У даному розділі наведено біфуркаційні умови появи гетероклінічних циклів різних конфігурацій. Деякі з *гетероклінічних біфуркацій* було описано вперше. Для повної побудови біфуркаційних діаграм математичні методи доповнюються комп'ютерним моделюванням. У даному розділі також досліджується питання екстремальної чутливості до збурень: як збурення власних частот ідентичних (спершу) осциляторів приводить до біфуркацій руйнування симетрій та появи фазово-незамкнутих траєкторій на торі.

Четвертий розділ присвячено дослідженню системи типу Курамото, що моделює взаємодію двох груп осциляторів з притягувальними та відштовхувальними зв'язками. Осцилятори першої групи (конформісти) прагнуть синхронізувати всі елементи в мережі, а осцилятори другої групи (нонконформісти) намагаються "розпорошити" всіх до глобальної антифази (з нульовим параметром порядку). У роботі показано існування кількох стійких колективних режимів, зокрема стану антифазного протистояння конформістів та нонконформістів, стану повної некогерентності, розмитого стану протистояння, режиму мандрівних хвиль та "ренегатних" станів (синхронізації одного нонконформіста з конформістами). Запропоновано також узагальнення згаданої вище системи з ненульовим фазовим зсувом у функції взаємодії. У цьому випадку детально описано систему з двома параметрами. Знайдено ряд цікавих колективних режимів, які описуються хаотичними та гетероклінічними траєкторіями.

Дослідження осциляторних мереж з кільцевим анізотропним зв'язком здійснено у п'ятому розділі. Особливу увагу присвячено дослідженню систем з циркулянтною кососиметричною матрицею взаємодії. Показано, що такі системи є часово-оборотними і мають доволі нетривіальну властивість: *співіснування консервативної та дисипативної динамік* у одному фазовому просторі. У теоремі 5.4.1 доведено твердження про структуру консервативної частини простору (існування сімей періодичних та квазі-періодичних розв'язків), а також про гетероклінічні бар'єри, що розділяють динаміки двох типів. Також у п.5.7 сформульовано твердження (теорема 5.7.1) про взаємозв'язок розв'язків нескінченно-вимірної циркулянтної осциляторної системи в околі стану повної синхронізації з розв'язками нелінійного рівняння Шрьодінгера.

Шостий розділ присвячено дослідженню нового динамічного стану об'єкту, що носить назву *химерного стану*. У роботі дано Означення 6.2.3 *слабкого химерного стану* системи нерозрізнюваних осциляторів. Дане означення є першим строгим аналітичним означенням химер у літературі і воно широко використовується іншими вченими. Було побудовано блочну осциляторну мережу з чотирьох осциляторів, що є мінімальною системою, котра має стійкий слабкий химерний стан. Даний підхід дозволяє конструювати достатньо складні багатовимірні блочні мережі, що мають химерні стани, у тому числі гетероклінічні та хаотичні. Також описано біфуркації химерних станів у різних типів неблочних систем та запропоновано методи їх дослідження за допомогою редукцій.

Останній 7 розділ складається з двох підрозділів. Перший присвячено дослідженню осциляторних систем з центральним елементом. Такі системи добре моделюють нейронні процеси зорового пошуку та уваги. Найбільш важливими для таких систем є режими боротьби периферичних осциляторів (ПО) за синхронізацію з центральним осцилятором (ЦО), коли певна кількість ПО знаходяться у синхронізації з ЦО, а інші – у протифазі. Для таких систем описано умови стійкості, біфуркацій та мультистабільності різних режимів боротьби за синхронізацію. Показано, що системи з центральним елементом можуть мати ієрархічні структури розв'язків, а також консервативний хаос. У другому підрозділі розділу 7 запропоновано узагальнення системи з центральним елементом. У даному випадку параметри зв'язків між елементами та фазова частота ЦО вважаються не константами, а функціями часу, що описуються додатковими диференціальними рівняннями. Було доведено, що розв'язки даної системи відповідають режимам *переможець отримує все* (ПОВ) різної конфігурації, коли фаза лише одного ПО синхронізується з фазою ЦО, а його амплітуда є суттєво більшою за амплітуду інших ПО. Показано яким чином відбуваються біфуркаційні переходи між стаціонарними та нестаціонарними ПОВ-режимами при зміні власних частот осциляторів. Встановлено Теорема 7.2.4 , що такі переходи відбуваються на інваріантних многовидах меншої розмірності і відбуваються вони у наслідок нової біфуркації, яку автор назвав *сідло-вузловою біфуркацією на інваріантному торі* (SNIT).

Наукова новизна і ступінь обґрунтованості результатів дисертації. Дослідження, які виконані автором в даній дисертаційній роботі, спрямовані на постановку та розв'язання нових наукових задач в теорії нелінійних динамічних систем, що описують мережі зв'язаних фазових осциляторів.

Ідеї та підходи, які використані для досліджень, є результативними. Можна стверджувати, що дисертація Бурилка Олександра Андрійовича "Колективна динаміка та біфуркації у мережах зв'язаних фазових осциляторів" є завершеним науковим дослідженням, в якій отримано нові наукові результати з комплексного дослідження моделей зв'язних осциляторів, що описують колективні режими у мережах з різними типами взаємодії.

Усі основні результати роботи є новими і строго математично обґрунтованими, що підтверджується наведеними в роботі прикладами та забезпечується узгодженістю з відомим раніше результатами.

Теоретичне та практичне значення одержаних результатів. Робота має в основному теоретичний характер. Разом із цим розроблена в роботі методика має значний прикладний потенціал. Побудована локальна теорія біфуркацій та аналіз синхронізації зв'язаних взаємодіючих осциляторів можуть бути використані при дослідженні динаміки математичних моделей оптико-електричних та напівпровідникових систем. Методи виявлення симетрій, ієрархічних структур, редукцій на інваріантні многовиди та інші можуть бути застосовані до систем з багатовимірними вузлами (наприклад, нейронних мереж з вузлами типу Ходжкіна-Хакслі), а деякі методи дослідження систем зв'язаних елементів з параметрами мають перспективи для можливого знаходження та описання нових типів біфуркацій.

Повнота викладу в опублікованих працях та апробація роботи. Всі основні положення і висновки дисертаційної роботи достатньо детально висвітлені в наукових публікаціях автора в 15 провідних закордонних наукових журналах та 5 фахових виданнях України. Результати роботи апробовані на численних міжнародних наукових конференціях і наукових семінарах у провідних наукових центрах США, Європи та України. Зміст автореферату повністю відповідає змісту основної роботи

Дисертація Бурилка Олександра Андрійовича відповідає всім вимогам за кількістю публікацій за темою дисертації у провідних наукових журналах та фахових виданнях, а також вимогам щодо об'єму та оформлення роботи. Дисертація відповідає паспорту спеціальності 01.01.02 – диференціальні рівняння.

Зауваження та побажання.

1. У першому розділі роботи наведена загальна характеристика теорії синхронізації в історичному аспекті, основна увага сконцентрована на модель зв'язаних фазових осциляторів Курамото та її узагальнень. Цікаво було б приділити увагу аналізу робіт українських математиків, що працювали в цій тематиці.

2. На сторінці 49 у наведеній математичній моделі N зв'язаних фазових осциляторів (2.2) пропущено параметр зв'язку K.

3. Винесення доведень ключових теорем та тверджень у додатки ускладнює читабельність дисертаційної роботи, а перенесення рисунків у додатки погіршує логічну зв'язність тексту роботи.

4. У роботі здійснюється математичне моделювання різноманітних об'єктів та процесів. Зокрема програми XPPAUT/AUTO та DsTool використовуються для знаходження структури консервативної та диспативної областей, твердження 5.6.2 перевіряється за допомогою

числових експериментів тощо. Доцільно було б (можливо у додатку) описати техніку та методику застосування програмного забезпечення для одержання результатів моделювання конкретних моделей та процесів.

5. У роботі досліджуються системи ідентичних фазових осциляторів, що володіють симетричними зв'язками та дозволяють виявити і добре описати інваріантні множини у цьому випадку. Доцільно було б приділити більше уваги дослідженню біфуркацій систем неідентичних осциляторів, які вивчені недостатньо.

6. В роботі є деякі описки та мовні неточності: наприклад, автор пише «виконується наступне відношення» замість «наступна рівність» (ст. 211), «по химерах» замість «з химерами» (ст. 254), «можуть бути сформульовані» замість «записані» (ст. 280) тощо.

Зазначимо, що наведені зауваження та побажання не впливають на загальну позитивну оцінку дисертаційної роботи, яку виконано на високому науковому рівні.

Висновок. Оцінюючи дисертаційну роботу в цілому, є всі підстави стверджувати, що за актуальністю теми, обсягом виконаних досліджень і науковою цінністю одержаних в ній результатів, дисертаційна робота Бурилка Олександра Андрійовича "Колективна динаміка та біфуркації у мережах зв'язаних фазових осциляторів" задовольняє вимогам пп. 9, 10, 12, 13, 14 «Порядку присудження наукових ступенів», затвердженого постановою КМУ № 567 від 24.07.2013 р. (зі змінами і доповненнями, внесеними згідно з Постановами КМУ № 656 від 19.08.2015 р., № 1159 від 30.12.2015 р., № 567 від 27.07.2016 р. та наказом МОН України від 12.01.2017 р.) щодо докторських дисертацій, а її автор – Бурилко Олександр Андрійович, заслуговує присудження наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.02 – диференціальні рівняння.

Офіційний опонент,
завідувач кафедри математичного моделювання
Чернівецького національного
університету імені Юрія Федьковича
доктор фізико-математичних наук,
професор І.М. Черевко

Підпис Черевка І.М. засвідчую
Начальник відділу кадрів Чернівецького
національного університету
імені Юрія Федьковича
"18" 02 2020 р