

ВІДГУК

офіційного опонента на дисертаційну роботу Бурилко Олександра Андрійовича "Колективна динаміка та біфуркації у мережах зв'язаних фазових осциляторів", поданої на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук зі спеціальності 01.01.02 – диференціальні рівняння

Дисертаційна робота присвячена дослідженню колективної динаміки та біфуркаціям у мережах зв'язаних фазових осциляторів, що описуються системами рівнянь

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N K_{ij} \Gamma_{ij}(\theta_i - \theta_j), \quad i = 1, \dots, N, \quad (1)$$

(моделями типу Курамото) та узагальненнями цих систем. Тут θ_i , ω_i , K_{ij} , $\Gamma_{ij}(x)$ – фазові змінні, власні частоти осциляторів, параметри зв'язків між осциляторами і гладкі 2π -періодичні функції зв'язку відповідно.

Оскільки такі системи описують колективні режими у різних галузях природознавства, то дослідження властивостей розв'язків системи (1) та аналогічних систем є **актуальним і практична значимість** результатів досліджень не викликає сумнівів.

Дисертація складається зі вступу, семи розділів, висновків, списку використаних джерел, що містить 353 найменування, та 6 додатків і містить 45 рисунків. Повний обсяг роботи становить 462 сторінки.

У **вступі** визначено об'єкт і предмет дослідження, обґрунтовано актуальність теми дисертації, висвітлено зв'язок роботи з науковими програмами, вказано мету, задачі й методи дослідження, наукову новизну результатів дисертації, теоретичне й практичне значення отриманих результатів, їх апробацію тощо.

У **першому розділі** формулюються основні завдання дослідження системи (1) та її узагальнень, подається огляд літератури, окреслюються питання, що залишилися відкритими, і анонсуються нові результати, що виносяться на захист. У цьому розділі коротко описана історія виникнення поняття синхронізації та більш загального поняття колективної динаміки,

показано мотивацію виникнення математичних моделей, що описують колективні режими у різних галузях природознавства, описано сучасний стан досліджень у цьому напрямку. Детально описано моделі зв'язаних осциляторів та наведено основні означення та поняття з теорії синхронізації.

Другий розділ присвячено аналізу колективної динаміки систем зв'язаних осциляторів із нелінійною функцією взаємодії. Тут розглянуто систему (1) у випадках

$$\Gamma_{ij}(x) = -\sin x$$

(модель Курамото),

$$\Gamma_{ij}(x) = -\sin(x - \alpha),$$

де $\alpha = \text{const}$ (модель Курамото–Сакагучі), та

$$\Gamma_{ij}(x) = -\sin(x - \alpha(R, \beta)),$$

де $\alpha(R, \beta)$ – функція фазового зсуву (модель Піковського–Розенблюма). Вважається, що в системі (1) параметри зв'язків K_{ij} між осциляторами є однаковими.

У цьому розділі описано існування та стійкість всіх режимів колективної динаміки для моделей глобально зв'язаних осциляторів з нелінійним зсувом у функції взаємодії. Показано, що такі системи мають режим повної синхронізації, дво-кластерні режими, граничні та гетероклінічні цикли, а також режим повної антифази з нульовим параметром порядку. Аналогічні результати отримано у випадках стандартних моделей Курамото та Курамото–Сакагучі. Запропоновані методи доповнюють теорію Ватанабе–Строганца при дослідженні біфуркацій на кластерних многовидах, де вказана теорія не діє.

Також проведено детальний біфуркаційний аналіз систем із квадратичним фазовим зсувом у функції взаємодії

$$\alpha(R, \beta) = \beta_1 + \beta_2 R^2.$$

Показано, що при зміні параметрів є типовою така послідовність біфуркаційних переходів: повна синхронізація \rightarrow дво-кластерний режим \rightarrow режим повільного перемикання між кластерами \rightarrow періодичний/квазіперіодичний частково синхронізований стан \rightarrow режим повної протифази.

Третій розділ присвячено дослідженню біфуркацій та колективної динаміки систем осциляторів з узагальненим зв'язком. Тут багато уваги приділено системам ідентичних осциляторів із дво-гармонічною функцією

взаємодії $g(x)$ та ідентичними силами зв'язків ($K = 1$). Найпростішою з таких систем є система

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N g(\theta_i - \theta_j), \quad i = 1, \dots, N, \quad (2)$$

де

$$g(x) = q \sin(x - \alpha) + r \sin(2x - \beta). \quad (3)$$

У випадку $\alpha \neq 0$, $q = r = -1$ і $\beta = 0$ ця система є моделлю Гансела–Мато–Моньє.

Показано, що система (2), (3) має особливі режими, деякі з яких неможливі у випадку розглянутих у другому розділі систем, проаналізовано глобальні біфуркації появи гетероклінічних циклів, частинами яких є різні локальні біфуркації, та описано сценарії біфуркаційних переходів при зміні параметрів.

У третьому розділі також з'ясовано, коли досліджувані системи є градієнтними та бездивергентними. Досліджено властивості систем, аналогічних (2), у випадку, коли осцилятори є неідентичними. Наведено твердження щодо екстремальної чутливості до збурень власних частот та руйнування інваріантних областей фазово-замкнених траєкторій.

У **четвертому розділі** досліджено систему зв'язаних осциляторів із притягуючими та відштовхуючими елементами

$$\begin{aligned} \frac{d\theta_i}{dt} &= -\frac{K_1}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_i - \theta_j - \alpha), \quad i \in J_1, \\ \frac{d\theta_i}{dt} &= -\frac{K_2}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_i - \theta_j - \alpha), \quad i \in J_2, \end{aligned} \quad (4)$$

в якій $K_1 K_2 < 0$, $J_1 \cap J_2 = \emptyset$ і $J_1 \cup J_2 = \{1, \dots, N\}$, що описує колективну взаємодію двох груп: конформістів (всі осцилятори прагнуть бути синхронізованими) та нонконформістів (осцилятори прагнуть знаходитись у глобальній антифазі). Для цієї моделі доведено існування різних стійких режимів: режим антифазного протистояння, режим розмитого протистояння, некогерентний режим перемоги нонконформістів, мандруючі хвилі, ренегатні режими синхронізації одного нонконформіста з конформістами. Для системи (4) з малим числом рівнянь і фазовим зсувом у функції взаємодії проведено біфуркаційний аналіз. Показано, що система має фазово

незамкнуті, періодичні, квазі-періодичні, гетероклінічні та хаотичні зв'язки.

У **п'ятому розділі** розглянуто циркулянтну мережу зв'язаних осциляторів

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + \sum_{j=1}^N K_j g(\theta_i - \theta_{i+j}), \quad j = 1, \dots, N, \quad (5)$$

де K_j , $j = 1, \dots, N$, – параметри сили взаємодії, а всі індекси беруться за модулем N . Показано, що система ідентичних осциляторів (5) має хвилі обертання для довільних функцій $g(x)$ та описано їхні біфуркації. У таких мережах з'ясовано співіснування консервативної і дисипативної динамік. Було показано, що консервативну та дисипативну частини розділяють сім'ї гетероклінічних циклів. Також описано структуру цих множин для мало-вимірних систем.

Шостий розділ присвячено дослідженню запропонованого дисертантом разом із П. Ешвінім математичного означення "слабкого химерного стану", що використовується для вивчення динаміки системи нерозрізнюваних осциляторів, тобто таких, що є ідентичними та взаємозамінними (вони мають однакову кількість та силу зв'язків). У розділі наведено модульну конструкцію мінімальної осциляторної мережі, що має стійкий слабкий химерний стан, та запропоновано метод конструювання блочних мереж нерозрізнюваних осциляторів, що мають химери різного типу. Показано існування гетероклінічних і хаотичних химер та різні біфуркаційні сценарії таких режимів.

У **сьомому розділі** досліджуються системи осциляторів, що складаються з центрального керуючого елемента та зв'язаних з ним периферичних керованих елементів. Для таких систем доведено твердження про існування, стійкість та біфуркації колективних режимів. Також з'ясовано умови існування стаціонарних і нестаціонарних режимів "боротьба за синхронізацію" та "переможець отримує все" і виявлено й описано новий вид біфуркації сідло-вузол на інваріантному торі.

Основними результатами дисертації є:

- Детальне дослідження колективної динаміки та біфуркації у мережах зв'язаних фазових осциляторів при різних значеннях параметрів зв'язків між ними та різних функціях зв'язку;
- Виявлення і дослідження нових властивостей та режимів колективної

динаміки досліджуваних систем зв'язаних фазових осциляторів (наприклад, таких, як режим повної синхронізації, двокластерні режими, граничні та гетероклінічні цикли, режим повної антифази і т.д.);

- Детальний буфуркаційний аналіз систем із квадратичним фазовим зсувом у функції взаємодії;

- Дослідження динаміки узагальнених систем глобально зв'язаних фазових осциляторів із дво-гармонічною функцією взаємодії та систем зв'язаних осциляторів із притягувальними і відштовхувальними елементами;

- Доведення співіснування консервативної та дисипативної динамік у циркулянтних мережах фазових осциляторів із кососиметричною матрицею взаємодії;

- Запровадження поняття "слабкого химерного стану", побудова модульних осциляторних систем із такими станами та аналіз біфуркацій появи химерних станів у системах із малим числом осциляторів;

- Твердження про існування, стійкість та біфуркації колективних режимів у осциляторній моделі з центральним елементом та в системі з адаптацією.

Зауваження до дисертації:

- Великий об'єм дисертації. Для докторської дисертації достатньо було б результатів перших чотирьох чи п'яти розділів;

- У першому розділі використовуються вирази без наповнення їх відповідним змістом. Це ускладнює читання дисертації;

- Є огріхи редакційного характеру.

Однак, наведені зауваження не впливають на позитивну оцінку дисертації О. А. Бурилко.

Одержані в дисертації результати є новими, наведені в ній ідеї і твердження сформульовано чітко, теореми супроводжуються детальними доведеннями, що засвідчує їх достовірність.

Основні результати дисертації опубліковано в 20 роботах, що відповідають вимогам до публікації результатів дисертаційних робіт у фахових виданнях із фізико-математичних наук. 4 із цих робіт надруковано без співавторів, 15 – у закордонних виданнях. Згідно з міжнародними наукометричними базами даних Scopus та Web of Science є понад 300 посилань на ці роботи, понад 250 з яких без самоцитувань. h-індекс цих робіт у вказаних базах даних становить 9. 17 робіт – тези та матеріали міжнародних наукових конференцій.

Автореферат повно і правильно відображає зміст дисертації.

Результати дисертації мають як теоретичну, так і практичну значимість, а сама дисертація є вагомим внеском до теорії диференціальних рівнянь та динамічних систем.

Враховуючи актуальність обраної теми досліджень, наукову новизну результатів, теоретичну цінність, обґрунтованість отриманих наукових результатів та кількість і якість публікацій, вважаю, що дисертаційна робота “Коллективна динаміка та біфуркації у мережах зв’язаних фазових осциляторів” зодовольняє вимогам пп. 9, 10, 12-14 “Порядку присудження наукових ступенів” (Постанова Кабінету Міністрів № 567 від 24.07.2013 зі змінами і доповненнями, внесеними згідно з постановами КМ України № 656 від 19.08.2015 р., № 1159 від 30.12.2015 р., № 567 від 27.07.2016 р., № 943 від 20.11.2019 та законом МОН України від 12.01.2017 р.) щодо докторських дисертацій, а її автор – Бурилко Олександр Андрійович, заслуговує на присудження йому наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.02 – диференціальні рівняння (111 - математика).

Офіційний опонент –
член-кореспондент НАН України,
доктор фізико-математичних наук, професор,
професор кафедри вищої математики
Національного університету водного
господарства та природокористування

Слюсарчук В. Ю.

Соборний підпис Слюсарчука В. Ю. відсутній
Відсутній підпис кандидата
Відсутній підпис
В. Ю. Слюсарчук

