ВІДГУК

офіційного опонента доктора фізико-математичних наук
Парасюка Ігоря Остаповича
на дисертаційну роботу Бурилка Олександра Андрійовича
«Колективна динаміка та біфуркації
у мережах зв'язаних фазових осциляторів»,
подану на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук
за спеціальністю 01.01.02 – диференціальні рівняння, 111 – математика

Дисертація О.А. Бурилка присвячена розробці математичного апарату дослідження складних динамічних систем, утворених мережами зв'язаних осциляторів, з метою виявлення та опису явищ колективної поведінки та біфуркацій в таких системах.

1. Актуальність теми дисертації. Потреба у дослідженні колективної поведінки динамічно взаємодіючих елементів складних систем виникає у багатьох галузях природничих наук, а також при вивченні певних соціальних систем. Колективна динаміка є узагальненням поняття синхронізації, що описує ширші можливості взаємодії між елементами.

Перші експерименти з дослідження синхронізації годинникових маятників були здійснені ще у сімнадцятому сторіччі Х. Гюйгенсом. Особливо активні дослідження явищ синхронізації і колективної динаміки розпочалися у двадцятому сторіччі у зв'язку з появою значної кількості нових наукових напрямків у природознавстві. Ці дослідження, у свою чергу, спричинили необхідність створення адекватних математичних моделей та розробки відповідного математичного апарату. Нові можливості для здійснення аналізу таких моделей відкрилися з появою потужної комп'ютерної техніки.

Важливим кроком на шляху до загального розуміння та строгого опису спочатку простих, а потім складніших динамічних режимів багатьох взаємодіючих елементів стали роботи А. Вінфрі та Й. Курамото з моделювання систем зв'язаних фазових осциляторів. Актуальність таких досліджень невпинно зростала впродовж останніх кількох декад, зокрема, завдяки бурхливому розвитку теорії і практики впровадження штучних нейронних мереж, а також активному вивченню нейронних процесів мозку людини. Результати наукового пошуку в зазначеному напрямку публікуються у високорейтингових журналах і рясно цитуються.

Математичні моделі не лише допомагають чіткому розумінню колективних явищ, а й часто пропонують до розгляду нові явища, такі як химерні стани, перемикальні режими, хаотична синхронізація тощо. Традиційна методика дослідження колективної динаміки у складних мережах осциляторів базується, зокрема, на використанні математичного апарату теорії біфуркацій. Відбувається і зворотній зв'язок: процес аналізу складних мереж, зокрема із застосуванням комп'ютерних засобів, супроводжується виявленням нових типів біфуркацій. Відтак виникає потреба у розробці строгої математичної теорії цих явищ. З огляду на викладене актуальність тематики дисертації не викликає сумніву.

2. Наукова новизна та значимість отриманих результатів. У дисертації досліджуються системи диференціальних рівнянь з параметрами, що моделюють мережі зв'язаних фазових осциляторів. Ці мережі описуються здебільшого за допомогою моделей типу Курамото та їх узагальнень. Автор не лише розглядає відомі системи, а й пропонує нові моделі, що більш адекватно описують ті чи інші процеси. Основною мета його досліджень полягає в тому, щоб на основі глибокого аналізу розглядуваних математичних моделей детально описати різні типи синхронізації та складніші режими динамічної взаємодії, а також біфуркаційні переходи між різними динамічними режимами.

У роботі вивчаються: моделі з глобальною взаємодією (розділи 2, 3); модель, що описує конкуренцію двох протидіючих груп (конформістів та нонконформістів), кожна з яких прагне до власного колективного режиму (розділ 4); осциляторна модель з циркулянтним зв'язком між елементами, що демонструє співіснування консервативної та дисипативної динамік (розділ 5); системи, задані на нерозрізнюваних графах, що мають химерні стани (розділ 6); а також модель з центральними елементом та її розширення з адаптацією сил взаємодії (розділ 7). Кожна з досліджуваних систем побудована з огляду на застосування у фізиці, соціології, біології та нейронауці. Основні результати дисертації пов'язані зі встановленням умов існування, стійкості та біфуркацій ансамблів розв'язків, що поєднані між собою певними співвідношеннями і описують ті чи інші режими колективної динаміки.

У роботі показано, яким чином на колективну динаміку системи впливають: індивідуальна динаміка кожного з елементів, структура мережі (графи зв'язків), наявні в системі симетрії, а також способи (функції) взаємодії між елементами. Доведено низку нетривіальних тверджень про взаємозв'язок між структурою мережі, симетріями системи, існуванням канонічних інваріантних областей, інваріантних многовидів та наявністю тих чи інших колективних режимів.

Зауважимо, що частина підрозділів містить результати щодо опису колективних режимів певної системи, у той час як метою інших розділів була побудова осциляторних мереж, що демонструють колективний режим певного типу або з певними властивостями (наприклад, химерні стани чи режим "переможець отримує все", "змагання без переможців"). Зокрема, із зазначених позицій встановлено умови існування режимів повної та часткової синхронізації, різного типу протифазних режимів, режимів повільного перемикання між кластерами, а також химерні стани.

Автором показано, що певні структури осциляторних мереж демонструють існування гетероклінічних циклів та більш складних гетероклінічних структур. У роботі проаналізовано і описано цілу низку біфуркацій, що супроводжуються появою гетероклінічних циклів. Наскільки нам відомо, першість у виявленні цих біфуркацій належить здобувачеві. З результатів проведеного автором дослідження випливає, що більшість симетричних мереж мають не лише ізольовані гетероклінічні цикли, а й неперервні багатовимірні множини гетероклінічних циклів, які часто є бар'єрами між різними інваріантними областями або областями з принципово різною динамікою.

Особливо цікавими, на нашу думку, є дослідження, проведені у розділі 5, де вивчаються властивості осциляторної мережі з анізотропною (циркулянтною) взаємодією. Тут встановлено, що у випадку ідентичності власних частот осциляторів, така система має хвилі обертання та описано їхні біфуркаційні властивості. Показано, що найбільш нетривіальну динаміку система проявляє тоді, коли матриця взаємодії є кососиметричною, і, як наслідок, вплив між кожними двома осциляторами компенсується. У цьому випадку система має часово-оборотну (реверсивну) симетрію. Відтак фазовий простір системи розділяється на області з консервативною (гамільтоново-подібною) динамікою (навколо положення повної синхронізації) та дисипативною динамікою (в області, що включає притягувальні та відштовхувальні хвилі обертання). Доведено, що консервативна область містить одно- та двопараметричні сім'ї періодичних орбіт (у залежності від парності розмірності простору) та багатопараметричні сім'ї торів з квазіперіодичною динамікою.

У випадках малих розмірностей показано, що межами розділення консервативної та дисипативної динаміки є гетероклінічні цикли або їх багатопараметричні сім'ї. Доведено, що система стає бездивергентною або градієнтною у випадках непарності та парності функції зв'язків. Обидва згаданих випадки є граничними для консервативно-дисипативної осциляторної системи з функцією зв'язків, залежною від параметрів. Крім того, для систем з непарною функцією взаємодії було знайдено два перших інтеграли.

Далі, показано, що система може залишатись консервативно-дисипативною і тоді, коли ідентичність власних частот порушується, але певна симетрія у їхньому розподілі залишається. Цікаво, що у цьому випадку консервативні області можуть містити як фазово замкнуті, так і фазово незамкнуті (негомологічні нулю) траєкторії. Також встановлено можливість співіснування великої кількості консервативних областей у залежності від складності функції взаємодії між осциляторами.

Крім скінченно-вимірних систем, автором вивчались і їх термодинамічні границі, тобто кільцеві циркулянтні осциляторні мережі з нескінченною кількістю осциляторів. При прямуванні числа осциляторів до нескінченності було формально виведене амплітудне рівняння для розв'язків в околі повністю синхронного розв'язку. Виявилося, що дане рівняння має вигляд нелінійного рівняння Шрьодінгера та що воно описує консервативну область у околі синхронного режиму аналогічно випадку скінченних осциляторних кілець.

Варто відзначити, що хоча окремі аспекти теорії реверсивних систем доволі повно розроблені, починаючи з робіт Ю. Мозера, В. Арнольда, Р. Девані, М. Севрюка та ін., проте наразі відомо лише декілька прикладів реальних реверсивних систем з консервативно-дисипативною динамікою. Розглянута у дисертації осциляторна система є повчальною демонстрацією різноманітних властивостей та особливостей поведінки реверсивних систем.

Серед нових дуже цікавими є результати автора, що стосуються існування та біфуркацій так званих химер. У цьому зв'язку не можна не відзначити, що сам дисертант є співавтором поняття слабкого химерного стану. Нарешті, безумовно важливим і цінним досягненням автора є виявлення та опис нового типу глобальних багатовимірних біфуркацій — сідло-вузлової біфуркації на інваріантному торі.

3. Ступінь обґрунтованості та достовірності результатів дисертації. Викладені в дисертації результати супроводжуються достатньо переконливими обґрунтуваннями, причому останні мають переважно змістовний вербальний характер, а не традиційний для багатьох математичних праць характер формульних маніпуляцій. Безумовно позитивним моментом є той факт, що міркування автора вдало доповнюються вельми якісною візуалізацією у вигляді рисунків, створених з використанням комп'ютерних технологій і розміщених в додатках.

Важливим аргументом на користь обґрунтованості й достовірності результатів дисертації є ще й та обставина, що вони надруковані у високорейтингових журналах, публікації в яких проходять ретельне анонімне рецензування. Так, 8 публікацій автора опубліковано у виданнях, що відповідно до класифікації SCImago Journal & Cpuntry Rank належать до квартиля Q1. Крім того, свої результати автор доповідав на авторитетних семінарах, де були присутні визнані експерти в розділах математики, пов'язаних з темою дисертації.

4. Повнота викладу наукових положень і висновків дисертації. На основі аналізу змісту 20 статей автора можна дійти висновку, що основні результати, положення і висновки дисертації опубліковані в них з належною повнотою, відповідно до вимог МОН України щодо публікації результатів дисертаційних робіт у фахових виданнях. Роботи О.А. Бурилка за темою дисертації надруковано, зокрема, у таких відомих журналах, як SIAM Journal of Applied Dynamical Systems, Scientific Reports, Physical Review Letters, Chaos, Physica D, Physical Review E, The Journal of Mathematical Neuroscience, Frontiers in Applied Mathematics and Statistics, Нелінійні коливання, Дифференциальные уравнения.

Результати роботи пройшли належну апробацію на багатьох міжнародних наукових конференціях, а також на провідних наукових семінарах. Автореферат дисертації адекватно і достатньо повно відображає її зміст.

5. Зауваження та пропозиції.

5.1. Огляд літератури у п. 1.1, що стосується синхронізації зв'язаних динамічних об'єктів, варто було б доповнити згадкою про книгу Блехман И. И. Синхронизация в природе и технике.— М.: Наука, 1981.

5.2. У тексті дисертації місцями не зрозуміло, йдеться про випадок ідентичних осциляторів, чи ні. Так, у системі (2.2) фігурують, узагалі кажучи, різні частоти ω_i, але, судячи з вигляду системи (2.4), подальший аналіз проводиться для ідентичних осциляторів.

5.3. Бажано було б більш детально аналітичними засобами дослідити співіснування консервативної та дисипативної динамік у циркулянтних системах неідентичних осциляторів, а також у ситуації, коли функція зв'язків має старші гармоніки у розкладі Фур'є.

5.4. У п. (B) теореми 5.4.1 стверджується, що існує щільна множина інваріантних торів в околі $\mathcal{M}_0$. Насправді, наскільки нам відомо, з результатів КАМ-теорії, на які посилається автор, випливає існування не щільної, а канторової множини інваріантних торів

5.5. З результатів розділів 5 та 6 випливає, що циркулянтні мережі в принципі можуть мати химерні стани. Бажано було б конкретніше описати умови їх існування.

5.6. Бажано було б більш детально описати хаотичні режими у системах, де на основі комп'ютерних експериментів виявлено їх існування.

5.7. Формулу (2.3), що визначає фазові різниці, коректніше було б подати у вигляді

$$\varphi_i = \theta_1 - \theta_{i+1}, \quad i = 1, \ldots, N-1.$$

5.8. Доведення Леми 2.3.1 можна значно спростити, виконавши попередньо елементарні перетворення:

$$\sum_{j=1}^{N} [\sin(\theta_1 - \theta_j - \alpha) - \sin(\theta_i - \theta_j - \alpha)] =$$

$$\sum_{j=1}^{N} 2\sin\left(\frac{\theta_1 - \theta_i}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta_1 + \theta_i}{2} - \theta_j - \alpha\right) =$$

$$2\sin\left(\frac{\theta_1 - \theta_i}{2}\right)\sum_{j=1}^{N}\cos\left(\frac{\theta_1 + \theta_i}{2} - \theta_j - \alpha\right) =$$

$$2\sin\left(\frac{\theta_1-\theta_i}{2}\right)\sum_{j=1}^{N}\left[\cos\left(\frac{\theta_1+\theta_i}{2}-\alpha\right)\cos\theta_j+\sin\left(\frac{\theta_1+\theta_i}{2}-\alpha\right)\sin\theta_j\right]=$$
$$2\sin\left(\frac{\theta_1-\theta_i}{2}\right)\left[C\cos\left(\frac{\theta_1+\theta_i}{2}-\alpha\right)+S\sin\left(\frac{\theta_1+\theta_i}{2}-\alpha\right)\right]=$$
$$2A\sin\left(\frac{\theta_1-\theta_i}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta_1+\theta_i}{2}-\alpha-\psi\right),$$

де

$$C=\sum_{j=1}^{N}\cos\theta_j,\quad S=\sum_{j=1}^{N}\sin\theta_j,\quad A=\sqrt{C^2+S^2},\quad \psi=\arctan\frac{S}{C}.$$

5.9. Потребує детальнішого доведення лема 2.4.1 в частині достатності умови (iii) для існування положень рівноваги системи (2.12): адже тоді задача зводиться до рівняння, наведеного на с. 371, де в обох частинах фігурують функції відстані між кластерами. Слід було пояснити, чому таке рівняння має розв'язок при довільній функції $\alpha(\theta_1,\ldots,\theta_N,\beta)$.

5.10. Бажано було б чіткіше пояснити ситуацію з сідловими точками у трансверсальних напрямах, описану на с. 56. Тут стверджується, що для кожної такої точки стійкий і нестійкий многовид мають розмірність $N/2-1$. А на наступній сторінці вже йдеться про одновимірні стійкий та нестійкий многовиди.

5.11. У п. 2 Теореми 2.3.1 стверджується про нейтральну стійкість кожної особливої точки многовиду $\overline{\mathcal{M}}^{(N)}$ у $(N-2)$-х напрямах всередині цього многовиду, в той час як $\dim\overline{\mathcal{M}}^{(N)}=N-3$.

5.12. Нами виявлено певну кількість друкарських та граматичних помилок, невиправданих частих використань дефісів у математичних термінах (наприклад: одно-вимірний, косо-симетричний, дво-параметричний), неправильних посилань на номери формул та сторінок. Автор вживає термін «границя» замість «межа», «фіксована множина» замість «множина нерухомих точок» тощо. На наш погляд, варто було б замінити рідковживане слово «описання» на більш стандартне «опис». Ми не вважаємо за доцільне детально перелічувати вказані недоліки, оскільки їх легко виправити.

Вказані зауваження не мають істотного впливу на загальне позитивне враження від роботи і не зменшують цінності отриманих у ній результатів.

6. Загальна оцінка роботи. Дисертація О.А. Бурилка є завершеною науковою працею, у якій розв'язано важливі актуальні задачі сучасної теорії складних нелінійних динамічних систем та теорії біфуркацій. Вона відповідає паспорту спеціальності 01.01.02 – диференціальні рівняння. Отримані автором нові результати в сукупності є важливими і суттєвими для розвитку зазначеної галузі математики, оскільки вирішують актуальну проблему математичного обґрунтування явищ колективної поведінки в системах зв'язаних осциляторів.

Нами не виявлено в дисертації текстових запозичень, використання ідей, наукових результатів і матеріалів інших авторів без посилання на джерело.

7. Висновок. Викладене вище дає підстави для висновку, що розглянута дисертаційна роботи "Колективна динаміка та біфуркації у мережах зв'язаних фазових осциляторів" повною мірою задовольняє вимоги пп. 9, 10, 12, 13 та 14 «Порядку присудження наукових ступенів», затвердженою постановою Кабінету Міністрів України від 24 липня 2013 року № 567 зі змінами, внесеними згідно з постановами Кабінету Міністрів №656 від 19.08.2015, №1159 від 30.12.2015., №567 від 27.07.2016, №943 від 20.11.2019 щодо докторських дисертацій.

Вважаю, що автор дисертації Бурилко Олександр Андрійович заслуговує на присудження наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.02 – диференціальні рівняння.

Офіційний опонент
завідувач кафедри геометрії, топології
і динамічних систем
Київського національного університету
імені Тараса Шевченка,
доктор фіз.-мат. наук, професор І.О. Парасюк

Підпис І.О. Парасюка засвідчую!
Проректор з наукової роботи
О.І. Жилінська

Київський національний університет імені Тараса Шевченка * Україна * Ідентифікаційний код 02070944

Надійшов 18 лютого 2020р.