

Національна Академія Наук України  
Інститут математики

Кваліфікаційна наукова  
праця на правах рукопису

**Бурилко Олександр Андрійович**

УДК 517.91

**ДИСЕРТАЦІЯ**

**КОЛЕКТИВНА ДИНАМІКА ТА БІФУРКАЦІЇ У МЕРЕЖАХ  
ЗВ'ЯЗАНИХ ФАЗОВИХ ОСЦИЛЯТОРІВ**

01.01.02 — диференціальні рівняння

111 — математика

Подається на здобуття наукового ступеня  
доктора фізико--математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень.

Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання  
на відповідне джерело \_\_\_\_\_ О. А. Бурилко

Науковий консультант:

**Бойчук Олександр Андрійович**

Член-кореспондент НАН України,  
доктор фіз.-мат. наук, професор

Київ — 2019

## Анотація

Бурилко О.А. Колективна динаміка та біфуркації у мережах зв'язаних фазових осциляторів. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.02 “Диференціальні рівняння” (111 — Математика). Інститут математики Національної Академії Наук України, Київ, 2019.

Дисертаційна робота присвячена дослідженню колективної динаміки у складних моделях зв'язаних елементів (здебільшого фазових осциляторів), заданих за допомогою систем звичайних диференціальних рівнянь з параметрами. Під колективною динамікою ми розуміємо різноманітні типи взаємодії між різними елементами, які мають власну індивідуальну динаміку. Зокрема проявами колективної динаміки у фазових моделях є: повна чи часткова фазова та частотна синхронізація, антифазні режими (пов'язані з виродженням середнього поля), режими рівномірного розподілу фаз, біжучі хвилі, кластерні режими, режими повільного перемикання між кластерами, хаотична синхронізація, химерні стани, тощо. Також до колективної динаміки можна віднести режими: переможець отримує все, змагання без переможця, конкуренція за синхронізацію, протистояння між конформістами та нонконформістами. У роботі розглядаються як добре відомі моделі, так і запропоновані нові, співавтором яких є автор дисертації. Кожна з досліджуваних моделей описує певні колективні природничі явища. Математичні результати отримані у дисертації можуть бути застосовані та вже застосовуються у фізиці, біології хімії, соціології та науці про нейрони. Моделі будуються з урахуванням тих чи інших природничих процесів, а кожен математичний результат має конкретну природничу інтерпретацію. Зокрема, результати отримані у роботі мають інтерпретації у системах надпровідникових з'єднань Джозефсона, дослідженню нейронних процесів уваги та пам'яті, дослідженні хвороби Паркінсона, соціологічному моделюванні взаємодії двох груп різних інтересів, моделюванні конфліктів. Також результати можуть бути використані для моделювання штучних нейронних мереж.

Основними методами дослідження систем у роботі є аналітична та якісна теорія диференціальних рівнянь, а також методи комп'ютерної симуляції. На

протязі усієї роботи широко використовується теорія біфуркацій для дослідження перехідних процесів між різними динамічними режимами, а також теорія коливань, теорія збурень та теорія складності. Аналітичні результати роботи добре підтверджені чисельними експериментами та проілюстровані великою кількістю схематичних та біфуркаційних діаграм, фазових портретів. Запропонований у роботі підхід також припускає виявлення можливих симетрій системи, дослідження інваріантних многовидів та інваріантних областей, стійких кластерних режимів, ієрархічних структур, тощо. При дослідженні складних систем зв'язаних елементів було виявлено та описано нові типи біфуркацій, зокрема, різні біфуркації появи гетероклінічних циклів та інваріантних торів.

Дисертаційна робота складається зі вступу та семи розділів.

Перший розділ присвячено огляду літератури з теми дисертації та викладенню допоміжних понять та тверджень. У даному розділі коротко описується історія досліджень синхронізації у складних системах зв'язаних елементів та наводиться мотивація появи математичних моделей, що описують явище колективної динаміки у різних галузях природознавства.

Другий розділ присвячено дослідженню колективної динаміки у моделі глобально зв'язаних фазових осциляторів з нелінійною функцією взаємодії, запропонованих А. Піковським та М. Розенблюмом. Така модель є узагальненням класичної моделі Курамото та моделі Курамото–Сакагучі з фазовим зсувом у функції зв'язку, а також вона більш детально описує певні фізичні об'єкти (зокрема, масиви надпровідникових з'єднань Джозефсона), що використовують взаємодію через середнє поле. Показано, що система з нелінійним фазовим зсувом має повністю синхронні розв'язки, дво–кластерні режими, декілька різних режимів повільного перемикавання між кластерами, режим повної антифази, а також складні періодичні та квазі–періодичні режими. Детально описано біфуркаційні переходи між різними колективними режимами. Показано, як наведена у даній роботі теорія доповнює теорію Ватанабе–Строгатца на кластерних інваріантних многовидах, де остання не може бути застосована. Теоретичні дослідження проілюстровані біфуркаційними та схематичними діаграмами для випадку малих розмірностей систем та

квадратичної нелінійності функції фазового зсуву.

Третій розділ присвячено дослідженню синхронізації та біфуркацій у системах глобально зв'язаних ідентичних фазових осциляторів з узагальненою функцією взаємодії. Найбільшу увагу приділено моделі Гансела–Мато–Монье та її узагальненню з довільною дво–гармонічною функцією взаємодії. Наведено твердження відносно стійкості режиму повної синхронізації, режиму рівномірного розподілу фаз та різним дво–кластерним режимам. Показано як симетрії системи впливають на існування кластерних режимів, інваріантних многовидів та канонічних інваріантних областей системи, що містять фазово замкнуті траєкторії. Особливу увагу приділено дослідженню існування режимів повільного перемикавання, що описуються гетероклінічними циклами різних типів. Описано різні глобальні біфуркації появи гетероклінічних циклів, частинами яких є різні локальні біфуркації. Зокрема, описано сценарії проходження сідло–вузлової/гетероклінічної,  $S_N$ –транскритичної гомоклінічної,  $Z_N$ –симетричної сідлово–зв'язної, транскритично–вилкової/гетероклінічної біфуркацій, а також змішаної вилкової біфуркації гетероклінічного та граничних циклів. Описано біфуркації корозмірності–два у таких системах та появу багато–вимірних неперервних множин гетероклінічних циклів. Наведено твердження відносно екстремальної чутливості до збурень частот системи ідентичних елементів та руйнування інваріантних областей фазово–замкнутих траєкторій. Показано, що системи глобально зв'язаних ідентичних осциляторів є градієнтними для довільних непарних періодичних функцій взаємодії та такі ж системи є бездивергентними, коли функція взаємодії є парною. Описано певні властивості консервативності системи з парною функцією зв'язків.

Четвертий розділ присвячено моделям зв'язаних осциляторів з одночасними притягуючими та відштовхуючими типами взаємодій. Такі системи моделюють боротьбу між собою груп конформістів та нонконформістів та нав'язування опонентам власної колективної поведінки. Дані моделі добре описують певні соціологічні явища. У роботі розглядалась модель Даїдо/Хонг–Строгатца та її узагальнення з фазовим зсувом у функції взаємодії. Отримано результати відносно стійкості та біфуркацій режиму синхронізації



двох груп та їх антифази ( $\pi$ -кластерного стану), режиму глобальної антифази, розмитого  $\pi$ -стану, біжучих хвиль, а також двох "ренегатних" режимів з приєднання одного нонконформіста до групи конформістів. Показано, що скінченно-вимірна система має декілька режимів, які є неможливими у редукованій системі Хонг-Строгатца, що описує нескінченну кількість взаємодіючих об'єктів. Проведено біфуркаційний аналіз притягуючи-відштовхуючої моделі з фазовим зсувом. Показано, що наявність фазового зсуву суттєво ускладнює динаміку системи, приводить до появи нових колективних режимів. Також показано, що такі системи можуть мати хаотичну динаміку при наявності чотирьох та більше елементів. Отримані результати ілюструють різні наслідки боротьби двох соціальних груп, що мають протилежні цілі.

У п'ятому розділі розглядаються кільця зв'язаних фазових осциляторів з анізотропною взаємодією. Коли з'єднання є кососиметричним, тобто коли анізотропія певним чином врівноважується, система демонструє стійке співіснування консервативної (Гамільтоново-подібної) та дисипативної динамік у одному фазовому просторі. Дане явище пояснюється часово-оборотною симетрією системи. Було показано, що консервативні області містять одно або дво-параметричні сім'ї періодичних орбіт (в залежності від парності фазового простору), що співіснують з неперервними сім'ями нейтрально-стійких квазі-періодичних торів. Чисельно показано, що консервативні області можуть також містити нейтральні хаотичні траєкторії. Детально описана геометрія маловимірних систем до п'яти взаємодіючих осциляторів. Було доведено, що межа між дисипативною та консервативною областями складається з неперервної сім'ї гетероклінічних циклів. Для систем великої кількості осциляторів з кососиметричною взаємодією знайдено достатні умови співіснування динамік, вказаних вище. Показано, що система може бути консервативно-дисипативною і при порушенні ідентичності частот фазових осциляторів. Доведено, що циркулянтна кососиметрична система є бездивергентною у випадку, коли функція взаємодії між елементами є непарною та така система є градієнтною коли функція взаємодії є парною. При термодинамічному переході кількості осциляторів до нескінченності, коли кількість зв'язків залишається скінченною, формально виведене амплітудне рівняння для розв'язків

у околі режиму синхронізації. Це рівняння має вигляд нелінійного рівняння Шрьодінгера і описує Гамільтоново-подібну область, що існує навколо синхронного стану, аналогічно випадку скінченно-компонентних кілець.

Шостий розділ присвячено дослідженню нового математичного об'єкту та фізичного явища, що має назву химерний стан (або химера) та яке було запропоноване Й. Курамото та Д. Баттогтохом. Це явище було спочатку описано як певний розв'язок системи диференціальних рівнянь і лише через десятиліття його фізична та біологічна природа продемонстрована на експериментах. Незважаючи на великий інтерес дослідників до химерних станів, їх строгого аналітичного означення довгий час не існувало. У даній роботі дається математичне означення "слабкого химерного стану" (що вперше було запропоновано П. Ешвінім спільно з автором дисертації) для мереж нерозрізнюваних фазових осциляторів. Дане означення є простим та зручним у використанні при дослідженні скінченно-вимірних, а особливо мало-вимірних систем. Було показано, що найменшою розмірністю системи, яка має слабкі химери, є чотири. Було запропоновано метод конструювання блочних мереж що мають химери різного типу. Зокрема було показано існування гетероклінічних химер. Було запропоновано метод виявлення та дослідження химерних станів у немодульованих системах осциляторів. Метод полягає у відшуканні додаткових симетрій, що дозволяє довести існування інваріантних многовидів системи, які відповідають різним типам кластеризації. Використовуючи даний метод, було показано існування різних типів ізольованих химер та неперервних множин химер для різних систем, а також різні біфуркаційні сценарії виникнення таких режимів.

У сьомому розділі наведено результати відносно систем зв'язаних осциляторів з центральним елементом. Такі системи вивчались з метою моделювання нейронних процесів зорового пошуку, уваги та пам'яті. Розглядається мережа, що складається з центрального керуючого осцилятора та множини радіально приєднаних до нього периферичних осциляторів. Прямі та зворотні зв'язки між центральним та периферичними осциляторами задаються за допомогою двох функцій взаємодії, що є гладкими, непарними та періодичними. Для описання змагання периферичних осциляторів за синхронізацію

з центральним, доведено твердження про асимптотичну стійкість положень рівноваги системи у фазових різницях, які описують синхронізацію групи  $k$  периферичних осциляторів з центральним, у той час, коли всі інші периферичні осцилятори знаходяться з ним у антифазі. Більш детально досліджено системи з дво–гармонічним зв'язком. Для таких систем детально описано симетрії, інваріантні многовиди та біфуркаційні переходи розв'язків, що відповідають різним колективним режимам. Встановлено та описано ієрархічну структуру системи по відношенню до власних інваріантних многовидів. Показано існування консервативного хаосу та АВС–потоків для систем розмірності чотири та вище. Також запропоновано та досліджувалось розширення описаної вище системи, а саме модель зв'язаних осциляторів з центральним елементом та адаптацією. У даній системі сили взаємодії між осциляторами суттєво залежать від взаємного розташування осциляторів між собою, та описуються додатковими диференціальними рівняннями. Додаткове рівняння вводиться також для контролю середньої частоти центрального осцилятора. Було доведено, що для широкої множини параметрів дана модель описує режим "переможець отримує все", що є одним з важливих обчислювальних принципів у штучних нейронних мережах. Дана розширена система більш точно моделює ієрархічну нейронну структуру зорового пошуку. Було доведено, що весь фазовий простір системи розбивається на області притягання різних атракторів, кожен з яких відповідає режиму переможець отримує все стаціонарних та нестаціонарних типів. Було доведено, що амплітуда осцилятора–переможця є завжди більшою амплітуд інших периферичних осциляторів, а частота центрального осцилятора прямує до власної частоти осцилятора–переможця. При дослідженні нестаціонарних режимів виявлено та описано новий вид біфуркацій, котрий ми називаємо сідло–вузол на інваріантному торі (SNIT).

**Ключові слова:**

Осциляторна мережа, фазові осцилятори, синхронізація, модель Курамото, біфуркація, гетероклінічний цикл, мережа з центральним елементом, система з адаптацією, химерний стан, інваріантний многовид, симетрія, часо–реверсивна система, параметр порядку, нелінійний фазовий зсув

## Abstract

Burylko O.A. Collective dynamics and bifurcation in networks of coupled phase oscillators. — Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

Thesis for the doctor of sciences degree in Physics and Mathematics by speciality 01.01.02 “Differential equations” (111 — Mathematics). — Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, 2019.

The dissertation is devoted to the study of collective dynamics in complex models of the coupled elements (mostly phase oscillators) given by the systems of ordinary differential equations with parameters. By collective dynamics we mean different types of interaction between different elements that have their own individual dynamics.

In particular, the manifestations of collective dynamics in phase models are: full or partial phase and frequency synchronization, anti-phase modes (related to the degeneration of the mean field), regimes of the uniform phase distribution, traveling waves, cluster modes, slow switching regimes between clusters, chaotic synchronization, chimera states, etc. Collective dynamics can also be attributed to the following modes: winner-take-all, winnerless competition, competition for synchronization, the opposition between conformists and contrarians. In this work we study well-known models, as well as propose the new ones, co-authored by the author of the thesis. Each of the studied models describes certain collective natural phenomena. The mathematical results obtained in the dissertation can be applied and have already been applied in physics, biology of chemistry, sociology and neuroscience. Models are constructed taking into account certain natural processes and each mathematical result has a specific natural interpretation. In particular, the results obtained in the work have interpretations in the systems of superconducting Josephson junctions, the study of neural processes of the attention and memory, Parkinson’s disease, sociological modeling of the interaction of two groups of different interests, modeling of conflicts. The results can also be used for modeling artificial neural networks.

The basic methods of the systems research in the work are analytical and qualitative theories of differential equations, as well as methods of computer simulation. Throughout the work, bifurcation theory is widely used to investi-

gate transients between different dynamic modes, as well as oscillation theory, perturbation theory, and complexity theory. The analytical results of the work are well substantiated by numerous experiments and illustrated by a large number of schematic and bifurcation diagrams, phase portraits. The approach proposed in the work also implies the detection of possible system symmetries, the study of invariant manifolds and invariant regions, stable cluster modes, hierarchical structures, etc. In the study of the complex systems of the coupled elements, new types of bifurcations have been identified and described, in particular, different bifurcations of the heteroclinic cycles and invariant tori appearance.

The dissertation consists of an introduction and seven sections.

The first section is devoted to the literature review on the topic of dissertation and to the presentation of the ancillary concepts and statements. This section briefly describes the history of synchronization research for complex system of the coupled elements. The motivation for the emergence of mathematical models describing the phenomenon of collective dynamics in various fields of science is provided.

The second section is devoted to the study of collective dynamics in the model of globally coupled phase oscillators with a nonlinear coupling function, proposed by A. Pikovsky and M. Rosenblum. Such a model is a generalization of the classical Kuramoto model and the Kuramoto–Sakaguchi model with phase shift in the coupling function, and it also describes in more detail certain physical objects (in particular, superconducting Josephson arrays) that use interaction through the mean field. It is shown that the system with nonlinear phase shift has completely synchronous solutions, two-cluster modes, several different slow switching regimes between clusters, full anti-phase mode, as well as complex periodic and quasiperiodic modes. Bifurcation transitions between different collective modes are described in detail. It is shown how the theory presented in this work supplements the Watanabe–Strogatz theory on cluster invariant manifolds where the latter cannot be applied. Theoretical studies are illustrated by bifurcation and schematic diagrams for the case of small dimensions of the systems with quadratic nonlinearity in the phase shift function.

The third section is devoted to the study of the synchronization and bifurcati-

on in the systems of globally coupled identical phase oscillators with a generalized coupling function. The greatest attention is paid to the Hansel–Mato–Meunier model and its generalization with an arbitrary two–harmonic interaction function. The statements about the stability of the mode of complete synchronization, the splay state and the different two–cluster modes are given. The influence of the system symmetries to the existence of cluster modes, invariant manifolds, and canonical invariant regions of the system, containing phase–locked trajectories, is shown. Particular attention is paid to the study of the existence of the slow switching regimes, which are described by different types of the heteroclinical cycles. Different global bifurcations (which consist of different local bifurcations) of the heteroclinic cycles appearance are described. In particular, the transition scenarios of the saddle–node/heteroclinic bifurcation,  $\mathbf{S}_N$ –transcritical homoclinic bifurcation,  $\mathbb{Z}_N$ –symmetric saddle–connected bifurcation, mixed pitchfork bifurcation of the heteroclinic and limit cycles, as well as transcritical–pitchfork/heteroclinic bifurcation are described. The codimension–two bifurcations in such systems and emergence of multi–dimensional continuous sets of heteroclinic cycles are described. The statements regarding the extreme sensitivity to detuning of the system of identical elements and the destruction of invariant regions of phase–closed trajectories are presented. It is shown that systems of globally coupled identical oscillators are gradient for arbitrary odd periodic coupling functions and the same systems are divergence–free when the coupling function is even. Some properties of the conservative system with the even coupling function are described.

The fourth section is devoted to the models of coupled oscillators with both simultaneous attractive and repulsive interactions. Such systems model the struggle between groups of conformists and contrarians and the imposition of their collective behavior on their opponents. These models well describe certain sociological phenomena. Daido/Hong–Strogatz model and its generalization with phase shift in the interaction function are considered in the manuscript. The results are obtained concerning the stability and bifurcations of the two groups synchronization mode and their anti–phase regime ( $\pi$ –cluster state), the global anti–phase regime, blurred  $\pi$ –state, traveling waves, as well as two ”renegade ” regimes of joining one contrarian oscillator to the group conformists. It is shown

that the finite-dimensional system has several modes that are impossible in the reduced Hong–Strogatz system, which describes an infinite number of interacting objects. The bifurcation analysis of the attractive–repulsive model with phase shift is carried out. It is shown that the presence of phase shift significantly complicates the dynamics of the system, leading to the emergence of new collective regimes. It has also been shown that such systems can have a chaotic dynamics in the presence of four or more elements. The results obtained illustrate the different consequences of the struggle between two social groups that have opposite goals.

In the fifth section we consider rings of coupled phase oscillators with anisotropic coupling. When the coupling is skew-symmetric, i.e., when the anisotropy is balanced in a specific way, the system shows robustly the coexistence of conservative (Hamiltonian-like) and dissipative dynamics in the phase space. We relate this phenomenon to the time-reversibility of the system. It has been shown that the conservative regions contain one or two-parametric families of the periodic orbits (depending on the parity of the phase space), which coexist with continuous families of neutral–stable quasi-periodic tori. It is numerically shown that conservative regions can also contain neutral chaotic trajectories. The geometry of low-dimensional systems up to five interactive oscillators is described in detail. It is proven that the boundary between the dissipative and conservative regions consists of families of heteroclinic cycles. For larger rings with skew-symmetric coupling, some sufficient conditions for the co-existence of the above mentioned dynamics are provided. It is shown that the system can also be conservative–dissipative when the frequency identity of the phase oscillators is violated. It is proven that the circulant skew-symmetric system is divergence-free in the case when the interacting function between the elements is odd and such a system is gradient in the case of even coupling function. In the case of the thermodynamic transition of the oscillators number to the infinity, when the number of couplings is finite, we formally derive the amplitude equation for solutions in the neighborhood of the synchronous solution. This equation has the form of a nonlinear Schrödinger equation and describes the Hamiltonian-like region existing around the synchronous state similarly to the case of finite rings.

The sixth section is devoted to the study of a new mathematical object

and physical phenomenon called the chimera state (or chimera) and which was proposed by Y. Kuramoto and D. Battogtokh. This phenomenon was originally described as a certain solution to the system of differential equations and only decades later its physical and biological nature was demonstrated by the experiments. Despite the great interest of researchers in the chimera states, their rigorous analytical definition has not existed for a long time. In this section we give the mathematical definition of a "weak chimera state" (first the definition was proposed by P. Ashwin together with author of the thesis) for the networks of indistinguishable phase oscillators. This definition is easy and convenient to use in the study of finite-dimensional and especially small-dimensional systems. It has been shown that the smallest dimension of the system with weak chimeras is four. We proposed the method of the constructing of modular networks that have chimera states of the different types. In particular, the existence of the heteroclinic chimeras is demonstrated. A method for the detection and study of the chimera states in non-modular oscillator systems has been proposed. Using this method, the existence of different types of isolated chimera states and continuous sets of the chimera solutions for different systems has been demonstrated, as well as different bifurcation scenarios for such regimes.

The seventh section presents the results with respect to the systems of coupled oscillators with the central element. Such systems have been studied to model the neural processes of visual search, attention, and memory. A network consisting of the central executive oscillator and a set of radially coupled peripheral oscillators is considered. Feed-forward and feedback connections between the central oscillator and peripheral oscillators are determined by two interaction functions which are assumed to be smooth, odd, and periodic. To describe the competition of peripheral oscillators for the synchronization with the central oscillator, we have proved the statement about the asymptotic stability of equilibria of the system in phase differences which correspond to the in-phase synchronization of a group of  $k$  peripheral oscillators, while other peripheral oscillators are in anti-phase with the central oscillator. The systems with the central element and two-harmonic coupling functions are studied in more detail. The symmetries, the invariant manifolds, and the bifurcation transitions of the solutions, corresponding to different collecti-



ve modes are thoroughly described for such systems. The hierarchical structure of the system with respect to its own invariant manifolds is established and described. The existence of conservative chaos and ABC flows for systems of dimensions four and higher is shown. The extension of the system described above is also proposed (together with Y. Kazanovich and R. Borisjuk) and studied, namely the model of the coupled oscillators with central element and adaptation. In this system, the interaction strengths between the oscillators are significantly dependent on the relative positioning of the oscillators with each other, and these interactions are described by additional differential equations. An additional equation is also introduced for the control of the average frequency of the central oscillator. It has been proven that for a wide variety of parameters, the model describes the 'winner-take-all' mode, which is one of the important computational principles in artificial neural networks. The extended system models the hierarchical neural structure of visual search more accurately. It has been proven that the entire phase space of the system is split into attracting regions of different stable solutions that corresponds to different stationary and non-stationary winner-take-all regimes. It has been proven that the amplitude of the winner-oscillator has the highest amplitude between other peripheral oscillators, and that the frequency of the central oscillator tends to the eigen frequency of the winner-oscillator. In the study of non-stationary modes, a new bifurcation type called a saddle-node on invariant torus (SNIT) bifurcation has been observed and is described in detail.

**Key words:**

Oscillators network, phase oscillators, synchronization, Kuramoto model, bifurcation, heteroclinic cycle, network with central element, system with adaptation, chimera state, invariant manifold, symmetry, time-reversible system, order parameter, nonlinear phase shift

## Список публікацій здобувача

1. О. Бурилко, Колективна динаміка та біфуркації у симетричних мережах фазових осциляторів. II, *Нелінійні коливання*, **22(3)**, 312–340 (2019).; [https://www.imath.kiev.ua/~nosc/web/show\\_article.php?article\\_id=1284&lang=en](https://www.imath.kiev.ua/~nosc/web/show_article.php?article_id=1284&lang=en)
2. О. Бурилко, Колективна динаміка та біфуркації у симетричних мережах фазових осциляторів. I, *Нелінійні коливання*, **22(2)**, 165–195 (2019).; [https://www.imath.kiev.ua/~nosc/web/show\\_article.php?article\\_id=1275&lang=en](https://www.imath.kiev.ua/~nosc/web/show_article.php?article_id=1275&lang=en).
3. O. Burylko, A. Mielke, M. Wolfrum, S. Yanchuk, Coexistence of Hamiltonian-like and dissipative dynamics in rings of coupled phase oscillators with skew-symmetric coupling, *SIAM Journal of Applied Dynamical Systems*, **17(3)**, 2076–2105 (2018).; Doi: 10.1137/17M1155685
4. O. Burylko, Y. Kazanovich, R. Borisjuk, Winner-take-all in a phase oscillator system with adaptation, *Scientific Reports*, **8**, 416 (2018).; Doi: 10.1038/s41598-017-18666-3.
5. P. Ashwin, C. Bick, O. Burylko, Identical phase oscillator networks: bifurcations, symmetry and reversibility for generalized coupling, *Frontiers in Applied Mathematics and Statistics*, **2(7)**, (2016).; Doi: 10.3389/fams.2016.00007.
6. P. Ashwin, O. Burylko, Weak chimeras in minimal networks of coupled phase oscillators, *Chaos*, **25(1)**, 013106 (2015).; Doi: 10.1063/1.4905197.
7. O. Burylko, Y. Kazanovich, R. Borisjuk, Bifurcation study of phase oscillator systems with attractive and repulsive interaction, *Physical Review E*, **90**, 022911 (2014).; Doi: 10.1103/PhysRevE.90.022911.

8. R. Merrison-Hort, N. Yousif, F. Njap, U.G. Hofmann, O. Burylko, R. Borisyyuk, An interactive channel model of the basal ganglia: Bifurcation analysis under healthy and parkinsonian conditions, *The Journal of Mathematical Neuroscience*, **3(14)**, 1–40 (2013).; Doi: 10.1186/2190-8567-3-14.
9. Y. Kazanovich, O. Burylko, R. Borisyyuk, Competition for synchronization in a phase oscillator system, *Physica D*, **261**, 114–124 (2013).; Doi: 10.1016/j.physd.2013.07.008.
10. O. Burylko, Y. Kazanovich, R. Borisyyuk. Bifurcations in phase oscillator networks with a central element, *Physica D*, **241**, 1072–1089 (2012).; Doi: 10.1016/j.physd.2012.02.020.
11. O. Burylko, Competition and bifurcations in phase oscillator networks with positive and negative couplings. *Proceedings of International Workshop on Nonlinear Dynamics of Electronic Systems*, **20**, 161–164, (2012).; <https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/6289522>.
12. O. Burylko, A. Pikovsky, Desynchronization transitions in nonlinearly coupled phase oscillators, *Physica D*, **240**, 1352–1361 (2011).; Doi: 10.1016/j.physd.2011.05.016.
13. P. Ashwin, O. Burylko, Y. Maistrenko, Bifurcation to heteroclinic cycles and sensitivity in three and four coupled phase oscillators, *Physica D*, **237**, 454–466 (2008).; Doi: 10.1016/j.physd.2007.09.015.
14. Y. Maistrenko, B. Lysyansky, C. Hauptmann, O. Burylko, P.A. Tass, Multistability in the Kuramoto model with synaptic plasticity, *Physical Review E*, **75**, 066207 (2007).; Doi: 10.1103/PhysRevE.75.066207.
15. P. Ashwin, O. Burylko, Y. Maistrenko, O. Popovych, Extreme sensitivity to detuning for globally coupled phase oscillators. *Physical Review Letters*, **96**, 054102 (2006).; Doi: 10.1103/PhysRevLett.96.054102.

16. Y. Maistrenko, O. Popovych, O. Burylko, P.A. Tass, Mechanism of desynchronization in the finite-dimensional Kuramoto model. *Physical Review Letters*, **93**, 084102 (2004).; Doi: 10.1103/physrevlett.93.084102.
17. O. Burylko, A. Davydenko, To the problem of complementability of periodic frame to a periodic basis, *Nonlinear Oscillations*, **4**(4), 458–470 (2001).; [https://www.imath.kiev.ua/~nosc/web/show\\_article.php?article\\_id=432&lang=en](https://www.imath.kiev.ua/~nosc/web/show_article.php?article_id=432&lang=en).
18. O. Burylko, A. Davydenko, To the problem of introduction of local coordinates in the neighbourhood of an invariant toroidal set, *Nonlinear Oscillations*, **4**(2), 171–189 (2001).; [https://www.imath.kiev.ua/~nosc/web/show\\_article.php?article\\_id=129&lang=en](https://www.imath.kiev.ua/~nosc/web/show_article.php?article_id=129&lang=en).
19. О. Бурилко, Функції Гріна слабкорегулярних систем лінійних диференціальних рівнянь. *Нелінійні Коливання*, **3**(3), 315–322 (2000).; [https://www.imath.kiev.ua/~nosc/web/show\\_article.php?article\\_id=27&lang=en](https://www.imath.kiev.ua/~nosc/web/show_article.php?article_id=27&lang=en).
20. A.M. Samoilenko, A.A. Burilko, I.N. Grod, Moduli of continuity of the derivatives of invariant tori for linear extensions of dynamical systems, *Differential Equations*, **36**, 120–131 (2000).; Doi: 10.1007%2F02754171.

# ЗМІСТ

<b>Перелік умовних позначень</b>	<b>23</b>
<b>1 Огляд літератури та попередні відомості</b>	<b>34</b>
1.1 Синхронізація в системах зв'язаних динамічних об'єктів . . . . .	35
1.2 Моделі фазових осциляторів типу Курамото . . . . .	40
1.2.1 Описання системи . . . . .	40
1.2.2 Система у фазових різницях . . . . .	42
1.2.3 Означення колективних динамічних режимів . . . . .	43
<b>2 Системи зв'язаних осциляторів з нелінійною функцією взаємодії</b>	<b>47</b>
2.1 Виникнення моделі . . . . .	47
2.2 Модель з нелінійним зсувом: кластери та многовиди . . . . .	49
2.3 Біфуркації в моделі Курамото–Сакагучі . . . . .	53
2.3.1 Положення рівноваги моделі Курамото–Сакагучі . . . . .	53
2.3.2 Дво–кластерні режими . . . . .	54
2.3.3 Антифазний многовид $\mathcal{M}^{(N)}$ . . . . .	57
2.3.4 Періодичні орбіти та гетероклінічні цикли . . . . .	58
2.3.5 Особливі множини системи Курамото–Сакагучі . . . . .	61
2.3.6 Стандартна модель Курамото . . . . .	62
2.4 Біфуркації в моделі з нелінійною функцією зв'язку . . . . .	64
2.4.1 Біфуркації режиму повної синхронізації . . . . .	66
2.4.2 Біфуркації кластерів . . . . .	67
2.4.3 Гетероклінічні цикли . . . . .	68
2.4.4 Стійкість многовиду $\mathcal{M}^{(N)}$ . . . . .	71
2.4.5 Граничні цикли та їх біфуркації . . . . .	74
2.4.6 Атрактори та мультистабільність . . . . .	78
2.4.7 Колективна динаміка моделі з нелінійним фазовим зсувом	80
2.5 Нелінійно зв'язані осцилятори з квадратичною фазовою нелінійністю . . . . .	81

2.5.1	Три взаємодіючі осцилятори . . . . .	85
2.5.2	Чотири та більше зв'язаних осциляторів . . . . .	86
<b>3</b>	<b>Мережі фазових осциляторів з узагальненим зв'язком</b>	<b>90</b>
3.1	Модель ідентичних осциляторів з загальною функцією взаємодії	91
3.2	Симетрії та інваріантні множини у моделях глобально зв'язаних фазових осциляторів . . . . .	92
3.2.1	Ідентичні фазові осцилятори та симетрична динаміка .	92
3.2.2	Параметричні симетрії для дво-гармонічних зв'язків . .	94
3.2.3	Фазові симетрії та канонічні інваріантні області . . . . .	95
3.3	Стійкості та біфуркації розв'язків, спричинені симетріями . . .	97
3.3.1	Стійкість та біфуркації синхронного розв'язку . . . . .	98
3.3.2	Стійкість та біфуркації режиму рівномірно розподілених фаз . . . . .	100
3.3.3	Режим глобальної антифази: множина з нульовим параметром порядку . . . . .	103
3.3.4	Стійкості та біфуркації дво-кластерних станів . . . . .	105
3.3.5	Система у фазових різницях . . . . .	108
3.4	Біфуркації у системі двох зв'язаних фазових осциляторів . . .	111
3.5	Біфуркації гетероклінічних циклів у моделі трьох осциляторів	115
3.5.1	Біфуркації на кластерах при $\beta \neq 0$ . . . . .	115
3.5.2	Система Гансела–Мато–Монье у фазових різницях . . .	117
3.5.3	Біфуркації для $N = 3$ у $(\alpha, r)$ -площині . . . . .	119
3.6	Біфуркації у моделі чотирьох фазових осциляторів . . . . .	127
3.6.1	Біфуркації на кластерних многовидах при $\beta \neq 0$ . . . . .	127
3.6.2	Система Гансела–Мато–Монье чотирьох осциляторів .	130
3.6.3	Структура гетероклінічних циклів . . . . .	133
3.6.4	Біфуркації появи гетероклінічних циклів . . . . .	134
3.6.5	Зміна стійкості розв'язків у моменти біфуркацій . . . . .	137
3.6.6	Резюме гетероклінічних біфуркацій для $N = 4$ . . . . .	142
3.7	Динаміка моделі Гансела–Мато–Монье довільної розмірності .	143

3.8	Динаміка моделей з парними та непарними функціями взаємодії	146
3.8.1	Гرادієнтні властивості системи з непарним зв'язком . . .	147
3.8.2	Бездивергентність системи з парною функцією взаємодії	149
3.9	Екстремальна чутливість до збурень у фазових моделях . . . .	154
3.9.1	Чутливість до збурень частот при $N = 2$ . . . . .	157
3.9.2	Екстремальна чутливість при $N = 3$ . . . . .	158
3.9.3	Екстремальна чутливість систем старших розмірностей	160
<b>4</b>	<b>Біфуркації в системах зв'язаних осциляторів з притягуючою та відштовхуючою взаємодією</b>	<b>162</b>
4.1	Виникнення моделі . . . . .	162
4.2	Описання моделі та деякі її властивості . . . . .	165
4.2.1	Осциляторна мережа з притяганням та відштовхуванням	165
4.2.2	Параметри порядку системи з притягуванням та відштовхуванням . . . . .	166
4.2.3	Редукція до фазових різниць . . . . .	168
4.2.4	Симетрії системи . . . . .	169
4.3	Інваріантні многовиди системи . . . . .	171
4.3.1	Кластери та відповідні многовиди . . . . .	171
4.3.2	Інваріантний антифазний многовид . . . . .	173
4.4	Положення рівноваги моделі Хонг–Строгатца . . . . .	174
4.4.1	Положення рівноваги системи у фазових різницях . . .	175
4.4.2	Біфуркаційні обмеження . . . . .	176
4.5	Стійкі режими системи Хонг–Строгатца . . . . .	178
4.5.1	Стаціонарні стійкі режими . . . . .	178
4.5.1.1	Стійкі стани з координатами 0 та $\pi$ . . . . .	178
4.5.1.2	Інваріантний многовид $\overline{\mathcal{M}}^{(N)}$ : нонконформісти виграють . . . . .	183
4.5.2	Нестационарні стійкі режими . . . . .	188
4.6	Система з фазовим зсувом . . . . .	191
4.6.1	Система двох осциляторів . . . . .	191
4.6.2	Система трьох осциляторів . . . . .	192

	20
4.6.3	Система чотирьох осциляторів . . . . . 194
4.6.4	Режими, які є неможливими у моделі Хонг–Строгатца . 198
4.7	Загальні властивості багатовимірної системи з притяганням та відштовхуванням . . . . . 200
<b>5</b>	<b>Співіснування консервативної та дисипативної динаміки у кільцевих мережах зв'язаних осциляторів 203</b>
5.1	Попередні результати . . . . . 203
5.2	Осциляторна модель з циркулянтним зв'язком . . . . . 206
5.3	Синхронізація розв'язків та хвилі обертання . . . . . 208
5.3.1	Стійкість хвиль обертання . . . . . 211
5.3.2	Модель з несиметричними протилежними зв'язками . . 213
5.4	Співіснування динаміки Гамільтонового типу та дисипативної динаміки . . . . . 215
5.4.1	Часово–оборотна симетрія системи . . . . . 216
5.4.2	Співіснування різних розв'язків . . . . . 219
5.5	Біфуркаційні властивості мало–вимірних систем . . . . . 223
5.5.1	Три зв'язані осцилятори . . . . . 224
5.5.1.1	Симетрії та положення рівноваги . . . . . 225
5.5.1.2	Біфуркації системи . . . . . 225
5.5.2	Чотири зв'язані осцилятори . . . . . 229
5.5.3	П'ять та більше зв'язаних осциляторів . . . . . 235
5.6	Неідентичні осцилятори . . . . . 239
5.6.1	Бездивергентна динаміка . . . . . 239
5.6.2	Попарно рівновіддалені власні частоти та оборотність системи . . . . . 243
5.6.3	Системи з фазово незамкнутою консервативною областю 245
5.7	Великі системи ( $N \rightarrow \infty$ ) та нелінійне рівняння Шрьодінгера 247
<b>6</b>	<b>Слабкі химерні стани у мінімальних мережах фазових осциляторів 251</b>
6.1	Поняття “химерний стан” . . . . . 251



6.2	Мережі з химерами . . . . .	254
6.3	Нерозрізнявані фазові осцилятори та слабкі химерні стани . .	257
6.3.1	Мінімальна мережа зі стійким химерним станом . . . . .	258
6.3.2	Гетероклінічні химери у блочних мережах . . . . .	262
6.4	Слабкі химерні стани у немодульованих мережах . . . . .	267
6.4.1	Стійкі та нейтральні слабкі химери у мережах шести осциляторів . . . . .	268
6.4.2	Слабкі химерні стани та біфуркації для шести–осциляторної системи . . . . .	270
6.5	Декілька зауважень відносно химер . . . . .	272
<b>7</b>	<b>Системи осциляторів з центральним елементом</b>	<b>275</b>
7.1	Змагання за синхронізацію у системах з центральним елементом . . . . .	275
7.1.1	Вступ до моделей з центральним елементом . . . . .	275
7.1.2	Система з ідентичними периферичними осциляторами .	278
7.1.3	Положення рівноваги у зірко–подібних системах . . . . .	279
7.1.4	Зірко–подібні мережі з дво–гармонічною взаємодією . .	282
7.1.5	Система з локальними зв'язками між периферичними елементами . . . . .	288
7.1.6	Консервативний хаос . . . . .	289
7.2	<i>Переможець отримує все</i> в моделях з центральним елементом та адаптацією . . . . .	292
7.2.1	Динамічний режим <i>переможець отримує все</i> . . . . .	292
7.2.2	Описання моделі з адаптацією . . . . .	295
7.2.3	Ідентичні периферичні осцилятори . . . . .	299
7.2.4	Неідентичні периферичні осцилятори та стаціонарні розв'язки . . . . .	303
7.2.5	SNIT біфуркація (сідло–вузол на інваріантному торі) .	307
7.2.6	Нестаціонарні розв'язки у моделі з адаптацією . . . . .	316
7.2.7	Режим без переможців . . . . .	322

7.2.8	Мультистабільність та біфуркації режимів <i>переможець отримує все</i> . . . . .	323
7.2.9	Інші моделі з керуючим елементом . . . . .	326
	<b>Обговорення</b>	<b>327</b>
	<b>Висновки</b>	<b>329</b>
	<b>Список використаних джерел</b>	<b>333</b>
	<b>Додаток А. Список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації</b>	<b>362</b>
	<b>Додаток Б. Деякі поняття з теорії біфуркацій</b>	<b>369</b>
	<b>Додаток В. Доведення окремих тверджень</b>	<b>371</b>
	<b>Додаток Г. Теорія Ватанабе-Строгатца</b>	<b>411</b>
	<b>Додаток Д. Рисунки</b>	<b>417</b>
	<b>Додаток Е. Таблиці</b>	<b>459</b>

## Перелік умовних позначень

---

$\mathbb{N}$	множина підпростори системнатуральних чисел
$\mathbb{Z}$	множина цілих чисел
$\mathbb{R}$	множина дійсних чисел
$\mathbb{C}$	множина комплексних чисел
$\operatorname{Re}(z)$	дійсна частина комплексного числа $z$
$\operatorname{Im}(z)$	уявна частина комплексного числа $z$
$i$	уявна одиниця ( $i = \sqrt{-1}$ )
$\emptyset$	порожня множина
$\mathbb{S}^1$	одиничне коло: $\mathbb{S}^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$
$\mathbb{T}^2$	дво-вимірний тор: $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$
$\mathbb{T}^n$	$n$ -вимірний тор
$\operatorname{Id}$	тотожне відображення
$\partial A$	межа множини $A$
$\ \cdot\ $	норма в $\mathbb{R}^n$ або відповідна норма у просторі матриць
$:=$	дорівнює за означенням
$\operatorname{rank}(A)$	ранг матриці $A$
$I_n$	квадратна $n$ -вимірна одинична матриця
$\operatorname{sign}(x)$	signum-функція числа $x \in \mathbb{R}$
$W^s, W^u$	стійкий та нестійкий інваріантні многовиди
$[x]$	ціла частина числа $x$

---

# ВСТУП

**Актуальність теми.** Мережі зв'язаних осциляторів привернули значну увагу багатьох дослідників за останні півстоліття. Їх вивчення може сприяти розумінню основних динамічних особливостей зв'язаних систем багатьох видів, починаючи від атомів чи нейронів і закінчуючи лазерами та живими організмами. Основна проблема полягає в розумінні того, яким чином специфічні властивості індивідуальної поведінки окремих динамічних об'єктів (осциляторів, нейронів, тощо) та архітектура зв'язків між різними об'єктами можуть призвести до появи нових колективних явищ. Особливо складним завданням є робота з мережами, що містять велику кількість елементів. Термодинамічні граничні переходи та дослідження інтегро-диференціальних рівнянь дають гарне пояснення природних процесів. З іншого боку, лише аналітичне вивчення маловимірних систем може дати нам точне розуміння перехідних процесів та складних колективних поведінок взаємодіючих об'єктів.

Основоположним та найбільш глибоко вивченим колективним явищем є синхронізація кількох зв'язаних подібних динамічних об'єктів. Перші експерименти, що засвідчили протифазову синхронізацію двох годинникових маятників були проведені Х. Гюйгенсом ще у сімнадцятому сторіччі. Сплеск наукового інтересу до синхронізації почався наприкінці дев'ятнадцятого — на початку двадцятого століть з виникненням електродинаміки та успіхами у дослідженні взаємодії нейронів. Подальші поштовхи до розвитку теорії синхронізації та колективної динаміки були спричинені винаходом комп'ютерів та появою кібернетики, появою радіофізики, розвитком теорії коливань, появою теорії біфуркацій, успіхами у дослідженні людського мозку та появою математичних нейронних моделей (моделі Ходжкіна–Хакслі, у першу чергу),

різноманітними біологічними спостереженнями колективної динаміки живих організмів, виявленням коливних хімічних реакцій, винайденням лазерів, появою приладів, що стимулюють роботу серця та мозку, появою комп'ютерних мереж та штучних нейронних мереж. Серед вчених, які внесли значний внесок у становлення теорії синхронізації, варто згадати Дж. Релея, Б. Ван-дер-Поля, Е. Епплтона, А. Андронова, А. Вітта, Н. Віннера. В середині двадцятого століття з'явилося розуміння складності колективної динаміки взаємодіючих об'єктів та необхідність створення математичних моделей, які б описували спільні риси синхронізації навіть незалежно від природи та складності взаємодіючих об'єктів та були якомога простішими та зручними для подальшого аналітичного вивчення. Перша вагома спроба була здійснена А. Вінфрі у 1967 році, який запропонував модель взаємозв'язаних осциляторів. Іншим значним проривом у теорії синхронізації можна вважати запропоновану японським фізиком Йошикі Курамото модель зв'язаних фазових осциляторів у 1975 році у роботі. Широке визнання вченими різних природничих спеціальностей модель Курамото отримала після виходу його книги про хімічні осцилятори у 1984 році. Популярною модель Курамото стала саме завдяки своїй простоті, зручності для дослідження та можливості описання структурно дуже відмінних між собою режимів колективної динаміки, таких як повна синхронізація, часткова синхронізація, протифазна синхронізація, хвилі обертання, довготривала синхронізація з перемиканням, химерні стани і т.п. Важливою особливістю вказаної моделі є її гнучкість: можливість легко описувати різні мережі взаємодій, можливість легко ускладнювати способи взаємодії, наближаючи математичних опис до конкретного природничого явища. Дослідження моделі Курамото та її застосування призводять до появи нових типів моделей колективної динаміки. Відмітимо, зокрема, моделі Курамото з запізненням, з пластичністю, з адаптацією, з випадковими розподілами частот та шумом, з нелінійними фазовими зсувами, зі зворотнім впливом, з інерцією, з центральним елементом, з хабами, а також нескінченно-вимірні, різницеві, ланцюгові та кільцеві осциляторні моделі, мережі осциляторів, задані специфічними графами. Вагомий внесок у розробку теорії зв'язаних фазових осциляторів було зроблено С. Стругатцем, А. Піковським, М. Розенблюмом,

Ю. Куртсом, Х. Сакагучі, Дж. Кроффордом, С. Ватанабе, Н. Копелл, Б. Ерментраутом, І. Блехманом, Е. Оттом, Х. Даїдо, Р. Міролло, А. Аренасом, Дж. Свіфтом, П. Ешвіним, Х. Корі, Д. Ганселом, Р. Борисюком, Я. Казановичем, Ю. Майстренком, О. Омельченком, О. Поповичем, Дж. Асеброном, П. Тассом, Х. Шустером, П. Вагнером, К. Візенфельдом, Х. Хонг, М. Тімме, П. Холмсом, Е. Брауном, Й. Накагава. Дж. Асеброном та іншими. Дослідження моделей зв'язаних фазових осциляторів привело до виникнення нових глибоких теорій, як, зокрема, теорія Ватанабе–Строгатца, анзац Отта–Антонсена та теорія Хонг–Строгатца. Описання нових колективних режимів, таких, як химерний стан та режим повільного перемикування між кластерами, також з'явилися завдяки вивченню мереж зв'язаних осциляторів.

Моделі зв'язаних осциляторів знаходять широке застосування при дослідженнях нейронних мереж, надпровідникових з'єднань Джозефсона, масивах лазерів та моделюванні багатьох інших складних систем взаємодіючих елементів. Незважаючи на те, що для моделювання окремих елементів мережі у більшості прикладних випадків застосовуються багатовимірні системи з дуже складною індивідуальною поведінкою, для моделювання їх колективної поведінки може бути достатньо вивчення лише їх фазової синхронізації. Одним зі способів дослідження синхронізації даних є виділення фаз сигналів за допомогою перетворення Гільберта, що дає змогу подальшого їх дослідження у вигляді осциляторних систем. Іншим чином осциляторна модель може бути отриманою як усереднення більш складної системи зі збереженням певних властивостей колективної поведінки. Слід відмітити, що стандартна модель Курамото виникла як фазова частина зв'язаних комплексно–значних систем Стюарта–Ландау. Мотивацією Й. Курамото до створення моделі слугували його спостереження поведінки хімічних та біологічних осциляторів. Здебільшого знайдені та добре описані режими для простих осциляторних моделей виявляються згодом у тій чи іншій (можливо видозміненій) формі у складних фізичних, хімічних чи нейронних системах. Сказане вище найкраще демонструє явище химерних станів, існування яких спочатку було описано математично для мереж осциляторів, а згодом було виявлено у різноманітних, і часто досить складних природничих системах. Дослідження простіших моде-

лей взаємодіючих елементів часто показує напрямок та дає інструменти для дослідження більш складних та загальних систем з подібними особливостями побудови мереж. Зокрема, за допомогою систем зв'язаних осциляторів також були отримані значні теоретичні результати відносно про існування, стійкість та біфуркаційні переходи таких колективних режимів, як "змагання без переможців", "переможець отримує все", "змагання за синхронізацію". Також за допомогою подібних системи можуть бути змодельовані певні ситуації в теорії ігор та теорії конфліктів.

Моделі фазових осциляторів, що описуються системами диференціальних рівнянь з параметрами, є важливими та цікавими математичними об'єктами. Вивчення колективних та перехідних режимів у таких системах призводить до появи нових понять та широкого спектру досліджень у теорії динамічних систем, теорії біфуркацій, теорії складності. Наявність різноманітних колективних режимів у мережах осциляторів залежить від індивідуальної поведінки динамічних об'єктів, архітектури мережі та типів впливу елементів між собою. Останнє спричиняє взаємозв'язок між симетріями мережі, інваріантними многовидами системи, кластерними режимами моделі, а також задає можливі типи біфуркацій переходів. Зокрема, певні типи симетричних біфуркацій було виявлено саме завдяки таким системам. Велику кількість гетероклінічних біфуркацій виявлено саме завдяки системам зв'язаних елементів. Значний вплив такі системи мають і на теорію детермінованого хаосу, зокрема, активно досліджується наявність хаотичної синхронізації, консервативного та змішаного хаосу у системах подібного типу. Також відмітимо, що аналітичні дослідження зв'язаних систем у більшості випадків доповнюються та підтверджуються експериментально та за допомогою комп'ютерної симуляції, що також приводить до появи нових наукових міжгалузевих течій.

Актуальність дослідження колективної динаміки у мережах зв'язаних осциляторів підтверджує наявність тисяч статей з даної тематики, надрукованих у рейтингових математичних та природничих журналах, зокрема таких, як *Nature*, *Science* та *Physical Review Letters*. Більшість статей по даній тематиці написана математиками у співавторстві зі вченими дуже різних природничих спеціальностей, що свідчить про важливість теоретичних дослі-

джені у даній тематиці для моделювання колективних природничих явищ.

**Мета і завдання дослідження.** *Метою* дисертації є розробка нових методів побудови та аналітичного дослідження колективної динаміки широкого класу моделей зв'язаних динамічних елементів, що описують колективні природні явища. Основну увагу дисертації зосереджено на описанні та доведенні існування, стійкості, мультистабільності, біфуркаційних переходів, басейнів притягання розв'язків систем диференціальних рівнянь з параметрами, що описують колективні режими у мережах з різними індивідуальними динаміками елементів, різними архітектурами зв'язків та різними типами взаємодії.

*Об'єктом дослідження* є системи нелінійних диференціальних рівнянь з параметрами, що моделюють складні мережі взаємодіючих коливних елементів (фазових осциляторів, нейронів).

*Предметом дослідження* є стійкість та біфуркації розв'язків систем диференціальних рівнянь, що відповідають різним колективним режимам (повна синхронізація, кластерні режими, антифазні режими, хвилі обертання, режими повільного перемикавання, режим *переможець отримує все*, режим *боротьба за синхронізацію*, режим *змагання без переможців*, химерні стани).

*Методи дослідження.* Запропоновано комплексний підхід до дослідження моделей зв'язаних фазових осциляторів, що задаються за допомогою різних мереж та типів взаємодії між індивідуальними динамічними об'єктами. Підхід полягає виявленні можливих симетрій системи, виявленні та дослідженні інваріантних многовидів та інваріантних областей, дослідженні можливості редукції системи, що враховує симетрії, наявність інваріантних підпросторів, стійких кластерних режимів, ієрархічних структур, тощо. Досліджувалася зв'язок між системами різної розмірності та системами, отриманими при термодинамічних граничних переходах. Дослідження ведуться шляхом накопичення інформації від простіших випадків (систем меншої розмірності, мереж з більшою кількістю симетрій) до більш складних, з використанням теорії біфуркацій, теорії коливальних, теорії збурень та теорії складності. При вивченні стійкості та біфуркацій колективних режимів застосовувалось поєднання аналітичних досліджень з чисельними експериментами та побудовою



схематичних і біфуркаційних діаграм. Математичні моделі впроваджуються та досліджуються з ретельним урахуванням особливостей конкретних природничих явищ, а отримані теоретичні результати знаходять зворотню природничу інтерпретацію, що узгоджується з експериментальними даними.

**Наукова новизна одержаних результатів.** Результати роботи, що вносяться на захист, є новими і полягають у наступному.

- Було описано існування, стійкість та біфуркації режимів колективної динаміки для моделі глобально зв'язаних осциляторів з нелінійним зсувом у функції взаємодії. Було показано, що така система має режим повної синхронізації, дво-кластерні режими, граничні та гетероклінічні цикли, а також режим повної антифази з нульовим параметром порядку.
- Вивчалась узагальнена система глобально зв'язаних фазових осциляторів з дво-гармонічною функцією взаємодії. Описано структуру канонічних інваріантних областей та інваріантних многовидів для систем різної розмірності. Показано градієнтність систем з непарними функціями взаємодії та бездивергентність з парними. Знайдено та описано нові типи гетероклінічних біфуркацій для систем різних розмірностей. Досліджувалась екстремальна чутливість до збурень власних частот неідентичних осциляторів.
- Досліджувалась модель зв'язаних осциляторів з притягуючими та відштовхуючими елементами, що може застосовуватись у соціології та описувати колективну взаємодію двох груп: конформістів та нонконформістів. Для даної моделі доведено існування різних стійких режимів: режим антифазного протистояння двох груп, режим розмитого протистояння, некогерентний режим перемоги нонконформістів, мандрівні хвилі, ренегатні режими синхронізації одного нонконформіста з конформістами. Для маловимірних систем проведено біфуркаційний аналіз для узагальненої системи з фазовим зсувом у функції взаємодії.
- Доведено співіснування консервативної та дисипативної динамік у цир-

кулянтних мережах фазових осциляторів з кососиметричною матрицею взаємодії. Показано, що дані динамічні режими є наслідками часово-оборотної симетрії у системі. Показано, що консервативні та дисипативні області розділяються багато-вимірними множинами гетероклінічних циклів. Показано співіснування одно та дво-параметричних сімей граничних циклів з багатопараметричними сім'ями квазіперіодичних орбіт у консервативних областях. Для систем нескінченної кількості зв'язаних осциляторів на кільцевій мережі з кососиметричним циркулянтним зв'язком було формально виведено амплітудне рівняння в околі синхронного розв'язку, а також показано зв'язок цієї системи з нелінійним рівнянням Шрьодінгера.

- Було запропоновано поняття "слабкого химерного стану" в мережах нерозрізняваних фазових осциляторів. Було доведено, що система чотирьох осциляторів є найменшою можливою, яка має стійкий слабкий химерний стан. Було наведено побудови модульних осциляторних систем, що мають химерні стани гетероклінічного типу. Запропоновано метод біфуркаційного аналізу химерних станів за допомогою редукцій системи на інваріантні многовиди.
- Досліджувалась осциляторна модель з центральним елементом, що використовується для описання нейронних процесів зорового пошуку, уваги та пам'яті. Доведено твердження про існування, стійкість та біфуркації розв'язків, що відповідають режимам боротьби периферичних осциляторів за синхронізацію з центральним. Була запропонована та досліджувалась узагальнена система з центральним елементом та адаптацією. Було доведено, що дана система має стійкі режими "переможець отримує все" стаціонарних та нестаціонарних типів, а також показано адаптацію частоти центрального осцилятора до власної частоти периферичного осцилятора-переможця.

**Практичне значення отриманих результатів.** Дисертаційна робота містить математичні дослідження, що мають теоретичний характер, а також описання застосувань отриманих результатів у природознавстві. У роботі

методами теорії динамічних систем моделюються колективні режими різних галузей природознавства. Отримані в роботі теоретичні результати можуть бути використані у аналітичній та якісній теорії диференціальних рівнянь, теорії коливань, теорії біфуркацій та теорії хаосу. Результати дисертаційної роботи можуть бути використані та вже використовуються для описання колективних процесів у фізиці, науці про нейрони, медицині, хімії, соціології, а також у запровадженні штучних нейронних мереж.

**Структура та обсяг дисертації.** Дисертація складається зі вступу, семи розділів, висновків, списку використаних джерел, що містить 353 найменування (на 29 сторінках) та 6 додатків. Робота містить 45 рисунків. Повний обсяг роботи становить 462 сторінки.

**Особистий внесок здобувача.** Тематику дисертаційної роботи визначено здобувачем особисто. Всі отримані в дисертації результати є новими. З результатів, надрукованих у спільних зі співавторами статтях, в основну частину дисертації увійшли тільки такі, що отримані здобувачем самостійно, за винятком кількох результатів, де вклад співавторів є рівноцінним. У роботах [3, 5, 6, 7, 9, 17, 18, 20] (див. список публікацій здобувача на стор 14–16) внесок всіх співавторів у формулювання та доведення теоретичних результатів є рівноцінним. У роботах, що носять міжгалузевий характер, автору дисертації належить математична частина досліджень, а співавторам описання фізичної, біологічної чи медичної мотивації виникнення моделей, побудова моделей та природнича інтерпретація отриманих математичних результатів.

**Апробація результатів дисертації.** Результати дисертаційної роботи доповідалися та обговорювалися на багатьох наукових семінарах та міжнародних наукових конференціях, зокрема на семінарах відділу диференціальних рівнянь та теорії коливань Інституту математики НАН України (керівник: академік А.М. Самойленко), засіданнях Вченої Ради Інституту математики НАН України, семінарі відділу випадкових процесів Інституту математики НАН України (керівник проф. А.А. Дороговцев), семінарах "Теорія конфліктів" Інституту математики НАН України (керівник: проф. В.Д. Кошманенко), семінарі Лабораторії складних систем КПУ Драгоманова (керівник: проф. Ю.Г. Кондратьєв), семінарі кафедри математичного аналізу та дифе-

ренціальних рівнянь КПУ Драгоманова (керівник: проф. Г.М. Торбін), семінарі "Математика та науки про життя" Інституту математики НАН України (2011; керівник: д.ф.-м.н. О.В. Антонюк), засіданнях об'єднаного Берлінського семінару з динамічних систем (керівники: проф. Б. Фідлер, проф. М. Вольфрум), семінарі Інституту медицини наукового центру м. Юліх, Німеччина (керівник проф. П. Тасс), семінарах факультету фізики та астрономії Університету м. Потсдам, Німеччина (керівники: проф. А. Піковський, проф. М. Розенблюм), семінарах математичного факультету м. Екзетер, Великобританія (керівник: проф. П. Ешвін), семінарах математичного факультету Державного Університету Джорджії, США (керівники: проф. А. Шильніков, проф. І. Белих), Міжнародній конференції *Диференціальні та інтегральні рівняння* (Одеса, Україна, 2000), *Український Математичний Конгрес* (Київ, Україна, 2001), Міжнародна наукова конференція *Шості боголюбівські читання* (Чернівці, Україна, 2003), International workshop *Theory and applications of coupled cell networks* (Кембрідж, Великобританія, 2005), International workshop *Nonlinear Dynamics in Engineering and Nanotechnologies* (Ялта, Україна, 2006), Workshop *Complex dynamics and delay effects in complex systems* (Берлін, Німеччина, 2006), Конференції присвяченій 80-річчю проф. Г. Хакена (Бад Хоннеф, Німеччина, 2007), International workshop *Mathematical modeling in neuroscience* (Київ, Україна, 2008), Minisimposium *Dynamics of coupled phase oscillators* (Берлін, Німеччина, 2009), International workshop *Nonlinear dynamics on networks* (Київ, Україна, 2010), Conference *Nonlinear dynamics of electronic systems* (Вольфенбютель, Німеччина, 2011), Workshop on *Synchronization and oscillators with generalized coupling* (Екзетер, Великобританія, 2016), Міжнародній конференції *Сучасна стохастика: Теорія та застосування IV* (Київ, 2018), Міжнародній конференції *Сучасні проблеми математики* (Чернівці, Україна, 2018), WIAS workshop *Dynamics of coupled phase oscillators* (Берлін, Німеччина, 2018), *11<sup>th</sup> Nonlinear Economics Dynamics Conference* (Київ, Україна, 2019).

**Публікації.** Основні результати дисертації опубліковано у роботах [1-20] (див. список публікацій здобувача на стор 14–16), що відповідають вимогам до публікації результатів дисертаційних робіт у фахових виданнях із фізико-

математичних наук. 4 зі вказаних робіт надруковано без співавторів, 19 у закордонних виданнях. Згідно з міжнародною наукометричною базою даних Scopus (<https://www.scopus.com>) на даний момент є 316 посилань на 14 з наведених вище робіт автора, 256 з яких без самоцитувань.  $h$ -index вказаних робіт у Scopus: 8. Згідно наукометричною базою даних Web of Science на даний момент є 308 посилань на 12 з наведених вище робіт автора,  $h$ -index вказаних робіт у Web of Science: 9.

Відповідно до класифікації SCImago Journal & Country Rank (<https://www.scimagojr.com>) наукові публікації [3, 4, 7, 9, 10, 14, 15, 16] надруковано у виданнях, які відносяться до квартиля Q1; роботи [6, 12, 13] — у виданнях, що відносяться до Q2; роботи [8, 20] — у виданнях, що відносяться до Q3.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Дисертацію виконано у відділі диференціальних рівнянь та теорії коливань Інституту математики НАН України згідно з науково-дослідними темами "Конструктивні та якісні методи аналізу систем диференціальних, функціонально-диференціальних, імпульсних та різницевих рівнянь", номер державної реєстрації 0116U003121; "Аналітичні та групові методи дослідження математичних моделей сучасного природознавства", номер державної реєстрації 0117U002119.

**Подяки.** Автор висловлює щирю вдячність науковому консультанту члену-кореспонденту НАН України Бойчуку Олександрю Андрійовичу, завідувачу відділу диференціальних рівнянь та теорії коливань академіку НАН України Самойленку Анатолію Михайловичу за постійну увагу і допомогу в роботі, співавторам за плідну довголітню співпрацю та співробітникам відділу диференціальних рівнянь та теорії коливань за підтримку.

# Розділ 1

## Огляд літератури та попередні відомості

Дана дисертаційна робота присвячена дослідженню колективної динаміки у моделях зв'язаних елементів, записаних у вигляді систем диференціальних рівнянь з параметрами. Під колективною динамікою ми розуміємо різноманітні стійкі режими взаємодії між елементами. Здебільшого, це різні типи синхронізації елементів систем, які при відсутності взаємодії мають свою власну динаміку. Основними методами дослідження таких систем є аналітична та якісна теорія диференціальних рівнянь, а також методи комп'ютерної симуляції. Оскільки однією з основних цілей роботи є описання переходів між різними динамічними режимами при варіації параметрів, то на протязі всієї роботи широко застосовується теорія біфуркацій динамічних систем. У даному розділі проведено огляд попередніх публікацій, які мають безпосереднє відношення до дисертаційної роботи. Насамперед, відмітимо монографії [62, 65, 11, 142, 209, 265, 298, 154, 307, 334, 8, 68], в яких викладено основи теорії багаточастотних коливань, теорії стійкості, теорії синхронізації та теорії біфуркацій. Ми коротко оглянемо виникнення та розвиток теорії синхронізації та застосування її у різних галузях природознавства. Відмітимо, що всі математичні моделі представлені у дисертаційній роботі, мають природиче походження і вже застосовуються у фізиці, біології, хімії, соціології, нейронауці та при створенні штучних нейронних мереж.

## 1.1. Синхронізація в системах зв'язаних динамічних об'єктів

Перші експерименти, що засвідчили протифазову синхронізацію двох годинникових маятників були проведені знаменитим голландським фізиком Християном Гюйгенсом у сімнадцятому сторіччі [171, 265]. Близько двох з половиною століть ніяких суттєвих досягнень в отриманні нових експериментальних даних та теоретичних обґрунтувань синхронізації помічено не було. Винятком можна вважати лише помічені біологами синхронізації спалахів світлячків та синхронізації циркадних ритмів у рослин. Сплеск наукового інтересу до синхронізації почався наприкінці дев'ятнадцятого — на початку двадцятого століть з виникненням електродинаміки та успіхами у дослідженні взаємодії нейронів. Це можна пояснити автоколивною природою колективної поведінки взаємодіючих об'єктів, теоретичного розуміння якої у попередній період часу ще не було. Подальші поштовхи до розвитку теорії синхронізації та колективної динаміки були спричинені винаходом комп'ютерів та появою кібернетики, появою радіофізики, розвитком теорії коливань, появою теорії біфуркацій, успіхами у дослідженні людського мозку та появою математичних нейронних моделей (моделі Ходжкіна–Хакслі, у першу чергу), різноманітними біологічними спостереженнями колективної динаміки живих організмів, винайденням коливних хімічних реакцій, винайденням лазерів, появою приладів, що стимулюють роботу серця та мозку, появою комп'ютерних мереж та штучних нейронних мереж. Серед вчених, які внесли значний внесок у становлення теорії синхронізації, варто згадати Релея, Ван-дер-Поля, Андронова, Вітта, Віннера. Завдяки німецькому фізику Герману Хакену з'явилась *синергетика* — наука про самоорганізацію елементів складної системи [157, 158]. В середині двадцятого століття з'явилося розуміння складності колективної динаміки взаємодіючих об'єктів та необхідність створення математичних моделей, які б описували спільні риси синхронізації навіть незалежно від природи та складності взаємодіючих об'єктів та були якомога простішими та зручними для подальшого аналітичного вивчення. Перша вагома спроба була здійснена А. Вінфрі [337, 338] у середині 1960-х, який запропонував модель взаємозв'язаних осциляторів. Ін-

шим значним проривом у теорії синхронізації можна вважати запропоновану японським фізиком Йошикі Курамото модель зв'язаних фазових осциляторів у 1975 році у роботі [205]. Широке визнання вченими різних природничих спеціальностей та шалену популярність *модель Курамото* отримала після виходу його книги [206] у 1984 році. Популярною модель Курамото стала саме завдяки своїй простоті, зручності для дослідження та можливості описання структурно дуже відмінних між собою режимів колективної динаміки, таких як повна синхронізація, часткова синхронізація, протифазна синхронізація, хвилі обертання, довготривала синхронізація з перемиканням, химерні стани, хаотична синхронізація і т.п. І при цьому у класичній МК кожен осцилятор описується всього одним рівнянням, в якому також вказується спосіб його взаємодії з іншими осциляторами. Іншим важливим моментом для моделі є її гнучкість: можливість легко описувати різні мережі взаємодій, можливість легко ускладнювати способи взаємодії, наприклад, ускладнюючи функцію взаємодії, узагальнюючи опис власних частот осциляторів або вводячи адаптацію чи пластичність (записуючи додаткові рівняння для описання залежності сили взаємодії елемента від його поточної фази).

Важливий внесок у розвиток та популярність МК зробив, на нашу думку, американський математик С. Строгатц, який є також співавтором кількох теорій стосовно вказаної моделі (зокрема, теорії Ватанабе–Строгатца), а також автором чисельної кількості дуже цитованих статей та книг про синхронізацію [307]. Також слід відмітити книгу А. Піковського, М. Розенблюма та Ю. Куртца [265], в якій дуже детально викладено історію синхронізації, її фізичну мотивацію, математичний опис та перспективи застосування у різних галузях природознавства.

Дослідження моделі Курамото та її застосування призводять до появи нових типів моделей колективної динаміки та нових математичних теорій. Відмітимо, зокрема, модель Курамото з запізненням [288, 243, 198, 319, 161, 102], осциляторну модель з центральним елементом Борисюка–Казановича [185, 186, 85, 327, 200], осциляторні мережі з хабами [195, 196, 287, 326], модель Курамото з пластичністю [289, 226, 267], моделі Курамотівського типу з адаптацією [189, 182, 87], різницеву модель Курамото [319, 224], нескін-



ченно-вимірні моделі Курамотівського типу (отримані при термодинамічних переходах) [106, 309, 16, 236, 255], ланцюгові та кільцеві осциляторні моделі [123, 318, 270, 207, 14, 261, 247, 88], різноманітні моделі типу Курамото з випадковими розподілами частот та шумом [306, 309, 16, 317, 166], модель Курамото з нелінійними фазовими зсувами Піковського-Розенблюма [276, 263, 264], МК зі зворотнім впливом [315, 268, 161], моделі Курамото з інерцією [16, 246, 177, 55, 102] та моделі Курамото на мережах, заданих специфічними графами [117, 113, 36, 35]. Крім зазначеної вище теорії Ватанабе-Строгатца, відмітимо також анзац Отта-Антонсена [251], теорію Хонг-Строгатца [167, 169], а також численні дослідження (які можна вважати окремою теорією) про режими повільного перемикання та гетероклінічні структури у системах зв'язаних осциляторів [159, 36, 198, 311, 17, 35].

Дуже важливими у теорії синхронізації є виявлені Й. Курамото та Д. Баттогтохом когерентно-некогерентні стани [207], які пізніше Д. Абрамс та С. Строгатц назвали "химерними станами" або просто "химерами" [14, 15]. Крім своєрідної структури, химерні режими є цікавими тим, що ці режими спочатку описані математичними рівняннями і лише згодом (приблизно через десятиріччя) підтверджені численними фізичними експериментами.

Відмітимо, що за допомогою моделі Курамото та подібних моделей були отримані значні результати при дослідженні таких режимів, як "змагання без переможців" [33, 18, 17], "переможець отримує все" [346, 183, 223, 87], "змагання за синхронізацію" [173, 221, 237, 190]. Також за допомогою системи Курамото можуть бути змодельовані певні ситуації в теорії ігор та теорії конфліктів [9, 98].

Оскільки варіації моделі Курамото дозволяють легко конструювати системи з наперед заданими симетріями, то вони дозволяють виявляти взаємозалежність між симетріями системи та її інваріантними множинами, а також призводять до знаходження та дослідження нових типів біфуркацій. Також моделі Курамотівського типу широко використовуються для виділення та дослідження фазової синхронізації у системах більш складної природи, коли один вузол задається багатьма диференціальними рівняннями. Особливо такі методи ефективні для дослідження різних типів синхронізації в нейронних

мережах.

На даний момент існують тисячі статей, присвячених різноманітним варіаціям та узагальненням моделі Курамото, а також дослідженням синхронізації та колективної динаміки зв'язаних осциляторів та нейронів. Великі огляди даної тематики можна знайти, зокрема, у роботах [120, 109, 265, 309, 270, 308, 63, 16, 64, 24, 151, 117, 35, 275]. У даному контексті також слід особливо відзначити монографії [62, 141, 170, 265, 338, 307, 176, 50].

Відмітимо, що модель Курамото (та її узагальнення) мережі одно-вимірних фазових осциляторів є часто перехідним етапом для дослідження мереж більш складних багатовимірних елементів. Зокрема така система може бути отриманою як усереднення більш складної системи зі збереженням певних властивостей колективної поведінки [43, 330, 331, 333, 284, 339]. Стандартна модель Курамото виникла як фазова частина зв'язаних комплексно-значних систем Стюарта–Ландау [206]. Мотивацією Й. Курамото до створення моделі слугували його спостереження поведінки хімічних та біологічних осциляторів. Після виникнення модель Курамото знайшла своє широке застосування при дослідженнях нейронних мереж, надпровідникових з'єднань Джозефсона, масивах лазерів та моделюванні багатьох інших складних систем взаємодіючих елементів. Незважаючи на те, що для моделювання окремих елементів мережі у більшості прикладних випадків застосовуються багатовимірні системи з дуже складною індивідуальною поведінкою, для моделювання їх колективної поведінки може бути достатньо вивчення лише їх фазової (у певному розумінні) синхронізації. Одним зі способів дослідження синхронізації даних є виділення фаз сигналів за допомогою перетворення Гільберта [277], що дає змогу подальшого їх дослідження у вигляді осциляторних систем.

У даній роботі будуть розглядатись різноманітні осциляторні моделі, що є узагальненнями у різних напрямках класичної моделі Курамото. Буде показано, як різноманітні типи зв'язків впливають на утворення різних типів колективної динаміки в системі та на біфуркаційні переходи між різними режимами. Також покажемо, як симетрії взаємодії між елементами та функції зв'язків у моделях впливають на утворення різних типів синхронізації. Спо-

чатку будуть розглянуті найбільш популярні моделі ідентичних осциляторів з глобальним зв'язком, а саме: стандартна модель Курамото, модель Курамото–Сакагучі (з одно–гармонічним зв'язком та фазовим зсувом), модель Піковського–Розенблюма (з нелінійним фазовим зсувом, залежним від параметру порядку), модель Гансела–Мато–Монье (з дво–гармонічним зв'язком) та узагальнена модель Даїдо/Хонг–Строгатца (з притягуючими та відштовхуючими елементами і фазовим зсувом). Далі буде розглянуто моделі ідентичних осциляторів з симетричними графами взаємодії, а саме: модель з центральним елементом, модель з циркулянтним зв'язком, мережа нерозрізнюваних осциляторів, моделі з блочно–симетричними зв'язками. Для симетричних моделей неглобально зв'язаних осциляторів основною метою буде показати наявність колективних динамік з певними особливостями, коли взаємодія між елементами спеціально будується таким чином, щоб були ті чи інші особливі типи розв'язків. Більшу частину роботи займає дослідження систем з певними типами симетрії: симетричною (у тому чи іншому розумінні) архітектурою мереж зв'язків, повністю ідентичними (або ідентичними у середині кількох груп) елементами у вузлах мережі, однаковими функціями взаємодії одного елемента на інший. Проте також будуть розглядатись системи неідентичних елементів, а також біфуркації, що призводять до руйнування таких симетрій. Особливу увагу буде приділено дослідженню екстремальної чутливості колективних режимів до збурень частот, що руйнують симетрії системи.

Певна кількість систем, що досліджуються у даній роботі є вже добре відомими моделями з добре описаною історію виникнення та добре обґрунтованою фізичною, біологічною чи нейронною мотивацією. Інші моделі є новими, до виникнення яких має причетність автор даної роботи. У кожному випадку математичні моделі описують певні колективні природні явища. Математичні результати, що описують ті чи інші режими колективної взаємодії елементів, завжди мають відповідну природничу інтерпретацію.

## 1.2. Моделі фазових осциляторів типу Курамото

Об'єктами досліджень даної роботи є різні колективні режими у мережах зв'язаних елементів. Математичне задання мереж динамічно взаємодіючих між собою елементів (осциляторів, нейронів, тощо) завжди має *три основні складові*:

1. Описання динаміки *індивідуального* (не зв'язаного з іншими) вузла за допомогою рівнянь або систем рівнянь.
2. Описання *архітектури взаємодії* між окремими елементами мережі, що найчастіше можливо за допомогою графу зв'язків.
3. Описання *впливу одного елемента на інший у кожній ланці зв'язки*, що відбувається за допомогою додаткових виразів у правих частинах системи індивідуального елемента або за допомогою додаткових рівнянь чи систем рівнянь.

Можливість якомога простіше задати систему або редукувати існуючу систему до простішого вигляду часто є чи не єдиним способом повного аналітичного описання певних режимів. Водночас така система мусить задовольняти згаданим вище властивостям 1–3. Моделі зв'язаних фазових осциляторів (найбільш відомими з яких є модель Вінфрі та модель Курамото) з одного боку є досить простими, з іншого дозволяють гарно охарактеризувати більшість можливих колективних режимів. Нижче опишемо фазову модель Курамото та найбільш характерні поняття з нею пов'язані. У дисертаційній роботі будуть розглядатись як спрощення, так і узагальнення такої системи.

### 1.2.1. Описання системи

Розглянемо систему диференціальних рівнянь, що описує взаємодію  $N$  зв'язаних фазових осциляторів

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N K_{ij} \Gamma_{ij}(\theta_i - \theta_j), \quad i = 1, \dots, N, \quad (1.1)$$

де  $\theta_i \in [0, 2\pi) = \mathbb{T}^1$  – фазові змінні,  $\omega_i$  – власні частоти осциляторів,  $K_{ij}$  – параметри (сили) зв'язків між осциляторами,  $\Gamma_{ij}(x)$  – гладкі  $2\pi$ -періодичні функції зв'язку. Дану систему будемо далі називати *узагальненою моделлю Курамото* або *моделлю типу Курамото*. Далі наголосимо на тому, що кожна змінна  $\theta_i$  системи (1.1) пробігає одновимірне коло і отже, фазовим простором системи є тор  $\mathbb{T}^N$ . Для наочності можемо уявляти  $N$  точок, які рухаються у одному напрямку по колу з власними кутовими швидкостями  $\omega_i$  у випадку, коли система не зв'язана (коли всі  $K_{ij} = 0$ ) і які мають спільну колективну динаміку у випадку наявності зв'язків. Наявність зв'язків у системі та залежність окремих фазових точок (окремих змінних системи) одна від одної може спричиняти досить складну загальну поведінку. Зокрема згадані фазові точки під дією колективного впливу одна на одну можуть: рухатись не лише у одному напрямку, а й коливатись досить різноманітним чином, збиратись в групи (кластери) і рухатись разом протягом якогось часу або перманентно, рухатись протягом довгого часу разом з якоюсь групою, а потім за короткий час перейти у іншу групу, коливатись хаотично і так далі. Параметр  $K_{ij}$  вказує на силу впливу  $i$ -того осцилятора на  $j$ -й. Рівність будь-якого з параметрів  $K_{ij}$  нулю означає відсутність зв'язків між відповідними осциляторами. Система (1.1) є досить загальною. Частіше, як правило, використовується одна функція зв'язків  $\Gamma_{ij}(x) = g(x)$ . *Стандартна модель Курамото* (з чого все починалось) описує систему глобально зв'язаних осциляторів з однією функцією зв'язку  $\Gamma_{ij}(x) = -\sin x$  та однаковими силами взаємодії  $K_{ij} = K$  для всіх значень індексів. Природньо також починати дослідження системи Курамото у випадку ідентичних фазових осциляторів, тобто коли  $\omega_i = \omega$ ,  $i = 1, \dots, N$ , оскільки така система є максимально симетричною. Випадок ідентичних осциляторів є найбільш досліджуваним для будь-яких способів взаємодії, він дає можливість отримати гарні аналітичні результати на відміну від неідентичних випадків. Тим більше неочікуваними часто є результати (як правило, спочатку отримані за допомогою комп'ютерної симуляції) різноманітних режимів, які здаються дуже несиметричними у симетричних умовах взаємодії (такі як перемикання між кластерами чи химерні стани). Варіюючи елементи матриці взаємодії між осциляторами  $K_{ij}$ , функції зв'язку  $\Gamma_{ij}(x)$  та

власні частоти  $\omega_{ij}$ , можна створити ситуацію, коли система (1.1) має ту чи іншу наперед задану симетрію. Часто симетрії в подібних системах є добре прихованими і можуть бути виявлені лише при детальному дослідженні.

Система (1.1) може бути узагальнена різними способами з урахуванням тих чи інших особливостей об'єкту, що моделюється. Найбільш природнім є розширення системи за рахунок введення нових рівнянь, які описують залежність сили зв'язку між елементами від ступені синхронізації між ними. Оскільки системи фазових осциляторів є певними редукціями нейронних моделей, то такі зв'язки описують явища адаптації [189, 182, 87] чи синаптичної пластичності взаємодіючих нейронів [226, 289, 267, 61, 260]. У цьому випадку параметри зв'язків є функцією часу  $K_{ij} = K_{ij}(t)$ , для яких задаються додаткові диференціальні рівняння. У більш загальних моделях інші параметри системи (1.1) можуть перетворитись у функції для більш точного описання певних фізичних чи нейронних особливостей колективної динаміки.

Основним завданням роботи є описання колективної динаміки *скінченно-вимірних* систем. Проте у певних випадках будуть розглядатись також термодинамічні граничні переходи при  $N \rightarrow \infty$  та порівнюватись властивості скінченно та нескінченно-вимірних систем.

### 1.2.2. Система у фазових різницях

Відмітимо, що праві частини загальної системи (1.1) залежать від фазових різниць  $\theta_i - \theta_j$ , що свідчить про наявність у системи симетрії фазового зсуву  $\mathbb{T}^1$  вздовж кола, який задається дією  $\theta_i \mapsto \theta_i + \varepsilon$ . Це означає, що для дослідження різноманітних видів колективної динаміки можна зафіксувати один осцилятор і далі розглядати систему у фазових змінних, яка має меншу на одиницю розмірність. Зокрема ми фіксуємо перший осцилятор і вводимо фазові різниці

$$\varphi_i = \theta_1 - \theta_{i+1}, \quad i = 1, \dots, N - 1. \quad (1.2)$$

Таким чином, від системи (1.1) переходимо до допоміжної системи у фазових різницях:

$$\frac{d\varphi_i}{dt} = \Delta_i + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (K_{1,j} \Gamma_{1,j}(\varphi_{j-1}) - K_{i+1,j} \Gamma_{i+1,j}(\varphi_{j-1} - \varphi_{i-1})), \quad i = 1, \dots, N-1, \quad (1.3)$$

де  $\Delta_i = \omega_1 - \omega_{i+1}$ ,  $i = 1, \dots, N-1$ , та  $\varphi_0 := 0$ . Остання система ”поглинає” вказану симетрію. Цілий одно-вимірний інваріантний многовид синхронізації  $\theta_i = \theta$ ,  $i = 1, \dots, N$ , для системи (1.1) стискається в одну точку  $\varphi_i = 0$ ,  $i = 1, \dots, N-1$ , для нової системи. Недоліками нової системи є відсутність або прихованість однієї із симетрій та більш складна її права частина. Перевагами є те, що певні особливі множини зменшують свою розмірність на одиницю (не завжди, в залежності від ситуації), що має певні спільні риси з дослідженням перерізів Пуанкаре при описанні певних розв’язків динамічної системи. Так, зокрема, замість дослідження періодичних розв’язків часто можна обмежитись розглядом положень рівноваги, а замість дослідження квазі-періодичних траєкторій – періодичними орбітами. У останніх випадках дослідження стійкості та біфуркаційний аналіз значно спрощується. Для зручності досліджень для редукції системи (1.1) крім фазових різниць (1.2) можна користуватись будь-яким набором з  $N-1$  фазових різниць  $\varphi_{ij} = \varphi_i - \varphi_j$ , оскільки динаміки різних зведених систем є топологічно еквівалентними між собою.

### 1.2.3. Означення колективних динамічних режимів

У даному підрозділі надамо декілька основних означень різних типів синхронізації, що будуть використовуватись упродовж усієї дисертаційної роботи. Означення даються для системи фазових осциляторів типу Курамото (1.1), але вони є дійсними для довільної системи фазових осциляторів (як, наприклад, система Вінфрі [337, 338]) чи розширених фазових систем (як системи з адаптацією чи інерцією).

Одним з дуже важливих понять для розуміння та оцінювання ступеня синхронізації в системах зв’язаних фазових осциляторів є поняття *параметру порядку* Курамото [205, 206].

**Означення 1.2.1.** Комплексне середнє поле

$$Z(t) = R(t)e^{i\psi(t)} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j(t)}$$

де  $i = \sqrt{-1}$ , будемо називати *комплексним параметром порядку*, а його амплітуду  $R(t)$  – *параметром порядку* (у різних джерелах параметром порядку називають або  $Z$  або  $R$ ).

Нижче надамо означення різних найбільш важливих типів синхронізації в системі (1.2.1).

**Означення 1.3.2.** Будемо говорити, що два осцилятори  $\theta_i$  та  $\theta_j \in$  *фазово синхронізованими*, якщо  $|\theta_i(t) - \theta_j(t)| \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$  (якщо границя існує).

**Означення 1.2.3.** Осцилятори  $\theta_i$  та  $\theta_j$  знаходяться у *протифазі*, якщо  $|\theta_i(t) - \theta_j(t)| \rightarrow \pi$  при  $t \rightarrow \infty$ .

**Означення 1.2.4.** Осцилятори  $\theta_i$  та  $\theta_j \in$  *фазово замкнутими*, якщо  $|\theta_i(t) - \theta_j(t)| \leq \text{const} < 2\pi$  для довільних  $t$ .

У даному означенні припускається неперервна репрезентація фаз осциляторів як функцій  $\theta_i = \theta_i(t)$  зі значеннями на нефакторизованій прямій  $\mathbb{R}$ .

**Означення 1.2.5.** Осцилятори  $\theta_i$  та  $\theta_j \in$  *фазово незамкнутими*, якщо умова попереднього означення не виконується.

**Означення 1.2.6.** Осцилятори  $\theta_i$  та  $\theta_j \in$  *десинхронізованими*, якщо вони не є фазово замкнутими.

Тобто, осцилятори є десинхронізованими, якщо функція  $|\theta_i(t) - \theta_j(t)|$  буде перевищувати  $2\pi$  при  $t \rightarrow \infty$  у неперервній інтерпретації.

**Означення 1.2.7.** Система має *режим повної синхронізації*  $\Theta_{sync}$ , якщо всі її осцилятори є синхронізованими між собою, тобто  $\Theta_{sync} = (\theta, \dots, \theta)$ .

Легко перевірити, що повна синхронізація еквівалентна тому, що  $R = R(\Theta_{sync}) = 1$ .

**Означення 1.2.8.** Одночасна синхронізація  $m$  осциляторів ( $m \geq 2$ ) у системі називається або  *$m$ -кластером*, або (просто) кластером.

**Означення 1.2.9.** Назвемо  *$k$ -кластерним станом* таке розбиття множини осциляторів  $(\theta_1, \dots, \theta_N)$ , при якому вся множина їх індексів розбита на під-



множини таким чином

$$\mathcal{A} = \{1, \dots, N\} = \bigcup_{j=1}^k \mathcal{A}_j, \quad \mathcal{A}_j \cap \mathcal{A}_i = \emptyset \quad \text{для } j \neq i,$$

що будь-які осцилятори  $\theta_i$  та  $\theta_m$  є рівними (при  $t \rightarrow \infty$ ), якщо їх індекси належать одній підмножині  $\mathcal{A}_j$  та вони не дорівнюють один одному, якщо їх індекси належать різним підмножинам. Великою кожного кластеру  $a_j$  є число індексів відповідної множини  $a_j = |\mathcal{A}_j|$ ,  $\sum_{j=1}^k a_j = N$ .

**Означення 1.2.10.** Система має стан *рівномірно розподілених фаз* (або *хвилі обертання*)  $\Theta_{splay}$ , якщо  $\Theta_{i,i+1} = m \cdot 2\pi/N$ ,  $i = 1, \dots, N$  (індекс  $i$  береться за модулем  $N$ ). або (у іншому записі)

$$\Theta_{splay} = \left( \theta, \theta + m \frac{2\pi}{N}, \theta + m \frac{2 \cdot 2\pi}{N}, \dots, \theta + m \frac{(N-1)2\pi}{N} \right), \quad m = 1, \dots, N-1.$$

Параметр порядку  $R(\Theta_{splay}) = 0$ .

**Означення 1.2.11.** Система має стан *глобальної антифази*, якщо  $R = 0$ .

Відмітимо, що попередній стан є частковим випадком останнього:  $\Theta_{splay} \in \mathcal{M}^{(N)}$ .

**Означення 1.2.12.** Два осцилятори  $\theta_i$  та  $\theta_j$  є *частотно синхронізованими*, якщо

$$\Omega_{ij} := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} |\theta_i(t) - \theta_j(t)| = 0.$$

Можна переконатись, що осцилятори  $\theta_i$  та  $\theta_j$  є десинхронізованими при  $\Omega_{ij} \neq 0$  або коли вказана границя не існує.

**Означення 1.2.13.** Будемо говорити, що система (1.1) має режим *повільного перемикання* між кластерами, коли відповідна їй система у фазових різницях (1.3) має гетероклінічний цикл, сідлові точки якого відповідають кластерним режимам.

Варіацією режиму повільного перемикання можна вважати також режим, що відповідає граничному циклу системи (1.3), близькому до згаданого гетероклінічного циклу і утвореного після його зникнення внаслідок біфуркації. Ми не даємо тут більш чіткого математичного означення, щоб не звузити дане

поняття, яке використовується значною кількістю авторів у дещо різних контекстах з метою описання певних фізичних чи нейронних явищ (див, зокрема, [159, 193, 17, 19, 285, 339, 41]).

Відмітимо, що в означеннях кожного з описаних вище режимів ми не вимагали його стійкості або стійкості відповідної траєкторії системи, що відповідає певному режиму. Стійкість кожного з таких режимів може бути предметом окремого дослідження. Але, якщо не вказується зворотнє, ми вважаємо, що режим існує, якщо він асимптотично стійкий. Можуть бути і інші режими, пов'язані з елементами синхронізації в системі але їх існуючі означення є досить складними та неоднозначними. Означення "хімерного стану" вимагає ретельних пояснень та буде дано у розділі 6.

Зробимо декілька зауважень відносно окремих означень. Фазова синхронізація є більш слабким поняттям, ніж частотна. Осцилятори, які знаходяться у протифазі, є частотно синхронізованими. Система може мати декілька кластерів (груп синхронізованих осциляторів), які при цьому можуть бути фазово замкнутими між собою, а можуть і не бути такими (обертатись по колу так, що їх різниця долає бар'єр  $2\pi$ ). Параметр порядку  $R$  може бути константою (наприклад, у режимі повної синхронізації чи повної протифази), так і бути функцією, залежною від часу  $R = R(t)$  (як для будь-якого режиму, що має принаймні два десинхронізовані осцилятори). Складні колективні динамічні режими можуть бути у певному розумінні суперпозиціями більш простих колективних режимів, як, наприклад, хаотична синхронізація [257, 256], гетероклінічні химери [32, 59, 314] чи хаотичні химери [58, 23]. Усі означення, запропоновані тут для фазових осциляторів, мають свої природні аналоги для більш складних зв'язаних динамічних систем (наприклад, моделей нейронних мереж).

# Розділ 2

## Системи зв'язаних осциляторів з нелінійною функцією взаємодії

### 2.1. Виникнення моделі

Ансамблі слабо зв'язаних взаємодіючих елементів успішно моделюються мережами з фазовою апроксимацією [205, 206, 330, 109]. У цьому випадку найпопулярнішою є модель Курамото [205]. Одним з найбільш відомих та використовуваних на практиці є узагальнення цієї моделі, а саме модель *Курамото–Сакагучі* [282]. Ця модель добре пояснює самоорганізацію системи та появу різноманітних режимів колективної взаємодії (наприклад, кластерів чи середнього поля) в ансамблях, взагалі кажучи, неідентичних елементів. Перехід до синхронізації відбувається в момент, коли певний параметр зв'язку набуває критичного значення, що приблизно пропорційне розподілу власних частот [205, 309, 308, 307, 265, 228].

В роботах А. Піковського та М. Розенблюма було запропоновано узагальнення моделі Курамото–Сакагучі для випадку нелінійної зв'язку [276, 263]. Дослідження даної моделі та розповсюдження методів її дослідження можна також побачити у роботах [132, 140, 264]. Нелінійність у цьому контексті означає, що ефект колективного режиму на окремий елемент залежить від амплітуди цього режиму, так що, наприклад, взаємодія середнього поля та окремого осцилятора може бути притягуючою для слабкого поля і відштовхуючою

для сильного. Формально це відображається залежністю параметрів моделі Курамото-Сакагучі (сили з'єднання та фазового зсуву) від амплітуди середнього поля. Модель демонструє нетривіальні ефекти, такі як руйнування повністю синхронного стану та поява часткової синхронізації в ансамблі ідентичних елементів. Крім того, при такій нелінійній взаємодії частоти колективного режиму та окремих осциляторів можуть бути різними суттєво несумісними. Фізична мотивація для нелінійної функції зв'язку полягає в наступному. Важливий реалістичний випадок, коли модель Курамото-Сакагучі застосовується як до масиву електронних осциляторів (Джозефсоновські з'єднання) з загальним  $LCR$ -навантаженням ( $LCR$  – коливний контур, що містить резистор ( $R$ ), котушку індуктивності ( $L$ ) та конденсатор ( $C$ )). Навантаження керується сумою напруг з осциляторів, а осцилятори керуються струмом навантаження, забезпечуючи таким чином лінійних глобальний зв'язок. У випадку коли навантаження є нелінійним (наприклад, через залежності ємності  $C$  або індуктивності  $L$  від напруги та струму), природньо використовувати нелінійне розширення моделі Курамото.

Аналітичний опис динаміки осциляторних ансамблів у загальному випадку є важливою та складною проблемою. Засадничими в цьому напрямку є роботи С. Ватанабе та С. Строгатца [330, 331]. Теорія Ватанабе та Строгатца (Див. Додаток Б) є потужним інструментом, який забезпечує динамічний опис ансамблів синусоїдально пов'язаних ідентичних осциляторів, що мають спільну зовнішню силу. Зокрема, ця сила може бути середнім полем популяції, так що для випадку ідентичних осциляторів *теорія Ватанабе–Строгатца* (*ВС теорія*) майже повністю описує динаміку моделі Курамото–Сакагучі та моделі Піковського–Розенблюма з нелінійним зовнішнім впливом. Цей опис дається в термінах *трёх* колективних (макроскопічних) змінних та певних константи руху. Колективні змінні описуються трьома певними рівняннями з ВС теорії [330, 276, 264]. Таким чином, здається, що вивчення динаміки будь-якої кількості ідентичних зв'язаних елементів зводиться до дослідження всього лише трох-вимірної системи. Насправді це не зовсім так. Редукцію Ватанабе–Строгатца дійсно можна проводити для майже всього  $N$ -вимірного фазового простору, але за винятком певних інваріантних множин. Ці інваріантні

множини відповідають кластерам осциляторів, тобто режимам об'єднання у групи  $p$  елементів, де  $p < N$ . Неможливість застосування ВС теорії для певної частини фазово простору вихідної системи пов'язана з сингулярністю в одній з функцій заміни змінних. Отже, ця теорія є дуже зручним але не повним інструментом для опису згаданих осциляторних моделей. У даному розділі буде використовуватись альтернативна теорія, що базується на дослідженні кластерних інваріантних множин скінченно-вимірних системи, результати якої будуть доповнюватись результатами Ватанабе та Строгатца.

## 2.2. Модель з нелінійним зсувом: кластери та многовиди

Розглянемо ансамбль  $N$  зв'язаних фазових осциляторів, що задаються своїми фазовими змінними  $\theta_i \in [0, 2\pi)$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Припускаємо, що вони взаємодіють глобально за допомогою комплексного середнього поля

$$Re^{i\psi} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j} \quad (2.1)$$

з амплітудою  $R$  та фазою  $\psi$  таким чином, що

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_i - \theta_j - \alpha(R, \beta)), \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.2)$$

де  $\omega_i$  є власними частотами осциляторів, де  $K$  – параметр зв'язку. У даному випадку функцією зв'язку є  $g(x) = -\sin(x - \alpha)$ , де  $\alpha(R, \beta)$  – є функцією фазового зсуву, залежного від параметру порядку  $R$  та вектору біфуркаційних параметрів  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_m)$ ,  $m \geq 1$ . У випадку  $\alpha = 0$  рівняння (2.2) описує стандартну модель Курамото [205], а при  $\alpha(R, \beta) = \alpha = \text{const}$  ця система називається моделлю Курамото–Сакагучі [282]. Модель (2.2) була запропонована в [276] та в подальшому вивчалась у випадку переходу до термодинамічної границі  $N \rightarrow \infty$  у роботах [262, 263, 264].

Використовуючи симетрію фазового зсуву (або фіксуючи один з осциля-

торів), можемо описати динаміку системи в термінах фазових різниць

$$\varphi_i = \theta_1 - \theta_{i-1}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.3)$$

Остання заміна редукує вихідну  $N$ -вимірну систему до  $(N - 1)$ -вимірної системи:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_i}{dt} = -\frac{1}{N} \left[ \sum_{j=1, j \neq i}^{N-1} \sin(\varphi_i - \varphi_j + \alpha(R, \beta)) + \right. \\ \left. + \sin(\varphi_i + \alpha(R, \beta)) + \sum_{j=1}^{N-1} \sin(\varphi_j - \alpha(R, \beta)) \right], \quad i = 1, \dots, N - 1. \quad (2.4) \end{aligned}$$

У нових змінних параметр порядку  $R$  буде мати наступну форму:

$$R = \frac{1}{N} \sqrt{N + 2 \sum_{i,j=1, j \neq i}^{N-1} (\cos(\varphi_j) + \cos(\varphi_i - \varphi_j))}. \quad (2.5)$$

Подальшою метою є описання переходів між різними синхронізаційними режимами оригінальної моделі (2.2), досліджуючи інваріантні многовиди, положення рівноваги, гетероклінічні цикли та їх біфуркації для системи у фазових різницях (2.4).

Перш ніж приступати до аналізу, відмітимо, що система (2.2) має симетрії, задані всіма підстановками осциляторів [43]. Завдяки ідентичності осциляторів, основні динамічні режими виникають як інваріантні множини системи:

**1.** *Повністю синхронізований розв'язок*, коли всі осцилятори знаходяться у однаковому стані:

$$\Theta_{sync} = \{(\theta_1, \dots, \theta_N) : \theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_N\}.$$

## 2. Повністю асинхронні стани

$$\mathcal{M}^{(N)} = \left\{ (\theta_1, \dots, \theta_N) : \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j} = 0 \right\}. \quad (2.6)$$

Множина  $\mathcal{M}^{(N)}$  є об'єднанням інваріантних многовидів розмірності  $N-2$  для  $N \geq 3$ , що відповідає повному виродженню середнього поля, тобто  $R = 0$ .

**3. Кластерні стани**, в яких групи осциляторів мають однакові фази. В загальному  $k$ -кластерний стан може бути представлений (з точністю до перестановок індексів) у вигляді:

$$\mathcal{P}_k = \left\{ (\theta_1, \dots, \theta_N) : \theta_1 = \dots = \theta_{p_1}; \theta_{p_1+1} = \dots = \theta_{p_1+p_2}; \dots; \theta_{\sum_1^{k-1} p_j+1} = \dots = \theta_N \right\} \quad (2.7)$$

де  $p_1 + p_2 + \dots + p_k = N$ . В подальшому ми будемо досліджувати саме *дво-кластерні стани*:

$$\mathcal{P}_2 = \{ (\theta_1, \dots, \theta_N) : \theta_1 = \dots = \theta_p \neq \theta_{p+1} = \dots = \theta_N \}, \quad (2.8)$$

що характеризуються розподілами  $(p : N - p)$ , оскільки, як буде показано, система (2.2) має лише такі стійкі кластери.

Існування вказаних режимів є наслідком того, що мережа зв'язків є глобальною, осцилятори ідентичними а функції взаємодії є симетричними. Загальні властивості даних режимів та зв'язок симетрій з інваріантними множинами оригінальної та редукованої систем обговорюється більш детально у підрозділі 3.2. Відмітимо, що не всі з перерахованих режимів обов'язково мають бути присутніми у даній системі, їх існування та стійкість залежить від вигляду функції взаємодії. Також у даному розділі буде показано, що крім даних режимів існують і інші (що відповідають граничним та гетероклінічним циклам, квазі-періодичним розв'язкам, багато-параметричним сім'ям періодичних орбіт та гетероклінічних траєкторій), наявність яких також пов'язано з функцією  $g(x)$ .

Можна переконатись [43], що кожний простий кластер  $\theta_i = \theta_j$ ,  $i \neq j$ , є інваріантним многовидом будь-якої системи глобально зв'язаних ідентичних осциляторів з однаковою функцією взаємодії  $g(x)$ . Дана властивість також впливає з симетрії перестановок  $\mathbf{S}_N$  та симетрії фазового зсуву  $\mathbf{S}_N \times \mathbb{T}$  (деталі у підрозділі 3.2). Якщо синхронізувалися лише два осцилятори, а інші  $N - 2$  з ними не синхронізовані, то очевидно ми отримуємо кластерний стан  $\mathcal{P}_{N-1}$ . Для системи у фазових змінних кластери  $\theta_i = \theta_j$  представляють  $(N - 2)$ -вимірні гіперплощини вигляду  $\varphi_i = 0$  або  $\varphi_i = \varphi_k$ . Ці гіперплощини розділяють увесь фазовий простір на  $N!$  симетричних областей, які називаються канонічними інваріантними областями (CIR — canonical invariant region [43]). Для системи у оригінальних змінних одна з областей має вигляд:

$$\mathcal{C} = \{(\theta_1, \dots, \theta_N) : \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_N < \theta_1 + 2\pi\}, \quad (2.9)$$

а інші області отримуються усіма можливими перестановками індексів. Будемо також позначати через  $\partial\mathcal{C}$  границю області  $\mathcal{C}$ . Для системи у фазових змінних канонічна інваріантна область (2.10) має вигляд:

$$\bar{\mathcal{C}} = \{(\varphi_1, \dots, \varphi_{N-1}) : 0 < \varphi_1 < \varphi_2 < \dots < \varphi_{N-1} < 2\pi\}.$$

Легко бачити, що границя  $\partial\bar{\mathcal{C}}$  даної області складається з  $N$  симетричних шматків згаданих вище  $(N - 2)$ -вимірних гіперплощин. Очевидно, що перетини зазначених гіперплощин утворюють гіперплощини менших розмірностей. Перетином усіх гіперплощин є початок координат  $\Phi_{sync} = (0, \dots, 0) \in \mathbb{T}^N$ , що відповідає режиму повної синхронізації  $\Theta_{sync}$ . Оскільки дана конструкція задана у тороїдальному просторі  $\mathbb{T}^{N-1}$ , то нуль-вимірні вершини  $\partial\bar{\mathcal{C}}$ , що мають координати 0 та  $2\pi$  у  $\mathbb{R}^{N-1}$ , задають одну і ту ж точку  $\Phi_{sync}$  у  $\mathbb{T}^{N-1}$ . Одно-вимірні перетини граней  $\partial\bar{\mathcal{C}}$  відповідають кластерам  $\mathcal{P}_2$ . Оскільки вони також є інваріантними відносно потоку системи, то є дуже зручним об'єктом для дослідження локальних біфуркацій. Як буде показано нижче на протязі усієї дисертаційної роботи, здебільшого локальні біфуркації на дво-кластерних многовидах є частинами різноманітних глобальних біфуркацій.



### 2.3. Біфуркації в моделі Курамото–Сакагучі

Для дослідження моделі з нелінійним фазовим зсувом  $\alpha = \alpha(R, \beta)$ , варто спочатку вивчити детально ситуацію, коли цей зсув є лінійним, тобто  $\alpha = \text{const}$ . У цьому випадку система (2.2) спрощується до добре відомої моделі Курамото–Сакагучі [282]. Дана система є частковим випадком більш загальної системи (2.2) при  $\alpha(R, \beta)$  та  $\omega_i = \omega$ . Заміною змінних  $\theta_i \rightarrow \theta_i - \omega t$  можна прибрати параметр  $\omega$  і записати дану систему у вигляді:

$$\frac{d\theta_i}{dt} = -\frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_i - \theta_j - \alpha). \quad (2.10)$$

Поклавши  $K = 1$ , перепишемо останню систему

$$N \frac{d\theta_i}{dt} = g_i(\theta_1, \dots, \theta_N, \alpha) = -\sum_{j=1}^N \sin(\theta_i - \theta_j - \alpha), \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.11)$$

Основним об'єктом наших подальших досліджень у цьому підрозділі буде система (2.11) разом з відповідною системою у фазових різницях

$$\begin{aligned} N \frac{d\varphi_i}{dt} = & -\sin(\varphi_i + \alpha) - \sum_{j=1}^{N-1} \sin(\varphi_j - \alpha) - \\ & - \sum_{j=1, j \neq i}^{N-1} \sin(\varphi_i - \varphi_j + \alpha), \quad i = 1, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (2.12)$$

що відповідає оригінальній системі (2.11). Отримуючи певні результати про динаміку однієї зі вказаних систем, ми будемо інтерпретувати ці результати для колективних режимів іншої.

#### 2.3.1. Положення рівноваги моделі Курамото–Сакагучі

Для того, щоб описати особливі точки системи у фазових різницях, необхідно вирішити систему  $N - 1$  алгебраїчних рівнянь

$$g_1(\theta_1, \dots, \theta_N, \alpha) - g_i(\theta_1, \dots, \theta_N, \alpha) = 0, \quad i = 2, \dots, N, \quad (2.13)$$

зі скалярним параметром  $\alpha$ . Наступна лема допоможе охарактеризувати положення рівноваги системи (2.11).

**Лема 2.3.1.** *Для будь-якого  $\alpha \in \mathbb{T}^1$  множина значень  $(\theta_1, \dots, \theta_N)$  задовольняє системі рівнянь (2.13) тоді і тільки тоді, коли виконується одна з трьох наступних умов:*

- (i)  $\theta_1 = \dots = \theta_N$ ,
- (ii)  $\sum_{j=1}^N e^{i\theta_j} = 0$ ,
- (iii)  $\theta_1 = \dots = \theta_p \neq \theta_{p+1} = \dots = \theta_N$ ,  $p = 1, \dots, N - 1$  (плюс всі можливі перестановки  $\theta_i$ ).

**Доведення** цієї леми наведено у Додатку В.1 (див. стор. 375).

З Леми 2.3.1 випливає, що всі положення рівноваги системи Курамото–Сакагучі, записаної в термінах фазових різниць, є або одно–кластерним режимом, або дво–кластерним режимом, або асинхронним  $(N - 2)$ –параметричним станом, що описується многовидом  $\mathcal{M}^{(N)}$  з нульовим параметром порядку:  $r = 0$ . Опишемо детально локальну та глобальну динаміку системи та біфуркації, що виникають при зміні параметрів.

### 2.3.2. Дво–кластерні режими

Дво–кластерний стан є множиною, що складається двох груп симетричних осциляторів. Відстань між цими двома групами визначається однією вільною змінною. Для системи у фазових різницях (2.12) одно–параметричні множини дво–кластерних станів утворюють прямі лінії (плюс всі лінії, отримані за допомогою перестановки змінних):

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \dots = \varphi_p \neq \varphi_{p+1} = \varphi_{p+2} = \dots = \varphi_{N-1} = 0, \quad p = 1, \dots, N - 1, \quad (2.14)$$

у фазовому просторі  $\mathbb{T}^{N-1}$ . Отже, всі біфуркації кластерних положень рівноваги є *одно-вимірними* (їх нормальні форми є одно-вимірними). Крім того, для дослідження існування нетривіальних кластерних положень рівноваги, нам потрібно вирішити одне зі скалярних алгебраїчних рівнянь

$$p \sin(\varphi_k - \alpha) + (N - p) \sin(\varphi_k + \alpha) - (N - 2p) \sin \alpha = 0, \quad k = 1, \dots, p. \quad (2.15)$$

Кожне з таких рівнянь має лише два розв'язки на  $\mathbb{T}^1$ :  $\varphi_k = 0$  та

$$\varphi_k = \begin{cases} \bar{\varphi}(p, \alpha), & \alpha \in [0, \pi/2) \cup [\pi, 3\pi/2), \\ -\bar{\varphi}(p, \alpha), & \alpha \in [\pi/2, \pi) \cup [3\pi/2, 2\pi), \end{cases} \quad (2.16)$$

$$\bar{\varphi}(p, \alpha) = \arccos \left( -\frac{2p(N - p) + (N^2 - 2p(N - p)) \cos(2\alpha)}{N^2 + 2p(N - p)(\cos(2\alpha) - 1)} \right).$$

Аналізуючи останні вирази, можна переконатись, що біфуркація положень рівноваги в системі (2.12) відбувається лише при  $\alpha = \pm\pi/2$  і що це біфуркаційне значення не залежить ні від кількості осциляторів  $N$ , ні від розподілу кількості осциляторів у кластерах (числа  $p$ ). Проводячи додатковий аналіз стійкості вказаних положень рівноваги вздовж многовиду (2.14), бачимо, що нестійка точка  $\varphi_k = \bar{\varphi}(\alpha)$ , описана рівнянням (2.16), рухається вздовж цього многовиду зі зміною параметру  $\alpha$ , стикається зі стійкою точкою  $\varphi_k=0$  в початку координат (при  $\alpha = \pi/2$ ) і продовжує рух, змінивши свою стійкість і стійкість точки, з якою вона зіткнулась. Отже, відбувається *транскритична* біфуркація двох точок при  $\alpha = \pi/2$ . Нормальна форма цієї біфуркації  $d\varphi/dt = \varphi(\varphi - \mu)$ , де у конкретному випадку  $\mu = \bar{\varphi}(\alpha)$ . Інша симетрична транскритична біфуркація відбувається при  $\alpha = -\pi/2$ , знову змінюючи стійкості обох точок всередині многовиду. Відмітимо, одночасно відбувається  $N$  транскритичних біфуркацій у початку координат вздовж кожного інваріантного многовиду (2.14).

У випадку парних розмірностей система Курамото–Сакагучі має дво-кластерні многовиди з ізотропією  $\mathbf{S}_{N/2} \times \mathbf{S}_{N/2}$ , що відповідають розщепленню всієї множини осциляторів на дві групи по  $p = N/2$  штук. Таких

многовидів система має  $C_N^{N/2}/2$ . Рівняння (2.15) на вказаних многовидах має дуже простий вигляд:

$$N \sin \varphi_k \cos \alpha = 0. \quad (2.17)$$

Для випадку такого розподілу вказана система має лише розв'язки  $\varphi_k = 0$  та  $\varphi_k = \pi$ , коли параметр  $\alpha \neq \pm\pi/2$ . Очевидно, жодних біфуркацій не відбувається на одно-вимірних інваріантних множинах (2.14) для вказаних значень параметру  $\alpha$ . Навпаки, при  $\alpha = \pm\pi/2$  весь інваріантний многовид (2.14) з ізотропією  $\mathbf{S}_{N/2} \times \mathbf{S}_{N/2}$  заповнюється неперервною множиною неізолюваних положень рівноваги. Безпосередній підрахунок показує, що Якобіан системи у всіх точках  $\mathbf{S}_{N/2} \times \mathbf{S}_{N/2}$ -многовиду при  $\alpha = \pm\pi/2$  має однакові власні значення:

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_{(N-1)/2} = -\frac{1}{2} \sin \varphi, \quad \lambda_{(N-1)/2+1} = 0, \quad \lambda_{N/2} = \dots = \frac{1}{2} \sin \varphi,$$

де  $\varphi$  – змінна вздовж вказаного многовиду. Отже, всі ці особливі точки є виродженими сідлами. Кожна така точка має нейтральну стійкість вздовж даного многовиду. Також кожна така точка є сідловою у трансверсальних до  $\mathbf{S}_{N/2} \times \mathbf{S}_{N/2}$ -многовиду напрямках, тобто вона має  $(N/2 - 1)$ -вимірний відштовхуючий многовид  $W^u$  та  $(N/2 - 1)$ -вимірний притягуючий многовид  $W^s$ . Вказані многовиди  $W^u$  та  $W^s$  є одночасно гетероклінічними траєкторіями, що зв'язують різні сідлові точки, тобто  $W^u(S_1) = W^s(S_2)$  для двох сідлових точок  $S_1$  та  $S_2$ , що належать одному й тому ж самому  $\mathbf{S}_{N/2} \times \mathbf{S}_{N/2}$ -многовиду і знаходяться симетрично на цьому ж многовиді (залежність координат на лінії  $S_2(\varphi) = S_1(-\varphi)$ ,  $\varphi$  змінна на многовиді). Чому не може бути гетероклінічних з'єднань між точками двох різних многовидів вказаного типу? Це пов'язане з тим, що кожен такий одно-вимірний многовид належить окремим інваріантним  $(N - 2)$ -вимірним многовидам, що обмежують інваріантні області (конструкція детально описана у неступному розділі та в роботі [33]). А гетероклінічні з'єднання сідел  $S_i$  не можуть покидати ці  $(N - 2)$ -вимірні многовиди і заходити в середину інваріантних областей, оскільки останнє протирічило б ВС теорії. Відсутність існування атракторів та репелерів у систе-

ми при  $\alpha = \pm\pi/2$  також доводить наявність описаних вище гетероклінічних зв'язків. Таким чином, точки  $S_1, S_2$  та їх одно-вимірні інваріантні многовиди  $W^u, W^s$  утворюють гетероклінічний цикл (див. рис. 8.13(a) у розділі 3). Симетричність обох сідел гетероклінічного циклу  $S_2(\varphi) = S_1(-\varphi)$  впливає з властивості часово-оборотної симетрії  $\mathcal{R}$  системи у вказаному випадку (як буде детально розібрано далі у підрозділі 3.8.2), інваріантна множина якої  $\text{Fix}\mathcal{R}$  (інваріантна відносно симетрії, а не потоку) є перпендикулярною до інваріантного  $\mathbf{S}_{N/2} \times \mathbf{S}_{N/2}$ -многовиду. Вся множина сідел на многовиді утворює дво-вимірні поверхні гетероклінічних циклів. Кожен такий гетероклінічний цикл є нейтральним (сума власних значень кожної сідлової точки циклу є рівною нулю).

### 2.3.3. Антифазний многовид $\mathcal{M}^{(N)}$

Детальніше зупинимось на многовиді  $\mathcal{M}^{(N)}$  з нульовим параметром порядку  $R = 0$ , що відповідає режиму глобальної антифази усіх осциляторів. Вказаний многовид є  $(N - 3)$ -вимірною множиною в фазовому просторі  $\mathbb{T}^{N-1}$  системи в фазових різницях і задається виразом:

$$\overline{\mathcal{M}}^{(N)} = \left\{ (\varphi_1, \dots, \varphi_{N-1}) : \sum_{j=1}^{N-1} e^{i\varphi_j} = -1 \right\}. \quad (2.18)$$

Згідно Лемі 2.3.1, цей многовид складається цілком з нерухомих точок. У випадку  $N = 3$  це множина двох точок, У випадку  $N = 4$  це множина шести зв'язаних відрізків прямих, У випадку  $N = 5$  це множина дванадцяти симетричних зв'язаних між собою гладких дво-вимірних поверхонь (не площин). Стійкість точок многовиду описується за допомогою Лемі 2.4.2 (розділ 3). Використовуючи вказану лему і проводячи додаткові підрахунки, можна переконатись, що стаціонарні точки многовиду є стійкими при  $\alpha \in (\pi/2, 3\pi/2)$  і нестійкими при  $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$ . У першому з вказаних випадків стійким є лише початок координат, у другому – він же є єдиною відштовхуючою точкою. Крім згаданих особливих точок система має  $2^{N-1} - 1$  сідел для всіх значень параметру  $\alpha$ , крім біфуркаційних. У випадках  $\alpha = \pm\pi/2$  відбувається виродження біфуркація Андронова-Хопфа для кожної точки многовиду

$\overline{\mathcal{M}}^{(N)}$  одночасно (останнє є наслідком більш загального випадку, описаного нижче у підрозділі 2.4). В момент біфуркації всі інваріантні області навколо многовидів заповнені неперервними  $(N - 2)$ -параметричними сім'ями періодичних орбіт, обмеженими  $(N - 2)$ -вимірними інваріантними площинами, що складаються з гетероклінічних циклів (рис. 8.13(a)). У моменти біфуркацій система є Гамільтоновою згідно ВС теорії (див. Додаток Б). Дана теорія гарно повністю описує розв'язки системи у середині інваріантних областей  $\overline{\mathcal{C}}$  (але не на границях цих областей  $\partial\overline{\mathcal{C}}$ ). Згідно даній теорії система має  $N - 2$  функціонально-незалежних перших інтегралів, що задаються виразом (8.35) та йому подібними з урахуванням перестановок індексів. Вона також показує, що вказана біфуркація Андронова-Хопфа є виродженою і при  $\alpha \neq \pi/2$  система не має жодних періодичних орбіт всередині  $\overline{\mathcal{C}}$ .

Відмітимо також, що у критичних випадках  $\alpha = \pm\pi/2$  функція зв'язку системи (2.11) є парною. Останнє призводить до того, що у цих випадках векторне поле системи є соленоїдальним (бездивергентним). Ці обставини також підтверджують той факт, що у згаданому випадку система має нейтральну структуру з виродженими та невиродженими сідлами, сім'ями неізолюованих періодичних траєкторій та сім'ями гетероклінічних циклів.

#### 2.3.4. Періодичні орбіти та гетероклінічні цикли

Як було показано вище, будь-яка система глобально зв'язаних ідентичних осциляторів має симетрію перестановок  $\mathbf{S}_N$ . внаслідок цього оригінальна система має всі можливі кластери  $\theta_i = \theta_j$ , що відповідають  $(N - 2)$ -вимірним гіперплощинам  $\varphi_i = 0$ ,  $\varphi_i = \varphi_j$  у  $\mathbb{T}^{N-1}$ . Наявність кластерів спричиняє фазову замкнутість усіх траєкторій системи (фазова незамкнутість породжує руйнацію принаймні одного зі згаданих кластерів). Наявність кластерів-бар'єрів призводить також до того, що весь фазовий простір розділяється на інваріантні канонічні області  $\mathcal{C}$ . Як зазначалось, система (2.10) має всього  $(N - 1)!$  таких областей, які є ідентичними враховуючи симетрію перестановок. Для системи у фазових різницях  $\varphi_i$  весь фазовий простір  $\mathbb{T}^{N-1}$  також ділиться на аналогічні інваріантні області, що обмежуються згаданими  $(N - 2)$ -вимірними гіперплощинами. Згідно ВС теорії внутрішня частина інваріантної області  $\mathcal{C}$

може бути зведеною до три-вимірної системи при  $N \geq 4$  (див. Додаток Б). Згідно Лемі 2.3.1 область  $\mathcal{C}$  системи Курамото–Сакагучі у фазових різницях не містить жодних положень рівноваги, оскільки у протилежному випадку, вона містить  $k$ -кластери для  $k \geq 3$ . Також ВС теорія виключає наявність у даній області хаотичних траєкторій. Квазі-періодичні траєкторії можливі лише для оригінальної системи, та неможливі для системи у фазових різницях (останнє впливає зі зведення за допомогою заміни Ватанабе–Строгатца оригінальної системи до 3-вимірної системи з одним рівнянням, права частина якого не залежить від власної змінної). Система у фазових різницях не може мати ізольованих періодичних орбіт, а лише неперервну сім'ю нейтральних періодичних орбіт, що заповнює всю внутрішню частину  $\bar{\mathcal{C}}$ . Дана сім'я виникає лише у моменти біфуркацій при  $\alpha = \pm\pi/2$ , та описується першими інтегралами  $I_{WS}$  (2.10). При збуренні біфуркаційного параметру  $\alpha$  щільна сім'я періодичних орбіт перетворюється у одну довгу спіралевидну (гетероклінічну) траєкторію з одним кінцем у деякій точці многовиду  $\bar{\mathcal{M}}^{(N)}$  а іншим кінцем у початку координат  $\Phi_{sync}$ . Відмітимо, що кожна згадана спіралевидна траєкторія змінює свій глобальний напрямок на протилежний ( $\bar{\mathcal{M}}^{(N)} \rightarrow \Phi_{sync}$  на  $\Phi_{sync} \rightarrow \bar{\mathcal{M}}^{(N)}$ ), як це, зокрема, показано на середній панелі рис. 8.2 для трьох осциляторів.

Отже для описання внутрішньої частини канонічних інваріантних областей ми можемо цілком посылатись на ВС теорію. Але, як зазначалось вище, ця теорія не працює на інваріантних кластерних множинах. Розглянемо одну з  $(N - 1)$ -вимірних гіперплощин, що є гранню границі  $\partial\bar{\mathcal{C}}$  найбільшої розмірності. Згідно Лемі 2.3.1 дана множина не містить жодних положень рівноваги за винятком тих, що належать дво-кластерним многовидам  $\mathcal{P}_2$ , тобто одно-вимірним лініям, що утворюють гомоклінічні петлі у різних напрямках з початку координат. Динаміка на  $\mathcal{P}_2$  описана у підрозділі 2.4.2. Існування періодичних траєкторій у середині грані  $\partial\bar{\mathcal{C}}$  є неможливим, оскільки призводить до наявності положень рівноваги у середині цієї грані, що протирічить висновкам леми. З подібних міркувань робимо висновок про неможливість існування квазі-періодичних чи хаотичних траєкторій. Тому дана грань містить виключно гетероклінічні траєкторії, кінці яких знаходяться на кластерних

многовидах  $\mathcal{P}_2$ . Дані гетероклінічні траєкторії прямують до початку координат при  $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$ , а починаються у сідлових точках, що належать  $\partial\bar{\mathcal{C}}$ . Відмітимо, що сідлові точки усієї  $(N-1)$ -вимірної системи, що належать  $\partial\bar{\mathcal{C}}$ , є репелерами всередині самих граней  $\partial\bar{\mathcal{C}}$  і мають притягуючі трансверсальні до цих граней напрямки при  $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$ . Траєкторії мають протилежні напрямки, коли  $\alpha \in (\pi/2, 3\pi/2)$ . У разі біфуркаційних значень параметрів  $\alpha = \pm\pi/2$ . Дво-кластерні многовиди або не мають особливих точок (за винятком початку координат), або є цілком заповненими особливими точками (див. підрозділ 2.4.2). Це спричиняє до існування багато-параметричних множин гетероклінічних траєкторій. Як описувалось вище, гетероклінічна траєкторія може починатись і закінчуватись на одній інваріантній прямій  $\mathcal{P}_2$  у випадку парної кількості осциляторів (непарної розмірності простору). Сім'ї гетероклінічних траєкторій з різних граней  $\partial\bar{\mathcal{C}}$  природньо утворюють сім'ї гетероклінічних циклів. Одно-параметрична множина граничних циклів, що знаходиться на границях рівня Ватанабе–Строгатца проходить через цикли усіх періодів при зміні параметру цієї сім'ї, починаючи від точки у  $\bar{\mathcal{M}}^{(N)}$  з нульовим періодом, до малих циклів у околі  $\bar{\mathcal{M}}^{(N)}$ , циклів середнього періоду усередині  $\bar{\mathcal{C}}$ , циклів великого періоду близьких до  $\partial\bar{\mathcal{C}}$  та, в решті решт, до гетероклінічних циклів нескінченного періоду на границі  $\partial\bar{\mathcal{C}}$ .

Зі сказаного вище у підрозділі 2.4 робимо висновок, що система має лише два біфуркаційних значення  $\alpha = \pm\pi/2$ . При цьому одночасно відбуваються декілька локальних та глобальних біфуркацій:

1. Транскритична біфуркація у точці  $\Phi_{sync}$  уздовж кластерних інваріантних многовидів з ізотропією  $\mathbf{S}_p \times \mathbf{S}_{N-p}$ .
2. Вироджена біфуркація Андронова–Хопфа у всіх точках інваріантного многовиду  $\bar{\mathcal{M}}^{(N)}$ .
3. Глобальна гомоклінічна біфуркація у  $\mathbb{T}^{N-1}$ , що призводить до утворення гомоклінічної петлі уздовж дво-кластерних інваріантних многовидів (яка відповідає гетероклінічній біфуркації у  $\mathbb{R}^{N-1}$  і призводить до появи  $N$ -компонентного гетероклінічного циклу).
4. Вироджена біфуркація на лініях з  $\mathbf{S}_{N/2} \times \mathbf{S}_{N/2}$  ізотропією у парно-розмірних випадках.



**5.** Гетероклінічна біфуркація появи  $(N - 3)$ -параметричних множин гетероклінічних циклів на границі інваріантної області  $\bar{\mathcal{C}}$ .

Компоненти останньої біфуркації були описані у підрозділі 2.3.2. Гетероклінічні цикли складаються з гетероклінічних траєкторій, що цілком заповнюють  $(N - 2)$ -вимірні границі  $\partial\bar{\mathcal{C}}$  областей  $\bar{\mathcal{C}}$ . Кожен гетероклінічний цикл складається з кількох компонентів (мінімум з двох), що належать різним інваріантним обмежувальним гіперплощинам. Граничні цикли усередині  $\bar{\mathcal{C}}$  близькі до гетероклінічних, наслідують їх структуру. Зокрема траєкторія такого близького граничного циклу дуже сильно сповільнюється у околі сідел відповідного гетероклінічного. Періоди граничних циклів у  $\bar{\mathcal{C}}$  зростають від майже нульових у околі  $\mathcal{M}^{(N)}$  до майже нескінченних близько до гетероклінічних циклів на  $\partial\mathcal{C}$ . Природньо, що параметр порядку граничних циклів є величиною змінною, тобто  $R = R(t) \in (0, 1)$ . Параметри порядку  $R(t)$  коливається близько до нуля для траєкторій з маленьким періодом в околі антифазних станів та цей параметр коливається близько до одиниці для періодичних орбіт з великим періодом близьких до  $\partial\bar{\mathcal{C}}$ .

### 2.3.5. Особливі множини системи Курамото–Сакагучі

Враховуючи результати Лема 2.3.1 та всі викладені вище міркування відносно інваріантних многовидів та їх біфуркацій, можемо сформулювати наступний результат.

**Теорема 2.3.1.** Система Курамото–Сакагучі (2.12), записана у фазових різницях (2.3) має наступні положення рівноваги:

1. Початок координат  $\Phi_{sync} = (0, \dots, 0)$ , що відповідає режиму повної синхронізації оригінальної системи  $\Theta_{sync}$ , який є стійким при  $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$ . При  $\alpha = \pm\pi/2$  ця точка втрачає свою стійкість внаслідок  $N$  одночасних транс критичних біфуркацій.
2.  $(N - 3)$ -вимірний інваріантний многовид  $\bar{\mathcal{M}}^{(N)}$ , що повністю складається з особливих точок. Кожна точка многовиду є нейтрально стійкою у  $N - 2$  напрямках всередині самого многовиду для будь-яких  $\alpha$ . У двох трансверсальних до многовиду напрямках вона є стійкою при

$\alpha \in (\pi/2, 3\pi/2)$ . Многовид втрачає свою стійкість унаслідок виродженої біфуркації Андронова–Хопфа при  $\alpha = \pm\pi/2$ .

3. Дво-кластерні стани, що описуються рівностями (2.14), (2.16), які належать інваріантним многовидам з ізотропією  $\mathbf{S}_p \times \mathbf{S}_{N-p}$ ,  $p \neq N/2$ , і які є сідлами для будь-яких  $\alpha$ .
4. Інваріантний многовид з ізотропією  $\mathbf{S}_{N/2} \times \mathbf{S}_{N/2}$  для системи з парною кількістю осциляторів, що складається повністю з особливих точок при критичних значеннях параметру  $\alpha = \pm\pi/2$ . Кожна точка многовиду є нейтрально стійкою всередині многовиду і сідловою у трансверсальних напрямках. Кожні дві симетричні сідлові точки формують гетероклінічні цикли, що складаються також зі стійких та нестійких одно-вимірних інваріантних многовидів цих сідел.
5.  $(N - 2)$ -параметричні множини періодичних орбіт, що заповнюють канонічні інваріантні області  $\bar{\mathcal{C}}$  при  $\alpha = \pm\pi/2$ .
6. Неперервні сім'ї гетероклінічних траєкторій на границях  $\partial\bar{\mathcal{C}}$  інваріантних областей  $\bar{\mathcal{C}}$ , що разом утворюють гетероклінічні цикли при  $\alpha = \pm\pi/2$ .

**Доведення** цієї теореми надано у Додатку В.2 (див. стор. 378).

Зазначимо, що повне описання динаміки моделі Курамото–Сакагучі є наслідком симетрій функції зв'язків та форми функції взаємодії, що дає змогу застосовувати до такої системи два типи редукцій: ВС теорію та редукцію до фазових змінних з повним описанням інваріантних многовидів. Як буде показано у наступному розділі ВС теорія не діє для систем з більш складною функцією взаємодії  $g(x)$ , а другий метод редукції все ще є досить продуктивним.

### 2.3.6. Стандартна модель Курамото

Система (2.10) є стандартною моделлю Курамото глобально зв'язаних ідентичних фазових осциляторів, коли функція зв'язку має вигляд:

$$g(x) = -\sin x, \quad (2.19)$$

тобто при  $\alpha = 0$ . Як впливає з Лема 2.3.1 та формули (2.16), стандартна модель Курамото має наступну структуру положень рівноваги:

**1.** *Стійкий стан повної синхронізації*  $\Theta_{sync}$ , що відповідає стійкій особливій точці  $\Phi_{sync} = (0, \dots, 0)$  системи у фазових різницях.

**2.** Положення повної антифази  $\mathcal{M}^{(N)}$ , що задається співвідношенням (2.6). Даному  $(N - 2)$ -вимірному інваріантному многовиду  $\mathcal{M}^{(N)}$  відповідає  $(N - 3)$ -вимірний інваріантний многовид  $\overline{\mathcal{M}}^{(N)}$ , що задається виразом (2.18) та цілком складається з особливих точок системи (2.4). Кожна точка інваріантного многовиду  $\overline{\mathcal{M}}^{(N)}$  є нейтрально стійкою всередині цього многовиду та вона є відштовхуючою у двох трансверсальних до  $\overline{\mathcal{M}}^{(N)}$  напрямках. Тобто даний многовид є репелером системи.

**3.** Сідлові точки  $S_{ij}$  системи у фазових різницях (2.12), що мають  $i$  координат рівних 0 та  $j = N - i - 1$  координат рівних  $\pi$ ,  $p \neq 0$ . Таких сідлових точок, очевидно, система має  $2^N - 1$ . У випадку парної кількості  $N$  осциляторів сідла  $S_{ij}$  належать  $\overline{\mathcal{M}}^{(N)}$  та є виродженими, якщо  $i = N/2 - 1$ ,  $j = N/2$ . Нестійкі многовиди  $W^u(S_{ij})$  прямують до  $\Phi_{sync}$ , а стійкі  $W^s(S_{ij})$  до  $\overline{\mathcal{M}}^{(N)}$  при зворотньому часі.

Система у фазових різницях (2.12), (2.19) не має жодних інших особливих множин (граничних циклів, наприклад), усі її неособливі траєкторії починаються на  $\overline{\mathcal{M}}^{(N)}$  та закінчуються у  $\Phi_{sync}$ . Відмітимо, що при  $K < 0$  динаміка системи описується таким же чином для зворотнього часу. Тобто у цьому випадку єдиним аттрактором є множина антисинхронних станів, а єдиним репелером є стан повної синхронізації. Випадок  $K = 0$  є біфуркаційним.

Незважаючи на досить просту структуру динаміки стандартної моделі Курамото глобально зв'язаних *ідентичних* осциляторів, динаміка такої системи стає досить складною у випадку, коли осцилятори не є ідентичними, а саме, коли власні частоти  $\omega_i$  кожного з осциляторів є різними. Біфуркації подрібнення частотних кластерів у цьому випадку описано у роботі [228].

## 2.4. Біфуркації в моделі з нелінійною функцією зв'язку

Модель Піковського–Розенблюма (система (2.2) або еквівалентна система (2.4) відрізняється від моделі Курамото–Сакагучі (2.11) лише нетривіальним фазовим зсувом у функції зв'язку  $\alpha$ . Виявляється, що використовуючи Лему 2.3.1 можна локалізувати положення рівноваги навіть для системи більш загальної, ніж система (2.11), коли праві частини системи містять скалярну функцію

$$\alpha = \alpha(\theta_1, \dots, \theta_N, \beta),$$

де  $\beta \in \mathbb{R}^m$  є вектором параметрів:  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_m)$ ,  $m \geq 1$ . Для існування та єдиності розв'язків системи (2.2) достатньо вимагати гладкості функції  $\alpha(\theta_1, \dots, \theta_N, \beta)$  за її змінними  $(\theta_1, \dots, \theta_N)$ , хоча цю умову можна послабити, вимагаючи виконання умови Ліпшиця для вектор-функції  $G$  (але цю умову важче перевірити). Для знаходження положень рівноваги системи (2.2), нам потрібно описати всі розв'язки алгебраїчної системи

$$g_1(\theta_1, \dots, \theta_N, \alpha(\theta_1, \dots, \theta_N, \beta)) - \\ - g_i(\theta_1, \dots, \theta_N, \alpha(\theta_1, \dots, \theta_N, \beta)) = 0, \quad i = 2, \dots, N. \quad (2.20)$$

**Лема 2.4.1.** *Множина значень  $(\theta_1, \dots, \theta_N)$  задовольняє системі рівнянь (2.20) для будь-якої гладкої скалярної функції  $\alpha(\theta_1, \dots, \theta_N, \beta)$  та вектору параметрів  $\beta \in \mathbb{R}^m$  тоді і тільки тоді, коли виконується одна з трьох наступних умов:*

- (i)  $\theta_1 = \dots = \theta_N$ ,
- (ii)  $\sum_{j=1}^N e^{i\theta_j} = 0$ ,
- (iii)  $\theta_1 = \dots = \theta_p \neq \theta_{p+1} = \dots = \theta_N$ ,  $p = 1, \dots, N-1$  (з точністю до перестановок).

**Доведення.** Скористаємось методом від супротивного. Припустимо, що умови Лема 2.4.1 не виконуються для деякого фіксованого значення змінних  $(\theta_1, \dots, \theta_N) = (\theta_1^0, \dots, \theta_N^0)$  і параметрів  $\beta = \beta^0 = (\beta_1^0, \dots, \beta_m^0)$ . Тоді Лема 2.3.1 не виконується для системи (2.13) для фіксованого значення параметру  $\alpha =$

$\alpha(\theta_1^0, \dots, \theta_N^0, \beta^0)$ . Це протиріччя і доводить Лему 2.4.1.  $\square$

Відмітимо, що в лемі ми не вимагаємо від функції  $\alpha$  (а, отже, і від функції зв'язку всієї системи) жодних видів симетрії. Тим не менше, біфуркації всіх положень рівноваги є одновимірними і вони відбуваються строго на прямих лініях інваріантних дво-кластерних многовидів. Положення стаціонарних точок на цих многовидах також описується рівнянням (2.15), але з урахуванням того, що у даному випадку  $\alpha$  є вже функцією, яка має власні нулі. Тому положень рівноваги у системи (2.4) може бути значно більше ніж у редукованої системи (2.11) і біфуркації цих точок є різноманітнішими.

У даному підрозділі ми сконцентруємось на моделі з функцією зв'язку  $g$ , залежною від параметру порядку  $R$  [276, 263]. Така система також має симетрію перестановок  $\mathbf{S}_N$ , що також суттєво впливає на можливі форми біфуркацій. Лема 2.4.1 показує, що (як і у випадку моделі Курамото–Сакагучі) всі положення рівноваги системи (2.4) (де  $\alpha = \alpha(R, \beta)$ ) належать лише або до інваріантного многовиду  $\mathcal{M}^{(N)}$ , або до кластера з ізотропією  $\mathbf{S}_p \times \mathbf{S}_{N-p}$ , який також є інваріантним многовидом системи. Задача відшукування положень рівноваги на дво-кластерному многовиді зводиться тепер до відшукування коренів скалярного алгебраїчного рівняння:

$$p \sin(\varphi_k - \alpha(R(\varphi_k), \beta)) + (N - p) \sin(\varphi_k + \alpha(R(\varphi_k), \beta)) - (N - 2p) \sin \alpha(R(\varphi_k), \beta) = 0. \quad (2.21)$$

У цьому випадку, скориставшись формулою (2.1) з урахуванням рівності (2.14) можна записати параметр порядку

$$R = R(\varphi_k) = \frac{1}{N} \sqrt{p^2 + (N - p)^2 + 2p(N - p) \cos \varphi_k}, \quad k = 1, \dots, p. \quad (2.22)$$

Також бачимо, що біфуркації положень рівноваги мають одно-вимірні нормальні форми. Нижче ми детально опишемо ці та інші біфуркації, проілюструвавши їх малюнками для випадків  $N = 3$  та  $N = 4$  (рис. 8.1).

### 2.4.1. Біфуркації режиму повної синхронізації

Початок координат системи (2.4) є положенням рівноваги для будь-яких значень функції  $\alpha(R, \beta)$ . Розглянемо Якобіан цієї системи у точці  $\varphi_j = 0, j = 1, \dots, N - 1$ . Всі власні значення цієї матриці є однаковими:

$$\lambda_i = -N \cos(\alpha(1, \beta)), \quad i = 1, \dots, N - 1. \quad (2.23)$$

Це означає, що початок координат даної системи змінює свою стійкість, коли  $\alpha(1, \beta) = \pm\pi/2$ . Також, як було зазначено вище, всі біфуркації, пов'язані з цією точкою, мають відбуватись вздовж інваріантних ліній з симетрією  $\mathbf{S}_p \times \mathbf{S}_{N-p}, p = 1, \dots, [N/2]$ . Така біфуркація може бути або *транскритичною*, або *вилковою* (сідло-вузловою вона не може бути з міркувань симетрії). Вилкова біфуркація може бути лише у випадку парної кількості осциляторів і ця біфуркація виникає вздовж інваріантної лінії з симетрією  $\mathbf{S}_{N/2} \times \mathbf{S}_{N/2}$ , як це було показано в роботі П. Ешвіна та Дж. Свіфта [43]. Нормальна форма цієї біфуркації має вигляд:  $d\varphi/dt = \varphi(\mu - \varphi^2)$ , де  $\mu$  залежить від  $\alpha(1, \beta)$ .

Отже, типовою біфуркацією початку координат є транскритична біфуркація (проілюстрована у колонці (1) рис. 8.1(b)). Ця біфуркація виникає одночасно на всіх інваріантних лініях з симетрією  $\mathbf{S}_p \times \mathbf{S}_{N-p}, p \neq N/2$ . Біфуркаційні параметри  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_m)$  визначаються за допомогою виразу  $\alpha(1, \beta) = \pm\pi/2$ . Положення рівноваги в момент біфуркації перетворюється на вироджене сідло (всі власні значення лінеаризованої в цій точці системи є нулями).  $\sum_{j=1}^{[N+1]/2-1} C_N^j$  сидел, де  $[x]$  є цілою частиною числа  $x$ , зустрічаються разом у початку координат. Біфуркація змінює стійкість початку координат вздовж кожної одно-вимірної інваріантної лінії.

Вилкова біфуркація початку координат (див. панель (3) на рис. 8.1(b)) виникає одночасно з транскритичною біфуркацією у випадку парної кількості осциляторів. Два сидла з'являються (зникають) у початку координат (стійкому чи нестійкому) і рухаються у протилежних напрямках вздовж лінії, що має  $\mathbf{S}_{N/2} \times \mathbf{S}_{N/2}$  ізотропію. У випадку парного  $N$  ці сидла є зазвичай генераторами траєкторій (одно-вимірних многовидів), які при певних додаткових умовах є частинами гетероклінічних циклів.

### 2.4.2. Біфуркації кластерів

Для відшукування інших положень рівноваги на інваріантних лініях з симетріями  $\mathbf{S}_p \times \mathbf{S}_{N-p}$ , потрібно вирішити відповідну алгебраїчну систему (2.20), яка задовольняє (2.14) та (2.22). Останнє означає що нам треба вирішити лише одне алгебраїчне рівняння. Як правило, положення рівноваги з'являються (зникають) парами на кожній інваріантній лінії  $\varphi_j \in (0, 2\pi)$ ,  $j = 1, \dots, N - 1$ , і ця поява (зникнення) відповідає *сідло-вузловій* біфуркації (див. панель (2) на рис. 8.1). Нормальна форма цієї біфуркації на многовиді має вигляд  $d\varphi_k/dt = (\varphi_k - \varphi_k^*)^2 + \mu$ , де  $\mu$  є параметром, залежним від  $\alpha(R(\varphi_k^*), \beta)$ , який можна обчислити за допомогою рівності (2.16) для кожної конкретної точки біфуркації  $\varphi_k^*$  (таких точок може бути багато в залежності від вигляду функції  $\alpha(R, \beta)$ ). Сідло-вузлова біфуркація, що з'являється в  $(N - 1)$ -вимірному фазовому просторі (де розглядається наша редукована система) призводить до виникнення двох точок, тобто двох нових дво-кластерних станів. Ці дві точки мають протилежні стійкості вздовж одно-вимірного многовиду з ізотропією  $\mathbf{S}_p \times \mathbf{S}_{N-p}$ , але однакову стійкість у трансверсальних до цього многовиду напрямках. Зокрема, одна з новонароджених точок може бути стійким вузлом, що відповідає дво-кластерному стану всієї системи. Вилкова біфуркація на інваріантному  $\mathbf{S}_p \times \mathbf{S}_{N-p}$ -многовиді також можлива в загальному випадку, але вона є менш ймовірною у загальному випадку. Для виникнення такої вилкової біфуркації необхідне виконання досить специфічних симетричних умов для функції  $\alpha(R, \beta)$ , що забезпечують локальну непарність в околі певної особливої точки для функції з рівняння (2.21). У випадку локальної непарності функції  $g(x, \alpha)$  у околі деякої точки  $\varphi_k^*$  на дво-кластерному многовиді, нормальна форма вилкової біфуркації на цьому многовиді має вигляд:  $d\varphi_k/dt = \mu(\varphi_k - \varphi_k^*) - (\varphi_k - \varphi_k^*)^3$ , де  $\mu$  параметр, залежний від  $\alpha(R(\varphi_k^*), \beta)$ . Остання біфуркація може призвести до появи одразу двох стійких дво-кластерних режимів.

Також відмітимо, що динаміка моделі з нелінійним фазовим зсувом  $\alpha(R, \beta)$  також суттєво відрізняється від моделі Курамото-Сакагучі з  $\alpha = \text{const}$  на  $\mathbf{S}_{N/2} \times \mathbf{S}_{N/2}$ -ізотропічних кластерах систем парних розмірностей (ко-

ли  $N = 2p$ ,  $p \in \mathbb{N}$ ). Аналогічно з (2.17) положення рівноваги на вказаному інваріантному многовиді визначаються з рівняння

$$N \sin \varphi_k \cos \alpha(R, \beta) = 0, \quad \text{де} \quad R = \sqrt{\frac{1 + \cos \varphi_k}{2}}, \quad k = 1, \dots, p. \quad (2.24)$$

У випадку моделі Курамото–Сакагучі відбувається біфуркації при  $\alpha = \text{const} = \pm\pi/2$ . Як видно з останнього рівняння у цьому випадку весь одно–вимірний інваріантний многовид системи у фазових різницях перетворюється на множину нейтральних положень рівноваги (Теорема 2.3.1, пункт 4). Очевидно, що подібного не трапляється коли  $\alpha$  є функцією змінної  $\varphi_k$ . У цьому випадку крім положення рівноваги  $\varphi_k = 0$  на інваріантному многовиді є *дискретна множина особливих точок*, що задаються рівнянням

$$\alpha \left( \sqrt{(1 + \cos \varphi_k)/2}, \beta \right) = \pm\pi/2. \quad (2.25)$$

Дослідження даного рівняння покаже рух особливих точок по інваріантному многовиду при зміні параметрів та допоможе встановити тип біфуркацій (можливі варіанти: сідло–вузлова, транскритична та вилкова). Як відмічалось раніше, вираз  $\alpha(1, \beta) = \pm\pi/2$  визначає біфуркаційну криву у просторі параметрів. Очевидно, що ця ж сама умова визначає біфуркацію точки кластера  $\varphi_k$  за допомогою рівняння (2.25). Також рівняння (2.25) говорить про те, що біфуркації у нулі уздовж кожного з кластерів відбуваються одночасно.

### 2.4.3. Гетероклінічні цикли

Описана вище сідло–вузлова біфуркація є джерелом виникнення великої кількості нових сідел (в залежності від складності функції  $\alpha(R, \beta)$ ). Одно–вимірні інваріантні многовиди цих сідел можуть утворювати гетероклінічні траєкторії таким чином, що нестійкий многовид одного сідла  $W^u(S_1)$  є одночасно стійким одно–вимірним многовидом іншого  $W^s(S_2)$ . Внаслідок  $\mathbf{S}_N$  та  $\mathbf{Z}_N$  симетрій вказані гетероклінічні траєкторії формують *гетероклінічні цикли*. Зникнення гетероклінічного циклу внаслідок глобальної біфуркації зазвичай



призводить до появи граничного циклу, що відповідає несинхронізованому режиму системи (2.4). На рис.8.2 проілюстровано два типи таких глобальних біфуркацій. На верхній панелі малюнку зображено біфуркацію виникнення граничного циклу через появу гетероклінічного (в момент біфуркації), який, в свою чергу, виник унаслідок зіткнення трьох симетричних пар сідел і вузлів. Генерація граничних циклів через *сідло–вузлові/гетероклінічні* біфуркації є типовою для систем з симетріями, зокрема, і для (2.4). У випадку парної кількості осциляторів, сідло–вузлова біфуркація на інваріантних лініях робить можливим з'єднання одно–вимірних многовидів сідел, які виникли раніше (відносно зміни параметру) за допомогоювилкової біфуркації у початку координат. Нижня панель рис. 8.2 ілюструє появу гетероклінічного циклу внаслідок транскритичної біфуркації в початку координат. Гетероклінічний цикл (середній малюнок нижньої панелі) складається з точки виродженого сідла в початку координат і інваріантних  $\mathbf{S}_p \times \mathbf{S}_{N-p}$ -ліній. Враховуючи тороїдальну структуру фазового простору, можна вважати той же об'єкт трьома гомоклінічними петлями, пов'язаними одним виродженим сідлом. У даному випадку відбулась *транскритична/гетероклінічна* біфуркація. Середня панель рис. 8.2 показує туж саму транскритичну/гетероклінічну біфуркацію для випадку моделі Курамото–Сакагучі (2.11). У останньому випадку глобальна біфуркація є виродженою і симетричною відносно біфуркаційного значення параметру. Гетероклінічний цикл у момент біфуркації є нейтрально стійким, а сама біфуркація не веде до появи стійкого граничного циклу, як у попередньому випадку (нижня панель малюнку).

Загальною особливістю гетероклінічних біфуркацій для довільного  $N$  є те, що вони відбуваються на границях  $\partial\bar{\mathcal{C}}$  інваріантних областей  $\bar{\mathcal{C}}$ , а самі гетероклінічні цикли складаються з траєкторій, що належать різним граням  $\partial\bar{\mathcal{C}}$ . Як було показано раніше, періодичні орбіти не можуть належати  $\partial\bar{\mathcal{C}}$  і знаходяться виключно всередині  $\bar{\mathcal{C}}$ . Отже, біфуркації граничних циклів призводять до появи граничних циклів, періоди яких прямують до нескінченності (аналогічно з теоремою Андронова–Леонтович [22, 209, стор. 200]). Необхідною умовою появи гетероклінічних циклів з кількома сідловими вузлами  $S_j$ ,  $j = 1, \dots, k$ , кожне з яких має негативне власне значення  $\lambda_-(S_j) < 0$  та

позитивне власне значення  $\lambda_+(S_j) > 0$ ,

$$\rho = 1, \quad \text{де} \quad \rho = \rho(S_1, \dots, S_k) = \prod_{j=1}^k \frac{\lambda_-(S_j)}{\lambda_+(S_j)}. \quad (2.26)$$

Очевидно, біфуркація призводить до появи граничного циклу лише за умов, коли присутні усі зв'язки між сідлами (сідло–вузлами)  $S_j$  та  $S_{j+1}$  так, що  $W^u(S_j) = W^s(S_{j+1})$ . Більш локально можна уявляти дво–вимірні сідло–зв'язні біфуркації (перебудови сепаратрис) в околі окремого сідла або двох зв'язаних сідел на дво–вимірному многовиді. Співвідношення між сідловими значеннями у трансверсальних до цього многовиду напрямках впливає лише на стійкість гетероклінічного циклу. Формула (2.26) не може бути легко узагальнена на випадок більшої кількості власних значень. Про це свідчать відомі результати Л. Шильнікова [299] про гомоклінічну петлю сідло–фокуса, де ситуація є доволі складною і співвідношення між власними значеннями сідло–фокуса також впливає на існування детермінованого хаосу в околі петлі, та появу нескінченної кількості сідлових циклів. Більш детально умови існування гетероклінічних циклів та біфуркації їх народження для систем з симетріями різного типу наведено у роботах [146, 202, 130, 201, 334, 145, 131]. Відмітимо, що при наявності симетрій у системі (частіше за все симетрії перестановок, циклічної, дієдральної чи часово–оборотної) окремі сідла або (i) мають однакову кількість позитивних та негативних власних значень:  $\lambda_-(S_j) = -\lambda_+(S_j)$  або (ii) власні значення різних сідел компенсують одне одного так, що їх сума рівна нулю. Для системи (2.4) умова (2.26) завжди виконується. Тому гетероклінічні біфуркації формують саме зв'язки між одновимірними інваріантними многовидами  $W^u$ ,  $W^s$  різних сідлових чи сідло–вузлових точок (формування яких зображено, у тому числі, на біфуркаційних схемах рис. 8.2, рис. 8.4 та рис. 8.5 ).

Інша (крім гетероклінічної) можливість появи граничного циклу в системі є *біфуркація Андронова–Хопфа* особливої точки многовиду  $\mathcal{M}^{(N)}$  (ми покажемо це нижче) або *сідло–вузлова (fold) біфуркація двох граничних циклів*. Існування таких складних структур, як квазі–періодичні тори чи хаотичні

атрактори неможливе для системи (2.4). Останні твердження впливають з ВС теорії [330, 331]. Як було показано в [331, 263] система (2.2) може бути редукована до три-вимірної системи, де рівняння для однієї зі змінних залежить лише від двох інших змінних. Отже, динаміка двох “ведучих” змінних може бути щонайбільше періодичною, а динаміка всієї системи щонайбільше квазі-періодичною. Більш детально біфуркації граничних циклів будуть описані у підрозділі 2.4.5.

Відмітимо, що крім гетероклінічних циклів, система у фазових різницях також може мати незамкнуті гетероклінічні орбіти, що буде більш детально описано у підрозділі 2.4.5.

#### 2.4.4. Стійкість многовиду $\mathcal{M}^{(N)}$

Розглянемо інваріантну множину  $\mathcal{M}^{(N)}$ . Як було зазначено, ця множина є  $(N - 2)$ -вимірною у фазовому просторі  $\mathbb{T}^N$  оригінальної системи (2.2). Враховуючи симетрію фазового зсуву бачимо, що заміна змінних 2.3 перетворює цю множину у відповідну  $(N - 3)$ -вимірну множину  $\overline{\mathcal{M}}^{(N)}$  (2.18) у фазовому просторі  $\mathbb{T}^{N-1}$  системи у фазових змінних (2.4). Лема 2.4.1 стверджує, що ця множина складається виключно з положень рівноваги для будь-яких значень параметрів. Для описання локальних біфуркацій цієї множини, спершу розглянемо властивості Якобіана

$$J = J(\varphi_1, \dots, \varphi_{N-1}, \alpha(R, \beta)) = \frac{\partial (g_1(\varphi_1, \dots, \varphi_{N-1}, \alpha), \dots, g_{N-1}(\varphi_1, \dots, \varphi_{N-1}, \alpha))}{\partial (\varphi_1, \dots, \varphi_{N-1})}$$

в точках многовиду  $\mathcal{M}^{(N)}$ . Покажемо, що  $N - 3$  власні значення Якобіана перетворюються в нуль, що означає відсутність будь-якого руху всередині самого многовиду. При цьому слід також враховувати, що многовид  $\mathcal{M}^{(N)}$  та дво-кластерні многовиди мають точки перетину у випадку парної кількості осциляторів  $N$ .

**Лема 2.4.2.** Ранг Якобіану матриці системи (2.4) є наступним:

$$\text{rank}(J) = \begin{cases} 1, & \text{для дво-кластерних станів з ізотропією } \mathbf{S}_{N/2} \times \mathbf{S}_{N/2}, \\ 2, & \text{в інших точках многовиду } \mathcal{M}^{(N)}. \end{cases}$$

**Доведення** цієї леми наведено у Додатку В.3 (див. стор. 381).

Ця лема показує, що Якобіан системи в різницях на многовиді  $\overline{\mathcal{M}}^{(N)}$  має  $N - 3$  власних значень рівних нулю. Однак, як це було показано, ранг Якобіану залежить від значень змінних системи (тобто від координат точок на многовиді). Отже, для знаходження власних значень  $J$  не достатньо розглянути лише окремий  $2 \times 2$ -мінор, а потрібно розглядати всю матрицю. Кожне зі власних значень є функцією  $N - 3$  змінних в точках многовиду. Виразимо дві останні змінні  $\varphi_{N-2}$  та  $\varphi_{N-1}$  як функції інших змінних  $\varphi_1, \dots, \varphi_{N-3}$ , використовуючи дійсну та уявну частини виразу (2.6). Тоді отримаємо:

$$\varphi_{N-2} = \arctan\left(\frac{f_2}{f_1}\right) - \frac{1}{2} \arccos\left(\frac{f_1^2 + f_2^2}{2} - 1\right) + \frac{\pi}{2}(1 - \text{sign}(f_1)), \quad (2.27)$$

$$\varphi_{N-1} = \arctan\left(\frac{f_2}{f_1}\right) + \frac{1}{2} \arccos\left(\frac{f_1^2 + f_2^2}{2} - 1\right) + \frac{\pi}{2}(1 - \text{sign}(f_1)), \quad (2.28)$$

де

$$f_1(\varphi_1, \dots, \varphi_{N-3}) = -1 - \sum_{j=1}^{N-3} \cos \varphi_j, \quad f_2(\varphi_1, \dots, \varphi_{N-3}) = - \sum_{j=1}^{N-3} \sin \varphi_j.$$

У випадку рівномірного розподілу осциляторів на колі (*splay state* згідно до термінології щодо моделі Курамото [331, 352, 90, 353] або *хвиля обертання* (*rotatin wave*) згідно термінології [283, 230, 343]), який можна представити у вигляді:

$$\Phi_{\text{splay}} = \left( m \frac{2\pi}{N}, m \frac{2 \cdot 2\pi}{N}, \dots, m \frac{(N-1)2\pi}{N} \right), \quad m = 1, \dots, N-1, \quad (2.29)$$

власні значення Якобіану є:

$$\lambda_{N-2, N-1} = \frac{N}{2} (\cos \alpha \pm i \sin \alpha). \quad (2.30)$$

В загальному випадку всього многовиду власні значення є:

$$\lambda_{N-2, N-1}(\varphi_1, \dots, \varphi_{N-3}) = \frac{N}{2} \left( \cos \alpha \pm \sqrt{\cos \alpha - h^2(\varphi_1, \dots, \varphi_{N-3})} \right), \quad (2.31)$$

де  $|h(\varphi_1, \dots, \varphi_{N-3})| \leq 1$  є деяка гладка функція. Отже, ми отримуємо біфуркацію Андронова–Хопфа при  $\alpha = \pm\pi/2$  (у даному випадку умови трансверсальності чи виродженості біфуркації можуть не виконуватися; біфуркація може бути виродженою, як у випадку моделі Курамото–Сакагучі). Ця біфуркація відбувається одночасно у всіх точках многовиду  $\overline{\mathcal{M}}^{(N)}$  за винятком точок з ізотропією  $\mathbf{S}_{N/2} \times \mathbf{S}_{N/2}$ , де функція  $h(\varphi_1, \dots, \varphi_{N-3}) = 0$ .

У випадку трьох зв'язаних осциляторів нуль-вимірний многовид  $\overline{\mathcal{M}}^{(3)}$  складається лише з двох точок  $(2\pi/3, 4\pi/3)$  та  $(4\pi/3, 2\pi/3)$  (ліва панель рис. 8.1(а); рис. 8.2). Біфуркація Андронова–Хопфа кожної з цих точок змінює її стійкість та генерує суперкритичний (чи руйнує субкритичний) граничний цикл. Подальша зміна параметру від положення біфуркації призводить до зростання амплітуди цього циклу і його наступному зникненні чи у сідло–вузловій/гетероклінічній біфуркації, чи у сідло–вузловій біфуркації двох циклів (складці циклів).

Більш нетривіальна ситуація трапляється у випадку чотирьох глобально зв'язаних осциляторів. Інваріантний многовид  $\mathcal{M}^{(4)}$  у цьому випадку складається з шести прямих ліній (одна з таких ліній зображена на рис. 8.2 (зеленим)). Координати цих ліній є  $(\varphi_j, \pi, \varphi_j + \pi)$  з точністю до перестановки. Інваріантний многовид має ізотропію  $\mathbf{Z}_2$ . Функція  $h(\varphi) = \sin \varphi_j$  виникає у виразі власних значень матриці Якобіану. Біфуркація Андронова–Хопфа відбувається одночасно в кожній точці згаданих прямих у трансверсальному до них напрямку. Отже, після біфуркації виникає дво-вимірна поверхня, що складається з граничних циклів. Відмітимо, що дана біфуркація відрізняється від біфуркації Неймарка–Сакера хоч і має з нею певні спільні риси. Кожен з цих

циклів є притягуючим (відштовхуючим) лише всередині поверхонь, описаних ВС теорією, у іншому напрямку він є нейтральним. Можливим шляхом зникнення цих дво-вимірних поверхонь є сідло-вузлова/гетероклінічна біфуркація на інваріантних лініях, що була описана вище. Дво-вимірною множиною гетероклінічних циклів у моменті біфуркації також зображена на рис. 8.5 та рис. 8.14(b).

Іншою можливістю зникнення (появи) двох граничних циклів є біфуркація сідло-вузла (складки) циклів. Відмітимо, що дана біфуркація відбувається для кожної пари граничних циклів, що належать до різних дво-вимірних множин циклів. Ця біфуркація відбувається також всередині поверхні Ватанабе-Строгатца. Тому ми отримуємо *сідло-вузлову біфуркацію дво-вимірних множин*, одна з яких є стійкою а друга нестійкою.

#### 2.4.5. Граничні цикли та їх біфуркації

Як зазначалось вище, система глобально зв'язаних ідентичних осциляторів має симетрію перестановок  $S_N$ , що призводить появи розділяючих інваріантних кластерних многовидів і також розділення всього фазового простору на канонічні інваріантні області  $\mathcal{C}$  (2.9). Для системи у фазових різницях у фазовому просторі  $\mathbb{T}^{N-1}$ , ці області розділяються гіперплощинами вигляду  $\varphi_i = 0$  або  $\varphi_i = \varphi_j$ . Відповідно до Лема 2.4.1 система у фазових різницях (2.4) не може мати положень рівноваги у середині  $\mathcal{C}$  для будь-яких функцій  $\alpha(R, \beta)$ . Динаміки всередині кожної інваріантної області є повністю ідентичними внаслідок симетрії системи. Заміна змінних у ВС теорії [331] (і її узагальненні [276, 263]) не має особливостей у середині інваріантних областей (на відміну від їх границь). Ця теорія повністю описує динаміку системи у  $\mathcal{C}$ , зводячи цю систему до 3-вимірною при  $N \geq 4$ . Результати цієї теорії повністю узгоджуються з результатами, що описуються у даному розділі. Система у фазових різницях може мати лише граничні цикли або неперервні сім'ї періодичних орбіт, а оригінальна системи (2.2) може мати квазі-періодичні розв'язки (коли частоти періодичних орбіт системи у фазових різницях та трансляції уздовж фазового зсуву є несумірними). Три-вимірною зведеною системою Ватанабе-Строгатца має одне рівняння, праві частини якого цілком

залежать лише від інших двох змінних. Тобто така система фактично має дво-вимірну динаміку. Останнє є доведенням відсутності хаосу цій системі та у вихідній осциляторній системі. Крім згаданих періодичних орбіт, всередині інваріантної області  $\mathcal{C}$  система може мати гетероклінічні орбіти (не цикли), початок (кінець) яких знаходиться на інваріантному многовиді  $\overline{\mathcal{M}}^{(N)}$ , а кінець (початок) знаходиться на границі  $\mathcal{C}$  на дво-кластерному многовиді. Наявність множин граничних циклів у середині інваріантної області  $\overline{\mathcal{C}}$  системи у фазових різницях.

Альтернативним дослідження кількості, структури та стійкості граничних циклів чи їх неперервних множин у моделі з нелінійним фазовим зсувом (2.2) може бути використання *перерізу Пуанкаре* для відповідної системи у фазових різницях (2.4). У якості перерізу Пуанкаре візьмемо  $(N - 2)$ -вимірну гіперплощину у  $\mathbb{T}^{N-1}$  наступного вигляду:

$$\Pi_N = \left\{ (\varphi_1, \dots, \varphi_{N-1}) : \sum_{j=1}^N \varphi_j = \gamma_N \right\}, \quad \gamma_N = \begin{cases} 0, & N = 2k + 1, \\ \pi, & N = 2k, \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}, N \geq 3. \quad (2.32)$$

Можна переконатись, що гіперплощина  $\Pi_N$  містить всі точки, що відповідають рівномірному розподілу фаз осциляторів (2.29).  $\Phi_{splay} \in \Pi_N$ , скільки сума координат точки  $\Phi_{splay}$  дорівнює  $(N - 1)\pi$ . Усі точки (2.29) також належать інваріантному многовиду  $\overline{\mathcal{M}}^{(N)}$ , оскільки мають параметр порядку  $R(\Phi_{splay}) = 0$ . Також кожна з цих точок належить одній з інваріантних областей  $\overline{\mathcal{C}}$  та є її центром. Таким чином гіперплощина  $\Pi_N$  перетинає усі без винятку інваріантні області  $\overline{\mathcal{C}}$ . Очевидно, що тоді також  $\Pi_N \cap \partial\overline{\mathcal{C}} \neq \emptyset$ . Отже, кожна періодична траєкторія, що народилась з біфуркації Андронова–Хопфа з точки многовиду  $\overline{\mathcal{M}}^{(N)}$  принаймні двічі перетинає гіперплощину  $\Pi_N$ . Отже, положенням рівноваги дискретної динамічної системи на  $\Pi_N$  відповідають періодичні орбіти системи у фазових різницях (2.4). Стійкість даних точок дискретної система також відповідає стійкості періодичних розв'язків відповідної неперервної. Біфуркації Андронова–Хопфа неперервної системи відповідає вилкова біфуркація дискретної. Оскільки, згідно міркуванням попереднього підрозділу, біфуркації відбуваються одночасно у всіх точках многовиду  $\overline{\mathcal{M}}^{(N)}$ ,

то вилкові біфуркації відбуваються також у всіх точках  $(N - 3)$ -вимірної множини  $\overline{\mathcal{M}}^{(N)} \cap \Pi_N$ . Новоутворені множини особливих точок є відображеннями *неперервних множин граничних циклів*  $\mathcal{L}$  вихідної системи. Оскільки кожна точка інваріантного многовиду  $\overline{\mathcal{M}}^{(N)}$  є нейтральною всередині самого многовиду у  $N - 3$  напрямках, то новоутворені цикли (і положення рівноваги дискретної системи) повинні бути також нейтральними у цих же напрямках. Біфуркація змінює їх стійкість лише у двох трансверсальних напрямках. Позначимо  $\mathcal{L}_s$ ,  $\mathcal{L}_u$  та  $\mathcal{L}_n$  відповідно стійкі, нестійкі та нейтральні у трансверсальному напрямку множини циклів. Біфуркації Андронова–Хопфа відбуваються при  $\alpha(0, \beta) = \pm\pi/2$ . Залежність функції  $\alpha$  від вектору параметрів  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_m)$ ,  $m \geq 1$ , і визначає стійкість новоутворених періодичних орбіт (вони можуть бути нейтральними у момент біфуркації, як це зокрема є для системи Курамото–Сакагучі при  $\alpha = \text{const}$ ). Отже біфуркації Андронова–Хопфа системи пов'язані з нулями рівняння  $\alpha(0, \beta) \pm \pi/2 = 0$ . Чергування перетинів з нулем функції  $\alpha$  з додатними та від'ємними похідними (у найбільш типовому випадку) призводить до послідовності біфуркацій, що призведуть до хвиль появ неперервних множин положень рівноваги, стійкість яких також буде чергуватись. Тобто, наприклад, при певному збільшенні одного з параметрів  $\beta_j$  з'явилась множина стійких особливих точок на  $\Pi_N$ , а при подальшому збільшенні цього параметру з'явилась множина вже нестійких положень рівноваги. Такий сценарій відповідає по черговій появі стійких та нестійких граничних циклів усередині канонічної інваріантної області  $\overline{\mathcal{C}}$  та одночасному існуванню двох множин  $\mathcal{L}_s$ ,  $\mathcal{L}_u$  у  $\overline{\mathcal{C}}$ . Ще однією можливою біфуркацією точок дискретної динамічної системи на  $\Pi_N$  є, очевидно, сідло–вузлова біфуркація при зміні параметрів функції  $\alpha$ . Дана біфуркація призводить до появи (зникнення) двох точок протилежної стійкості для даної системи. Така біфуркація відповідає сідло–вузловій біфуркації граничних циклів для системи у фазових різницях (2.4). Більш глобально буде відбуватись сідло–вузлова біфуркація множин циклів  $\mathcal{L}_s$  та  $\mathcal{L}_u$ , що призведе до їх зникнення (появи) у  $\overline{\mathcal{C}}$ . Подібним чином, при наявності додаткової непарної симетрії у функції  $\alpha(R, \beta)$  система у фазових різницях може мати вилкові (субкритичну чи суперкритичну) біфуркації граничних циклів, що призведе-



дуть до появи (зникнення) двох додаткових граничних циклів. Для множин граничних циклів  $\mathcal{L}$  сказане вище означає суперкритичну біфуркацію усієї множини  $\mathcal{L}_s$ , що призводить до перетворення її на  $\mathcal{L}_u$  та появи двох нових  $\mathcal{L}_s$ . Цикли найбільшої можливої амплітуди та періоду близько до границі області  $\bar{\mathcal{C}}$  перетворюються на гетероклінічні цикли на границі  $\partial\bar{\mathcal{C}}$  за допомогою різних гетероклінічних біфуркацій та зникають при подальшій варіації параметрів (як це описано у підрозділі 2.4.3).

Ще раз відмітимо, що всі граничні цикли однієї множини є нейтральними один по відношенню до одного у  $N - 3$  внутрішніх напрямках і вони є всі одночасно стійкими чи нестійкими у двох трансверсальних до цієї множини напрямках. Незважаючи на розмірність, структура фазового простору системи у різницях та відповідного перерізу Пуанкаре є схематично подібною. Спрощено (як при  $N = 3$ ) можна уявити інваріантний многовид  $\bar{\mathcal{M}}^{(N)}$  як одну точку, яку оточують концентричні кола почергової стійкості, що відповідають множинам граничних циклів  $\mathcal{L}$  тієї ж стійкості. Біфуркації Андронова–Хопфа призводять до появи нових концентричних траєкторій навколо особливої точки. Сідло–вузлові та вилкові біфуркації призводять до появи нових концентричних кіл між іншими, що вже існують. Максимальне збільшення періодичної траєкторія призведе до її попадання у гетероклінічну границю області та подальшого зникнення у одній з можливих гетероклінічних біфуркацій (рис. 8.2). У просторі наступної розмірності інваріантним многовидом є вже лінія, оповита концентричними ”трубами” почергової стійкості. Подібна динаміка відбувається і для просторів довільної скінченної розмірності. Біфуркації, що призводять до таких структур проілюстровано на рис. 8.5. Застосування описаного перерізу Пуанкаре є зручним для описання біфуркацій та стійкості за допомогою чисельних методів. Описаний метод працює лише всередині інваріантної області  $\bar{\mathcal{C}}$  та не буде правильно відображати ситуацію на її границях. Останнє пояснюється тим, що гетероклінічні цикли, що належать  $\partial\bar{\mathcal{C}}$  мають по кілька власних особливих точок, що не можуть бути описані у згаданому відображенні.

Відмітимо, що отримані за допомогою описаного вище методу результати цілком узгоджуються з результатами ВС теорії та доповнюють її у середи-

ні інваріантних областей. Динаміка на границях цих областей та біфуркації появи граничних циклів з гетероклінічних описуються лише за допомогою теорії наведеної у даному розділі. Оскільки модель Піковського–Розенблюма є узагальненням моделі Курамото–Сакагучі, то, як показано вище, вона має більш складну динаміку. Ще раз коротко відмітимо особливості додаткової динаміки, яку отримує система, коли фазовий зсув перестає бути константою. Це (i) поява великої кількості (в залежності від  $\alpha(R, \beta)$ ) положень як стійких так і нестійких точок на інваріантних дво–кластерних многовидах  $\mathcal{P}_2$  (для  $\alpha = \text{const}$  це лише одне сідло); (ii) поява многовидів граничних циклів  $\mathcal{L}$  усередині інваріантної області  $\overline{C}$  (не лише множини періодичних орбіт, що заповнюють цю область і не лише при  $\alpha = \pm\pi/2$ ); (iii) поява гетероклінічних циклів різноманітної структури і при різних біфуркаціях (не лише при транскритичній/гетероклінічній біфуркації).

#### 2.4.6. Атрактори та мультистабільність

*Атрактори.* Згідно описаному вище, система (2.4) має наступні стійкі режими:

1. Повну синхронізацію  $\varphi_j = 0, j = 1, \dots, N - 1$ .
2. Дво–кластерний режим з ізотропією  $\mathbf{S}_p \times \mathbf{S}_{N-p}$ .
3. Граничний цикл.
4. Гетероклінічний цикл.
5. Многовид  $\overline{\mathcal{M}}^{(N)}$ .

*Мультистабільність.* У даному розділі було локалізовано положення рівноваги на дво–кластерах та антифазному многовидах за допомогою Лема 2.4.1. Якщо сідло–вузлова біфуркація генерує новий стійкий вузол в той час, як інший стійкий вузол у початку координат все ще існує, то ми отримуємо мультистабільність синхронного та дво–кластерного режимів. Відмітимо, що в залежності від складності функції  $\alpha(R, \beta)$  можна отримати одночасно багато стійких вузлів на інваріантній лінії, що означатиме мультистабільність синхронного та кількох дво–кластерних станів.

Система може мати мультистабільність граничних циклів усередині канонічних інваріантних областей при достатньо нетривіальній функції фазового зсуву  $\alpha(R, \beta)$  (у наступному підрозділі детально буде розібраний приклад  $\alpha(R, \beta) = \beta_1 + \beta_2 R^2$ ). Граничні цикли накопичуються у середині області двома способами: (а) появи з середини області внаслідок біфуркацій Андронова–Хопфа точок інваріантного многовиду  $\overline{\mathcal{M}}^{(N)}$ , (б) появи ззовні області внаслідок гетероклінічних біфуркацій (локально сідло–вузлових, транскритичних та вилкових). Усі такі граничні цикли охоплюють інваріантний многовид  $\overline{\mathcal{M}}^{(N)}$ , утворюючи  $(N - 3)$ -параметричні неперервні сім'ї (які більш детально буде показано на прикладі чотирьох осциляторів). Відмітимо, що усі такі цикли є рівневими множинами, описаними ВС теорією. Як послідовності біфуркацій Андронова–Хопфа на  $\overline{\mathcal{M}}^{(N)}$ , так і послідовності гетероклінічних біфуркацій з зовні інваріантної області, спричиняють *чергування* появи стійких та нестійких граничних циклів. Досліджуючи переріз Пуанкаре  $\Pi_N$  (2.32) ми побачимо чергування стійких та нестійких точок, що відповідають граничним циклам з тими ж стійкостями. Отже, типовою буде ситуація бістабільності двох таких циклів (а точніше цілих сімей) у середині канонічної інваріантної області. Очевидно, що така мультистабільність буде не лише граничних циклів між собою а і граничних циклів з точками інваріантного многовиду  $\mathcal{M}^{(N)}$  (коли вони стійкі), з можливими стійкими точками на дво–кластерних лініях (на границі інваріантної області) або з гетероклінічними циклами на границях інваріантної області. Сідло–вузлова біфуркація циклів є також типовою біфуркацією зникнення (появи) стійкого та нестійкого граничних циклів у середині інваріантної області, що також призводить до зміни мультистабільності та нового перерозподілу басейнів притягання. У разі чергування множин стійких та нестійких циклів всередині інваріантних областей  $\overline{\mathcal{C}}$ , нестійкі цикли є бар'єрними (сепаратрисними) множинами, що розділяють басейни притягання множин стійких циклів, а також многовиду  $\overline{\mathcal{M}}^{(N)}$  та стійких положень рівноваги і гетероклінічних циклів на границі  $\partial\overline{\mathcal{C}}$ .

### 2.4.7. Колективна динаміка моделі з нелінійним фазовим зсувом

Використовуючи Лему 2.4.1 та Лему 2.4.2, а також всі міркування відносно існування положень рівноваги та їх біфуркацій, наведені у даному підрозділі, можемо сформулювати підсумкове твердження.

**Теорема 2.4.1.** Система у фазових різницях (2.4) зв'язаних осциляторів з нелінійним фазовим зсувом  $\alpha(R, \beta) \in C^1(\mathbb{T}^{N-1})$  у функції взаємодії має наступні особливі множини:

1. Початок координат  $\Phi_{sync}$ , що відповідає режиму повної синхронізації  $\Theta_{sync}$  оригінальної системи (2.2), який є стійким при  $\alpha(1, \beta) \in (-\pi/2, \pi/2)$ . При  $\alpha(1, \beta) = \pm\pi/2$  точка  $\Phi_{sync}$  втрачає свою стійкість внаслідок одночасних транскритичних біфуркацій, що відбуваються вздовж інваріантних дво-кластерних многовидів з ізотропією  $\mathbf{S}_p \times \mathbf{S}_{N-p}$ ,  $p = 1, \dots, [N/2] - 1$ . У випадку парної кількості осциляторів  $N = 2p$ , разом з транскритичною біфуркацією відбувається вилкова біфуркація вздовж многовидів з ізотропією  $\mathbf{S}_{N/2} \times \mathbf{S}_{N/2}$ .
2.  $(N - 3)$ -вимірний інваріантний многовид  $\mathcal{M}^{(N)}$ , що повністю складається з особливих точок. Кожна точка є нейтрально стійкою у  $N - 2$  напрямках всередині самого многовиду  $\forall \alpha$ . У двох трансверсальних до многовиду напрямках вона є стійкою при  $\alpha \in (\pi/2, 3\pi/2)$ . Многовид втрачає свою стійкість унаслідок виродженої біфуркації Андронова-Хопфа при  $\alpha = \pm\pi/2$ .
3. Дво-кластерні стани з координатами (2.14), (2.16), які належать інваріантним многовидам  $\mathcal{P}_2$  з ізотропією  $\mathbf{S}_p \times \mathbf{S}_{N-p}$ ,  $p \neq N/2$ . Стійкість дво-кластерних станів всередині многовиду  $\mathcal{P}_2$  та у трансверсальних до цього многовиду напрямках залежить від функції фазового зсуву  $\alpha(R, \beta)$ .
4. Граничні цикли у середині інваріантних областей  $\bar{\mathcal{C}}$ .
5. Гетероклінічні цикли на границях інваріантних областей  $\partial\bar{\mathcal{C}}$ , які існують у моменти гетероклінічних біфуркацій, котрі складаються з

*локальних сідло—вузлової, транскритичної чи вилкової біфуркації на дво—кластерних многовидах  $\mathcal{P}_2$ .*

**Доведення** цієї теореми наведено у Додатку В.4 (див. стор. 382).

Відмітимо, що нелінійний фазовий зсув (у порівнянні з лінійним) призводить до появи нових режимів (таких як стійкі дво—кластерні режими, стійкі багато—параметричні сім'ї граничних циклів, різноманітні гетероклінічні цикли), нових типів біфуркацій (кілька типів гетероклінічних біфуркацій та сідло—вузлових біфуркацій граничних циклів), а також до мультистабільності дуже різноманітних режимів.

## 2.5. Нелінійно зв'язані осцилятори з квадратичною фазовою нелінійністю

Як приклад застосування наведеної вище загальної системи, ми розглянемо модель (2.2) з конкретною залежністю фазового зсуву від амплітуди середнього поля:

$$\alpha = \alpha(R, \beta) = \beta_1 + \beta_2 R^2. \quad (2.33)$$

Тут дво—вимірний простір параметрів  $(\beta_1, \beta_2)$  є циліндром  $\mathbb{T} \times \mathbb{R} \supset (\beta_1, \beta_2)$ , оскільки праві частини системи є  $2\pi$ —періодичними відносно  $\beta_1$ . З непарності правих частин системи впливає симетрія площини параметрів:  $(\beta_1, \beta_2) \mapsto (-\beta_1, -\beta_2)$ .

Згідно описаного вище, відбуваються три типи біфуркацій, коли

$$\cos \alpha = \cos (\beta_1 + \beta_2 R^2) = 0.$$

Однією з можливих біфуркацій є біфуркація Андронова—Хопфа (АН) точок інваріантного многовиду  $\mathcal{M}^{(N)}$  системи у фазових різницях (2.4). Оскільки на вказаному многовиді параметр порядку  $R = 0$ , то ми отримуємо дві прямі біфуркаційні лінії

$$\beta_1 = \pi/2 \quad \text{та} \quad \beta_1 = 3\pi/2 \quad (2.34)$$

на параметричному циліндрі. Лінія  $\beta_1 = \pi/2$  відповідає суперкритичній біфуркації Андронова–Хопфа, а лінія  $\beta_1 = 3\pi/2$  – субкритичній. Многовид  $\mathcal{M}^{(N)}$  є стійким, коли  $\beta_1 \in (\pi/2, 3\pi/2)$  та він є нестійким, коли  $\beta_1 \in [0, \pi/2) \cup (3\pi/2, 2\pi)$ .

Іншою можливою біфуркацією є транскритична біфуркація (ТС) в початку координат  $\Phi_{sync}$  вздовж кожної з інваріантних ліній ізотропії  $\mathbf{S}_p \times \mathbf{S}_{N-p}$ ,  $p = 1, \dots, N-1$ . Вилкова біфуркація (PF) виникає в початку координат одночасно з транскритичною для системи з парною кількістю осциляторів. Відбувається вона вздовж інваріантних ліній з ізотропією  $\mathbf{S}_{N/2} \times \mathbf{S}_{N/2}$ . В момент цієї біфуркації точка початку координат є виродженим сідлом з  $N-1$  нульовими власними значеннями. Точка  $\Phi_{sync}$  системи (2.4) відповідає режиму повної синхронізації з параметром порядку  $R = 1$ . Отже, прямі лінії

$$\beta_1 + \beta_2 = \pi/2 + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad (2.35)$$

відповідають транскритичній біфуркації (ТС) або транскритичній/вилковій (ТС/PF) біфуркації в параметричному просторі. Початок координат (режим повної синхронізації) є стійким при  $\beta_1 + \beta_2 \in (-\pi/2 + 2\pi m, \pi/2 + 2\pi m)$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ , та він є нестійким при  $\beta_1 + \beta_2 \in (\pi/2 + 2\pi m, 3\pi/2 + \pi m)$ .

Ці три типи біфуркацій є незалежними від числа осциляторів, отже *мережа* прямих біфуркаційних ліній (2.34), (2.35) зображена на біфуркаційній діаграмі (рис. 8.3) для моделі (2.4), (2.33).

Інші біфуркації особливих точок виникають лише на інваріантних лініях (2.15) та всі вони є сідло–вузлового типу. Вираз для квадрату параметру порядку на інваріантних лініях (2.15) приймає вигляд:

$$R^2 = R^2(p, N-p) = \frac{1}{N^2} (2p(N-p) \cos \varphi_k + (N-1)^2 - 2(p-1)(N-p-1) + 1),$$

де  $\varphi_k$ ,  $k = 1, \dots, p$ , є змінними вздовж відповідних інваріантних ліній з ізотропією  $\mathbf{S}_p \times \mathbf{S}_{N-p}$ . Для знаходження координат положень рівноваги нам потрібно розв'язати рівняння (2.21) для цього параметру порядку. Вираз параметру

порядку сильно спрощується у випадку парної кількості осциляторів:

$$R^2(p, p) = (\cos \varphi_k + 1), \quad k = 1, \dots, p,$$

і, як бачимо, він є незалежним від їх кількості  $N$ . Отже, цей вираз описує виникнення (зникнення) двох точок на інваріантній лінії з ізотропією  $\mathbf{S}_{N/2} \times \mathbf{S}_{N/2}$  після кожної вилоквої біфуркації в початку координат. Координати цих точок (які є сідлами) на інваріантній лінії задаються формулою:

$$\varphi_k = \pm \arccos \left( \frac{1}{\beta_2} (\pi(1 - 2m) - 2\beta_1 - \beta_2) \right), \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Ці симетричні точки є важливими, оскільки вони є базовими точками для гетероклінічних циклів системи у випадку парної розмірності осциляторів.

Для довільної кількості осциляторів, разом з мережею описаних вище прямих ліній (2.34), (2.35) біфуркацій Андронова–Хопфа та транскритичних біфуркацій, є також велика кількість біфуркаційних ліній, що відповідають сідло–вузловій біфуркації (SN) на дво–кластерних інваріантних многовидах. Деякі з цих ліній також відповідають гетероклінічним біфуркаціям (НС чи НС(SN)) у випадках, коли виконуються певні додаткові умови. Ці сідло–вузлові/гетероклінічні біфуркації також є джерелами для народження граничних циклів. Зафіксуємо параметр  $\beta_1 \neq \pm\pi/2$  і будемо збільшувати інший параметр  $\beta_2$ . Тоді нові і нові сідло–вузлові біфуркації будуть з'являтися на кожній з дво–кластерних інваріантних ліній. Положення рівноваги при цих біфуркаціях будуть з'являтися таким чином, що їх стійкість чергується вздовж відповідної лінії. Стійкість відповідних гетероклінічних циклів, що з'являються також чергується зі збільшенням параметру  $\beta_2$ . Отже, стійкість граничних циклів, що з'явилися після відповідних біфуркацій і рухаються в середину інваріантної області, також буде чергуватись. Період та амплітуда кожного з граничних циклів зменшується при збільшенні параметру  $\beta_2$ , але жодної біфуркації малих граничних циклів не може трапитись тому, що параметр  $\beta_1$  був попередньо зафіксований і він не був рівний  $\pm\pi/2$ , де лише ці біфуркації можуть відбуватись.

Число гіперболічних положень рівноваги збільшується зі збільшенням параметру  $\beta_2$ . Ці положення рівноваги, як правило, концентруються навколо центральної частини інваріантних ліній. Сідло–вузлова/гетероклінічна біфуркація лінії з симетрією  $\mathbf{S}_1 \times \mathbf{S}_{N-1}$  зазвичай відбувається близько до цієї центральної частини, де координата  $\varphi$  сідло–вузлової точки є близькою до  $\pi$ . Отже, ми можемо наближено обчислити, що біфуркація виникає при

$$\beta_2 \approx \frac{N^2}{(N-2)^2}(\pi m - \beta_1), \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Ці лінії сідло–вузлової/гетероклінічної біфуркації чергуються на біфуркаційному циліндрі. Кожен гетероклінічний цикл генерує граничний цикл (або множину граничних циклів для 4 та більше осциляторів) з такою ж стійкістю. Період та розмір кожного циклу зменшується зі збільшенням параметру  $\beta_2$ . Стійкі та нестійкі граничні цикли чергуючись огортають один одного всередині інваріантної області. Сідло–вузлова біфуркація циклів (складка циклів) є неможливою для розглядуваної системи завдяки монотонному збільшенню розмірів кожного з циклів. Відмітимо, що у загальному випадку (з більш складною функцією фазового зсуву  $\alpha(R, \beta)$ ) складки циклів можливі. Зокрема, такі біфуркації трапляються у системі (2.4) у випадку, коли  $\alpha = \beta_1 + \beta_2 R^2 + \beta_3 R^4$ .

Звернемо увагу, що перша сідло–вузлова біфуркація в системі зазвичай відбувається, коли  $\beta_2 < \pi/2 - \beta_1$  і ця біфуркація може генерувати стійкий вузол. Тоді ми отримуємо мультистабільність повністю синхронізованого стану (в початку координат, де  $R = 1$ ) та стійких дво–кластерних станів. Якщо перша транскритична біфуркація (коли  $\beta_2 > \pi/2 - \beta_1$ ) не продукує стійкі гетероклінічні цикли, то дво–кластерні стани є єдиними атракторами в системі. Стійкі вузли накопичуються на інваріантній лінії при збільшенні  $\beta_2$  і, таким чином, ми отримуємо мультистабільність дво–кластерних станів при достатньо великих значеннях параметру  $\beta_2$ . Поява стійких граничних циклів після сідло–вузлової/гетероклінічної біфуркації усуває один стійкий вузол (на кожній інваріантній лінії з тією ж симетрією). Однак, оскільки гетероклінічна біфуркація трапляється значно рідше, ніж проста сідло–вузлова біфуркація



двох точок, то співіснування стійкого граничного циклу з дво–кластерним станом є типовою для системи (2.4), (2.33). Таким чином, ми можемо отримати мультистабільність всіх можливих атракторів в системі: повної синхронізації, дво–кластерних станів (з різними параметрами порядку), граничних циклів, гетероклінічних циклів та точок інваріантного многовиду  $\mathcal{M}^{(N)}$ .

### 2.5.1. Три взаємодіючі осцилятори

Динаміка трьох взаємодіючих осциляторів з фазовим зсувом (2.33) зображена на біфуркаційній діаграмі рис. 8.3 відносно параметрів  $\beta_1$  та  $\beta_2$ . Фазові портрети відповідних біфуркаційних переходів були схематично проілюстровані на рис. 8.1 та рис. 8.2 та описані вище. Прослідкуємо схему типових біфуркаційних переходів при зміні лише одного з параметрів, зокрема, збільшуючи  $\beta_2$  при фіксованому параметрі  $\beta_1 = 0$  (біфуркаційна діаграма у площині  $(\beta_2, R)$  зображена на рис. 4 роботи [89, Burylko, Pikovsky]). Можна переконатись, що базові біфуркаційні переходи між стійкими колективними режимами системи виглядають наступним чином: *повна синхронізація*  $\rightarrow$  *дво–кластерний стан*  $\rightarrow$  *періодичні коливання*. Перший перехід трапляється з *гістерезисом* (тобто відбувається співіснування повносинхронного режиму з дво–кластерним у деякій малій області параметрів), а другий перехід відбувається через глобальне гетероклінічне з'єднання. Відбувається утворення *каскаду концентричних граничних циклів* по чергових стійкостей зі збільшенням параметру  $\beta_1$ . Права панель діаграми рис. 8.3 деталізує біфуркаційні лінії і показує три типи біфуркаційних точок корозмірності–два:  $A$  — перетин ліній сідло–вузлової та транскритичної біфуркацій (обидві з яких є також глобальним гетероклінічними),  $B$  — перетин ліній транскритичної та біфуркації Андронова–Хопфа,  $C$  злам (cusp) лінії сідло–вузлової біфуркації (точки двох різних сідло–вузлових біфуркацій, що рухаються по інваріантному многовиду при зміні параметрів, зустрінуться у момент  $(\beta_1, \beta_2) = C$ ). Рис. 8.3(b) також ілюструє область параметрів, при яких система має граничні цикли. Границі цієї області — три криві біфуркацій, що призводять до утворення вказаних циклів у різні способи.

### 2.5.2. Чотири та більше зв'язаних осциляторів

Незважаючи на спільні риси колективної динаміки для довільної кількості осциляторів, описані вище, суттєві відмінності можна бачити вже для  $N = 3$  та  $N = 4$ . Обидві системи найнижчих розмірностей також показують типові особливості непарно-вимірних та парно-вимірних систем, які є типовими для систем зв'язаних елементів. Зокрема, парно-вимірні системи мають додаткові симетрії, що спричиняють існування нових інваріантних многовидів та нових класів біфуркацій у порівнянні з непарно-вимірними аналогами.

Рис. 8.4 та рис. 8.5 схематично зображають геометрію сідло-вузлової/гетероклінічної біфуркації у випадку  $N = 4$ . На рис. 8.5 для три-вимірної системи в фазових різницях (2.4), (2.33) показано перетин двох інваріантних площин (наприклад,  $\varphi_3 = 0$  та  $\varphi_1 = \varphi_2$ ) та інваріантні лінії, що їм належать. Нестійкий гетероклінічний цикл (синій на рис. 8.5) складається з десяти особливих точок та десяти одно-вимірних інваріантних многовидів, що з'єднують ці точки. Чотири сідло-вузлових біфуркації відбуваються одночасно на чотирьох  $\mathbf{S}_1 \times \mathbf{S}_3$  інваріантних лініях. Гетероклінічний цикл містить також два сідла  $S'$ , що належать до  $\mathbf{S}_2 \times \mathbf{S}_2$  інваріантної лінії. Цей нестійкий гетероклінічний цикл є грубим і він існуватиме також поза сідло-вузловою біфуркацією. Однак, в останньому випадку він буде складатись лише з двох інваріантних ліній, що з'єднують сідла  $S'$ , як стійкий цикл зображений на малюнку. Стійкий гетероклінічний цикл зображений (червоним) всередині нестійкого. Він складається з двох сідел  $S''$  і двох ліній  $\Gamma_1, \Gamma_2$ . Стійкий гетероклінічний цикл з'являється при сідло-вузловій біфуркації на інваріантній лінії у той же самий спосіб, що і нестійкий, але при менших значення параметру  $\beta_2$ . Наступний гетероклінічний цикл появиться після злиття стійкого вузла  $N^+$  з сідлом  $S$ , що є причиною його стійкості. Ці траєкторії відповідають режимам *повільного перемикання* між кластерами.

На рис. 8.5 показано появу дво-вимірних множин стійких граничних циклів всередині інваріантної області  $\bar{\mathcal{C}}$ . Чотири пари сідел  $S$  та стійких вузлів  $N$  (рис. 8.5(a)) зливаються та утворюють дво-вимірні множини гетероклінічних циклів (рис. 8.5(b)). Після біфуркації, коли сідло-вузлові точки зни-

кають, виникають два гетероклінічних цикли з дво-вимірними множинами граничних циклів між ними (рис. 8.5(c)). Множина граничних циклів оточує одно-вимірний інваріантний многовид  $\mathcal{M}^{(N)}$ . Гетероклінічні цикли, зображені на рис. 8.4 лежать на інваріантних поверхнях. Гетероклінічні цикли є межами множин граничних циклів, що існують всередині  $\bar{\mathcal{C}}$  та обмотують  $\mathcal{M}^{(N)}$ . Нестійким гетероклінічним циклом відповідає циліндрична множина нестійких граничних циклів, а стійким гетероклінічним циклом відповідає циліндрична множина стійких граничних циклів. Таким чином, структура гетероклінічних циклів визначає загальну структуру траєкторій і за межами інваріантних многовидів. Отже, для редукованої системи (2.4), (2.33) чотирьох зв'язаних осциляторів відбувається наступний сценарій біфуркаційних перебудов при фіксованому  $\beta_1 \neq \pm\pi/2$  та збільшенні другого параметру  $\beta_2$  від нуля. Система є повністю синхронізованою  $\rightarrow$  появляються дво-вимірні множини гетероклінічних циклів у  $\mathbb{T}^3$  (по черзі стійких і нестійких)  $\rightarrow$  множини гетероклінічних циклів перетворюються у множини граничних циклів  $\rightarrow$  множини стійких та нестійких граничних циклів, що появились по чергово на границі інваріантної області  $\partial\bar{\mathcal{C}}$  з гетероклінічних циклів, стискаються (зменшуючи амплітуду) у середину  $\bar{\mathcal{C}}$  до інваріантного многовиду  $\mathcal{M}^{(N)}$   $\rightarrow$  множини стійких та нестійких концентрично накопичуються навколо  $\mathcal{M}^{(N)}$  так і не досягаючи цього многовиду для скінченних значень параметру  $\beta_2$  (біфуркаційна діаграма у  $(\beta_2, \beta_1)$ -площині наведена на рис. 7(a) роботи [89, Burylko, Pikovsky]).

Біфуркаційний аналіз багато-вимірних випадків (для  $N \geq 5$ ) показує подібні результати. Біфуркаційні діаграми у  $N$ -вимірних випадках складаються з трьох типів ліній: пряма ліній біфуркації Андронова–Хопфа ( $AH$ ), пряма ліній транскритичної біфуркації ( $TC$ ) та лінії сідло–вузлових біфуркацій ( $SN$ ) на інваріантних многовидах з ізотропією  $\mathbf{S}_p \times \mathbf{S}_{N-p}$ ,  $p = 1, \dots, N - 1$ . Всі лінії сідло–вузлових біфуркацій мають ”язико–подібну” форму рис. 8.6. ”Язик” утворюється за допомогою двох граничних ліній: одна лежить ліворуч від прямої транскритичної біфуркації і наближається до цієї лінії асимптотично зі збільшенням параметру  $\beta_2$ , друга гранична лінія перетинає  $TC$  лінії. Сідло–вузлова біфуркація генерує появу стоку чи витоку лише на інваріантній

лінії з ізотропією  $\mathbf{S}_1 \times \mathbf{S}_{N-1}$ , у той час, як на інших інваріантних лініях з ізотропіями  $\mathbf{S}_p \times \mathbf{S}_{N-p}$ ,  $p \neq 1$ , можуть з'являтися виключно пари сідел. Таким чином, існують лише  $\mathbf{S}_1 \times \mathbf{S}_{N-1}$  стійкі кластери. Крім того гетероклінічні цикли та стійкі граничні цикли з'являються при сідло–вузлових біфуркаціях, що відбуваються на інваріантних лінії включно з  $\mathbf{S}_1 \times \mathbf{S}_{N-1}$  ізотропією. Повні біфуркаційні діаграми для розмірностей 4 та 5 зображено на рис. 7 роботи [89, Burylko, Pikovsky].

Біфуркаційні точки корозмірності–два для довільної кількості осциляторів утворюються здебільшого за подібним сценарієм, як показано на рис. 8.3. У точці  $C$  зустрічаються дві лінії сідло–вузлових біфуркацій утворюючи язик. Лише одне стійке положення рівноваги залучене у кожній з сідло–вузлових біфуркацій (наприклад, ліва лінія відповідає виникненню положень рівноваги 1 та 2, а права лінія відповідає зникненню положення рівноваги 2 разом з іншим з номером 3), а у точці корозмірності–два всі три положення рівноваги зустрічаються. У іншій точці корозмірності–два  $A$  тип сідло–вузлової біфуркації змінюється. З одного боку (зліва від точки  $A$ ) сідло–вузлова біфуркація не породжує гетероклінічних циклів, у той час, як праворуч від  $A$  перетворення є сідло–вузловим/гетероклінічним за умови  $-\pi/2 < \beta_1(A) < \pi/2$  та коли лінія має симетрію  $\mathbf{S}_3 \times \mathbf{S}_1$ . Було перевірено, що остання умова виконується для  $N = 3, \dots, 8$ , але  $\beta_1(A) < -\pi/2$  при  $N \geq 9$ . Отже, не існує сідло–вузлових/гетероклінічних біфуркацій при  $N \geq 9$ . При термодинамічному переході ( $N \rightarrow \infty$ ) гетероклінічні біфуркації не відіграють важливої ролі, залишаючи всі структурні перетворення від повної синхронізації до антисинхронного стану біфуркаціям Андронова–Хопфа та транскритичній. Нарешті точка  $B$  на біфуркаційній діаграмі рис. 8.3 відповідає виродженій ситуації, відображеній на середній панелі рис. 8.2, коли під час біфуркації система стає Гамільтоново–подібною.

Незважаючи на серйозні відмінності у структурі глобальних біфуркаційних перебудов, локальні біфуркації є досить подібними. Структура біфуркаційних діаграм для довільних  $N$  є в основному якісно подібною до рис. 8.3, але з певними кількісними змінами (більш детально у [89]). Для уточнення цих відмінностей наводиться порівняльна біфуркаційна діаграма

рис. 8.6 базових ліній сідло–вузлових ”язиків” для  $N = 3, \dots, 7$ . З діаграми видно, що при збільшенні  $N$  кінчик язика рухається вниз та для фіксованих  $\beta_1 \approx 0$  сідло–вузлова біфуркація відбувається лише для малих кількостей осциляторів. Отже, для  $\beta_1 \approx 0$  та збільшенні параметру  $\beta_2$  перехід від повної синхронізації до періодичних режимів відбувається завдяки транскритичній/гетероклінічній біфуркації, оминаючи дво–кластерні режими, у випадку, коли число осциляторів є досить великим.

# Розділ 3

## Мережі фазових осциляторів з узагальненим зв'язком

У минулому підрозділі детально розглядалась модель ідентичних фазових осциляторів з нелінійним зсувом у функції взаємодії  $g(x) = -\sin(x - \alpha(R, \beta))$ . Це певне узагальнення моделі Курамото–Сакагучі, де фазовий зсув є константою, тобто функція взаємодії *має лише одну гармоніку*:  $g(x) = -\sin(x - \alpha)$ . Незважаючи на ускладнення функції зв'язку, система у певному розумінні веде себе як модель з одногармонічною функцією. Мається на увазі наявність певних інваріантних многовидів, інваріантних областей та певних типів розв'язків, яку не руйнує жодний фазовий зсув. Це трапляється саме за рахунок двох інших факторів: глобального зв'язку між осциляторами та ідентичності осциляторів між собою. З останні умови породжують симетрію перестановок системи, що примушує систему "не помічати" зміни у функції взаємодії системи і "консервувати" певні властивості одногармонічної взаємодії.

Обмеження, які накладає існування лише першої гармоніки у функції зв'язку знімаються при наявності у неї гармонік вищих порядків. Навіть при наявності другої гармоніки у  $g(x)$ , появляється багато нових складних динамічних режимів. У даному розділі ми детально опишемо біфуркації та колективну динаміку для моделі Гансела–Мато–Монье [159, 160] та її узагальнення з більш складною функцією взаємодії. Буде показано як дані симетрійні особливості впливають на появу та стійкість різних режимів колективної ди-

наміки. Особливу увагу буде приділено дослідженням гетероклінічних траєкторій та пов'язаних з ними режимів повільного перемикання між кластерами. Також буде досліджуватись чутливість фазової замкнутості розв'язків до збурень власних частот осциляторів.

### 3.1. Модель ідентичних осциляторів з загальною функцією взаємодії

Розглянемо систему ідентичних фазових осциляторів:

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N g(\theta_i - \theta_j), \quad j = 1, \dots, N, \quad (3.1)$$

де  $(\theta_1, \dots, \theta_N) \in \mathbb{T}^N$  описують фази осциляторів,  $\omega$  є власною частотою осциляторів, а  $g(x) \in 2\pi$ -періодичною гладкою функцією зв'язку (функцією фазової взаємодії). Оскільки мережа має глобальну взаємодію з ідентичними силами зв'язків  $K$ , то у випадку наведеної системи ми покладемо  $K = 1$  (що також можна зробити перемасштабуванням часу). У векторній формі рівняння (3.1) має вигляд:

$$\frac{d\Theta}{dt} = F(\Theta), \quad (3.2)$$

де

$$\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_N)^T, \quad F = (F_1, \dots, F_N)^T, \quad F_i(\Theta) = \omega + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N g(\theta_i - \theta_j).$$

Ми будемо детально досліджувати дану систему, коли функція фазової взаємодії має дві гармоніки, а саме, має вигляд:

$$g(x) = q \sin(x - \alpha) + r \sin(2x - \beta), \quad (3.3)$$

де  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $q$  та  $r$  є параметрами. У випадку, коли всі параметри крім  $q$  рівні нулю, дана система вироджується у стандартну модель Курамото [205, 206], при відсутності другої гармоніки ( $r = 0$ ) ця система має зводиться до моделі Ку-

рамото–Сакагучі [282], у випадку ненульових параметрів  $\alpha$ ,  $r$  та  $q = -1$ ,  $\beta = 0$  система називається моделлю Гансела–Мато–Моньє [159, 160]. Спочатку опишемо інваріантні властивості системи, пов’язані з ідентичністю осциляторів для довільної фазової взаємодії  $g(x)$ .

## 3.2. Симетрії та інваріантні множини у моделях глобально зв’язаних фазових осциляторів

### 3.2.1. Ідентичні фазові осцилятори та симетрична динаміка

Система ідентичних фазових осциляторів (5.36) є дуже симетричною. Дійсно вона еквіваріантною відносно групи симетрії перестановок  $\mathbf{S}_N$ , що діє як перестановка координат  $\theta_i$ , а також система є еквіваріантною відносно трансляції вздовж діагоналі  $(1, \dots, 1)$ , яка задається групою  $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{S}_N \times \mathbb{T}$ , де  $\mathbb{T} = \mathbb{T}^1$  — симетрія фазового зсуву, що відповідає часовій трансляції,  $\mathbf{\Gamma}$  — часово–просторова симетрія. Різноманітні наслідки з цих симетрій описуються у роботах [43, 292, 80, 145]. Інструменти симетричної динаміки, описані у даних роботах, дозволяють багато зрозуміти про поведінку системи, досліджуючи дії груп симетрії у фазовому просторі. Зокрема, для будь–якої точки  $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_N) \in \mathbb{T}^N$  ми асоціюємо *групу ізотропії* з підгрупою

$$\{\gamma \in \mathbf{\Gamma} : \gamma\Theta = \Theta\} \subset \mathbf{\Gamma}.$$

Для кожної підгрупи  $G \in \mathbf{\Gamma}$  означимо *підпростір фіксованих точок*

$$\mathbf{Fix}G = \{\Theta : \gamma\Theta = \Theta \forall \gamma \in G\}.$$

У роботі М. Голубіцького, І. Стюарта та Д. Шеффера [150] показано, що для будь–якої  $G$ , її  $\mathbf{Fix}G$  є динамічно інваріантним для будь–якої  $\mathbf{\Gamma}$ -еквіваріантної динамічної системи. Особливість динаміки системи (3.1) полягає в тому, що фазовий простір  $\mathbb{T}^N$  є тороїдальним, де на відміну від  $\mathbb{R}^N$  динаміка має свої нетривіальні особливості, більш нетривіальні, ніж очікуються у роботі [150]. Також ми покажемо, що система має часово–оборотну



динаміку у випадку, коли  $g$  є симетричною. У останньому випадку ми будемо використовувати результати робіт [29, 213, 143]. Певні особливі властивості динаміки система має і тоді, коли  $g$  є парною та, у сукупності з іншими чинниками, породжує часово–оборотну симетрію системи.

Для розуміння яким чином система (3.2.1) має часово–просторові аттрактори різних симетричних типів, ми спочатку розглядаємо цю систему для малої кількості осциляторів  $N$  та особливих функцій  $g$  і поступово переходимо до більш загальних систем, збільшуючи розмірність та додаючи нові параметри у функцію фазової взаємодії. Зокрема, у попередньому розділі ми детально описали випадок, коли у функції (3.2.2) параметр  $r = 0$ , тобто випадок моделі Курамото–Сакагучі. Саме симетрійні особливості надають можливість знайти та добре описати інваріантні множини системи у цьому випадку. Також, як відмічалось, завдяки симетриям до даної системи може бути застосована ВС теорія, яка дає можливість знайти певні інтеграли руху та звести систему до простішої. У випадках  $\alpha = \pm\pi$ , тобто коли функція  $g(x)$  є парною, система має часово–оборотну симетрію та навіть є інтегрованою. Однак, поведінка розв'язків у згаданому випадку є дуже виродженою по відношенню до більш загальних дисипативних систем. При додаванні старших гармонік до функції взаємодії, можна очікувати, і в подальшому це буде показано, що виродження є певною біфуркаційною частиною загальної ситуації. Виродження вищих гармонік у системі загального вигляду відповідає біфуркації Андронова–Хопфа у системі [199, 42]. Спектр розв'язків, їх стійкість та біфуркації, наявність та геометрія інваріантних підпросторів, залежність від симетрій системи є описаними, зокрема, у роботах [43, 16, 24, 33] та інших. А

У даному розділі будуть також представлені деякі результати стосовно моделі глобально зв'язаних осциляторів з більш загальною функцією фазової взаємодії більш високих порядків, а саме функцією вигляду:

$$g(x) = \sum_{j=1}^L q_j \sin(jx - \alpha_j). \quad (3.4)$$

Така система вперше досліджувалась у роботі Х. Даїдо [109]. Функція (3.3)

є частковим випадком (3.4) при  $L = 2$ ,  $q_1 = q$ ,  $q_2 = r$ ,  $\alpha_1 = \alpha$ ,  $\alpha_2 = \beta$ . Відмітимо, що найбільш дослідженими системами з функціями (3.4) при  $L \geq 3$  є випадки, коли така функція є ще й парною ( $g(x) = g(-x)$ ). У таких випадках система має структуру близьку до Гамільтонової і навіть може мати дуже симетричний консервативний хаос [60, 59].

### 3.2.2. Параметричні симетрії для дво-гармонічних зв'язків

Розглянемо систему глобально зв'язаних осциляторів (3.1) з дво-гармонічною функцією зв'язку (3.3). Спочатку нашою метою є описання поведінки даної системи в залежності від варіації її параметрів

$$(q, r, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \times [0, 2\pi)^2.$$

Досліджуючи функцію  $g(x)$ , переконуємось у існуванні параметричних симетрій (таких, що  $g(x) \mapsto g(x)$  для всіх  $x$ ) наступного вигляду:

$$(q, r, \alpha, \beta) \mapsto (-q, r, \alpha + \pi, \beta), \quad (3.5)$$

$$(q, r, \alpha, \beta) \mapsto (q, -r, \alpha, \beta + \pi). \quad (3.6)$$

У подальшому, без обмеження загальності, будемо вважати, що  $q = -1$ , оскільки інші значення системи з параметром  $q$  можна отримати за допомогою масштабування часту та використання формули (3.5). З аналогічних міркувань можемо завжди вважати,  $r \geq 0$ , оскільки динаміку системи при негативних значення цього параметру можна описати, використовуючи симетрію (3.6). Далі переконуємось, що існує часово-оборотна симетрія (така що  $g(x) \mapsto -g(x)$  для всіх  $x$ ), яка при  $q = -1$  має вигляд:

$$(r, \alpha, \beta) = (r, \alpha + \pi, \beta + \pi). \quad (3.7)$$

I, нарешті, є ще інша часово-реверсивна параметрична симетрія (тобто така, що  $g(x) \mapsto -g(-x)$ ), яка при  $q = -1$ , задається співвідношенням

$$(r, \alpha, \beta) = (r, -\alpha, -\beta). \quad (3.8)$$

Використовуючи вказані симетрії, для подальшого біфуркаційного аналізу системи достатньо розглядати лише область

$$q = -1, \quad (\alpha, \beta, r) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi) \times [0, \pi) \quad (3.9)$$

у всьому просторі параметрів  $(\alpha, \beta, q, p)$ , а динаміка у інших частинах цього простору відображатись з (3.9) за допомогою (3.5)–(3.8).

### 3.2.3. Фазові симетрії та канонічні інваріантні області

Оскільки динаміка системи (3.1) залежить від фазових різниць (і, отже, має симетрію фазового зсуву), то ми можемо редукувати дану систему з фазового простору  $\mathbb{T}^N$  до системи у фазових різницях на  $\mathbb{T}^{N-1}$ . Таке зведення відповідає фіксації однієї змінної оригінальній системі вздовж одновимірного тору або фіксації якісної динаміки системи на  $\mathbb{T}$ -орбіті. Більш точно, якщо ми розглядаємо проекцію  $\Pi : \mathbb{T}^N \mapsto \mathbb{T}^{N-1}$ , що відображає  $\mathbb{T}$ -орбіти у точки, та розглядаємо  $\bar{\Theta} = \Pi(\Theta) \in \mathbb{T}^{N-1}$ , то оригінальна система (3.1) стає редукованою системою у  $\mathbb{T}^{N-1}$  та має наступний вигляд

$$\frac{d\bar{\Theta}}{dt} = \tilde{F}(\bar{\Theta}). \quad (3.10)$$

Ця система явно залежить від  $N$  та  $g$ , але не залежить від  $\omega$ .

Є декілька шляхів вибору  $\Pi$  чи, еквівалентно, множини  $N - 1$  фазових різниць  $\theta_j - \theta_k$ , що перекриваю множини всіх можливих фазових різниць. Однак, симетрія перестановки не буде діяти ортогонально на такій множині фазових різниць при  $N \geq 3$ , тобто симетрії не обов'язково формують множини фазових різниць. У роботі [43] наводиться корисне представлення для випадків,  $N = 3$  та  $N = 4$ , що дозволяє уникнути описаної проблеми. Якщо розглянути ортогональну проекцію динаміки системи на підпростір корозмір-

ності—один, ортогональний до діагоналі  $(1, \dots, 1)$ , то це буде мати ортогональне (і незвідне) представлення  $\mathbf{S}_N$  у  $\mathbb{R}^{N-1}$ , що покриває простір  $\mathbb{T}^{N-1}$ . Крім того, доповнення підпросторів фіксованих точок, де дві фази є ідентичними (мають симетрію  $\mathbf{S}_2$ ) утворює розбиття  $\mathbb{R}^{N-1}$  на зв'язні компоненти, які є усіма зображеннями *канонічної інваріантної області* (CIR — canonical invariant region [43]). Ця множина має вигляд:

$$\mathcal{C} = \{\Theta \in \mathbb{T}^N : 0 = \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_N < 2\pi\}, \quad (3.11)$$

чия границя має складатися з точок з ізотропією  $\mathbf{S}_2$ . Існує залишкова симетрія  $\mathbb{Z}_N/N\mathbb{Z} = \langle \tau \rangle$  на множині  $\mathcal{C}$ , що генерується за допомогою дії

$$\tau : (0, \theta_2, \dots, \theta_N) \mapsto (0, \theta_3 - \theta_2, \dots, \theta_N - \theta_2, 2\pi - \theta_2). \quad (3.12)$$

Відмітимо, що режим розподілених частот  $\Theta_{splay} = \{(0, \theta_2, \dots, \theta_N) : \theta_k = \theta_{k-1} + 2\pi/N\} \in \mathcal{C}$  є єдиною фіксованою точкою дії  $\tau$  у області  $\mathcal{C}$ .

На рис. 8.8 показано структуру інваріантних областей  $\mathcal{C}$  у випадку  $N = 3$ , а на рис. 8.11 показану структуру  $\mathcal{C}$  для  $N = 4$ . Границі областей  $\mathcal{C}$  є інваріантними для системи (3.3) відносно довільних функцій  $g$ . Інваріантність порушується при як завгодно малих збуреннях, які роблять осцилятори неідентичними: при наявності принаймні двох відмінних частот  $\omega_i \neq \omega_j$  для двох різних осциляторів, при порушенні перестановочної симетрії у мережі зв'язків, при збуренні функції  $g$  довільним лише для частини осциляторів. Такі малі збурення призводять до втрати фазової замкнутості системи осциляторів та руйнації інваріантних областей (весь фазовий простір стає прохідним для траєкторій). Проте, навіть у цьому випадку траєкторія залишатиметься більшу частину часу у образі одної (уже зруйнованої) інваріантної області, а її динаміку зручно вивчати, розглядаючи збурення динаміки системи у високо-симетричних випадках. У даному розділі будуть представлені певні результати відносно *екстремальної чутливості до збурень* системи (3.1) у випадках малих розмірностей.

У середині інваріантної області  $\mathcal{C}$  є представники точок з усіма можливими типами симетрій. Особливо важливими є  $\ell$ -кластерні стани, які відповідають станам, де для кожного розбиття  $N = m_1 + \dots + m_\ell$ . Є точно  $m_\ell$  осциляторів з однаковими фазами для деяких  $\ell \geq 2$  (число кластерів) та  $m_k \geq 1$  (розмір  $k$ -го кластеру). Існування кластерів для описаного вище розбиття відповідає фіксованим точкам підпросторів для груп ізотропії  $\mathbf{S}_{m_1} \times \dots \times \mathbf{S}_{m_\ell}$ . Останні знаходяться на границях області  $\mathcal{C}$ . Також існують положення рівноваги з просторово часовими симетріями

$$(\mathbf{S}_{m_1} \times \dots \times \mathbf{S}_{m_\ell})^M \times_s \mathbb{Z}_M, \quad M > 1,$$

для розбиття  $N = M(m_1 + \dots + m_\ell)$  (див. [43]). Для спрощення позначень, у більшості випадків ми опускаємо копії  $\mathbf{S}_1$ , що відповідають одно-вимірним частинам кластерів. Наприклад,  $\mathbf{S}_2$  для випадку  $N = 4$  відповідає три-кластерному стану зі ізотропією  $\mathbf{S}_2 \times \mathbf{S}_1 \times \mathbf{S}_1$ .

Відмітимо, що система (3.10) є альтернативним представленням систем у фазових різницях (у змінних  $\varphi_i$ ), яке ми використовуємо у більшій частині дисертаційної роботи. Це представлення є зручнішим у певному сенсі, оскільки у такій системі динаміка "заморожуються", а не деформується і відслідковування симетричних властивостей розв'язків є більш зручним (але є менш зручним для інших досліджень).

### 3.3. Стійкості та біфуркації розв'язків, спричинені симетріями

Симетрії системи (3.1) спричиняють існування певних важливих синхронних режимів незалежно від вигляду функції зв'язку  $g(x)$ . У певних випадках функція  $g(x)$  не може вплинути на існування таких режимів, але впливає на їх стійкість. Збільшення кількості ненульових параметрів у взаємодії (3.3) природнім чином руйнує деякі симетрії системи (3.1), її інваріантні многовиди та призводить до нових біфуркацій. У даному підрозділі ми опишемо біфуркаційні властивості самих простих і одночасно дуже важливих синхронних режимів.

### 3.3.1. Стійкість та біфуркації синхронного розв'язку

Стан повної синхронізації (синфазний стан) системи (3.1) є періодичною орбітою, що має вигляд:

$$\Theta_{sync}(t) = (\theta(t), \dots, \theta(t)), \quad (3.13)$$

де  $\theta(t) = \Omega_{sync}t + \theta_0$ ,  $\Omega_{sync} = \omega + \theta_0$ .

**Теорема 3.3.1.** *Режим повної синхронізації  $\Theta_{sync}(t)$  системи (3.1) є асимптотично стійким тоді і тільки тоді, коли*

$$g'(0) < 0, \quad (3.14)$$

а при умові (3.3), коли

$$2r \cos \beta - \cos \alpha < 0. \quad (3.15)$$

**Доведення.** Якобіан  $J(\Theta_{sync}) = \{J_{ij}\}_{i,j=1}^N$  системи (3.1) для розв'язку (3.13) має наступні елементи:

$$\begin{aligned} J_{ii}(\Theta_{sync}) &= \frac{1}{N} \sum_{j=1, j \neq i}^N g'(\theta_{i-1} - \theta_{j-1}) = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{j=1, j \neq i}^N g'(\theta - \theta) = \frac{N-1}{N} g'(0), \quad i = 1, \dots, N, \end{aligned}$$

$$J_{ij}(\Theta_{sync}) = \frac{1}{N} g'(\theta_{i-1} - \theta_{j-1}) = -\frac{1}{N} g'(\theta - \theta) = -\frac{g'(0)}{N}, \quad i, j = 1, \dots, N, j \neq i.$$

Очевидно, матриця  $J(\Theta_{sync})$  є циркулянтною, тобто для її елементів виконується тотожність  $J_{i+m, j+m} = J_{i, j}$  для будь-якого цілого числа  $m$ . Відмітимо, що  $\sum_{j=1}^N \exp\left(\frac{2\pi i}{N} j\right) = 0$ , оскільки ліва частина рівності описує замкнуту криву у комплексному просторі, а саме правильний  $N$ -кутник з одиничних векторів

$\vec{v}_j = \exp(i\frac{2\pi j}{N}) \in \mathbb{C}$ . Використовуючи властивості циркулянтних матриць та щойно наведену рівність, можемо записати її власні значення:

$$\begin{aligned} \lambda_p(\Theta_{sync}) &= \frac{1}{N} g'(0) \left( (N-1) - \sum_{j=1}^{N-1} \exp\left(\frac{2\pi i j}{N}\right) \right) \\ &= \frac{1}{N} g'(0) \left( N - \sum_{j=1}^N \exp\left(\frac{2\pi i j}{N}\right) \right) = \frac{1}{N} g'(0) (N - 0) = g'(0), \quad j = 1, \dots, N-1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_N(\Theta_{sync}) &= \frac{1}{N} g'(0) \left( (N-1) - \sum_{j=1}^{N-1} \exp\left(\frac{2\pi i j}{N} N\right) \right) \\ &= \frac{1}{N} g'(0) \left( (N-1) - \sum_{j=1}^{N-1} \exp(0) \right) = \frac{1}{N} g'(0) (N-1 - (N-1)) = 0. \end{aligned}$$

Отже, Якоб'ян синхронного розв'язку має одне нульове власне значення, яке відповідає власному вектору  $v = (1, \dots, 1)$ , тобто напрямку вздовж фазового зсуву у системі. Інші всі власні значення однакові і, отже, умовою стійкості  $\Theta_{sync}$  у трансверсальному до  $v$  напрямку є виконання нерівності (3.14). Оскільки для функції (3.3) виконується  $g(0) = 2r \cos \beta - \cos \alpha$ , то, згідно (3.14), синхронний розв'язок є стійким при виконанні умови (3.15).  $\square$

З теореми випливає, що біфуркаційна поверхня втрати стійкості у параметричному просторі  $(\alpha, \beta, r)$  задається виразом:

$$r = \frac{\cos \alpha}{2 \cos \beta}. \quad (3.16)$$

Як ми покажемо далі, у більшості випадків вираз (3.16) є умовою симетричних *транскритичних біфуркацій*, що відбуваються вздовж інваріантних многовидів з ізотропією  $\mathbf{S}_k \times \mathbf{S}_{N-k}$  при  $k \neq N/2$  та умовою вилкових біфуркацій вздовж многовидів з ізотропією  $\mathbf{S}_{N/2} \times \mathbf{S}_{N/2}$ , коли система є парно-вимірною.

Як і у минулому розділі для дослідження синхронізації фаз  $\theta_i$  системи

зв'язаних осциляторів будемо використовувати комплексне середнє поле

$$Z = Re^{i\psi} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e^{i\theta_j}. \quad (3.17)$$

Нагадаємо, що комплексне поле  $Z$  або його амплітуда  $R$  називається *параметром порядку* Курамото [206]. Відмітимо, що

$$R = |Z| = \left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e^{i\theta_j} \right| = \frac{1}{N} \sqrt{N + 2 \sum_{i,j=1, j \neq i}^N \cos(\theta_i - \theta_j)}. \quad (3.18)$$

Параметр порядку є дуже потужним інструментом дослідження різноманітних форм колективної динаміки систем осциляторних елементів. Оскільки  $Z(\Theta_{sync}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e^{i\theta} = e^{i\theta}$ , то  $R(\Theta_{sync}) = 1$  та  $\psi(\Theta_{sync}) = \theta$ . І у зворотньому напрямку, можна переконатись у тому, що з умови  $R = 1$  випливає  $\theta_i = \theta_j$  для всіх індексів. Дійсно, права частина виразу (3.18) дорівнює 1 лише у тому випадку, коли значення підкореневого виразу є максимальним, тобто коли всі  $\cos(\theta_i - \theta_j) = 1$  або ж, коли всі  $\theta_i = \theta_j$ .

### 3.3.2. Стійкість та біфуркації режиму рівномірно розподілених фаз

Режим *розподілених фаз* (хвиль обертання) є періодичною орбітою, яка, з точністю до перестановок, має форму:

$$\Theta_{splay}(t) = (\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2, \dots, \tilde{\theta}_N) = \left( \theta(t), \theta(t) - \frac{2\pi}{N}, \dots, \theta(t) - \frac{(N-1)2\pi}{N} \right), \quad (3.19)$$

де  $\theta(t) = \Omega_{splay}t + \theta_0$ . Всього є  $(N-1)!$  різних розподілених режимів в залежності від числа перестановок, але кожній інваріантній множині  $\mathcal{C}$  належить лише один розв'язок  $\Theta_{splay}$ .

**Теорема 3.3.2.** *Розподілений режим  $\Theta_{splay}(t)$  системи (3.1), (3.3) є асимптотично стійким, якщо*



$$\sum_{j=1}^{N-1} g' \left( \frac{2\pi}{N} j \right) \left( 1 - \cos \left( \frac{2pj\pi}{N} \right) \right) < 0, \quad p = 1, \dots, N-1. \quad (3.20)$$

**Доведення.** Позначимо  $\eta_j = g' \left( \frac{2\pi}{N} j \right)$  та  $\nu_p = \exp \left( \frac{2\pi i}{N} p \right)$ . Тоді Якобіан  $J(\Theta_{splay}) = \{J_{ij}\}_{i,j=1}^N$  системи (3.1) для розв'язку (3.19) має наступні елементи:

$$J_{ii}(\Theta_{splay}) = \frac{1}{N} \sum_{j=1, j \neq i}^N g' \left( \tilde{\theta}_{i-1} - \tilde{\theta}_{j-1} \right) = \frac{1}{N} \sum_{j=1, j \neq i}^N \eta_{j-i} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N-1} \eta_j, \quad i = 1, \dots, N,$$

$$J_{ij}(\Theta_{splay}) = -\frac{1}{N} g' \left( \tilde{\theta}_{i-1} - \tilde{\theta}_{j-1} \right) = -\frac{1}{N} \eta_{j-i}, \quad i, j = 1, \dots, N, j \neq i.$$

Матриця  $J(\Theta_{splay})$  є циркулянтною, оскільки для будь-якого цілого  $m$  виконуються умови:

$$\begin{aligned} J_{i+m, i+m}(\Theta_{splay}) &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \eta_{j+m} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N g' \left( \frac{2\pi}{N} (j+m) \right) = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N g' \left( \frac{2\pi}{N} j \right) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \eta_j = J_{i,i}(\Theta_{splay}), \end{aligned}$$

$$J_{i+m, j+m}(\Theta_{splay}) = -\frac{1}{N} \eta_{(j+m)-(i+m)} = -\frac{1}{N} \eta_{j-i} = J_{i,j}(\Theta_{splay}).$$

З властивостей циркулянтних матриць випливає, що власні значення

$J(\Theta_{splay})$  мають вигляд:

$$\begin{aligned} \lambda_p(\Theta_{splay}) &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N-1} \eta_j - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N-1} \eta_j \nu_p^j = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N-1} \eta_j (1 - \nu_p^j) = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N-1} \eta_j \left( 1 - \cos\left(\frac{2pj\pi}{N}\right) \right) - i \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N-1} \eta_j \sin\left(\frac{2pj\pi}{N}\right), \quad p = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Зі співвідношення  $\nu_N^j = \exp\left(\frac{2\pi i}{N} j N\right) = 1$  випливає, що  $\lambda_N(\Theta_{splay}) = 0$  для будь-яких фазово розподілених режимів. Дане власне значення відповідає напрямку  $(1, \dots, 1)$  вздовж фазового зсуву. Згідно (3.21) розв'язок є стійким у  $(N-1)$  трансверсальних напрямках, коли виконується умова (3.20).  $\square$

Відмітимо, що Якобіан розподілених фаз має  $[N/2]$  комплексно-спряжених пар

$$\lambda_{N-p}(\Theta_{splay}) = \lambda_{-p}(\Theta_{splay}) = \bar{\lambda}_p(\Theta_{splay}).$$

У парно-вимірному випадку

$$\lambda_{N/2}(\Theta_{splay}) = \sum_{j=1}^N g' \left( \frac{2\pi}{N} j \right) (1 - (-1)^j) \in \mathbb{R}.$$

Як було зауважено в доведенні, одне власне значення Якобіану є нульовим. Дане власне значення відповідає напрямку симетрії фазового зсуву. При редукції системи за допомогою будь-яких  $N-1$  фазових різниць  $\varphi_{ij} = \theta_i - \theta_j$  до  $(N-1)$ -вимірної системи, Якобіан матриці розподіленого стану буде мати  $N-1$  власних значень (3.21), записаних у нових координатах  $\varphi_{ij}$ , за винятком нульового власного значення з цієї формули. Відмітимо, що описана ситуація загальна для будь-яких положень рівноваги системи у фазових змінних: нульове власне значення Якобіану оригінальної системи буде відсутнім у відповідного Якобіану редукованої системи меншої розмірності.

Система у фазових різницях у режимі розподілених фаз має біфуркацію Андронова-Хопфа (яка може бути виродженою або відбуватись одразу

у кількох трансверсальних напрямках) при  $\operatorname{Re}(\lambda_p(\Theta_{splay})) < 0$  для певних індексів  $p = 1, \dots, N - 1$ ,  $p \neq N/2$ , та при  $\operatorname{Im}(\lambda_p(\Theta_{splay})) = 0$ . На відміну від синхронного стану, умови стійкості та біфуркаційних переходів режиму розподілених фаз суттєво залажать від розмірності системи.

Відмітимо, що параметр порядку розподіленого стану  $R(\Theta_{splay}) = 0$ . Параметр порядку  $R$  є нульовим не лише для  $\Theta_{splay}$ , а для більш широкої множини режимів, як було показано у минулому розділі для моделі Курамото–Сакагучі, і як ми покажемо у наступному підрозділі.

### 3.3.3. Режим глобальної антифази: множина з нульовим параметром порядку

Розглянемо множину змінних  $(\theta_1, \dots, \theta_N)$  у фазовому просторі  $\mathbb{T}^N$  таку, що її параметр порядку є нульовим:  $R = 0$ . Згідно (3.17) дана множина задається виразом:

$$\mathcal{M}^{(N)} = \left\{ (\theta_1, \dots, \theta_N) : \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j} = 0 \right\}. \quad (3.22)$$

Можна переконатись у тому, що  $\mathcal{M}^{(N)}$  є об'єднанням інваріантних многовидів певної форми і що його розмірність  $N - 2$  (тобто  $\dim(\mathcal{M}^{(N)}) = N - 2$ ) для  $N \geq 3$ . Для того, щоб переконатись в останньому візьмемо типову фіксовану точку з множини і без обмеження загальності вважаємо, що  $0 \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq \dots \leq \theta_N < 2\pi$ . Розглядаємо кожне  $e^{i\theta_j}$  як *одичний вектор* на комплексній площині. Позначимо

$$A_k = \sum_{j=1}^k e^{i\theta_j}.$$

Тоді точки  $A_k$  представляють вершини опуклого багатокутника з ребрами одиничної довжини, тобто  $|A_{k+1} - A_k| = 1$ ,  $k = 1, \dots, N - 1$ , та  $A_N = 0$ . Відмітимо що комплексне обмеження  $A_N = 0$  зумовлює обмеження двох ступенів свободи у виборі  $N$  кутів  $\theta_i$  і, отже, залишається  $N - 2$  ступені свободи для вибору  $\theta_i$  (вибір двох останніх ребер многокутника  $A_N$  жорстко фіксується

вибором  $N - 2$  попередніх). У випадку, коли не фіксована точка, а залежна від часу траєкторія  $(\theta_1(t), \dots, \theta_N(t))$  повністю належить множині  $\mathcal{M}^{(N)}$ , ми не можемо упорядкувати координати  $\theta_i(t)$  як раніше. Це змушує розглядати залежні від часу рухомі багатокутники  $A_k(t) = \sum_{j=1}^k e^{i\theta_j(t)}$ , які не зобов'язані бути опуклими. Але, як і раніше, вибір положення двох останніх координат траєкторії (або ребер багатокутника) у кожен фіксований момент часу задається виразом з інших  $N - 2$  координат, а цей вираз неперервно залежить від часу.

Для випадку  $N = 3$  багатокутники, побудовані у описаний вище спосіб, є рівносторонніми трикутниками зі сторонами одиничної довжини та одним кутом у початку координат, навколо якого він може крутитись. Для  $N = 4$  багатокутники є ромбами зі сторонами одиничної довжини та одним кутом у початку координат. Одна ступінь свободи полягає у можливості цього ромба крутитись навколо початку координат, друга — у можливості руху протилежних вершин однієї відносно іншої вздовж діагоналі (з деформацією форми ромба). Для  $N = 5$  у одиничному п'ятикутнику (не обов'язково опуклому) перші три вершини можуть бути майже довільними, лише з умовою  $|A_3| \in [0, 2]$ , а інші дві залежать від трьох попередніх. І так далі.

Многовид  $\mathcal{M}^{(N)}$  можна описати як множину, дві змінні якої описуються з використання усіх інших згідно виразам:

$$\begin{aligned}\theta_N(t) &= \arctan\left(\frac{f_2}{f_1}\right) + \frac{1}{2} \arccos\left(\frac{f_1^2 + f_1^2}{2} - 1\right) + \frac{\pi}{2}(1 - \text{sign}(f_1)), \\ \theta_{N-1}(t) &= \arctan\left(\frac{f_2}{f_1}\right) - \frac{1}{2} \arccos\left(\frac{f_1^2 + f_1^2}{2} - 1\right) + \frac{\pi}{2}(1 - \text{sign}(f_1)),\end{aligned}$$

де

$$f_1 = -\sum_{j=2}^N \cos \theta_j, \quad f_2 = -\sum_{j=2}^N \sin \theta_j.$$

Многовид для системи у фазових різницях є  $(N - 3)$ -вимірним. У випадку  $\varphi_i = \theta_1 - \theta_{i+1}$ ,  $i = 1, \dots, N$ , змінні  $\varphi_{N-2}$  та  $\varphi_{N-1}$  задаються через інші змінні за допомогою виразів (2.27), (2.28).

Як було показано у попередньому розділі (Теорема 2.3.1) у випадку, коли

функція зв'язку  $g(x)$  має лише першу гармоніку, множина  $\mathcal{M}^{(N)}$  є динамічно інваріантною для системи (3.1) і, крім того, вона повністю складається з розв'язків з фіксованими фазовими різницями. Однак, для загальної функції зв'язків  $g(x)$  (навіть при наявності вже другої гармоніки) розв'язки що належать  $\mathcal{M}^{(N)}$  не є у загальному інваріантними. Більш точно ситуацію описує наступне твердження.

**Теорема 3.3.3.** *Множина  $\mathcal{M}^{(N)}$  є інваріантною для системи (3.1) для довільної функції зв'язку  $g(x)$ , коли  $N = 2, 3, 4$  ( $\omega = 0$ ), але вона не є інваріантною у загальному випадку при для  $N \geq 5$ .*

**Доведення** цієї теореми надано у Додатку В.5 (див. стор. 385)

Відмітимо, що для чотирьох зв'язаних осциляторів множина

$$\mathcal{M}^{(4)} = \{(0, \varphi, \pi, \varphi + \pi), (0, \pi, \varphi, \varphi + \pi), (0, \varphi, \varphi + \pi, \pi)\}$$

(половина кожної з трьох ліній належить одній інваріантній області) є об'єднанням інваріантних многовидів, що відповідають станам з ізотропією  $\mathbb{Z}_2$ . В середині кожної з цих ліній в центрі інваріантної області знаходиться інваріантна точка, що відповідає стану з ізотропією  $\mathbb{Z}_4$  (рис. 8.11).

### 3.3.4. Стійкості та біфуркації дво-кластерних станів

Розглянемо будь-який дво-кластерний стан з ізотропією  $\mathbf{S}_p \times \mathbf{S}_{N-p}$ , що задається виразом:

$$\Theta_{p,N-p}(t) = (\theta_a(t), \dots, \theta_a(t), \theta_b(t), \dots, \theta_b(t)) \quad (3.23)$$

таким чином, що  $\theta_i = \theta_a(t)$  для  $i = 1, \dots, p$  та  $\theta_i = \theta_b(t)$  для  $i = p + 1, \dots, N$ . Якщо ми означимо

$$\varphi_p = \theta_a - \theta_b, \quad (3.24)$$

то для системи (3.1) права частина має вигляд:

$$\sum_{j=1}^N g(\theta_i - \theta_j) = \begin{cases} pg(0) + (N-p)g(\varphi_p), & i = 1, \dots, p, \\ pg(-\varphi_p) + (N-p)g(0), & i = p + 1, \dots, N. \end{cases}$$

Тоді рівняння на кластері (3.23) у координаті фазової різниці (3.24) має вигляд:

$$\frac{d\varphi_p}{dt} = \frac{1}{N} (pg(0) + (N-p)g(\varphi_p) - pg(0) - (N-p)g(-\varphi_p)). \quad (3.25)$$

Всі положення рівноваги цього рівняння задовольняють умову:

$$(2p - N) [g(0) - g_+(\varphi_p)] + g_-(\varphi_p) = 0, \quad (3.26)$$

де  $g(x) = g_+(x) + g_-(x)$ , а

$$g_+(x) = \frac{1}{2}(g(x) + g(-x)) \quad \text{та} \quad g_-(x) = \frac{1}{2}(g(x) - g(-x)) \quad (3.27)$$

є парною та непарною частинами цієї функції. Для загального дво-гармонічного зв'язку (3.3) це означає, що вираз (3.26) можна переписати як

$$\begin{aligned} 0 &= (2p - N) [g(0) - g_+(\varphi_p)] + g_-(\varphi_p) = \\ &= (2p - N)(\cos(\varphi_p) - 1)[q \sin \alpha + 2r \sin \beta (\cos(\varphi_p) + 1)] + N \sin(\varphi_p)[q \cos \alpha + 2r \cos(\varphi_p) \cos \beta] \end{aligned}$$

Останнє рівняння має тривіальний розв'язок: синхронний стан з  $\varphi_p = 0$ . Розділимо останнє рівняння на  $\sin(\varphi_p/2)$ . Останнє означає, що нетривіальний дво-кластерний стан має фазову різницю  $\varphi_p$ , яка задовольняє рівність

$$\begin{aligned} 0 &= (N - 2p) \sin(\varphi_p/2)[q \sin \alpha + 4r \sin \beta \cos^2(\varphi_p/2)] + \\ &\quad + N \sin(\varphi_p/2)[q \cos \alpha + 2r \cos \beta (2 \cos^2(\varphi_p/2) - 1)]. \quad (3.28) \end{aligned}$$

Відмітимо, що детальні результати стосовно стійкості та біфуркацій дво-кластерних станів для функції  $g(x) = -\sin(x - \alpha)$  (при  $r = 0$  (3.1), (3.3) описує модель Курамото–Сакагучі) представлені у підрозділі 2.3. За допомогою заміни  $\xi = \tan(\varphi_p/2)$  рівняння (3.28) можна звести до кубічного

рівняння. Перепозначимо  $p = NP$ , щоб  $0 < P < 1$ . Тоді рівняння (3.28) у нових змінних зводиться до кубічного рівняння:

$$(1-2P)[q \sin \alpha] \xi^3 + [q \cos \alpha - 2r \cos \beta] \xi^2 + (1-2P)[q \sin \alpha + 4r \sin \beta] \xi + [q \cos \alpha + 2r \cos \beta] = 0. \quad (3.29)$$

Біфуркації дво-кластерного стану будуть відбуватись точно тоді, коли рівняння (3.29) має нульовий дискримінант, а саме коли виконується рівність:

$$a_4 P^4 + a_3 P^3 + a_2 P^2 + a_1 P + a_0 = 0, \quad (3.30)$$

коефіцієнти якої задаються за допомогою виразів:

$$\begin{aligned} a_4 &= 64 \sin \alpha (64r^3 \sin^3 \beta - 48r^2 \sin^2 \beta \sin \alpha + 12r \sin^2 \alpha \sin \beta - \sin^3 \alpha), \\ a_3 &= 128 \sin \alpha (-64r^3 \sin^3 \beta + 12r^2 \sin \alpha \sin^2 \beta - 28r \sin^2 \alpha \sin \beta + \sin^3 \alpha), \\ a_2 &= 256 \sin^2 \beta \cos^2 \beta r^4 + 256 \sin \beta (20 \sin \alpha \sin^2 \beta + \sin \beta \cos \alpha \cos \beta + 4 \sin \alpha) r^3 + \\ &\quad + 64 (62 \sin^2 \alpha \cos^2 \beta - \sin(2\alpha) \sin \beta \cos \beta - 73 \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta) r^2 + \\ &\quad + 64 \sin \alpha (23 \sin^2 \alpha \sin \beta + 7 \sin \alpha \cos \alpha \cos \beta - 5 \sin \beta) r - 32 \sin^2 \alpha (2 \sin^2 \alpha + 1), \\ a_1 &= -256r^4 \sin^2 \beta \cos^2 \beta - 256 (4 \sin \alpha \sin \beta (\sin^2 \beta + 1) + \sin^2 \beta \cos \alpha \cos \beta) r^3 + \\ &\quad + 64 (14 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta + 11 \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta + \sin(2\alpha) \sin \beta \cos \beta) r^2 + \\ &\quad + 64 (11 \sin \alpha \sin \beta \cos^2 \alpha - 7 \sin^2 \alpha \cos \alpha \cos \beta - 6 \sin \beta \sin \alpha) r + 32 \sin^2 \alpha, \\ a_0 &= 64r^4 \cos^2 \beta + 64 (3 \sin \alpha \sin \beta + \cos(\alpha - \beta)) r^3 + 16 (1 - 13 \sin^2 \alpha + \cos^2 \beta - \\ &\quad - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos(\alpha - \beta)) r^2 + 16 ((3 - 8 \cos^2 \alpha) \cos(\alpha - \beta) + 4 \cos \alpha \cos \beta) r - 4 \end{aligned}$$

Як бачимо, аналітичний вираз будь-якого з параметрів  $r$ ,  $\alpha$  або  $\beta$  у термінах інших двох з рівності (3.30) є досить складною задачею. І все ж, вираз (3.30) може бути використаний для чисельної побудови біфуркаційних кривих та поверхонь. Крім того, побудова біфуркаційних кривих за допомогою (3.30) може бути здійснена і аналітично (як було показано у минулому розділі і буде показано далі) у випадку, коли розглядаються системи малої

розмірності (3.30) або при певних фіксованих значеннях параметрів  $r, \alpha, \beta$  чи певних співвідношеннях між ними. Відмітимо, що вираз (3.30) наводиться для дво-гармонічної функції  $g$ . Використовуючи рівняння (3.24) аналогічним чином можна записати біфуркаційні умови подібні (3.30) для дво-кластерних станів, коли функція  $g$  містить три і більше гармонік. Очевидно, навіть у випадку три-гармонічної  $g$  ця задача є дуже громіздкою і вимагатиме роботи з кількох-сторінковими виразами.

### 3.3.5. Система у фазових різницях

Як зазначалось вище, система (3.1) має певну особливість: її праві частини залежать від фазових різниць  $\theta_i - \theta_j$ . Останнє спричиняє існування симетрії фазового зсуву в системі, яка задається дією  $\theta_i \mapsto \theta_i + \varepsilon$  для будь-яких  $\varepsilon$ . Крім того ця особливість дає можливість певного спрощення системи для з метою більш зручного її дослідження. Фізично це спрощення означає можливість фіксації одного з осциляторів  $\theta_i(t) = \text{const}$  і розгляд руху інших осциляторів по відношенню до фіксованого. Вказане спрощення можна виконати двома способами: 1) провести заміну змінних таким чином, щоб одна з координат стала нулем, 2) редукувати систему, зменшивши її розмірність на одиницю за допомогою розгляду фазових різниць. У наступних двох підрозділах ми будемо використовувати другий спосіб, а у подальшому і перший. На протязі даної роботи ми обираємо заміну фазових різниць

$$\varphi_i = \theta_1 - \theta_{i+1}, \quad i = 1, \dots, N - 1, \quad (3.31)$$

що зменшує розмірність фазового простору. Система глобально зв'язаних осциляторів (3.1) у фазових різницях (3.31) має наступний вигляд:

$$\frac{d\varphi_i}{dt} = \frac{1}{N} \left( -g(-\varphi_i) + \sum_{j=1}^{N-1} g(\varphi_j) - \sum_{j=1, j \neq i}^{N-1} g(\varphi_j - \varphi_i) \right), \quad i = 1, \dots, N - 1. \quad (3.32)$$



Будемо позначати праві частини системи (3.32) через

$$G_i(\Phi) = G_i(\varphi_1, \dots, \varphi_{N-1}) = \frac{1}{N} \left( -g(-\varphi_i) + \sum_{j=1}^{N-1} g(\varphi_j) - \sum_{j=1, j \neq i}^{N-1} g(\varphi_j - \varphi_i) \right).$$

Особливо відмітимо, що динаміка всіх систем у фазових різницях є *топологічно еквівалентною* між собою не залежно від вибору  $N - 1$  *лінійно незалежних* фазових різниць  $\varphi_{ij} = \theta_i - \theta_j$ . Перехід від системи у одних фазових різницях завжди можна здійснити за допомогою лінійної заміни з невиродженою матрицею. Це стає очевидним, якщо вказати, що кожна з альтернативних лінійно незалежних фазових різниць  $\varphi_{ij}$  може бути представленою за допомогою (3.31) у вигляді  $\varphi_{ij} = \theta_i - \theta_j = \varphi_{j-1} - \varphi_{i-1}$ .

Система (3.1) з функцією зв'язку (3.3) при  $q = -1$  за допомогою заміни (3.31) зводиться до наступної:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_i}{dt} = & -\frac{1}{N} \left[ \sin(\varphi_i + \alpha) + \sum_{j=1}^{N-1} \sin(\varphi_j - \alpha) + \sum_{j=1, j \neq i}^{N-1} \sin(\varphi_i - \varphi_j + \alpha) \right] + \\ & + r \frac{1}{N} \left[ \sin(2\varphi_i + \beta) + \sum_{j=1}^{N-1} \sin(2\varphi_j - \beta) + \sum_{j=1, j \neq i}^{N-1} \sin(2(\varphi_i - \varphi_j) + \beta) \right], \\ & i = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Відмітимо, що у випадку неідентичних фазових осциляторів у правих частинах рівнянь також присутній доданок  $\Delta_i = \omega_1 - \omega_{i+1}$ , який у даному випадку (ідентичних осциляторів) відсутній оскільки всі  $\omega_i = \omega$ . Система (3.33) задана на  $(N - 1)$ -вимірному торі  $\mathbb{T}^N \ni (\varphi_1, \dots, \varphi_N)$ . Запишемо і перепозначимо у нових координатах важливі інваріантні множини системи (3.33).

**1.** Режим повної синхронізації системи (3.1)  $\Theta_{sync}$  для нової системи (3.33) є початком координат

$$\Phi_{sync} = \{(\varphi_1, \dots, \varphi_N) : \varphi_i = 0, i = 1, \dots, N\}.$$

**2.** Режим рівномірно розподілених частот  $\Theta_{splay}$  для нової системи має ви-

гляд:

$$\Phi_{splay} = \left\{ (\varphi_1, \dots, \varphi_N) : \varphi_i = i \frac{2\pi}{N}, i = 1, \dots, N \right\}.$$

**3.** Режим повної антифази  $\mathcal{M}^{(N)}$  з  $R = 0$  має вигляд

$$\mathcal{M}^{(N)} = \left\{ (\varphi_1, \dots, \varphi_N) : \sum_{j=1}^{N-1} e^{i\varphi_j} = -1 \right\}.$$

У нових координатах, зокрема,  $\mathcal{M}^{(3)} = \{(2\pi/3, 4\pi/3), (4\pi/3, 2\pi/3)\}$  — дві точки, а  $\mathcal{M}^{(4)} = \{(\varphi_1, \pi, \varphi_1 + \pi), (\pi, \varphi_2, \varphi_2 + \pi), (\varphi_1, \varphi_1 + \pi, \pi)\}$  — три прямі.

**4.** дво-кластерний режим з ізотропією  $\mathbf{S}_p \times \mathbf{S}_{N-p}$  задається формулою

$$\varphi_1 = \dots = \varphi_p \neq \varphi_{p-1} = \dots = \varphi_{N-1} = 0, \quad p = 1, \dots, N-1.$$

Як ми бачимо, такого типу режими відповідають прямим у просторі  $\mathbb{T}^{(N-1)}$ . Аналогічним чином з  $k$  знаками "≠" описується  $k$ -кластерний режим.

Зауважимо, що для збереження розмірності системи (3.1) потрібно використувати лінійну заміну змінних

$$\begin{pmatrix} \theta \\ \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_{N-2} \\ \varphi_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \vdots & \ddots & -1 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_{N-1} \\ \theta_N \end{pmatrix}$$

(або у векторній формі  $\bar{\Phi} = (\theta_1, \Phi)^T = S\Theta$ ) з невідродженою матрицею заміни  $S_N$  ( $\det(S_N) = (-1)^{(N-1)} \neq 0$ ), у результаті якої нова система крім  $N-1$

рівнянь (3.33) має ще одне рівняння

$$\begin{aligned} \frac{d\theta_1}{dt} &= \frac{1}{N} \left( g(0) + \sum_{j=1}^{N-1} g(\varphi_j) \right) = \\ &= \frac{1}{N} \left[ \sin \alpha - r \sin \beta + \sum_{j=1}^{N-1} (-\sin(\varphi_j - \alpha) + r \sin(\varphi_j - \beta)) \right]. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Як бачимо, права частина рівняння (3.34) не залежить від власної змінної  $\theta$  (як і всі інші рівняння системи (3.33)) а залежить лише від змінних інших рівнянь. Останнє означає, що динаміка цього рівняння цілком визначається динамікою  $(N - 1)$ -вимірної системи (3.33) у змінних  $\varphi_i$ . Тобто можна застосувати такий алгоритм: отримати розв'язки системи (3.33), підставити ці розв'язки  $\varphi_i(t)$  у рівняння (3.34) і тоді розв'язувати останнє рівняння, яке у цей момент вже буде неавтономним. Даний алгоритм може бути корисний для представлення точних розв'язків першого рівняння, що відповідають положенням рівноваги  $(\varphi_1, \dots, \varphi_{N-1}) = (\varphi_1^*, \dots, \varphi_{N-1}^*)$  системи (3.33). У цьому випадку перша координата розв'язку перетвореної системи має вигляд

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \frac{1}{N} \left[ g(0) + \sum_{j=1}^{N-1} g(\varphi_j^*) \right] t + \theta(0) \\ &= \frac{1}{N} \left[ \sin \alpha - r \sin \beta + \sum_{j=1}^{N-1} (-\sin(\varphi_j^* - \alpha) + r \sin(\varphi_j^* - \beta)) \right] t + \theta(0). \end{aligned} \quad (3.35)$$

Описану властивість системи ми будемо використовувати в подальшому у розділі 6 для побудови химерних станів у системах з модульованим зв'язком.

### 3.4. Біфуркації у системі двох зв'язаних фазових осциляторів

Розглянемо систему (3.1), (3.3) для  $N = 2$ . У цьому випадку при  $q = -1$  вона має простий вигляд:

$$\begin{aligned}
\frac{d\theta_1}{dt} &= \frac{1}{2} (g(0) + g(\theta_1 - \theta_2)) = \\
&= \frac{1}{2} (\sin \alpha - r \sin \beta - \sin(\theta_1 - \theta_2 - \alpha) + r \sin(2(\theta_1 - \theta_2) - \beta)), \\
\frac{d\theta_2}{dt} &= \frac{1}{2} (g(0) + g(\theta_2 - \theta_1)) = \\
&= \frac{1}{2} (\sin \alpha - r \sin \beta - \sin(\theta_2 - \theta_1 - \alpha) + r \sin(2(\theta_2 - \theta_1) - \beta)). \quad (3.36)
\end{aligned}$$

Як зазначалось вище, динаміку даної системи можна повністю описати, використовуючи фазові змінні (3.31), що у даному випадку представлено лише однією змінною  $\varphi_1 = \theta_1 - \theta_2$ . Поведінка системи по іншій змінній цілком залежить від поведінки цієї змінної, як вказано у попередньому підрозділі. Оскільки розглядаємо лише одне рівняння (3.33), то позначимо  $\varphi = \theta_1 - \theta_2$ , щоб уникнути індексу. Тоді дане рівняння у фазових різницях має вигляд:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2} (g(\varphi) - g(-\varphi)) = -\sin \varphi \cos \alpha + r \sin(2\varphi) \cos \beta. \quad (3.37)$$

Дане рівняння є природнім частковим випадком рівняння у різницях (3.24) дво-кластерних станів для  $N = 2, p = 1$ . Як бачимо, права частина цього рівняння є непарною, що впливає, зокрема, на типи його біфуркацій при зміні параметрів. Дана система має чотири положення рівноваги. Дві особливі точки  $\varphi_0 = 0$  (синхронізований стан) та  $\varphi_\pi = \pi$  (антифазний стан) існують для будь-яких значень параметрів цього рівняння. Інші два положення рівноваги мають координати

$$\varphi_\pm = \pm \arccos \left( \frac{\cos \alpha}{2r \cos \beta} \right). \quad (3.38)$$

Останні дві точки існують при умові  $\left| \frac{\cos \alpha}{2r \cos \beta} \right| \leq 1$ . Точки  $\varphi_\pm$  з'являються з точки  $\varphi_0$  або з  $\varphi_\pi$  внаслідок суперкритичної або субкритичної вилкової біфуркації (в залежності від співвідношення параметрів). Дійсно, розкладаючи праву частину  $G(\varphi)$  рівняння (3.37) у ряд Тейлора у відповідних точках,

отримуємо вирази

$$G(\varphi) = (-\cos \alpha + 2r \cos \beta)\varphi - \frac{1}{6}(-\cos \alpha + 8r \cos \beta)\varphi^3 + \mathcal{O}(\varphi^4),$$

$$G(\varphi) = (\cos \alpha + 2r \cos \beta)(\varphi - \pi) - \frac{1}{6}(\cos \alpha + 8r \cos \beta)(\varphi - \pi)^3 + \mathcal{O}((\varphi - \pi)^4),$$

які підтверджують вказаний вище тип біфуркацій. З останніх виразів також бачимо, що гілки відповідних біфуркаційних кривих задаються виразами:  $r = \pm \frac{\cos \alpha}{2 \cos \beta}$ . Субкритична чи суперкритична біфуркація у точках  $\varphi_0$ ,  $\varphi_\pi$  визначає знак коефіцієнту перед кубічним членом, що також залежить від співвідношення трьох параметрів. На рис. 8.7(а) зображено біфуркаційну діаграму на площині одного параметру та змінної  $(\alpha, \varphi)$  у випадку, коли два інших параметри є фіксованими (зокрема, при  $\beta = 0$ ,  $r = 0.2$ ). Дана біфуркаційна діаграма зображена лише на половині фазового простору при  $\varphi \in [0, \pi]$ . Інша частина при  $\varphi \in [\pi, 2\pi]$  зображується дзеркально симетрично згідно симетрії (3.6). Таким чином на повній біфуркаційній діаграмі  $\varphi \in \mathbb{T}^1$  гілки біфуркацій у точках  $A$  та  $B$  утворюють "вилки" двох суперкритичних біфуркацій відповідної назви. Як зазначалось (і видно з діаграми) система може мати або дві або чотири положення рівноваги. У випадку, коли положень рівноваги чотири, два з них є стійкими, а два ні. Отже у цьому випадку система є *бістабільною*. На рис. 8.7(а) одночасно стійкими є дві точки  $\varphi_-$  та  $\varphi_+$  коли значення параметру  $\alpha$  знаходиться між точками  $A$  та  $B$  (тобто  $\alpha \in (\alpha_A, \alpha_B)$ ). Точки ж  $\varphi_0$  та  $\varphi_\pi$  є одночасно нестійкими у цьому випадку. Згідно симетрії (3.5) або (3.6) існує область параметрів, коли останні дві точки (тобто синхронізований та антисинхронний стани) є стійкими одночасно. Для існування останньої властивості системи потрібно вимагати, щоб одночасно  $G'(0) < 0$  та  $G'(\pi) < 0$ . Зробивши відповідні підрахунки, отримуємо умову бістабільності синфазного та антифазного стану:

$$r < \min \left\{ -\frac{\cos \alpha}{2 \cos \beta}, \frac{\cos \alpha}{2 \cos \beta} \right\} = -\frac{1}{2} \left| \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \right|. \quad (3.39)$$

Підсумовуючи викладене вище, можемо сформулювати наступне твердження.

**Теорема 3.4.1.** *Рівняння у фазових різницях (3.37), що описує взаємодію двох взаємозв'язаних осциляторів, має чотири положення рівноваги  $\varphi_0 = 0$  — синхронізований стан,  $\varphi_\pi = \pi$  — антифазний стан та два положення рівноваги  $\varphi_\pm$ , які залежать від параметрів та задаються рівностями (3.38). Положення рівноваги  $\varphi_\pm$  виникають з  $\varphi_0$  та  $\varphi_\pi$  внаслідок суперкритичної та субкритичної вилкових біфуркацій, коли  $r = \pm(\cos \alpha)(2 \cos \beta)$ . Рівняння (3.37) має бістабільність станів  $\varphi_0$  та  $\varphi_\pi$  при виконанні умови (3.39).*

Як зазначалось у попередньому підрозділі, повністю еквівалентною системі (3.36) (тої ж розмірності) є система у змінних  $(\theta, \varphi)$ , де перше рівняння має вигляд:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} (\sin \alpha - r \sin \beta - \sin(\varphi - \alpha) + r \sin(2\varphi - \beta)), \quad (3.40)$$

а друге описується формулою (3.37). Враховуючи результати для рівняння (3.37), робимо висновок, що система (3.40), (3.37) має завжди дві періодичні орбіти у  $\mathbb{T}^2$  та при певних значеннях параметрів може мати таких орбіт чотири. Ці орбіти мають координати  $(\theta(t), \varphi^*)$ , де

$$\theta(t) = \frac{1}{2} [\sin \alpha - r \sin \beta - \sin(\varphi^* - \alpha) + r \sin(2\varphi^* - \beta)] t + \theta(0),$$

а через  $\varphi^*$  позначено відповідну координату  $\varphi_0$ ,  $\varphi_\pi$ ,  $\varphi_-$  чи  $\varphi_+$ .

Описана вище динаміка взаємодії двох зв'язаних осциляторів здається досить простою. Проте, описані вище результати для рівняння (3.4.1) можуть бути використані для розуміння динаміки вздовж інваріантних многовидів у системах більшої розмірності. Зокрема, побудова мінімальних химерних станів у системі чотирьох зв'язаних осциляторів буде базуватись на властивості бістабільності рівняння (3.4.1).

### 3.5. Біфуркації гетероклінічних циклів у моделі трьох осциляторів

У даному підрозділі ми будемо досліджувати якісну поведінку трьох зв'язаних осциляторів, що описуються системою (3.1) з функцією фазової взаємодії (3.3). У даному підрозділі ми будемо використовувати певні результати, отримані у підрозділі 3.4 для дослідження поведінки дво-кластерних розв'язків. Поведінка трьох зв'язаних осциляторів є суттєво складнішою ніж двох. Зокрема, у випадку  $N = 3$  появляється багато нових типів взаємодії між елементами, а також *глобальні* біфуркації при зміні параметрів. У даному підрозділі ми спершу наведемо деякі результати для дво-гармонічної функції загального вигляду, а потім дуже детально розберемо біфуркаційну поведінку системи, у випадку відсутності фазового зсуву у другій гармоніці функції взаємодії (3.3), тобто при  $\beta = 0$ .

#### 3.5.1. Біфуркації на кластерах при $\beta \neq 0$

Використовуючи результати розділу 3.3 можна сформулювати умови біфуркацій у системі (3.1), (3.3) для  $N = 3$ . У даному підрозділі ми будемо лише називати тип відповідної біфуркації, а у наступному розділі ми будемо описувати кожен біфуркацію детально та вказувати на причини її виникнення. Отже, інваріантні режими мають наступні властивості.

**1.** *Транскритична/гетероклінічна* біфуркація синхронного режиму  $\Theta_{sync} = (\theta, \theta, \theta)$  (або  $\Phi_{sync} = (0, 0)$  для фазових різниць) виникає при умові

$$r = \frac{\cos \alpha}{2 \cos \beta}$$

і змінює стійкість цього розв'язку.

**2.** Стійкість режиму розподілених частот  $\Theta_{splay} = \{(\theta, \theta + 2\pi/3, \theta + 4\pi/3), (\theta, \theta + 4\pi/3, \theta + 2\pi/3)\}$  (або  $\Phi_{splay} = \{(2\pi/3, 4\pi/3), (4\pi/3, 2\pi/3), \}$ ) згідно Теоремі 3.3.2 задається власними значеннями Якобіану:

$$\lambda_{1,2}(\Theta_{splay}) = -\frac{1}{2}q \cos \alpha + r \cos \beta \pm i \left[ \frac{1}{2}q \sin \alpha + r \sin \beta \right], \quad \lambda_3(\Theta_{splay}) = 0.$$

Отже, біфуркація Андронова–Хопфа відбувається при

$$r = \frac{\cos \alpha}{2 \cos \beta}.$$

Ми бачимо, що дві різні біфуркації відбуваються на одній і тій же біфуркаційній поверхні. Але дане явище не є загальним, воно відбувається лише для  $N = 3$ . Також відмітимо, що  $\mathcal{M}^{(3)} = \Theta_{splay}$  у випадку трьох осциляторів.

**3.** Система (3.1) при  $N = 3$  має лише один тип дво-кластерного режиму з ізотропією  $\mathbf{S}_2 \times \mathbf{S}_1$ , тобто задовольняє (3.3.4) для  $p = 1$ . Поклавши  $P = 1/3$ ,  $q = -1$ , рівняння (3.28) може бути виражене, як кубічне для  $\xi = \tan(\varphi/2)$  у наступному вигляді:

$$-\sin \alpha \xi^3 - 3(2r \cos \beta + \cos \alpha) \xi^2 + (4r \sin \beta - \sin \alpha) \xi + 6r \cos \beta - 3 \cos \alpha = 0.$$

Біфуркації дво-кластерного стану (котрі можуть бути сідло-вузловими або вилковими) відбуваються у випадку, коли дискримінант останнього рівняння є нульовим, тобто коли параметри пов'язані між собою рівністю:



$$\begin{aligned}
0 = & 576 (9 \cos^2 \beta + \sin^2 \beta) \cos^2 \beta r^4 + \\
& + 64(36 \sin \alpha \cos^2 \beta \sin \beta + 9 \cos \alpha \cos \beta \sin^2 \beta + \\
& + 4 \sin \alpha \sin^3 \beta + 81 \cos \alpha \cos^3 \beta) r^3 + \\
& + 16(9 \cos^2 \alpha \sin^2 \beta - 99 \sin^2 \alpha \cos^2 \beta - \\
& - 12 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta - 18 \sin \alpha \cos \alpha \cos \beta \sin \beta) r^2 + \\
& + 16(63 \sin^2 \alpha \cos \alpha \cos \beta - 45 \sin \alpha \cos \alpha^2 \sin \beta - \\
& - 81 \cos^3 \alpha \cos \beta + 3 \sin^3 \alpha \sin \beta) r - \\
& - 4(\sin^4 \alpha + 16 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + 81 \cos^4 \alpha). \tag{3.41}
\end{aligned}$$

Дана рівність є досить громіздкою. Проте, вона є корисною для визначення біфуркаційних поверхонь у просторі  $(\alpha, \beta, r)$  за допомогою чисельних методів або для визначення біфуркаційних кривих на параметричній площині аналітично при фіксованому одному з параметрів.

На рис. 2 у роботі [30, Ashwin, Vick, Burylko] зображено чотири біфуркаційні діаграми на площині  $(\alpha, r)$  для  $\beta = 0$ ,  $\beta = \pi/4$ ,  $\beta = \pi/2$  та  $\beta = 3\pi/4$ . Досліджуючи дані біфуркаційні діаграми і використовуючи результати Теорему 3.3.1 та Теорему 3.3.2, можемо сформулювати наступний наслідок.

**Наслідок 3.5.1.** Для того, щоб біфуркація Андронова–Хопфа антифазного режиму та транскритична біфуркація синфазного режиму виникали для різних точок у параметричному просторі системи (3.1) при  $N = 3$  (або, щоб дві біфуркаційні криві не співпадали), необхідно, щоб функція зв'язку мала принаймні три гармоніки.

### 3.5.2. Система Гансела–Мато–Моньє у фазових різницях

Далі будемо розглядати систему (3.1) з дво-гармонічною функцією у випадку відсутності фазового зсуву (3.3) у другій гармоніці, тобто при  $\beta = 0$ . При додатковому припущенні  $q = -1$  (причини якого обговорені у підрозді-

лі 3.2.2) функція (3.3) приймає вигляд:

$$g(x) = g_{\alpha,r}(x) = -\sin(x - \alpha) + r \sin(2x). \quad (3.42)$$

Система (3.1) з функцією (3.42) називається моделлю Гансела–Мато–Моньє (система була вперше запропонована та вивчалась у 1993 році у роботах Д. Гансела, Г. Мато та К. Моньє [159, 160]). Для  $N = 3$  відповідна система у фазових різницях є дво–вимірною та має вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_1}{dt} &= \frac{1}{3} [-\sin(\varphi_1 - \alpha) - \sin(\varphi_2 - \alpha) - \sin(\varphi_1 + \alpha) - \sin(\varphi_1 - \varphi_2 + \alpha) \\ &\quad + r(2 \sin(2\varphi_1) + \sin(2\varphi_2) + \sin(2(\varphi_1 - \varphi_2)))] , \\ \frac{d\varphi_2}{dt} &= \frac{1}{3} [-\sin(\varphi_2 - \alpha) - \sin(\varphi_1 - \alpha) - \sin(\varphi_2 + \alpha) - \sin(\varphi_2 - \varphi_1 + \alpha) \\ &\quad + r(2 \sin(2\varphi_2) + \sin(2\varphi_1) + \sin(2(\varphi_2 - \varphi_1)))] . \end{aligned} \quad (3.43)$$

Дана система має три інваріантні лінії  $\varphi_1 = 0$ ,  $\varphi_2 = 0$  та  $\varphi_1 = \varphi_2$ , які розділяють фазовий тороїдальний простір  $\mathbb{T}^2$  на дві інваріантні області

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 &= \{(\varphi_1, \varphi_2) : \varphi_1 \in [0, 2\pi], 0 \leq \varphi_2 \leq \varphi_1\} , \\ \mathcal{C}_2 &= \{(\varphi_1, \varphi_2) : \varphi_2 \in [0, 2\pi], \varphi_1 \leq \varphi_2 \leq 2\pi\} \end{aligned}$$

(див. фазові портрети на рис. 8.8 та рис. 8.10).

Фазові змінні можуть бути візуалізовані як у [38, 43] за допомогою комплексної фазової різниці

$$\xi = \theta_1 + e^{2i\pi/3}\theta_2 + e^{4i\pi/3}\theta_3.$$

У даному випадку перестановки осциляторів відповідають обертанню та дзеркальним відображенням у фазовому просторі, які зберігають рівносторонній трикутник (див. рис. 8.9 або рис. 8.18). Відповідно для системи (3.43) можна трансформувати трикутники  $\mathcal{C}_1$ ,  $\mathcal{C}_2$  у рівносторонні трикутники, відображаючи їх у  $\xi$ -площину. У  $\xi$ -площині симетрія системи (3.43) відповідає симетрії рівностороннього трикутника.

Синфазний режим  $\Phi_{sync} = (0, 0)$  та антифазний многовид  $\mathcal{M}^{(3)} = \{(2\pi/3, 4\pi/3), (4\pi/3, 2\pi/3)\}$  відіграють надзвичайну роль у організації біфуркаційної поведінки системи (3.43). Відмітимо, що кожна з двох точок многовиду  $\mathcal{M}^{(3)}$  належить одній з інваріантних областей  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ . Крім того кожна з таких точок є центром  $\mathbb{Z}^3$  симетрії цього трикутника (центр рівностороннього трикутника при відображенні у  $\xi$ -площину). Як випливає з наведених у попередніх підрозділах досліджень, синфазний та антифазний стани мають завжди протилежні стійкості (один є джерелом, коли інший стоком). Стійкості обох режимів змінюються, коли параметр  $\alpha$ , збільшуючись від нуля, перетинає значення  $\alpha_0 = \arccos(2r)$  (спочатку синфазний режим є атрактором, а антифазний — репелором, потім навпаки).

### 3.5.3. Біфуркації для $N = 3$ у $(\alpha, r)$ -площині

Для розуміння структури біфуркацій у даному випадку спочатку було зображено біфуркаційну діаграму на площині  $(\alpha, \varphi_1)$  одного параметру та однієї змінної системи при фіксації інших параметрів (рис. 8.7(b)). На даній діаграмі суцільними показано лініями гілки руху положень рівноваги зі змінною одного параметру (зокрема,  $\alpha$ ) у проекції на одну змінну (зокрема,  $\varphi_1$ ). Точками зображено мінімальні значення граничних циклів. Жирними лініями та точками зображено стійкі граничні точки та граничні цикли, тонкими лініями і дрібними точками — нестійкі. Діаграма дає змогу отримати уяву про типи біфуркацій, побачити механізми появи нових особливих точок та граничних циклів, а також відслідковувати зміну стійкості при варіації параметру. З діаграми видно, що синфазний та антифазний стани не змінюють своє положення у просторі (принаймні для вказаної проекції), але одночасно змінюють свою стійкість у точках  $C$  та  $D$  і при цьому  $\alpha_C = \alpha_D$  (далі буде показано, що  $\alpha = \alpha_C$  — точка біфуркації Андронова–Хопфа,  $\alpha = \alpha_D$  — точка транскритичної біфуркації). Діаграма дає можливість отримати уяву про появу та зникнення граничних циклів унаслідок відповідно: біфуркації Андронова–Хопфа ( $\alpha = \alpha_C$ ), сідло–вузлової біфуркації циклів ( $\alpha = \alpha_F$ ) та гетероклінічної біфуркації ( $\alpha = \alpha_D$ ). Також діаграма показує виникнення двох положень рівноваги унаслідок вилкової біфуркації ( $\alpha = \alpha_A$ ) та появу та зни-

кнення пар положень рівноваги під час сідло–вузлових біфуркацій ( $\alpha = \alpha_B$ ,  $\alpha = \alpha_E$ ).

Повний опис біфуркаційної поведінки системи (3.43) дає дво–параметрична біфуркаційна діаграма, зображена на рис. 8.8. У центрі малюнку зображена параметрична  $(\alpha, r)$ –площина з нанесеною на неї усіма можливими біфуркаційними лініями. Біфуркаційна діаграма оточена фазовими портретами, що відповідають конкретним біфуркаційним областям на діаграмі (зі вказівками стрілочками у потрібну область). Певні біфуркаційні лінії на діаграмі рис. 8.8 було знайдено аналітично (нижче описання), інші знайдені за допомогою програми ХРРАУТ/AUTO [115, 121]. Використовуючи згадану діаграму, ми покажемо, яким чином різні локальні біфуркації є частинами глобальних гетероклінічних біфуркацій (призводять до появи гетероклінічних/гомоклінічних циклів) і для яких значень параметрів ці біфуркації виникають.

На малюнку наведено біфуркаційну діаграму лише для  $\alpha \in [0, \pi]$  та  $r \geq 0$ , оскільки інші випадки можуть бути описані за допомогою часово–оборотної симетрії  $(x, \alpha, r) \mapsto (-x, -\alpha, r)$  та симетрії  $(x, \alpha, r) \mapsto (x + \pi, \alpha + \pi, r)$ . Крива

$$BH = \left\{ (\alpha, r) : r = \frac{1}{2} \cos \alpha, \alpha \in \left[ 0, \frac{\pi}{2} \right] \right\}$$

є лінією транскритичної (у трьох напрямках) біфуркації у початку координат ( $S_3$ –транскритичної біфуркації) і *одночасно* вона є лінією оберненої суперкритичної біфуркації Андронова–Хопфа антифазного розв’язку. Транскритична біфуркація відбувається, коли зі збільшенням параметру  $\alpha$  три пов’язані  $S_3$ –симетрією сідлові точки (на інваріантних лініях  $\varphi_1 = 0$ ,  $\varphi_2 = 0$  та  $\varphi_1 = \varphi_2$ ) проходять через початок координат.

**$S_3$ –транскритична гомоклінічна біфуркація для  $r \in (0, r_E)$ .** Опишемо біфуркацію, проілюстровану на рис. 8.8 (Таблиці 8.1), фіксуючи різні значення параметра  $r$  та змінюючи параметр  $\alpha$  для цих  $r$ . Для  $r = 0$  (системи Курамото–Сакагучі) біфуркація відбувається при  $\alpha_0 = \pi/2$ . Біфуркаційні переходи (до→під час→після біфуркації) схематично проілюстровані на середній панелі рис. 8.2. Одночасно з *виродженою* біфуркацією Андроно-

ва–Хопфа антифазного стану (у центрі трикутника) відбувається локальна транскритична біфуркація синхронного розв’язку (у початку координат), яка породжує виникнення *гетероклінічного циклу* між різними зображеннями 0 на торі  $\mathbb{T}^2$ . Цей гетероклінічний цикл на площині  $\mathbb{R}^2$  розпадається на три симетричні *гомоклінічні цикли*, коли ми розглядаємо його на торі  $\mathbb{T}^2$ . Пояснимо останнє твердження детальніше. У випадку розгляду системи на площині  $\mathbb{R}^2$  інваріантна область  $\mathcal{C}_1$  обмежена трикутником, сформованим з ліній  $\varphi_1 = 0$ ,  $\varphi_2 = 0$ ,  $\varphi_1 = \varphi_2$  та трьох *різних* точок  $(0, 0)$ ,  $(0, 2\pi)$ ,  $(2\pi, 2\pi)$ . Гетероклінічний цикл у цьому випадку складається з траєкторій, що циклічно зв’язують три вказані точки. У випадку системи на торі  $\mathbb{T}^2$  точки  $(0, 0)$ ,  $(0, 2\pi)$ ,  $(2\pi, 2\pi)$  є образами однієї і тієї ж точки. Частина минулої гетероклінічної траєкторії, що з’єднувала точки  $(0, 0)$  та  $(0, 2\pi)$  в  $\mathbb{R}^2$  тепер у  $\mathbb{T}^2$  є *замкнутою гомоклінічною петлею*. Відмітимо також, що у момент біфуркації початок координат є виродженим сідлом з шести сідловими комітками.

Збільшення параметру  $r$  від нуля до  $r_E$  призводить до появи *невиродженої* біфуркації Андронова–Хопфа (веде до появи нестійкого граничного циклу) та  $\mathbf{S}_3$ –транскритичної гомоклінічної біфуркації, яка спричиняє появу стійкого граничного циклу. Обидві біфуркації відбуваються на біфуркаційній кривій  $BED$ .

Криві  $HA$  та  $AD$  на біфуркаційній діаграмі є лініями сідло–вузлових біфуркації на інваріантних многовидах (відповідних дво–кластерним режимам). Відбувається народження (зникнення) пари особливих точок на кожній з цих інваріантних ліній при збільшенні параметру  $\alpha$  та перетину лінії  $HA$  ( $AD$ , відповідно).

**Сідло–вузлова/гетероклінічна біфуркація при для  $r \in (r_E, r_D)$ .** Для  $r > r_E$  дві додаткові особливі точки лежать на кожній з інваріантних ліній після того, як параметр  $\alpha$  вже перетнув криву  $EH$  транскритичної біфуркації. Гетероклінічна біфуркація не з’явилась з транскритичною  $EH$ , але з’явилась пізніше (зі збільшенням параметру) з сідло–вузловою біфуркацією  $ED$ . Гетероклінічний цикл має вигляд шестикутника, що складається з трьох пар сідел та сідло–вузлів, що лежать на різних інваріантних прямих та інваріантних многовидах цих особливих точок (див. рис. 8.18).

При зміні параметрів  $(\alpha, r)$  від  $E$  до  $D$  вздовж біфуркаційної лінії  $ED$ , сідлова точка рухається від  $2\pi$  до  $5\pi/3$ , а сідло–вузлова точка буде рухатись від  $\pi/2$  до  $2\pi/3$  вздовж лінії  $\varphi_1 = 0$  (та симетрично на інших двох інваріантних лініях). Стійкий граничний цикл, породжений сідло–вузловою/гетероклінічною біфуркацією, має наближено гексагональну форму на відміну від такого ж циклу породженого  $S_3$ –транскритичною гетероклінічною біфуркацією, який має наближено трикутну форму (рис. 8.2). Точка  $E$  перетину  $S_3$ –транскритичної гетероклінічної та сідло–вузлової/гетероклінічної біфуркацій має координати

$$\alpha_E = \arctan(3) \approx 1.2490458, \quad r_E = \sqrt{10/20} \approx 0.15811388,$$

а фазовий портрет для цієї точки проілюстрований на рис. 8.10(b). Механізм сідло–вузлової гетероклінічної біфуркації буде описано детальніше далі у підрозділі 3.9. Відмітимо, що поява гетероклінічних циклів унаслідок симетричної сідло–вузлової та симетричної транскритичної біфуркацій є загальною властивістю системи (3.1) для довільних  $N \geq 3$ .

**Вилкова біфуркація для  $r \in (r_I, r_D)$ .** Для  $r > r_I = 1/6$  існує вилкова біфуркація на біфуркаційній лінії  $ED$ , що продовжується до біфуркаційної точки корозмірності–два, яка має координати

$$\alpha_D = 5\pi/6 - \arccos(\sqrt{21}/14) \approx 1.3806707, \quad r_D = 1/\sqrt{7} \approx 0.37796447.$$

Ця суперкритична вилкова біфуркація полягає у тому, що сідло, яке знаходиться на одній з інваріантних ліній біфуркує трансверсально до цієї лінії, породжуючи нову пару сідел близько до інваріантної лінії (таких біфуркацій відбувається одночасно три унаслідок симетрії). При  $\alpha = 0$  та при збільшенні параметру  $r$  і проходженні ним значення  $r_I$ , вказана біфуркація створює точку–джерело у середній точці на інваріантній лінії та пару сідлових точок, що рухаються у протилежних напрямках до різних антифазових розв’язків. Ці сідла досягають антифазних розв’язків у точці  $H$  біфуркації корозмірності–два. Сідло–вузлова біфуркація, що виникає на лінії  $FD$ , означає, що

джерело на інваріантній лінії замінюється сідлом. Це сідло зникає унаслідок сідло–вузлової біфуркації на інваріантній лінії при проходженні параметрів біфуркаційної лінії  $DL$ . Гетероклінічний цикл біфуркаційній лінії корозмірності–один  $ED$  генерує стійкий цикл при збільшенні параметру  $\alpha$ .

**Гетероклінічна біфуркація появи стійких граничних циклів при  $r \in (r_B, r_D)$ .** Як було показано, у випадку належності параметрів  $(\alpha, r)$  біфуркаційній кривій  $BE$ , виникає гетероклінічний цикл, що складається з трьох інваріантних ліній з симетрією  $\mathbf{S}_2 \times \mathbf{S}_1$ . Інший гетероклінічний гексагонального типу, який складається з трьох сідел та трьох сідло–вузлів, виникає, коли  $(\alpha, r)$  належать біфуркаційній кривій  $ED$ . Стійкий граничний цикл виникає при збільшенні параметру  $\alpha$  та перетині ним лінії  $BED$ . Таки чином, можна зробити висновок про співіснування великого стійкого та малого нестійкого граничних циклів. Обидва цикли зникають унаслідок сідло–вузлової біфуркації граничних циклів, коли точка  $(\alpha, r)$  перетинає лінію  $BD$ .

**$\mathbb{Z}_3$ –гетероклінічна біфуркація при  $r \in (r_C, r_H = 1/2)$ .** Третій тип симетричних гетероклінічних біфуркацій, що трапляється у системі, є  $\mathbb{Z}_3$ –гетероклінічна (або сідло–зв’язна/гетероклінічна) біфуркація на лініях  $CH$  та  $CD$ . Ця біфуркація виникає двічі при варіації параметру  $\alpha$ , коли  $r \in (r_C, r_D)$  та  $r \in (r_D, 1/2)$ . Біфуркація виникає, коли існує гетероклінічний зв’язок між парами трьох сідел відповідно до  $\mathbb{Z}_3$  симетрії, як показано на рис. 8.9. Зафіксувавши  $r_0 \in (r_C, 1/2)$ , та змінюючи  $\alpha$  від  $\alpha = \alpha_0 = \arccos(2r_0)$ , ми спостерігаємо три одночасні симетричні біфуркації сідлових з’єднань, коли нестійкий многовид  $W^u(S_i)$  одного сіда з’єднується зі стійким многовидом  $W^s(S_{i+1})$ . Як і у випадку класичної гомоклінічної біфуркації, поява гетероклінічного циклу призводить до зникнення стійкого граничного циклу у біфуркаційний момент (аналог результату теореми Андронова–Леонтович [22, 209, стор. 200] для гетероклінічних циклів). На рис. 8.9 на інваріантній області–трикутнику показано яким чином інваріантні многовиди (сепаратриси) трьох сідел ”проходять один крізь одного”, утворюючи глобальну біфуркацію. Зафіксувавши  $r_0 \in (r_C, 1/2)$  та змінюючи  $\alpha$  від  $\alpha = \alpha_0 = \arccos(2r_0)$ , бачимо яким чином три одночасних сідлових з’єднання утворюють гетероклінічний цикл (рис. 8.9(b)) та знищують *стійкий* граничний цикл (при

переході (a)→(b)→(c) на малюнку). При збільшенні параметру  $\alpha$  для  $r \in (r_C, r_D)$   $\mathbb{Z}_3$ -гетероклінічна біфуркація буде відбуватись у зворотньому порядку ((c)→(b)→(a) на малюнку), але з тою відмінністю, що цикл, який виник після біфуркації, буде *нестійким*.

Можна перевірити, що під час  $\mathbb{Z}_3$ -гетероклінічної біфуркації (на лінії  $HCD$  у параметричній площині) сепаратриси сідел ( $W^u(S_i)$ ) є прямими лініями, що задаються рівностями:

$$\varphi_2 = (\varphi_1 - \beta)/2, \quad \varphi_2 = 2\varphi_1 + \beta - 2\pi, \quad \varphi_2 = -\varphi_2 + \beta + 2\pi,$$

де  $\beta$  пробігає від 0 до  $2\pi/3$ , коли  $\alpha$  пробігає від 0 до  $\alpha_D$ . Координати сідел, таким чином, є  $(\beta + 4\pi/3, 2\pi/3)$ ,  $(4\pi/3, \beta + 2\pi/3)$ ,  $(-\beta + 2\pi/3, -\beta + 4\pi/3)$  та подібні для інших трьох сідел.

Відмітимо важливу особливість плоских гетероклінічних циклів, яка суттєво відрізняє їх від граничних циклів. Граничний цикл у  $\mathbb{R}^2$  розділяє площину на дві частини: внутрішню і зовнішню (теж для гомологічно тривіальних циклів у  $\mathbb{T}^2$ , але не для гомологічно нетривіальних). Граничний цикл вважається стійким, коли він є стійким як зі сторони своєї внутрішньої, так і зі сторони своєї зовнішньої області. На відміну від граничних циклів, гомоклінічні та гетероклінічні цикли на площині мають або лише внутрішню область без сепаратрис сідел (як у фазових портретах на рис. 3.5.3–8.10 чи на рис. 1.8.1(c) у [154]), або лише зовнішню таку область (як, наприклад, на рис. 1.8.1(b) у [154] чи рис. 9.18(c) у [209]), або сепаратриси містяться і у внутрішній, і у зовнішній областях площини по відношенню до циклу (як, наприклад, на рис. 9.19 у [209]). Очевидно, що наявність сепаратрис сідел з бідь-якої сторони гомо/гетероклінічного циклу робить неможливим його стійкість з цієї сторони (жодна з траєкторій не може притягнутись до циклу, буде натикатись на сепаратрису). Отже, гетероклінічні цикли на площині можуть бути або односторонньо стійкими або нестійкими. Відмітимо також, що з описаних вище міркувань гомо/гетероклінічний цикл не може бути як атрактором для усієї площини, так і репелером. Гомотопічно нетривіальні гомо/гетероклінічні цикли на торі  $\mathbb{T}^2$  також не можуть бути атракторами усього фазового про-



сторю з аналогічних міркувань (див. також [47, 49]). Незважаючи на неможливість для одного окремого гомоклінічного/гетероклінічного циклу бути атрактором всієї системи, атрактором може бути вся загальна складна мережа, що складається з кількох гетероклінічних циклів (як, зокрема, показано на рис. 8.2(нижня панель) для стійкої мережі з двох гетероклінічних циклів, кожен з яких є стійким лише односторонньо, та притягує половину фазового простору). Стійкість виниклих після біфуркації граничних циклів співпадає з односторонньою стійкістю відповідних граничних циклів у біфуркаційні моменти (див. рис. 8.8).

**З'єднання сідло–вузлової/гетероклінічної та вилкової біфуркацій у точці  $D$ .** Сім різних біфуркаційних ліній зустрічаються у точці біфуркації корозмірності–два. Фазовий портрет у момент цієї біфуркації зображено на рис. 8.10(а). Два типи гетероклінічних біфуркацій (сідло–вузлова та  $\mathbb{Z}_3$ –гетероклінічна) відбуваються одночасно у такий спосіб, що вони утворюють дво–вимірні області у фазовому просторі  $(\varphi_1, \varphi_2)$ , які повністю заповнені траєкторіями гетероклінічних циклів (сірі області на рис. 8.10(а)). Великий гексагональний гетероклінічний цикл (згенерований сідло–вузловою біфуркацією) має три спільні точки з малим трикутним гетероклінічним циклом (згенерований  $\mathbb{Z}_3$  гетероклінічними з'єднаннями). Така структура утворює три з'єднані трикутники, заповнені траєкторіями, які є частинами гетероклінічних циклів. З даної дво–вимірної множини можна вибрати *несиметричні* гетероклінічні цикли, обравши не  $\mathbb{Z}_3$ –симетричні три траєкторії з кожного трикутника.

**Біфуркації для  $r \in (r_D, r_H = 1/2)$ .** Криві  $DJ$ ,  $DK$  та  $DL$  є лініями вилкової, сідло–вузлової та іншої сідло–вузлової біфуркацій, відповідно. Розглянемо біфуркаційну область  $HCDJ$  для  $r > r_D$  та будемо збільшувати параметр  $\alpha$ . Є лише один стік та одне джерело на кожній інваріантній лінії, коли  $(\alpha, r) \in HCDJ$  та дві сідлові точки лежать за межами інваріантних ліній близько до точок перших двох типів (утворені за допомогою вилкової біфуркації, коли  $r < r_D$ ). Спочатку (коли  $\alpha$  перетинає лінію  $DJ$ ) відбувається вилкова біфуркація трансверсально до інваріантної лінії, що генерує два нових стоки та залишає сідло на інваріантній лінії. Потім відбувається

сідло–вузлова біфуркація цих стоків, коли  $\alpha$  перетинає лінію  $DK$ . Наступна сідло–вузлова біфуркація джерела та сідла на інваріантній лінії (коли  $\alpha$  перетинає  $DL$ ) утворює простий фазовий портрет з двома стоками у антифазних центрах, джерело у початку координат та три сідла на інваріантних лініях. Відмітимо, що сідло–вузлові точки останньої біфуркації є відштовхуючими до інваріантних ліній. З цієї причини вони не входять до жодного гетероклінічного циклу.

**Біфуркація корозмірності–два у точці  $E$ .** Як уже описувалось, внаслідок сідло–вузлової/гетероклінічної біфуркації на кривій  $AED$  утворюється *шестикутний* гетероклінічний цикл. Також внаслідок  $S_3$ –транскритичної гетероклінічної біфуркації на кривій  $BEG$  утворюється *трикутний* гетероклінічний цикл. При перетині вказаних двох кривих  $AED$  та  $BEG$  у точці  $E$  утворюється гетероклінічний цикл, який мусить мати спільний вигляд для двох біфуркацій. Таким циклом є трикутний гетероклінічний цикл, на кожній стороні якого лежить по додатковій сідло–вузловій точці (рис. 8.10). Тобто у цьому випадку три пари суміжних сторін гетероклінічного шестикутника вишиковуються у прями лінії, утворюючи гетероклінічний трикутник. Описаний гетероклінічний цикл є стійким при  $(\alpha, r) = (\alpha_E, r_E)$  та нестійким при  $(\alpha, r) = (\alpha_E, -r_E)$  або  $(\alpha, r) = (\alpha_E + \pi, r_E)$  внаслідок симетрій, описаних вище.

**Біфуркація корозмірності–два у точці  $H$ .** Точка  $H$  є точкою перетинів кількох біфуркаційних ліній (див. рис. 8.8), які відповідають біфуркаціям у трьох різних точках фазового простору, що відповідають синфазному режиму та двом антифазним режимам. При  $(\alpha, r) = (0, 1/2)$  відбуваються одночасно сідло–вузлова, транскритична, гомоклінічна біфуркації та біфуркація Андронова–Хопфа. Дана ситуація у певній мірі є ускладненням біфуркації Богданова–Такенса з більшою кількістю особливих точок ( $\mathbb{Z}_3$ –симетричний варіант). У момент біфуркації антифазні стани є виродженими сідлами з шести сідловими комірками (фазовий портрет зображено на рис. 8.10(c))

**Біфуркації при  $r > r_H = 1/2$ .** Подальші дослідження показують, що не існує ні граничних, ні гетероклінічних циклів у фазовому просторі системи при  $r > r_H = 1/2$ . При збільшенні параметру  $r$  фазовий портрет стає тополо-

гічно еквівалентним до ситуації, яка була у біфуркаційній області  $JDK$ , але з подвоєнням періодичності (стискання вдвічі чотири рази повторюваного фазового портрету:  $[0, 4\pi)^2 \rightarrow [0, 2\pi)^2$ ). Останнє пояснюється тим, що перша та друга гармоніки функції  $g(x) = -\sin(x - \alpha) + r \sin(2x)$  мають протилежні знаки (при  $r > 0$ ) і у певній мірі "гасять" одна іншу, а при достатньо великих  $r$  друга гармоніка стає "ведучою" і у більшій мірі визначає загальну динаміку системи.

### 3.6. Біфуркації у моделі чотирьох фазових осциляторів

У даному підрозділі ми детально опишемо біфуркаційну поведінку системи чотирьох зв'язаних фазових осциляторів. Спочатку будуть сформульовані деякі наслідки теорем підрозділу 3.3 відносно біфуркацій на інваріантних многовидах для довільних параметрів  $\beta$ , потім більш детально будуть описані глобальні біфуркації гетероклінічних циклів для  $\beta = 0$ .

#### 3.6.1. Біфуркації на кластерних многовидах при $\beta \neq 0$

Розглянемо систему чотирьох ідентичних глобально зв'язаних осциляторів (3.1) з дво-гармонічною функцією (3.3). Використовуючи Теоремам 3.3.1–3.3.3 та результати підрозділу 3.3.4 можна описати деякі інваріантні множини системи, що відповідають важливим режимам колективної динаміки, а також зробити висновки про їх стійкість та біфуркаційні властивості. Отже, система чотирьох осциляторів має певні особливості:

1. Система має три-вимірні інваріантні многовиди з координатами  $(\theta_a, \theta_a, \theta_b, \theta_c)$  (та будь-якими перестановками цих координат) з ізотропією  $\mathbf{S}_2 \times \mathbf{S}_1 \times \mathbf{S}_1$  та дво-вимірні інваріантні многовиди двох типів  $(\theta_a, \theta_a, \theta_a, \theta_b)$  та  $(\theta_a, \theta_a, \theta_b, \theta_b)$  (плюс перестановки) з ізотропіями  $\mathbf{S}_3 \times \mathbf{S}_1$  та  $\mathbf{S}_2 \times \mathbf{S}_2$ , відповідно. Відмітимо, що біфуркаційні властивості двох типів дво-вимірних інваріантних многовидів є принципово різними (як буде детально описано нижче).
2. Режим повної синхронізації  $\Theta_{sync}$  чотирьох осциляторів існує для всіх значень параметрів функції зв'язку (3.3). Даний режим є стійким при  $2r \cos \beta - \cos \alpha < 0$ . Поверхня  $r = \cos \alpha / (2 \cos \beta)$  є біфуркаційною у просторі параметрів  $(\alpha, \beta, r)$ . Одночасно відбуваються транскритичні біфуркації на многовидах з

ізотропією  $\mathbf{S}_3 \times \mathbf{S}_1$  та вилкові біфуркації на многовидах з ізотропією  $\mathbf{S}_2 \times \mathbf{S}_2$ .

**3.** Система має шість рівномірно розподілених режимів  $\Theta_{splay} = (\theta, \theta + \pi/2, \theta + \pi, \theta + 3\pi/2)$  (плюс усі перестановки координат) для будь-яких значень параметрів. Стійкість даного положення рівноваги визначається умовами Теорему 3.3.2. Згідно з результатами підрозділу 3.3.3  $\Theta_{splay} \in \mathcal{M}^{(4)}$ . Відмітимо, що на відміну від випадку  $N = 3$ , коли  $\Theta_{splay} = \mathcal{M}^{(3)}$ , для  $N \geq 4$  режим  $\Theta_{splay} \in$  лише одно-вимірною підмножиною  $(N - 2)$ -вимірного многовиду  $\mathcal{M}^{(N)}$ . Отже, варто вивчати стійкість  $\Theta_{splay}$  окремо всередині многовиду  $\mathcal{M}^{(4)}$  та у трансверсальних до нього напрямках. Біфуркації розв'язку  $\Theta_{splay}$  також будуть ділитись на внутрішні по відношенню до многовиду  $\mathcal{M}^{(4)}$  та зовнішні. Для  $N = 4$  режим  $\Theta_{splay}$  має один внутрішній напрямок стійкості, який визначається власним значенням

$$\lambda_{splay}^{(in)} = -2r \cos \beta.$$

Отже, біфуркація всередині інваріантного многовиду буде відбуватись, коли  $\beta = \pm\pi/2$  або коли система (3.1), (3.3) перетворюється на систему Курамото–Сакагучі. Можна безпосередньо переконатись, що точок з ізотропією  $\mathbf{S}_1 \times \mathbf{S}_1 \times_s \mathbb{Z}_2$  (обертального блоку  $(0, \pi, \theta, \theta + \pi)$ ) визначається диференціальним рівнянням вигляду:

$$\frac{d\theta}{dt} = 4r \cos \theta \sin(\theta - \beta). \quad (3.44)$$

Отже, така динаміка є виродженою у тому відношенні, що вона повністю не залежить від параметру  $\alpha$ . Відмітимо, що біфуркації обертальних блоків стають невиродженими лише тоді коли функція зв'язку має четверту гармоніку (лише тоді виникають нетривіальні розв'язки зі згаданою вище симетрією).

**4.** Система має інваріантний многовид  $\mathcal{M}^{(4)}$ , який складається з розв'язків типу  $(\theta_a, \theta_a + \pi, \theta_b, \theta_b + \pi)$  (та інших, отриманих при перестановках координат). Даний многовид є дво-вимірним. У чотори-вимірному фазовому просторі  $\mathbb{T}^4$  кожна точка многовиду  $\mathcal{M}^{(4)}$  має два трансверсальні до нього напрямки: один внутрішній і один обертальний (наприклад,  $\theta$ ), що виникає згідно симетрії фазового зсуву. Динаміка у внутрішньому напрямку кожної точки  $\mathcal{M}^{(4)}$  опи-

сується рівнянням (3.44). У трансверсальному напрямку стійкість кожного обертового блоку описується власними значеннями:

$$\lambda_{1,2}^{(1)}(\Theta_{splay}) = -\frac{1}{2} \cos \alpha \pm i \frac{1}{2} \sin \alpha.$$

Останнє означає, при  $\cos \alpha = 0$  (або  $\alpha = \pm\pi/2$ ) відбувається біфуркація Андронова–Хопфа. Дана біфуркація може бути регулярною або виродженою в залежності від виконання додаткових умов трансверсальності та виродженості для конкретних параметрів. Відмітимо, що умови біфуркації  $\alpha = \pm\pi/2$  є залежними лише від одного параметру і незалежними від інших двох.

**5.** Як зазначалось (у пункті 1), система має дво-вимірні інваріантні многовиди двох типів. На кожному з многовидів при додаткових параметричних умовах існують одно-вимірні дво-кластерні розв'язки. Іншими словами, для  $N = 4$  існують многовиди вигляду (3.23) з  $p = 1$  та  $p = 2$ . Поклавши  $P = 1/4$ ,  $q = -1$ , рівняння (3.28) для випадку  $p = 1$  може бути виражене, як кубічне для  $\xi = \tan(\varphi/2)$  у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} & -\sin \alpha \xi^3 - 2(2r \cos \beta + \cos \alpha) \xi^2 \\ & + (4r \sin \beta - \sin \alpha) \xi + 4r \cos \beta - 2 \cos \alpha = 0. \end{aligned}$$

Біфуркація дво-кластерного стану з ізотропією  $\mathbf{S}_3 \times \mathbf{S}_1$  відбувається тоді, коли дискримінант останнього рівняння є рівним нулеві.

Для кластерів з ізотропією  $\mathbf{S}_2 \times \mathbf{S}_2$  ми можемо покласти  $p = 2$  та  $q = -1$  у рівнянні (3.28), що приведе його до квадратного рівняння:

$$-(2r \sin \beta + \sin \alpha) \tau^2 + 2r \cos \beta - 2 \cos \alpha = 0.$$

Останнє рівняння має дискримінант:

$$4(4r^2 \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha) = 0.$$

Отже, біфуркаційні криві описуються виразом:

$$r = \pm \frac{\cos \alpha}{2 \cos \beta}.$$

Використовуючи описані вище аналітичні представлення біфуркаційних кривих та використовуючи програму для продовження біфуркаційних кривих вздовж параметрів ХРРАУТ/AUTO [115, 121], на рис. 4 у роботі [30, Ashwin, Bichk, Burylko] представлено чотири біфуркаційні діаграми у  $(\alpha, r)$  біфуркаційній площині для фіксованих  $\beta = 0$ ,  $\beta = \pi/4$ ,  $\beta = \pi/2$  та  $\beta = 3\pi/4$ . Більш детальний біфуркаційний аналіз системи при  $\beta = 0$  буде представлено у наступному підрозділі.

### 3.6.2. Система Гансела–Мато–Моньє чотирьох осциляторів

**Структура фазового простору.** У даному ми досліджуємо чотири-вимірну модель Гансела–Мато–Моньє, тобто систему (3.1), (3.42) для  $N = 4$ . Для зручності досліджень далі будемо розглядати відповідну систему у фазових різницях (3.33), яка є три-вимірною:  $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in \mathbb{T}^3$ . Для даної системи площини  $\varphi_i = 0$  та  $\varphi_i = \varphi_j$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ , які відповідають кластерам з ізотропією  $\mathbf{S}_2 \times \mathbf{S}_1 \times \mathbf{S}_1$ , є інваріантними. Лінії  $\varphi_i = 0$ ,  $\varphi_j$ ,  $i, j = 0$ , та  $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3$ , що відповідають кластерам з ізотропією  $\mathbf{S}_3 \times \mathbf{S}_1$ , є інваріантними. Є інваріантними і інші лінії  $\varphi_i = \varphi_j$ ,  $i \neq j$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Лінії  $\varphi_i = \varphi_j$ ,  $\varphi_i = \varphi_j$ ,  $\varphi_k = 0$ ,  $i \neq j \neq k$ ,  $k = 1, 2, 3$ , є діагоналями куба і відповідають дво-кластерним станам з ізотропією  $\mathbf{S}_2 \times \mathbf{S}_2$ .

Фазовий тороїдальний простір  $\mathbb{T}^3$  нашої системи можна уявити як три-вимірний куб  $[0, 2\pi]^3$ . Щойно описані інваріантні площини розділяють даний куб на шість інваріантних областей, які мають однаковий об'єм і є симетричними тетраедрами (кожна область примикає до головної діагоналі куба). Кожен тетраедр відповідає інваріантній області у фазовому просторі  $\mathbb{T}^4$  вихідної системи (3.1), яка описується множиною

$$\{(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4) : \theta_{\sigma(1)} \leq \theta_{\sigma(2)} \leq \theta_{\sigma(3)} \leq \theta_{\sigma(4)} \leq \theta_{\sigma(1)} + 2\pi\}$$

для деякої перестановки  $\sigma \in \mathbf{S}_4$ . У частковому випадку, коли  $\sigma$  є іденти-

чною перестановкою, ця інваріантна множина є *канонічною інваріантною областю* [43]. Кожен тетраедр, що обмежує інваріантну область, має чотири грані з ізо트로пією  $\mathbf{S}_2$ , чотири ребра з ізо트로пією  $\mathbf{S}_3 \times \mathbf{S}_1$  та два ребра з ізо트로пією  $\mathbf{S}_2 \times \mathbf{S}_2$ . Многовид антифазних розв'язків  $\mathcal{M}^{(4)}$  складається з шести прямих ліній (шість ліній всередині кубу, які попарно з'єднуються у три прямі лінії на торі  $\mathbb{T}^3$ ), що з'єднують центри граней кубу. Кожна з цих ліній належить до одного з тетраедрів та має  $\mathbb{Z}_2$ -ізо트로пію. Центр многовиду  $\mathcal{M}^{(4)}$  відповідає режиму рівномірно розподілених фаз  $\Theta_{splay}$  та має ізо트로пію  $\mathbb{Z}_4$ . Точка перетину ліній з ізо트로піями  $\mathbf{S}_2 \times \mathbf{S}_2$  та  $\mathbb{Z}_2$  має ізо트로пію  $(\mathbf{S}_2)^2 \times_s \mathbb{Z}_2$ , де  $\times_s$  означає напівпрямий добуток. Отже, фазовий простір (тор) системи у фазових різницях розділяється на шість симетричних тетраедрів, які мають вигляд, показаний на рис. 8.11.

Уявимо, що чотири точки куба  $(0, 0, 0)$ ,  $(2\pi, 0, 0)$ ,  $(2\pi, 2\pi, 0)$ ,  $(2\pi, 2\pi, 2\pi)$  з'єднані послідовно у замкнену криву  $\gamma_1$  та ця крива має напрямок. У такий же спосіб можна означити подібні криві  $\gamma_i$ ,  $i = 2, \dots, 6$  для інших тетраедрів. З цієї точки зору можна розглядати динаміку всередині лише одного з тетраедрів, оскільки динаміка у всіх інших тетраедрах буде описуватись згідно симетрії.

На рис. 8.11.(b) окреслено одну з шести інваріантних областей, обмежену тетраедром. Більш детально окремий інваріантний тетраедр зображено на рис. 8.11.(a). На цьому малюнку вказано ізо트로пію кожної лінії (не враховуючи симетричних повторів). Для лінії та точки кожного з різних типів симетрії зображено розподіл чотирьох осциляторів на фазовому колі. У разі періодичної орбіти у інваріантній області, вона мусить або охоплювати многовид  $\mathcal{M}^{(4)}$  (лінію ізо트로пії  $\mathbb{Z}_2$ ), або мати ще три своїх копії згідно симетрії  $\mathbb{Z}_4$ . З малюнку 8.11.(a) видно, яким чином можуть перебудовуватись кластери осциляторів, коли траєкторія проходить близько до інваріантних ліній. Граничний  $\mathbb{Z}_4$ -симетричний цикл, зображений на 8.11.(b), проходить близько до чотирьох ліній з ізо트로піями  $\mathbf{S}_3 \times \mathbf{S}_1$ , що означає перебудову чотири рази осциляторних кластерів:  $(\theta_a, \theta_a, \theta_a, \theta_b) \rightarrow (\theta_a, \theta_a, \theta_b, \theta_a) \rightarrow (\theta_a, \theta_b, \theta_a, \theta_a) \rightarrow (\theta_b, \theta_a, \theta_a, \theta_a) \rightarrow (\theta_a, \theta_a, \theta_a, \theta_b)$  під час руху фазової точки.

**Біфуркаційна структура для  $N = 4$ .** Структура біфуркаційних ліній

для системи (3.3.5) чотирьох осциляторів показана у загальному на рис. 8.12. Лінії біфуркацій корозмірності–один на цьому малюнку описані у Таблиці 8.2. Спочатку розглянемо ситуацію при  $r = 0$ , тобто систему Курамото–Сакагучі (описану у підрозділі 2.3). Для  $\alpha = 0$  система має один атрактор у початку координат та один репелер, що є многовидом нерухомих точок  $\mathcal{M}^{(4)}$ . Також у цьому випадку система має сідла з координатами  $0$  та  $\pi$ . При  $\alpha = \pi/2$  відбувається транскритична біфуркація у початку координат та одночасно з нею відбувається біфуркація Андронова–Хопфа у кожній точці многовиду  $\mathcal{M}^{(4)}$ . У момент біфуркації кожен тетраедр заповнений замкнутими траєкторіями (дво–параметричною сім’єю), а всі інваріантні площини заповнені гетероклінічними циклами (одно–параметричною сім’єю). Кожне з’єднання

$$\gamma(\varphi) = W^u(P_1(\varphi)) \cap W^s(P_2(2\pi - \varphi))$$

зв’язує два вироджених сідла  $P_1(\varphi)$ ,  $P_2(2\pi - \varphi)$ ,  $\varphi \in [0, \pi]$ , де  $\varphi$  є параметром цієї лінії (ми маємо три пари точок  $P_1$ ,  $P_2$ , оскільки є три лінії з ізотропією  $\mathbf{S}_2 \times \mathbf{S}_2$  у просторі  $\mathbb{T}^3$ ). Утворюється *неперервні множини гетероклінічних циклів*, оскільки вся інваріантна  $\mathbf{S}_2 \times \mathbf{S}_2$ –лінія заповнена сідловими точками (рис. 8.13(a)). Кожен з шести інваріантних многовидів цілком заповнений дво–параметричною множиною нейтральних  $\mathbb{Z}_4$ –симетричних періодичних орбіт, що обертаються навколо многовиду  $\mathcal{M}^{(4)}$  (одна з таких орбіт зображена на рис. 8.11(b)). Початок координат та многовид  $\mathcal{M}^{(4)}$  змінять свої стійкості на протилежні у момент згаданої біфуркації, а гетероклінічні цикли зникнуть, за винятком випадку  $\alpha = \pi/2$ . З умов симетрії функції зв’язку (3.42) випливає, що точка  $\alpha = -\pi/2$  також є біфуркаційною того ж типу що  $\alpha = \pi/2$ . Відмітимо, що Курамото–Сакагучі є спільною частиною (перетином) моделі Гансела–Мато–Моньє та моделі з нелінійним фазовим зсувом. Динаміку цієї моделі також описано у Теоремі 2.3.1 у розділі 2.

Біфуркаційна структура системи чотирьох осциляторів дуже ускладнюється при появі другої гармоніки у функції зв’язку, тобто при  $r \neq 0$  у (3.3). Наведені у підрозділі 3.6.1 дозволяють побудувати частину біфуркаційних кривих (рис. 8.12) локальних біфуркацій на інваріантних многовидах у осо-



блких точках ( $\Phi_{sync}$ ,  $\Phi_{splay}$ , точках многовиду  $\mathcal{M}^{(4)}$ , точках многовидів з симетріями  $\mathbf{S}_3 \times \mathbf{S}_1$  та  $\mathbf{S}_2 \times \mathbf{S}_2$ ). Деякі з цих *локальних* біфуркацій є частинами конструкцій *глобальних* біфуркацій, зокрема, біфуркацій появи гетероклінічних та граничних циклів. Окрім згаданих біфуркацій на многовидах, система має ряд біфуркацій всередині інваріантних областей, які також не попадають на  $\mathcal{M}^{(N)}$ . Деякі біфуркаційні лінії лежать дуже близько одна до одної таким чином, що їх дуже важко зобразити на загальній біфуркаційній діаграмі (у описанні біфуркаційної діаграми у Таблиці 8.2 дані криві позначаються буквами зі штрихами). Як буде показано далі, при невеликій зміні параметру можливий ланцюжок кількох біфуркацій. При подальшому дослідженні системи з другою гармонікою, особливу увагу ми будемо звертати на структуру, стійкість та біфуркації появи *гетероклінічних циклів*, які відповідають різним *режимам повільного перемикання* між осциляторними кластерами.

### 3.6.3. Структура гетероклінічних циклів

На рис. 8.12 показано, що на біфуркаційній площині є дві криві  $\alpha_1(r) < \alpha_2(r)$  для  $r \in (0, 1/2)$  такі, що гетероклінічні цикли існують для всіх значень  $\alpha \in (\alpha_1(r), \alpha_2(r))$  системи. Незважаючи на велику різноманітність типів біфуркацій, що їх утворюють, всі гетероклінічні цикли мають спільні властивості:

1. Всі гетероклінічні цикли складаються з об'єднання двох кривих  $\Gamma_1$  та  $\Gamma_2$ , що є підмножинами двох різних  $\mathbf{S}_2$  інваріантних площин, які з'єднані між собою  $\mathbf{S}_2 \times \mathbf{S}_2$  інваріантною лінією. Кожна з цих двох кривих  $\Gamma_1$  та  $\Gamma_2$  складається з декількох частин:

$$\Gamma_i = \bigcup_{j=1}^m \Gamma_{ij}, \quad i = 1, 2, j = 1, \dots, m,$$

де  $m$  може змінюватись від 1 до 5 в залежності від типу гетероклінічного циклу.

2.  $\Gamma_1$  та  $\Gamma_2$  з'єднують два сідла таким чином, що  $W^u(P_1) = \Gamma_{11}$ ,  $W^s(P_2) = \Gamma_{1N}$ ,  $W^u(P_2) = \Gamma_{21}$ ,  $W^s(P_1) = \Gamma_{2N}$ . а інші дві частини стійкого многовиду

кожного сідла належать інваріантній  $\mathbf{S}_2 \times \mathbf{S}_2$  лінії.

Для будь-якого фіксованого значення параметра  $r \in (0, 1/2)$  та зростаючого параметра  $\alpha$  сідла  $P_1$  та  $P_2$  виникають внаслідок *субкритичної вилкової біфуркації*, що відбувається у початку координат, коли  $\alpha_- = \arccos(2r_0)$ , та зникають внаслідок *субкритичної вилкової біфуркації* у середині  $\mathbf{S}_2 \times \mathbf{S}_2$  інваріантної лінії (у точці з симетрією  $(\mathbf{S}_2)^2 \times_s \mathbb{Z}_2$ ), коли  $\alpha_+ = \pi - \arccos(2r_0)$ . Лінії двох описаних вилкових біфуркацій позначено відповідно  $BH$  та  $BQ$  у  $(\alpha, r)$ -площині на біфуркаційній діаграмі (рис. 8.12). Сідла  $P_1$  та  $P_2$  на інваріантній  $\mathbf{S}_2 \times \mathbf{S}_2$  лінії мають координати та  $\varphi(P_2) = 2\pi - \arccos\left(\frac{\cos \alpha}{2r}\right)$ . Система (3.33), (3.42) має ті ж самі власні значення для точок  $P_1$  та  $P_2$  (внаслідок симетрії), які описуються виразами:

$$\lambda_1(\alpha, r) = -\frac{2}{r} (4r^2 - \cos^2 \alpha),$$

$$\lambda_{2,3}(\alpha, r) = -\frac{1}{r} \left( \cos \alpha (2r - \cos \alpha) \mp \sin \alpha \sqrt{4r^2 - \cos^2 \alpha} \right).$$

Зазначимо, що існування сідлових точок  $P_1$  та  $P_2$  є необхідною, але не достатньою умовою для існування гетероклінічних циклів, тобто  $(\alpha_1, \alpha_2) \subset (\alpha_-, \alpha_+)$ . Для зазначеного вище є дві причини. Першою причиною є те, що інваріантні многовиди сідел  $P_i$ ,  $i = 1, 2$ , змінюють стійкість таким чином, що  $\dim W^u(P_i) = 1$ ,  $\dim W^s(P_i) = 2$  до біфуркації при  $\alpha = \alpha_2$  та  $\dim W^u(P_i) = 2$ ,  $\dim W^s(P_i) = 1$  після біфуркації. Другою причиною є те, що ланцюг інваріантних многовидів  $\Gamma_{ij}$ ,  $j = 1, \dots, m$  (частини гетероклінічного циклу, що належать до інваріантних площин) може бути розірваним на  $\mathbf{S}_3 \times \mathbf{S}_1$  інваріантних лініях або близько до них за допомогою біфуркацій різноманітних типів.

#### 3.6.4. Біфуркації появи гетероклінічних циклів

**Транскритично–Вилкова/гетероклінічна біфуркація.** Перша гетероклінічна біфуркація з'являється при  $r_0 \in (0, \sqrt{5}/10)$  та є  $\mathbf{S}_4$ -біфуркацією *транскритично–вилкового* типу. Опишемо цю глобальну біфуркацію детальніше по частинах. Одночасно у початку координат відбуваються сім локаль-

них біфуркацій двох типів: транскритичні біфуркації на чотирьох інваріантних лініях з  $\mathbf{S}_3 \times \mathbf{S}_1$  ізотропією та вилкові біфуркації на трьох інваріантних лініях з  $\mathbf{S}_2 \times \mathbf{S}_2$  ізотропією. Ці біфуркації двох типів відбуваються при  $\alpha = \alpha_- = \arccos(2r_0)$ , тобто на лінії  $BH$  у дво-параметричній площині (та ж сама лінія  $BH$  була для транскритичної біфуркації для  $N = 3$ ). Транскритична біфуркація змінює стійкість початку координат на протилежну. Вилкова біфуркація генерує пару точок  $P_1, P_2$ , згаданих вище. У момент біфуркації початок координат є виродженим сідлом. Описані вище глобальні біфуркації разом утворюють глобальну біфуркацію утворення гетероклінічного циклу. Згідно симетриям системи одночасно утворюється шість гетероклінічних циклів  $\gamma_i, i = 1, \dots, 6$ , у кожній з канонічних інваріантних областей  $C_i$ . Кожен з утворених гетероклінічних циклів складається з чотирьох траєкторій, що належать інваріантним  $\mathbf{S}_3 \times \mathbf{S}_1$  (рис. 3.11(b)).

З іншого боку, у момент біфуркації з'являються чотири гомоклінічні орбіти на торі  $\mathbb{T}^3$ , що виходять з початку координат і в нього ж повертаються. В термінах  $\Gamma$  ми маємо  $\Gamma_i = \Gamma_{i1} \cup \Gamma_{i2}, i = 1, 2$ , де всі  $\Gamma_{ij}$  є інваріантними  $\mathbf{S}_3 \times \mathbf{S}_1$  лініями. При збільшенні  $\alpha > \alpha_-$  сідла  $P_1$  та  $P_2$  рухаються вздовж інваріантної  $\mathbf{S}_3 \times \mathbf{S}_1$  лінії та притягують за собою  $\Gamma_i$  в середину тетраедра. Після біфуркації  $\Gamma_i$  залишає початок координат з двома сідлами у  $\mathbf{S}_2 \times \mathbf{S}_2$  напрямку та втрачає цю особливу точку у ортогональному напрямку. Таким чином після біфуркації крива  $\Gamma_i$  складається лише з однієї частини, а кожен гетероклінічний цикл складається з двох кривих  $\Gamma_1, \Gamma_2$ , з'єднаних  $P_1, P_2$  (див. рис. 8.13(b)). Отже, утворюються по два гетероклінічні цикли у кожному інваріантному регіоні  $C_i$ , а кожна крива  $\Gamma_i$  є одночасною складовою двох різних (сусідніх) гетероклінічних циклів (як крива  $\Gamma_2$  на рис. 8.13(b)), що належать різним інваріантним регіонам.

**Трансверсальна вилкова біфуркація.** Ми описали появу гетероклінічних циклів першого типу біфуркацій, що виникали при  $r \leq \sqrt{5}/10$  та коли  $\alpha_1$  належить лінії  $BH$ . Для інших значень параметра  $r$  та збільшення параметра  $\alpha$  виникають інші типи біфуркацій, що генерують появу гетероклінічних циклів. Незалежно від типу біфуркації, гетероклінічні цикли появляються, існують на інтервалі  $\alpha \in (\alpha_1, \alpha_2)$  та зникають подібним чином для всіх зна-

чень параметру  $r \in (0, 1/2)$ . У найбільш загальному випадку, перед зникненням гетероклінічний цикл складається з двох кривих  $\Gamma_{11}, \Gamma_{12}$ , що з'єднані точками  $P_1, P_2$  (рис. 8.13(b)). Сідла  $P_1$  та  $P_2$  зникають у наслідок *вилкової біфуркації* на лінії

$$BQ = \left\{ (\alpha, r) : r = -\frac{1}{2} \cos \alpha, \alpha \in (\pi/2, \pi) \right\},$$

коли  $\alpha = \alpha_+$ , але *гетероклінічні цикли* зникають раніше з іншою вилковою біфуркацією на лінії

$$BV = \left\{ (\alpha, r) : r = \frac{\cos \alpha}{2 \cos(2\alpha)}, \alpha \in (\pi/2, \pi/3) \right\},$$

коли  $\alpha = \alpha_2$ . Ця остання *суперкритична вилкова біфуркація* відбувається у трансверсальному напрямку до  $\mathbf{S}_2 \times \mathbf{S}_2$  інваріантної лінії у точках  $P_1$  та  $P_2$ . Два нових сідла виникають на інваріантній площині де лежить крива  $\Gamma_1 = W^u(P_1)$ , а два інших сідла виникають у іншій інваріантній площині де лежить  $\Gamma_2 = W^u(P_2)$ . Власні значення  $\lambda_2(\alpha, r)$  точок  $P_1, P_2$  змінюють свої знаки з негативних на позитивні на кривій  $BV$ . Ці точки стають нестійкими у двох трансверсальних до інваріантної лінії напрямках, внаслідок чого інваріантні цикли перериваються (поява нових особливих точок на замкнутій однонаправленій орбіті гетероклінічного циклу призводить до зміни фазових напрямків деяких його частин і, отже, до руйнування самого гетероклінічного циклу). Це ще один шлях до появи гетероклінічних циклів. Відмітимо, що  $BQ$  та  $BV$  є біфуркаційними лініями коли  $\alpha \in (\pi/2, \pi)$  та  $r \in (0, 1/2)$ . Отже, гетероклінічні цикли існують принаймні для всіх  $\alpha \in (\pi/2, \alpha_2)$  та зникають (виникають) підчас *вилкової/гетероклінічної біфуркації* на біфуркаційній лінії  $BV$ . У наступному підрозділі ми більш детально опишемо вплив біфуркаційних переходів на зміну стійкості різноманітних режимів на появу мультистабільності у системі.

У даному підрозділі ми описали лише дві з можливих біфуркацій появи гетероклінічних циклів. Важливою відмінністю (крім іншого) у цих двох біфуркаціях є те, що у першому випадку локальна частина біфуркації у точці

відбувалася вздовж інваріантного многовиду, а у другому випадку ця біфуркація відбувалася у трансверсальному напрямку. Очевидно, що дослідження біфуркацій першого типу є більш простим, оскільки локально задача може звестись до знаходження біфуркацій на інваріантних многовидах меншої розмірності і, крім того, такі біфуркації простіше знаходити чисельними методами. Дві описані біфуркації не вичерпують можливості появи гетероклінічних циклів. Далі ми покажемо більш складні біфуркаційні сценарії появи цих циклів, дослідження яких вимагає вивчення динаміки за межами одно-вимірних інваріантних многовидів, що є ребрами канонічної інваріантної області. Деякі з біфуркацій не руйнують структуру гетероклінічних циклів, а лише змінюють їх стійкість.

### 3.6.5. Зміна стійкості розв'язків у моменти біфуркацій

Власні значення  $\lambda_1(\alpha, r)$  сідел  $P_1, P_2$  уздовж  $\mathbf{S}_2 \times \mathbf{S}_2$  напрямку є негативними для будь-яких значень параметрів у параметричній області  $BQH$  (див. рис. 8.12), тобто коли  $\alpha \in (\alpha_-, \alpha_+)$  та  $r \in (0, 1/2)$ . Тому ці сідла притягуються уздовж  $\mathbf{S}_2 \times \mathbf{S}_2$  інваріантних ліній. Сума інших пар власних значень  $\sigma(\alpha, r) = \lambda_2(\alpha, r) + \lambda_3(\alpha, r)$  є негативною для  $\alpha \in (\alpha_-, \pi/2)$  та вона є позитивною для  $\alpha \in (\pi/2, \alpha_+)$ . Ці результати ми будемо використовувати в подальшому для дослідження стійкості різних типів розв'язків. Відмітимо, що на відміну від граничних циклів, гетероклінічні цикли частіше бувають напівстійкими, оскільки містять сідлові точки. Однак глобальна гетероклінічна мережа може бути єдиним атрактором усієї системи, як буде показано далі.

**Вилкова біфуркація гетероклінічного та граничних циклів.** Зі сказаного вище ми можемо зробити висновок що гетероклінічний цикл  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$  є притягуючим, коли він існує та  $\alpha < \pi/2$ , та він є відштовхуючим при  $\alpha > \pi/2$ . Пряма лінія

$$BM = \{(\alpha, r) : \alpha = \pi/2\}$$

є лінією зміни стійкості (резонансу) гетероклінічних циклів, яка для ці-

її системи збігається з лінією біфуркацій Андронова–Хопфа антифазних  $\mathbb{Z}_4$ -симетричних розв'язків. *Субкритична біфуркація гетероклінічних циклів* виникає трансверсально до інваріантної  $\mathbf{S}_2$  площини при перетині параметром  $\alpha$  лінії  $BM$ . При зменшенні параметру  $\alpha$  та перетині ним лінії  $BM$  внаслідок вказаної біфуркації *нестійкий гетероклінічний цикл стає стійким* та одночасно народжуються два симетричних *сідлових граничних цикли*. Два нові сідлові граничні цикли утворюються у двох різних інваріантних областях  $C_i$  і кожен з них наслідує форму гетероклінічного циклу, з якого він появився. Дану біфуркацію будемо називати *вилковою біфуркацією гетероклінічного та граничних циклів (PFC)*, оскільки вона наслідує певні властивості вилкової біфуркації точок. Ми описали суперкритичний тип такої біфуркації. Очевидно, що аналогічно відбувається субкритична біфуркація того типу. Близькі один до одного гетероклінічний та граничний цикл схематично зображені на рис. 3.11(b) при  $\alpha$  не набагато меншому за  $\pi/2$ .

**Стійкість розв'язків всередині канонічного інваріантного регіону.** Розглянемо антисинхронну множину  $\mathcal{M}^{(4)}$  всередині інваріантного тетраедра (лінія з  $\mathbb{Z}_2$  симетрією на рис. 3.11(a)). Центр  $\mathcal{M}^{(4)}$  (тобто точка рівнорозподілених фаз  $\Phi_{splay}$  з симетрією  $\mathbb{Z}_4$ ) є атрактором вздовж цього многовиду для будь-яких  $\alpha, r$  з регіону, що розглядається на біфуркаційній діаграмі. Точка  $\Phi_{splay}$  є *сідло-фокусом* для  $\alpha \in [0, \pi/2)$  та вона є *стоком* для  $\alpha \in (\pi/2, \pi)$ . Центр інваріантного многовиду  $\mathcal{M}^{(4)}$  змінює свою стійкість у результаті *суперкритичної біфуркації Андронова–Хопфа* на лінії  $BM$ .

Отже, при  $\alpha$  трохи меншому за  $\pi/2$  система має два симетричні *гетероклінічні цикли* на гранях тетраедра, *стійкий граничний цикл* всередині тетраедра, та два *сідлових граничних цикли*. Відмітимо, що дво-вимірні інваріантні многовиди згаданих сідлових гетероклінічних циклів розділяють кожен тетраедр на три басейни притягання (гетероклінічних циклів та граничного циклу). При подальшому зменшенні параметру  $\alpha$  та проходженні ним через криву  $BTR$  (див. рис. 8.12) відбувається *субкритична вилкова біфуркація стійкого граничного циклу та двох сідлових граничних циклів*. Для ще менших значень  $\alpha$  (після біфуркації) сідлових граничний цикл є єдиним граничним циклом всередині (кожного з шести) інваріантного тетраедра. У

випадку  $r \in [0, \sqrt{5}/10]$  цей сідловий граничний цикл виникає разом з гетероклінічними циклами у *транскритичній–вузловій біфуркації циклів* при проходженні параметру  $\alpha$  через лінію  $BH$ . Під час цієї біфуркації притягуючий гетероклінічний цикл, що складається з чотирьох частин, розпадається на два стійких гетероклінічних цикли, які складаються з двох частин, і при цьому між двома стійкими гетероклінічними циклами з'являється сідловий граничний цикл. Це є другий варіант змішаної вилкової біфуркації гетероклінічних та граничних циклів. Відмітимо, що у даному випадку сідлові граничні цикли співіснують зі стійкими граничними циклами, які є єдиними атракторами системи. Як і у випадку  $N = 3$ , лінія транскритичної гомоклінічної біфуркації синхронного розв'язку з'єднується з лінією сідло–вузлової біфуркації (лінії  $HGEB$  та  $HAED$  на рис. 8.12). Вони перетинаються у точці корозмірності–два  $E$ , де  $(\alpha_E, r_E) = (\arctan(3), \sqrt{5}/10)$ .

**Дво–вимірні множини гетероклінічних циклів.** У випадку  $N = 4$  сідло–вузлова біфуркація появи двох точок на інваріантній лінії відбувається при перетині параметрами кривої  $HA$  у  $(\alpha, r)$ –площини. Ця локальна біфуркація відбувається на чотирьох інваріантних  $\mathbf{S}_3 \times \mathbf{S}_1$  лініях одночасно і розбиває глобальний гетероклінічний цикл, що складається з траєкторій цих ліній, з'єднаних послідовно. Для  $r > r_E$  описаний сценарій є неможливим, оскільки нестійкий многовид  $W^u(P_1)$  прямує до точки стоку. *Сідло–зв'язна біфуркація*, яка відбувається на інваріантних  $\mathbf{S}_3 \times \mathbf{S}_1$  лініях та у інваріантних площинах, близько до інваріантних ліній, є також причиною появи гетероклінічних циклів. Найпростіший сценарій цієї біфуркації відбувається для  $r \in (r_E, r_D)$  та схема відповідного гетероклінічного циклу зображена на рис. 8.14(a). У цьому випадку кожна крива  $\Gamma_i$ ,  $i = 1, 2$ , складається з п'яти частин. Розглядаючи тетраедр в цілому, можна бачити, що два гетероклінічні цикли у тетраедрі мають чотири спільні частини  $(R_{11}R_{12}, R_{13}R_{14}, R_{21}R_{22}, R_{23}R_{24}, )$ . Можна показати, що існують чотири квазі–трикутні дво–вимірні області (як  $R_{24}P_1R_{11}$ , зокрема), які заповнені траєкторіями, що рухаються у одному напрямку. Отже, як зображено на рис. 8.14(b), система має дво–вимірну множину гетероклінічних циклів. Кожен такий гетероклінічний цикл є об'єднанням чотирьох трикутних дво–вимірних множин траєкторій, що з'єднуються окре-

ними траєкторіями–лініями. Один, з гетероклінічних циклів описаної множини має 12 частин:  $P_1R_{11}R_{12}P'_1R_{13}R_{14}P_2R_{21}R_{22}P'_2R_{23}R_{24}$ . Менші гетероклінічні цикли складаються від 8 до 11 траєкторій, які з'єднані сідловими та сідло–вузловими точками. Зі збільшенням параметру  $\alpha$  описаний багато–компонентний гетероклінічний цикл перетворюється на звичайний для  $N = 4$  гетероклінічний цикл (рис. 8.13(b)). Останнє перетворення відбувається внаслідок зникання чотирьох точок сідло–вузлів після біфуркації та переходу траєкторій  $\Gamma_i$  цілком у внутрішню частину тетраедра з інваріантних ліній. Стійкість нового регулярного гетероклінічного циклу зміниться збільшенні  $\alpha$  і досягненні значення  $\pi/2$ , а сам цикл у подальшому зникне при перетині  $\alpha$  лінії  $BV$ .

**Послідовність біфуркацій появи внутрішніх гетероклінічних циклів.** На рис.8.15 схематично зображено фазовий портрет системи на інваріантних площинах, коли параметри належать області  $HGDR$  біфуркаційної площини. Тут ми продемонструємо, що сценарій появи гетероклінічного циклу може буде набагато складнішим ніж глобальна біфуркація, локальною частиною якої є сідло–вузлова біфуркація на інваріантних  $\mathbf{S}_3 \times \mathbf{S}_1$  лініях. Лінія  $ID$  на біфуркаційній діаграмі репрезентує транскритичні та сідло–вузлові біфуркації, що включають джерело, що лежить на  $\mathbf{S}_3 \times \mathbf{S}_1$  інваріантній лінії та шість сідел, що належать інваріантним площинам. Дві лінії біфуркацій лежать дуже близько одна до одної. Послідовність п'яти біфуркацій відбувається на інваріантних площинах і ця послідовність схематично зображена на рис. 8.16(I). Точка  $I$  біфуркаційної діаграми (рис. 8.12) має координати  $\alpha = 0$  та  $r = 1/4$ . внаслідок біфуркацій виникає дванадцять сідел для будь якого  $r > 1/4$  при  $\alpha = 0$ . Вилкові біфуркації дев'яти сідел при збільшенні параметру  $\alpha$  редукують ці дванадцять сідел до шести сідел, що лежать у інваріантних площинах. Лінія  $ID$  перетинає лінію сідло–вузлової біфуркації  $HA$  у точці  $G$ , а лінію транскритичної біфуркації  $BH$  у точці  $F$ . Отже, існують три основні можливості для виникнення гетероклінічних циклів для  $r > r_G \approx 0.303$ .

**1.** При збільшенні параметру  $\alpha$  нестійка точка  $U_i$  бере участь у деяких біфуркаціях з особливою точкою  $V_i$  та стає сідловою точкою. Це сідло поєднується зі стійкою точкою  $W_i$  у сідло–вузловій/гетероклінічній біфуркації, як пока-



зано на рис. 8.16(I). Послідовність біфуркацій відбувається, коли наближено  $r \in (0.303, 0404)$ .

**2.** При збільшенні параметру  $\alpha$  стійка точка  $W_i$  біфуркує до трьох стійких точок всередині тетраедра на трьох інваріантних площинах та трансформується у сідло перед зникненням у сідло–вузловій біфуркації з точкою  $U_i$ . Щойно утворені сідлові точки у подальшому беруть участь у сідло–вузлових біфуркаціях з точками  $V_i$  при збільшенні параметра  $\alpha$ , як показано на рис. 8.16(II(a)). Лінія  $DJ$  на біфуркаційній діаграмі репрезентує першу сідло–вузлову біфуркацію, схематичний портрет якої показано на рис. 8.16(II(b)). Відмітимо, що остання сідло–вузлова біфуркація відбувається всередині тетраедра на інваріантній площині за межами інваріантної  $\mathbf{S}_3 \times \mathbf{S}_1$  лінії. Також зазначимо, що сідло–зв’язна біфуркація на лінії  $KD$ , яка проводить реорганізацію сепаратрис  $V_1W_2$  та  $UV_2$ , відбувається раніше сідло–вузлової біфуркації при збільшенні параметру. Після сідло–зв’язної біфуркації ми маємо фазовий портрет, що зображений на рис. 8.15. Далі відмітимо, що послідовність біфуркацій (показана на рис. 8.16(II)) є різною, зокрема, біфуркація  $(g)$ – $(h)$  відбувається перед  $(e)$ – $(f)$  при збільшенні параметра  $\alpha$ , коли значення іншого параметра  $r$  є близьким до  $1/2$ .

**3.** У випадку, коли параметр  $r$  змінюється на малому інтервалі у околі значення  $0.404$ , послідовність біфуркацій може бути ще складнішою. У попередніх випадках один зі стійких вузлів  $U_i$  чи  $W_i$  ставав сідлом (нестійким чи стійким у трансверсальному до інваріантних ліній напрямку, відповідно) після деякої біфуркації і потім це сідло взаємодіяло з іншими вузлами, зникаючи у сідло–вузловій біфуркації. У цьому ж випадку є пряма взаємодія вказаних вузлів, як показано на рис. 8.16(III)), коли параметр  $\alpha$  змінюється на дуже малому інтервалі. Відмітимо, що пряма взаємодія двох вузлів є досить нестандартною біфуркацією, яка може бути описана у комплексній площині нормальною формою  $dz/dt = z^2 + \mu$ , де  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ ,  $\mu$  — біфуркаційний параметр. У подальшому відбувається гетероклінічна біфуркація, продемонстрована на рис. 8.17. Локальна частина фазового портрету  $(e)$  після останньої з послідовності біфуркацій, зображених на рис. 8.16(III)), є частиною глобального фазового портрету, зображеного на рис. 8.17(a). Глобальна

біфуркація складається з локальних перебудов сепаратрис на інваріантних площинах всередині кожного тетраедра. У момент біфуркації гетероклінічний цикл складається з двох частин, які не мають спільних точок з  $\mathbf{S}_3 \times \mathbf{S}_1$  інваріантною лінією (рис. 8.17(b)). Гетероклінічна біфуркація також виникає при малих варіаціях параметру  $r \in (0.404, 0.4045)$  як продовження послідовності біфуркацій, показаних на рис. 8.16(III(a) – (d)), з подальшими сідло–вузловими біфуркаціями на інваріантній лінії. Після біфуркації кожен гетероклінічний цикл складається з чотирьох частин, які не мають спільних точок з  $\mathbf{S}_3 \times \mathbf{S}_1$  інваріантною лінією (рис. 8.17(c)). Сідлові точки  $R_{i1}$  співіснують у цьому випадку з гетероклінічним циклом при малому збільшенні параметру  $\alpha$  та згодом вони зникають у сідло–вузловій біфуркації.

### 3.6.6. Резюме гетероклінічних біфуркацій для $N = 4$

Вище було показано, що система чотирьох глобально зв'язаних фазових осциляторів (3.1) з дво–гармонічною функцією взаємодії (3.3) маж *n'ять* різних типів біфуркацій появи грубих гетероклінічних циклів. Лінії гетероклінічних біфуркацій корозмірності–один показано на параметричній  $(\alpha, r)$ –площині на рис. 8.12. А саме система має наступні гетероклінічні біфуркації:

1. **ТСРФН** (transcritical–pitchfork heteroclinic). Транскритично–вилкова гетероклінічна біфуркація у початку координат, що відбувається на параметричній лінії  $BE$ .
2. **SNH** (saddle–node/heteroclinic). Сідло–вузлова/гетероклінічна біфуркація на інваріантних  $\mathbf{S}_3 \times \mathbf{S}_1$  лініях, що відбувається на параметричній лінії  $ED$ .
3. **SNIH** (saddle–node inside (tetrahedra)/heteroclinic). Сідло–вузлова біфуркація на інваріантних  $\mathbf{S}_2$  площинах у середині інваріантних канонічних регіонів (тетраедрів), що відбувається на параметричній ривій  $DL$ .
4. **SCIH** (saddle–connecion inside/heteroclinic). Сідло–зв'язна біфуркація на інваріантних  $\mathbf{S}_2$  площинах у середині інваріантних тетраедрів, що відбувається у малому околі точки  $D$  у параметричній площині.
5. **ПФН** (pitchfork/heteroclinic). Вилкова біфуркація на інваріантних  $\mathbf{S}_2 \times \mathbf{S}_2$  лініях, що відбувається на параметричній ривій  $BV$ .

**6. MPFC** (mixed pitchfork of the heteroclinic and limit cycles). Вилкова біфуркація гетероклінічно циклу, що складається з інваріантних ліній ізотропії  $\mathbf{S}_3 \times \mathbf{S}_1$ , та двох граничних циклів, що відбувається на параметричній лінії  $BM$ . Другий варіант цієї біфуркації для взаємодії двох гетероклінічних та граничного циклу, що відбувається на лінії  $BH$ .

Грубий гетероклінічні цикли існують всередині області  $BEDTLV$  у параметричній площині (рис. 8.12). Ці гетероклінічні цикли є стійкими при  $\alpha < \pi/2$  та нестійкими при  $\alpha > \pi/2$  з біфуркацією резонансу при  $\alpha = \pi/2$ . У більшості параметричної області  $BEDTLM$  гетероклінічні цикли є єдиними атракторами системи (3.1), (3.3). Лише біля параметричної лінії  $TL$  крім гетероклінічних циклів існують притягуючі розв'язки з ізотропією  $\mathbf{S}_2$ .

Існують дво-вимірні множини орбіт, які є частинами гетероклінічних циклів. Тобто існує множина послідовно зв'язаних окремих траєкторій, дво-вимірних множин траєкторій та положень рівноваги (сідлового та сідло-вузлового типів), яка разом утворює неперервну одно-параметричну сім'ю гетероклінічних циклів (рис. 8.14(b)). Дана множина утворюється, коли  $(\alpha, r) = (\pi/2, 0)$  та у момент біфуркацій  $\mathbf{SNH}$  на лінії  $ED$  (8.12).

Відмітимо, що біфуркації  $\mathbf{TCPFH}$  та  $\mathbf{SNH}$  утворюють мережу, яка є екстремально чутливою до збурень (детально екстремальна чутливість буде досліджуватись у підрозділі 3.9) та вивчалась у роботах [34, 33]. Інші ж гетероклінічні біфуркації утворюють цикли, які стискаються у середину канонічних інваріантних областей і отже не є екстремально чутливими до збурень частот.

### 3.7. Динаміка моделі Гансела–Мато–Моньє довільної розмірності

У даному розділі було проведено біфуркаційний аналіз глобально зв'язаних ідентичних фазових осциляторів. Для довільної кількості осциляторів було описано локальні біфуркації найбільш простих та найбільш важливих режимів колективної динаміки. Оскільки система є досить складною, то виникнення значної кількості глобальних біфуркації є типовим. Такі глобальні біфуркації включають у себе складовими частинами різні типи локальних

біфуркацій (як, наприклад більшість гетероклінічних біфуркацій). Крім того, деякі глобальні біфуркації включають у себе складовими інші глобальні біфуркації, що відбувається у менших областях фазового простору (як, наприклад, сідло–зв’язна гетероклінічна біфуркація або біфуркація катастрофи блакитного неба). У двох попередніх підрозділах було детально описано глобальні біфуркації появи гетероклінічних циклів у моделях трьох та чотирьох осциляторів (у моделі двох осциляторів всі біфуркації локальні) при варіації двох параметрів. Біфуркаційні сценарії виявились на диво різноманітними, враховуючи малу кількість ступенів свободи. Дана різноманітність у певній мірі є наслідком  $S_N$  симетрії системи. Симетрії породжують біфуркації корозмірності–один з центральними многовидами, що мають розмірність два чи більше, які мають нетривіальні обмеження на нормальні форми (див., наприклад, [146, 209, 149]). Однак, топологія тору спричиняє те, що локальні біфуркації часто мають глобальні наслідки. Також симетрії і зв’язки тороїдального простору спричиняють появу досить складних гетероклінічних структур, як, зокрема, багато–вимірні неперервні множини гетероклінічних циклів.

Описані вище біфуркації системи (3.1) є здебільшого загальними у контексті наявних симетрій і, отже, є грубими та незалежними від вибору функції зв’язку. Збільшення розмірності системи та ускладнення функції взаємодії призводить до очевидного ускладнення динаміки системи. У роботах [31, 194, 39, 60, 59], зокрема, показано існування складних гетероклінічних структур, хаотичних атракторів та консервативного хаосу у випадку  $N \geq 5$  для дво–гармонічної функції фазової взаємодії та у випадку  $N \geq 4$ , коли функція зв’язку має четверту гармоніку.

Незважаючи на загальну складність динамічної поведінки (3.1), (3.3), деякі властивості цієї системи можна описати використовуючи щойно описані результати та застосовуючи подібні до наведених вище методів.

- 1.** Система (3.1) має симетрію  $S_N$ , а також інші симетрії, породжені цією та властивостями функції фазової взаємодії  $g$ . Також система має симетрію фазового зсуву.
- 2.** Система (3.1) може завжди бути зведеною до системи у фазових різницях. При цьому розмірності основних інваріантних множин зменшуються на оди-

ницю.

**3.** Система має інваріантні відносно потоку множини, що відповідають різноманітним кластерам з  $\theta_i = \theta_j$ ,  $i \neq j$ . Розмірність інваріантної множини системи у фазових різницях варіюється від 1 до  $N - 2$ , що відповідає кількості кластерів від 2 до  $N - 1$ . Інваріантні  $(N - 2)$ -вимірні гіперплощини системи у фазових різницях (3.33) розділяють весь фазовий простір  $\mathbb{T}^{N-1}$  на  $(N - 1)!$  канонічних інваріантних регіонів  $\mathcal{C}$ . Інваріантні регіони руйнуються лише при наявності збурень частот системи, коли осцилятори стають неідентичними.

**4.** Синхронний розв'язок  $\Theta_{sync}$  (початок координат  $\Phi_{sync}$ ) існує для будь-яких значень параметрів  $\alpha$ ,  $r$ . Він є *стоком* при  $\alpha \in (-\arccos(2r), \arccos(2r))$ , *виродженим сідлом* при  $\alpha = \pm \arccos(2r)$  та джерелом для інших  $\alpha$ . Локальні біфуркації даної точки завжди є глобальними біфуркаціями появи більш складних динамічних структур (як і у описаних випадках  $N = 3, 4$ ).

**5.** Режим рівномірного розподілу фаз  $\Theta_{splay}$  (або  $\Phi_{splay}$  для системи у різницях) з симетрією  $\mathbb{Z}_N$  існує для будь-яких значень параметрів. Дані режими є положеннями рівноваги для системи у фазових різницях і таких різних режимів є  $(N - 1)!$  (у залежності від симетрії перестановок). Для системи у фазових різницях ці точки є центрами для канонічних інваріантних регіонів  $\mathcal{C}$ . Стійкість даних режимів визначається співвідношенням 3.20. Типовою біфуркацією для таких режимів є біфуркація Андронова–Хопфа, що змінює їх стійкість, а також породжує існування одного або множини граничних циклів (у залежності від розмірності системи і функції зв'язку).

**6.** Важливою для системи глобально зв'язаних осциляторів є множина  $\mathcal{M}^{(N)}$ , що описує ситуацію повної антифази, тобто коли параметр порядку  $R = 0$ .  $\mathcal{M}^{(N)}$  є  $(N - 2)$ -вимірною для оригінальної системи та  $(N - 3)$ -вимірною для системи у фазових різницях. Для  $N = 2, 3, 4$  множина  $\mathcal{M}^{(N)}$  є інваріантною відносно потоків системи, а для  $N \geq 5$  вона у загальному випадку інваріантною не є. Множина режимів розподілених частот є очевидною підмножиною режиму повної антифази:  $\Theta_{splay} \subset \mathcal{M}^{(N)}$ .

**7.** При  $r = \pm \frac{1}{2} \cos \alpha$  система (3.33) має транскритичну гомоклінічну біфуркацію у початку координат, якщо  $r \in (0, \tilde{r})$ , де

$$\tilde{r} = \frac{N - 2}{2\sqrt{2N^2 - 4N + 4}}.$$

Остання біфуркація є транскритично–вилковою/гетероклінічною у випадках парних значень  $N$ . Гетероклінічні цикли у цьому випадку складаються з  $N$  інваріантних ліній, що мають ізотропію  $\mathbf{S}_{N-1} \times \mathbf{S}_1$ .

**8.** Система має сідло–вузлову/гетероклінічну біфуркацію при  $r \in [\tilde{r}, \bar{r}]$  для деяких  $\bar{r} < 1/2$  (залежних від розмірності системи). Умовою існування біфуркації є зв'язки між одно–вимірними інваріантними многовидами сідел, що знаходяться на інваріантних лініях системи. Біфуркація корозмірності–два перетину кривих транскритичної/гомоклінічної та сідло–вузлової/гомоклінічної біфуркації відбувається таким чином, що гетероклінічний цикл складається з виродженого сідла у початку координат, частин інваріантних  $\mathbf{S}_{N-1} \times \mathbf{S}_1$  ліній, які з'єднуються сідло–вузловими точками.

**9.** Для систем  $N$  зв'язаних осциляторів існують грубі гетероклінічні цикли для досить широкої області параметрів  $(\alpha, r)$ . Гетероклінічні цикли можуть бути у цьому випадку атрactorами, репелерами або напівстійкими множинами. Існує множина параметрів де гетероклінічні цикли є єдиними атрactorами системи.

### **3.8. Динаміка моделей з парними та непарними функціями взаємодії**

Розглянемо систему (3.1) у двох граничних випадках, коли функція  $g(x)$  є парною чи непарною. Також, як і раніше, ми припускаємо, що дана функція є  $2\pi$ –періодичною та диференційовною:  $g(x) \in C^1(\mathbb{S}^1)$ . Дана функція завжди може бути представленою у вигляді:

$$g(x) = g_+(x) + g_-(x), \quad g_+(x) = \frac{1}{2}[g(x) + g(-x)], \quad g_-(x) = \frac{1}{2}[g(x) - g(-x)], \quad (3.45)$$

де  $g_+(x)$  є її парною, а  $g_-(x)$  є її непарною частинами. Для більш конкретної дво-гармонічної функції зв'язку (3.3) представлення парної та непарної частин мають вигляд:

$$g_+(x) = -q \cos x \sin \alpha - r \cos(2x) \sin \beta, \quad (3.46)$$

$$g_-(x) = q \sin x \cos \alpha + r \sin(2x) \cos \beta. \quad (3.47)$$

З останніх співвідношень видно, що дво-гармонічна  $g(x)$  є парною, коли  $\alpha = \beta = \pi/2$  і непарною, коли  $\alpha = \beta = 0$ . Також і для загального розкладу функції  $g(x)$  у ряд Фур'є її парність чи непарність визначають параметри фазового зсуву для кожної гармоніки. Продовження біфуркаційної кривої між двома граничними станами може мати свої цікаві та важливі особливості не лише для системи глобально зв'язаних елементів, а і для інших симетричних мереж взаємодії, як, зокрема буде показано у розділі 5.

### 3.8.1. Градієнтні властивості системи з непарним зв'язком

Розглянемо систему у випадку, коли *функція зв'язку є непарною* (тобто, коли  $g_+(x) \equiv 0$ ). Як зазначалось у підрозділі 3.2, у випадку ідентичних осциляторів можна вважати нульовою загальну частоту  $\omega$  і замість системи (3.1) розглядати систему

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N g(\theta_i - \theta_j), \quad j = 1, \dots, N. \quad (3.48)$$

Дійсно перехід від (3.1) до (3.48) відбувається за допомогою заміни змінних  $\theta_i$  на  $\theta_i - \omega t$ . Система (3.48) є "замороженим" варіантом системи (3.1), коли зупиняється рух уздовж напрямку  $(1, \dots, 1)$  і цілі періодичні орбіти редукуються у точку. Зокрема, синхронний розв'язок даної системи  $\Theta_{sync}$  є початком координат. .

**Теорема 3.8.1.** Система (3.48) є градієнтною з потенціалом

$$V(\theta_1, \dots, \theta_N) = -\frac{1}{2N} \sum_{i,j=1}^N h(\theta_i - \theta_j), \quad h'(x) = g(x),$$

коли функція  $g(x)$  є непарною.

**Доведення.** Враховуючи, що для непарної функції  $g(0) = 0$ , безпосередньо переконуємося, що

$$\begin{aligned} -\frac{\partial V(\Theta)}{\partial \theta_i} &= \frac{\partial}{\partial \theta_i} \left( \frac{1}{2N} \sum_{i,j=1}^N h(\theta_i - \theta_j) \right) = \frac{1}{2N} \sum_{j=1, j \neq i}^N \left( g(\theta_i - \theta_j) - \sum_{j=1, j \neq i}^N g(\theta_j - \theta_i) \right) = \\ &= \frac{1}{N} \left( g(0) + \sum_{j=1, j \neq i}^N g(\theta_i - \theta_j) \right) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N g(\theta_i - \theta_j) = \frac{d\theta_i}{dt}. \end{aligned}$$

Що і доводить твердження.  $\square$

Очевидно, для оригінальної системи (3.1) та непарною функцією виконуються:

$$\frac{d}{dt} \theta_i = \omega - \frac{\partial}{\partial \theta_i} V(\theta_1, \dots, \theta_N), \quad i = 1, \dots, N.$$

З Теорема 3.48 випливає, що для непарного зв'язку виконується:

$$\frac{dV(\theta_1, \dots, \theta_N)}{dt} = \sum_{j=1}^N \frac{\partial V(\Theta)}{\partial \theta_j} \cdot \frac{d\theta_j}{dt} = - \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial V(\Theta)}{\partial \theta_j} \right)^2 \leq 0.$$

Останній вираз є рівністю лише у положеннях рівноваги системи і лише у цих точках є локальні мінімуми потенціалу. З останнього також випливає, що система (3.48) з непарною функцією взаємодії не може мати періодичних та гомоклінічних орбіт, а також гетероклінічних циклів.

Логічним здається припущення, що відповідна (3.48) система у фазових різницях також має бути градієнтною. Але це не так. Показати це можна на контрприкладі вже для системи трьох зв'язаних осциляторів. Система (3.48) у фазових різницях  $\varphi_2 = \theta_1 - \theta_3$ ,  $\varphi_1 = \theta_1 - \theta_2$  має вигляд:



$$\begin{aligned}\frac{d\varphi_1}{dt} &= \frac{1}{3} (2g(\varphi_1) + g(\varphi_2) + g(\varphi_1 - \varphi_2)), \\ \frac{d\varphi_2}{dt} &= \frac{1}{3} (2g(\varphi_2) + g(\varphi_1) + g(\varphi_2 - \varphi_1)).\end{aligned}\quad (3.49)$$

Ця система є градієнтною, якщо для непарної  $2\pi$ -періодичної функції  $g(x)$  існує функція  $V(\varphi_1, \varphi_2)$ -потенціал, яка повинна задовольняти умові

$$V(\varphi_1, \varphi_2) = - \int \frac{d\varphi_1}{dt} d\varphi_1 + C_1(\varphi_2) = - \int \frac{d\varphi_2}{dt} d\varphi_2 + C_2(\varphi_1),$$

де  $C_1(\varphi_2)$ ,  $C_2(\varphi_1)$  — функції однієї змінної, які потрібно відповідним чином підібрати. Остання рівність для системи (3.49) означає, що

$$-(2h(\varphi_1) + g(\varphi_2)\varphi_1 + g(\varphi_1 - \varphi_2)) + 3C_1(\varphi_2) = -(2h(\varphi_2) + g(\varphi_1)\varphi_2 + g(\varphi_2 - \varphi_1)) + 3C_2(\varphi_1)$$

а, отже, що  $C_1(\varphi_2) = -\frac{2}{3}h(\varphi_2)$ ,  $C_2(\varphi_1) = -\frac{2}{3}h(\varphi_1)$  та

$$g(\varphi_2)\varphi_1 = g(\varphi_1)\varphi_2.$$

Очевидно, що остання рівність не виконується для жодної періодичної функції, отже система (3.49) не є градієнтною і, таким чином, більш загальна система (3.48) не є градієнтною також.

### 3.8.2. Бездивергентність системи з парною функцією взаємодії

Далі розглянемо випадок системи (3.1) з *парною функцією зв'язку* (тобто, коли  $g_-(x) \equiv 0$ ). Динаміка системи у цьому випадку є багатшою та цікавішою ніж у системи з непарним зв'язком. Зокрема, як показано у роботах [60, 59], дана система може мати хаотичну консервативну динаміку у випадку наявності четвертої гармоніки у функції  $g$ . Наступне твердження характеризує одну з основних властивостей системи.

**Теорема 3.8.2.** *Потік системи (3.1) є бездивергентним у випадку, коли функція  $g(x)$  є парною. Крім того редукована система (3.10) є також без-*

дивергентною.

**Доведення.** Дійсно для правих частин  $F(\Theta) = (F_1(\Theta), \dots, F_N(\Theta))$ ,  $F_i(\Theta) = F_i(\theta_1, \dots, \theta_N)$ , рівняння (3.1) виконується:

$$\frac{\partial F_i(\Theta)}{\partial \theta_i} = \frac{1}{N} \sum_{j=1, j \neq i}^N g'(\theta_i - \theta_j)$$

і, отже, має місце

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial F_i(\Theta)}{\partial \theta_i} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N g'(\theta_i - \theta_j).$$

З парності функції  $g(x)$  випливає непарність функції  $g'(x)$ . Таким чином  $g'(\theta_i - \theta_j) = -g'(\theta_j - \theta_i)$  і, отже,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \frac{\partial F_i(\Theta)}{\partial \theta_i} &= \frac{1}{N} \sum_{1 \leq i < j \leq N} g'(\theta_i - \theta_j) + \frac{1}{N} \sum_{1 \leq j < i \leq N} g'(\theta_i - \theta_j) = \\ &= \frac{1}{N} \left( \sum_{1 \leq i < j \leq N} g'(\theta_i - \theta_j) - \sum_{1 \leq j < i \leq N} g'(\theta_j - \theta_i) \right) = \\ &= \frac{1}{N} \left( \sum_{1 \leq i < j \leq N} g'(\theta_i - \theta_j) - \sum_{1 \leq i < j \leq N} g'(\theta_i - \theta_j) \right) = 0. \end{aligned}$$

Аналогічно для системи у фазових різницях (3.32) виконується:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\partial G_i(\Phi)}{\partial \varphi_i} &= \frac{1}{N} \left( \sum_{i=1}^{N-1} g'(-\varphi_i) + g'(\varphi_i) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1, j \neq i}^{N-1} g'(\varphi_j - \varphi_i) \right) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N-1} \left( \sum_{j=1, j \neq i}^{N-1} g'(\varphi_j - \varphi_i) \right) = \\ &= \frac{1}{N} \left( \sum_{1 \leq j < i \leq N-1} g'(\varphi_j - \varphi_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq N-1} g'(\varphi_i - \varphi_j) \right) = 0. \end{aligned}$$

Бездивергентність системи у фазових різницях означає також те, що оригінальна система є бездивергентною у просторі напрямків трансверсальних до напрямку фазового зсуву.  $\square$

Симетрія перестановок системи разом з бездивергентністю призводять до існування інших типів симетрій. Покажемо, що дана система має особливий тип симетрій, що називається *часово-оборотною* або *реверсивною*. Розроблена потужна теорія відносно основних властивостей систем з такою симетрією, перші результати якої були отримані у роботах І. Парасюка [254], В. Арнольда [27, 29] та М. Севрюка [292, 293]. Також слід відмітити роботи з цього напрямку [239, 114, 324, 292, 138, 214, 274, 129, 52, 215, 349, 77, 75, 294, 303] і статтю Дж. Ламба та Дж. Робертса [213], яка є дуже детальним оглядом літератури по реверсивних системах (бібліографія містить більше чотирьох сотень робіт).

**Означення 3.8.1.** Інволюція  $\mathcal{R} : \mathbb{T}^N \rightarrow \mathbb{T}^N$  є *часово-оборотною* (реверсивною) симетрією, якщо

$$\frac{d}{dt}\mathcal{R}(\Theta) = -F(\mathcal{R}(\Theta)),$$

тобто  $\mathcal{R}$  відображає будь-який розв'язок у інший розв'язок, напрямком потоку якого є протилежним.

Дуже важливою при вивченні реверсивного потоку є його фіксована множина:

$$\text{Fix}\mathcal{R} = \{\Theta \in \mathbb{T}^N : \mathcal{R}\Theta = \Theta\}. \quad (3.50)$$

Часово-реверсивний динамічний потік можна уявити як потік з дзеркальною симетрією відносно  $\text{Fix}\mathcal{R}$ , де дзеркально відображені частини траєкторій мають протилежний фазовий напрямок. При дослідженнях фазових потоків зручно також використовувати властивість:  $\mathcal{R}^2 = Id$ , де  $Id$  — ідентичний оператор. Тобто, якщо  $\mathcal{R} \in N \times N$ -матрицею, останній запис має вигляд  $\mathcal{R}^2 = I_N$ ,  $I_N$  — одинична матриця.

Важливо відмітити, що *фіксована множина часово-реверсивної симетрії не є інваріантною множиною для динамічної системи у загальному випад-*

ку. Остання властивість суттєво відрізняє реверсивну симетрію від, наприклад, дзеркальної з тим же фіксованим підпростором. Реверсивна система має і інші важливі властивості, частина з яких буде показано нижче у цьому підрозділі, а інші будуть продемонстровані у розділі 5. Зокрема, вона може мати фіксований інваріантний підпростір нульової розмірності. Множина реверсивних систем перетинається з множинами гамільтонових та еквіваріантних систем, при цьому жодна зі зазначених множин не поглинає іншу [213, рис. 1]. Також реверсивні системи можуть мати сім'ї періодичних та квазі-періодичних орбіт та нетривіальні гетероклінічні структури, які зазвичай обмежують ці сім'ї. Наступне твердження описує симетрію розглядуваної у цьому розділі системи.

**Теорема 3.8.3.** *У випадку симетричної функції  $g(x)$  система (3.1) має часово та параметрично-реверсивну симетрію  $\mathcal{R} : \mathbb{T}^N \rightarrow \mathbb{T}^N$ , де*

$$\mathcal{R}(\Theta) = -\Theta, \quad \omega \mapsto -\omega, \quad t \mapsto -t.$$

*Для редукованої системи (3.10) це відповідає часово-оборотній симетрії  $\tilde{\mathcal{R}} : \mathbb{T}^{N-1} \rightarrow \mathbb{T}^{N-1}$ ,*

$$\tilde{\mathcal{R}}(\tilde{\Theta}) = -\tilde{\Theta}, \quad t \mapsto -t.$$

**Доведення.** При  $\omega = 0$  для правих частин системи маємо:

$$\begin{aligned} F_i(\theta_1, \dots, \theta_k) &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N g(\theta_i - \theta_j) = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N g(-\theta_i + \theta_j) = F_i(-\theta_1, \dots, -\theta_k). \end{aligned}$$

Отже, для вектору правих частин виконується:  $F(\Theta) = F(\mathcal{R}(\Theta))$ . Одночасно  $d\mathcal{R}(\Theta)/dt = -d\Theta/dt$ . Отже,  $\mathcal{R}F(\Theta) = -F(\mathcal{R}\Theta)$  і система є часово реверсивно для окремого випадку  $\omega = 0$ . Очевидно, система (3.1) є реверсивною при зміні знаку параметру  $\omega$  для зворотнього часу. Подібним чином переконуємось, що система у фазових різницях також є реверсивною. Але система (3.10) є

часово–оборотною у загальному на відміну від системи (3.1), яка у загальному випадку має лише часово–параметро–оборотну симетрію.  $\square$

Відмітимо, що у випадку коли система має будь–яку симетрію  $\gamma \in \Gamma$  та часово–оборотну симетрію  $\mathcal{R}$ , то композиція двох симетрій  $\gamma \circ \mathcal{R}$  є також часово–оборотною симетрією. Зокрема, множина часово–оборотних симетрій на  $\mathbb{T}^{N-1}$  є однозначно відповідною множиною таких симетрій на  $\Gamma$  [292, 213]. Остання множина може бути згенерованою як множина реверсивних симетрій  $\mathcal{R}$ – для будь–якої даної реверсивної симетрії  $\mathcal{R}$ . Наслідком з вище сказаного є те, що коли  $\Theta \in \mathbb{T}^N$  має ізотропію  $H \subset \mathbf{S}_N \times \mathbb{T}$ , то таку ж ізотропію має і  $\mathcal{R}(\Theta)$ .

Як зазначалось вище, фіксована множина симетрії  $\mathcal{R}$  не обов’язково повинна бути інваріантною відносно потоку системи. Але, незважаючи на це, дана множина є ключом та першим кроком для знаходження, дослідження та описання множин періодичних розв’язків, а також гомоклінічних та гетероклінічних циклів. Зокрема *реверсивна центральна теорема Ляпунова* стверджує, що за умови нерезонансності у околі положення рівноваги з  $\mathbf{Fix}\mathcal{R}$  з парою чисто уявних власних значень, існує дво–параметрична сім’я реверсивних періодичних орбіт, навіть за умови наявності додаткових нульових власних значень [114, 324, 143]. Останню властивість ми розглянемо та опишемо у деталях для системи з циркулянтним зв’язком у підрозділі 5.4.

У випадку трьох зв’язаних осциляторів система має додаткову виродженість, яка характеризується наступним твердженням.

**Теорема 3.8.4.** *Система (3.1) трьох осциляторів з парною функцією зв’язку  $g(x)$  має перший інтеграл*

$$I(\Theta) = I(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = h(\theta_1 - \theta_2) + h(\theta_2 - \theta_3) + h(\theta_3 - \theta_1), \quad (3.51)$$

де  $h'(x) = g(x)$ . Також перший інтеграл вигляду

$$\tilde{I}(\Phi) = \tilde{I}(\varphi_1, \varphi_2) = h(\varphi_1) - h(\varphi_2) + h(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (3.52)$$

має система у фазових різницях (3.32).

Доведення цієї теореми надано у додатку В.6 (див. стор. 387).

Висловимо тут гіпотезу, що система (3.1) має перший інтеграл для довільного  $N$  і парній  $g(x)$ . Такі інтеграли знайдені для інших конфігурацій осциляторних мереж, зокрема для циркулянтних мереж (див. підрозділ 5.6.1). Для глобально зв'язаних мереж це питання залишається відкритим.

У роботі [30, Ashwin, Vick, Burylko] детально описано структуру фазового простору у реверсивному випадку для  $N = 3$  та  $N = 4$ . У цій роботі було описано, яким чином часово-реверсивна симетрія впливає на формування розв'язків системи лише певних типів. Зокрема було показано яким чином суперпозиція симетрій  $\mathcal{R}$  та  $\mathbb{Z}_N$  спричиняють існування гетероклінічних циклів та сімей періодичних орбіт. Відмітимо також що у випадку  $N = 4$  система може мати консервативний хаос [60, 35, 58, 59] у випадку наявності третьої та четвертої гармонік у функції взаємодії  $g$ . Крім того у випадку  $N \geq 4$  фазовий простір може заповнюватись сім'ями дуже цікавих періодичних розв'язків, що мають вигляд кількох зв'язаних симетричних «пружин» і можуть описувати типову динаміку нейронних сигналів (bursting neuron) [170, 176, 124]. Дослідження структури та біфуркаційних властивостей у випадку системи (3.1) з  $N \geq 5$  та парною функцією  $g$  є одним з найцікавіших напрямків, що можливо призведе до появи нових теорій.

### 3.9. Екстремальна чутливість до збурень у фазових моделях

У попередніх підрозділах даного розділу розглядалась система глобально зв'язаних осциляторів (3.1), всі власні частоти яких є *ідентичними*:  $\omega_i = \omega$ . Ідентичність фазових осциляторів спричиняла симетрію перестановок, яка, у свою чергу, призводила до існування кластерних інваріантних многовидів, канонічних інваріантних областей, які містять виключно фазово замкнуті траєкторії. Природній інтерес викликає ситуація, коли частоти осциляторів  $\omega_i$  є *неідентичними*. Очевидно, що всі симетрії порушуються, що призведе до перебудови інваріантних многовидів, розриву границь інваріантних областей і, отже, появи нових типів колективних осциляторних режимів. Деякі властивості таких частотних збурень опишемо у даному підрозділі.

Розглянемо систему неідентичних осциляторів

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{i=1}^N g(\theta_i - \theta_j), \quad i = 1, \dots, N, \quad (3.53)$$

де  $\theta_i$  — фазові змінні,  $\omega_i$  — власні частоти,  $K$  — параметра сили зв'язків,  $g$  — функція взаємодії, та її редукцію у фазових змінних (3.31), представлену у вигляді

$$\frac{d\varphi_i}{dt} = \Delta_i + \frac{K}{N} \left( -g(-\varphi_i) + \sum_{j=1}^{N-1} g(\varphi_j) - \sum_{j=1, j \neq i}^{N-1} g(\varphi_j - \varphi_i) \right), \quad i = 1, \dots, N-1, \quad (3.54)$$

де  $\Delta_i = \omega_1 - \omega_{i+1}$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Будемо розглядати систему Гансела–Мато–Моньє, коли функція взаємодії задається виразом

$$g(x) = -\sin(x - \alpha) + r \sin(2x) \quad (3.55)$$

з параметрами  $\alpha$ ,  $r$ . Для стандартної моделі Курамото з  $r = \alpha = 0$  зменшення сили зв'язку  $K$  призведе до більшої чутливості синхронного розв'язку до варіації власних частот  $\omega_i$ , що проявляється як невідповідність набутої середньої частоти осциляторів, якщо різниця власних частот є досить великою. У більш загальному випадку системи (3.53) з функцією (3.55) ситуація є значно складнішою. Для даної системи екстремально мале збурення часто може десинхронізувати фазову динаміку навіть без роз'єднання набутих частот. Насправді варіації параметрів  $\alpha$  та  $r$  можуть призвести до миттєвої зміни стійкостей синфазного та антифазного режимів. Буде показано, що перехід між двома фазово замкнутими станами, як правило, супроводжується так званою *екстремальною чутливістю* до частотних збурень. Це означає, що поблизу перехідного стану фазова замкнутість може бути зруйнована шляхом введення довільних малих різниць фазових частот індивідуальних осциляторів. Іншими словами малі збурення можуть зруйнувати бар'єри канонічних інваріантних областей, а фазово замкнута траєкторія може стати фазово незамкнутою після збурення, покидає свою інваріантну область та починає "гу-

ляти” по інших частинах фазового простору, які до збурення бали для неї недоступними.

Як було показано у попередніх підрозділах система (3.53) показує дуже варіативну динаміку у випадку  $\omega_i = \omega$ . Найбільш характерною особливістю системи є наявність гетероклінічних циклів і різноманітних біфуркацій, що призводять до їх появи. Далі буде показано, що саме збурення цих гетероклінічних розв’язків системи приводить до існування екстремальної чутливості у системі.

Означимо вектор частотної чутливості

$$\delta = (\Delta_1, \dots, \Delta_N), \quad \Delta_i = \omega_1 - \omega_{i+1}, \quad i = 1, \dots, N - 1.$$

**Означення 3.9.1.** Зафіксуємо всі параметри у системі (3.53) крім  $\delta$ . Чутливістю до збурень системи вважаємо множину значень  $\Omega$  таких, що всі аттрактори системи мають обмежені різниці фаз при  $\|\delta\| < \Omega$ . Якщо  $\Omega$  є малим, то система має нижній поріг чутливості до збурень. Якщо  $\Omega = 0$  то система є екстремально чутливою до збурень.

З означення випливає, що при порушенні нерівності  $\|\delta\| < \Omega$  система має фазово незамкнуті траєкторії. Але останнє не означає, що всі траєкторії повинні бути такими. Означення можна розширити, якщо вимагати, щоб при порушенні згаданої нерівності не лише аттрактори ставали фазово незамкнутими, а і будь яка траєкторія. Подібні режими трапляються при збуренні бездивергентних систем, тобто коли функція зв’язку  $g$  є парною.

Якщо  $\omega_i = \omega$  (тобто  $\Delta_i = 0$ ), то (як було показано вище) кластерні множини  $\mathcal{P}_{ij}$ , означені для  $\theta_i = \theta_j$  є інваріантними для всіх  $i \neq j$  та формують динамічні бар’єри корозмірності–один у системі. Ці бар’єри формують канонічні інваріантні області  $\mathcal{C}$  описані (3.11). Останнє призводить до того, що фазові різниці розв’язків мусять бути обмеженими незалежно від розмірності системи та її динаміки. Останній аргумент вже не діє, коли власні частоти  $\omega_i$  стають різними. Система (3.53), (3.55) з  $r = \alpha = 0$  та  $\Delta_i = 0$  має вироджену біфуркацію у точці  $K = 0$  при зміні цього параметру. Якщо  $K > 0$ , то єдиним аттрактором цієї системи є режим повної синхронізації  $\Theta_{sync}$ , а єдиним репеле-



ром — стан повної антифази з  $R = 0$ , що задається інваріантним многовидом  $\mathcal{M}^{(N)}$ . При  $K < 0$  все навпаки:  $\mathcal{M}^{(N)}$  — єдиний аттрактор,  $\Theta_{sync}$  — репелер. Як було показано у даному розділі, динаміка дуже ускладнюється при  $r \neq 0$ ,  $\alpha \neq 0$ , але вироджена біфуркація, що міняє місцями аттрактори та репелери працює так само, коли осцилятори є ідентичними. Ми будемо відштовхуватись від незбуреного випадку системи (3.53), (3.55), поклавши  $K = 1$  (що можна зробити масштабуванням часу), та збурюючи у подальшому різниці власних частот.

### 3.9.1. Чутливість до збурень частот при $N = 2$

У випадку двох осциляторів система (3.53) редукується за допомогою фазової різниці  $\varphi = \theta_1 - \theta_2$  до одного рівняння вигляду

$$\frac{d\varphi}{dt} = \Delta_1 - \sin \varphi \cos \alpha + r \sin(2\varphi). \quad (3.56)$$

Для  $\Delta_1 = 0$  динаміка даної системи детально описана у підрозділі 3.4. Для  $r \in (0, 1/2)$  система має два особливих розв'язки: синхронний режим  $\varphi = 0$  та антифазний режими  $\varphi = \pi$ , що існують для будь-яких  $\alpha$ . Також є гілки розв'язків  $\varphi = \pm \arccos\left(\frac{\cos \alpha}{2r}\right)$ , що з'являються при  $\alpha = \arccos(2r)$  та зникають при  $\alpha = \arccos(-2r)$  внаслідок суперкритичної вилкової біфуркації. Гілку переходу від розв'язку  $\varphi = 0$  до  $\varphi = \pi$  при зміні параметру  $\alpha$  показано на біфуркаційній діаграмі 8.7(а) на  $(\alpha, \varphi)$ -площині при  $r \neq 0$ . При  $r = 0$  ця гілка буде вертикальною лінією і отже відбудеться миттєве перемикання між згаданими розв'язками. Для  $r \in (0, 1/2)$  та довільних  $\alpha$  параметр чутливості до збурень

$$\Omega = \min \{|F_-|, |F_+|\}, \quad F_- = \min_{\varphi \in \mathbb{T}^1} F(\varphi), \quad F_+ = \max_{\varphi \in \mathbb{T}^1} F(\varphi), \quad F(\varphi) = -\sin \varphi \cos \alpha + r \sin(2\varphi)$$

Підрахунки показують, що екстремуми функція  $F(\varphi)$  має у точках

$$\varphi_{\max, \min} = \pm \arccos \left( \frac{\cos \alpha \pm \sqrt{\cos^2 \alpha + 32r^2}}{8r} \right).$$

Далі переконуємось, що мінімум досягається при  $\alpha = \pm\pi/2$ , де  $|F_-| = |F_+|$ . Подальші обчислення показують, що бар'єрним значенням чутливості є  $\Omega = r$ . Таким чином система двох зв'язаних осциляторів є екстремально чутливою лише при  $r = 0$ , а  $r \neq 0$  вона не є екстремально чутливою.

### 3.9.2. Екстремальна чутливість при $N = 3$

Розглянемо систему (3.54) у фазових різницях  $\varphi_1 = \theta_1 - \theta_2$ ,  $\varphi_2 = \theta_1 - \theta_3$  трьох неідентичних фазових осциляторів, тобто з  $\Delta_1 = \omega_1 - \omega_2$ ,  $\Delta_2 = \omega_1 - \omega_3$ . Як і у випадку двох осциляторів дослідження починаємо з незбуреної системи. Динаміка та біфуркаційні властивості системи трьох ідентичних осциляторів детально описана у підрозділі 3.5. На біфуркаційній діаграмі 8.7(b) показано біфуркаційні криві на площині  $(\alpha, \varphi_1)$  при  $r = 0.2$ . Біфуркація у точці  $E$  на цій діаграмі при  $\alpha = \alpha_0 \approx 1.2574$ ,  $r = 0.2$  викликає особливий інтерес, оскільки вона є причиною екстремальної чутливості до збурень. Ця біфуркація є сідло-вузловою/гетероклінічною як було описано у підрозділі 3.5.3 та показано на  $(\alpha, r)$ -біфуркаційній діаграмі рис. 8.8.

На рис. 8.18 зображено фазові портрети для різних значень параметрів всередині інваріантних областей на фазовій площині  $\xi = \theta_1 + e^{2\pi i/3}\theta_2 + e^{4\pi i/3}\theta_3$  (перестановки осциляторів відповідають поворотам чи дзеркальним відображенням, що зберігають рівносторонній трикутник). Сторони трикутника відповідають інваріантним многовидам  $\varphi_1 = 0$ ,  $\varphi_2 = 0$ ,  $\varphi_1 = \varphi_2$  системи (3.54) для  $\Delta_i = 0$ . На рис. 8.18(a) через  $P$  позначено стійкі вузли, а через  $R$  та  $Q$  — сідлові точки (усіх по три внаслідок симетрії  $\mathbb{Z}_3$ ). При  $\alpha = \alpha_0$  відбувається сідло-вузлова біфуркація точок  $P$  та  $R$  (як показано на рис. 8.18(b)) і після біфуркації при  $\alpha > \alpha_0$  обидві точки зникають (як показано на рис. 8.18(c)). Біфуркація спричиняє появу стійкого граничного циклу  $L$ .

У момент біфуркації (рис. 8.18(b)) ми припускаємо, що власні значення точки  $Q$  є  $\lambda_1 < 0$  та  $\lambda_2 > 0$ , у той час, як точка  $P$  має власні значення  $\lambda_3 < 0$  та  $0$ . Поставимо перерізи Пуанкаре, як показано на рис. 8.19, та означимо відображення Пуанкаре  $H : \Pi_1 \mapsto \Pi'_1$  за допомогою  $H(a) = c$  для  $0 < a \ll 1$ . Оскільки  $\Pi_1$  та  $\Pi'_1$  є ідентичними відносно симетрії, то повне відображення повернення задається як  $H^3$ . Розглянемо параметр  $\nu$  такий, що

при  $\nu < 0$  система має дві гіперболічні точки  $P, R$ , при  $\nu = 0$  існує сідло-вузол, а при  $\nu > 0$  система не має жодної з цих точок. При  $\nu \ll 0$  траєкторії починають наближатись до інваріантних просторів, тобто для достатньо малих  $a$  траєкторії не можуть перетнути  $\Pi'_1$ , оскільки вони спочатку попадуть у "пастку" точки  $P$ . Припустимо, що для  $\nu > 0$  траєкторія стартувала з  $\Pi_1$  на відстані  $a$  від стійкого многовиду сідлової точки  $Q$  та повернулася до  $\Pi_1$  на відстані  $\tilde{a}$  від цього ж стійкого многовиду. Наближення лінійного потоку біля  $Q$  дасть старший порядок  $\tilde{a} = C_1 \exp\{-C_2 \nu^{-1/2}\}$  для додатніх констант  $C_1, C_2$ . З останнього випливає, що стійка періодична орбіта утворюється поблизу інваріантних многовидів точки  $Q$ . У термінах оригінальних змінних  $\nu = |\alpha - \alpha_0|$  отримуємо

$$\tilde{a} = C_1 e^{-C_2 \sqrt{|\alpha - \alpha_0|}}$$

незалежно від параметра  $a$  у старшому порядку  $|\alpha - \alpha_0|$ . Період  $T$  циклу  $L$  описується як

$$T = \frac{C_3}{\sqrt{|\alpha - \alpha_0|}}$$

звідки випливає, що період дуже повільно зростає до нескінченності при наближенні параметру до біфуркаційного значення  $\alpha \rightarrow \alpha_0$ . Цей граничний цикл проілюстрований на рис. 8.19(b) жирною лінією. У момент сідло-вузлової/гетероклінічної біфуркації притягуюча мережа взаємозв'язаних інваріантних многовидів починає нетривіально обертатись навколо фазового тору. Така структура виникає, коли траєкторія залишає інваріантну область показану на рис. 8.19(b) (де траєкторія є шестикутним фазово замкнутим граничним циклом з вершинами  $P, Q$  та їх симетричними відображеннями, з'єднаними інваріантними многовидами, три з яких лежать на  $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0$  та  $\varphi_1 = \varphi_2$ ) та починає рухатись на усьому фазовому торі (рис. 8.19(c)). Така мережа з'єднань спричиняється доволі малими збуреннями, що дають атрактори біля цієї мережі, що мають необмежені фазові різниці. Тобто десинхронізований атрактор (рис. 8.19(c)) утворюється з замкнутого стійкого граничного циклу (рис. 8.19(b)) при зміщенні інваріан-

тних многовидів. Більше того, при  $\alpha > \alpha_0$  притягуючі періодичні орбіти є експоненціально близькими до інваріантних многовидів (рис. 8.19 (c) та (b)). Останнє означає, що

$$\Omega = \mathcal{O} \left( \exp \left\{ -\frac{K}{\sqrt{\alpha - \alpha_0}} \right\} \right) \quad \text{для } \alpha > \alpha_0.$$

Для  $\alpha < \alpha_0$  виконується  $\Omega = \mathcal{O}(|\alpha - \alpha_0|)$  завдяки парі сідло–вузлів. Останнє узгоджується з масштабуванням чутливості  $\Omega$  біля  $\alpha = \alpha_0$ . Отже, дуже незначні збурення симетрії власних частот призводять до розриву гетероклінічної конструкції і робить гетероклінічний цикл фазово незамкнутим. Ми бачимо суттєву відмінність випадків системи (3.54) при  $N = 2$  та  $N = 3$  у тому, що менша система не є екстремально чутливою до збурень при  $r \neq 0$ , а більша є. Чутлива залежність від параметрів проілюстрована на рис. 4(а) та 5 роботи [228].

### 3.9.3. Екстремальна чутливість систем старших розмірностей

Для  $N \geq 4$  біфуркаційні конструкції є набагато складнішими (як було показано у попередніх підрозділах). У цих випадках можна знайти відкриті області параметрів, де існує лише один атрактор, який є грубим гетероклінічним циклом, що з'єднує кілька кластерних станів (режим повільного перемикавання). Крім простих сідел, у загальному випадку такий атрактор може містити сідлові періодичні сідлові орбіти. Починаючи з різних початкових даних, траєкторії притягуються до цих з'єднувальних орбіт, тобто вони осцилюють між симетрично зв'язаними сідловими періодичними орбітами показуючи "сповільнення" періоду коливань. Екстремальну чутливість у цьому випадку можуть спричиняти також гетероклінічна біфуркація, локальними частинами якої є кілька симетричних біфуркацій сідло–вузлу циклів. Аналіз біфуркацій показує [37, 33, 322, 34], що система може мати екстремальну чутливість не лише близьку до сідло–вузлової/гетероклінічної, а і у випадках гетероклінічних біфуркацій інших типів (транскритичної, сідло–зв'язної, та інших, описаних вище), що дозволяють траєкторіям необмежено обертатись

навколо тору.

На рис. 4 роботи [34, Ashwin, Burylko, Maistrenko, Popovych] показано біфуркаційні криві екстремальної чутливості  $\Omega$  у залежності від параметру  $\alpha$  для випадків  $N = 2, 3, 4$  та  $5$  при фіксованих  $K = 1, r = 0.2$ .  $\Omega$  демонструє найменшу найбільшу амплітуду чутливості  $\Delta$  так, що принаймні один атрактор не є фазово замкнутим (мультистабільність є типовим явищем). При  $N = 2$  відстань до  $\Delta = 0$  залишається обмеженою (як і було показано раніше), у той час як при  $N \geq 3$  крива чутливості  $\Omega$  наближається до нуля і залишається там на протязі деякого інтервалу. Сценарії виникнення чутливості є не виродженими для розглядуваної системи, за винятком припущення глобального зв'язку між елементами.

Нове явище виникає при  $N \geq 5$ . У роботах [31, 34] продемонстровано гетероклінічний атрактор, який дозволяє необмежений зріст фазових різниць для як завгодно малого збурення власних частот. Дана ситуація відмінна від  $N = 4$ , де гетероклінічний атрактор є грубим, але не зв'язує фундаментальні області. Чисельні підрахунки для системи (3.54) при  $N = 5, K = 1, r = 0.2$  показують, що існує інтервал  $\alpha \in [1.21, 1.41]$  для яких траєкторії системи для малих відхилень  $\Delta$  (хибно) притягуються до сідлової особливої точки. На рис. 5 у [34] продемонстровано фазово незамкнуті атрактори, що виникають при  $\Delta \approx 10^{-7}$  та має екстремальну чутливість  $\Omega \approx 10^{-17}$ .

Аналітичні дослідження та результати чисельних експериментів підтверджують що екстремальна чутливість до збурень власних частот є загальною властивістю систем зв'язаних фазових осциляторів та може відбуватись без роз'єднання осциляторів. Вона виникає біля зміни стійкості синфазних та антифазних синхронних станів і проявляється порушенням частотної синхронізації між індивідуальними осциляторами при як завгодно малому збуренні та може виникати на відкритих множинах у параметричному просторі. Відмітимо, що завдяки екстремальній чутливості система може змінити типи своїх атракторів при наявності невеликого шуму або при слабких зовнішніх сигналах навіть при дуже слабкому зв'язку між елементами. У роботі [33] також вводиться поняття *топологічної чутливості* та показується його зв'язок з екстремальною чутливістю.

# Розділ 4

## Біфуркації в системах зв'язаних осциляторів з

## притягуючою та відштовхуючою взаємодією

### 4.1. Виникнення моделі

У попередніх двох розділах ми детально вивчали моделі глобально зв'язаних ідентичних фазових осциляторів, які мають різні параметри у функціях взаємодії, але які мають однакову силу  $K$  впливу одних елементів на інших. Незважаючи на складність та різноманітність колективних режимів, у представлених вище моделях усі осцилятори поведуть себе у певному сенсі однаково. А саме, усі елементи системи або синхронізуються для певних параметрів, або стараються розійтись у глобальну антифазу для інших параметрів. Існування кластерного режиму, з синхронізацією лише певної кількості осциляторів (тобто несиметричний по відношенню до елементів системи режим) спричиняє існування усіх кластерних режимів з іншими наборами елементів кластерів у відповідності з глобальною симетрією перестановок. Зокрема, найпростіша з осциляторних моделей стандартна модель Курамото з глобальним параметром сили взаємодії  $K$  та функцією зв'язків  $g(x) = -\sin x$  має лише по одному стійкому режиму: повної синхронізації при  $K > 0$  (тобто зв'язок є притягуючим) та глобального антифазного режиму при  $K < 0$  (тобто зв'язок є відштовхуючим). Виникає природне питання: якою буде колективна поведінка осциляторів, коли частина зв'язків між елементами буде

притягуючою, а частина відштовхуючою? Виникає і більш загальна задача про дослідження синхронних режимів у осциляторних систем з матрицею взаємодії  $K = \{K_{ij}\}_{i,j=1}^N$ , коли взаємодія між елементами будується для описання тих чи інших природніх явищ.

Системи з неоднорідними силами зв'язків привертала увагу багатьох дослідників. Зокрема, системи, що складаються з декількох груп осциляторів, пов'язаних різними типами взаємодії, вивчались у роботах [108, 235, 271, 296, 168, 167, 169, 227]. Дж. Стіллер та Г. Радонс [306] вивчали систему з симетричною матрицею сил взаємодії, які вибирались незалежно з одного й того ж розподілу ймовірностей. Системи, проаналізовані у роботі [167], мають сили вхідних зв'язків, які можуть приймати одне з двох значень, одне позитивне, інше негативне, де кожне значення асоціюється з певною ймовірністю. Обидві вище згадані моделі з випадково вибраними силами взаємодії показують типову поведінку середнього поля та відображають фазові переходи другого порядку, подібні до притаманних стандартній моделі Курамото.

Особлива колективна поведінка виникає у моделі, вперше запропонованій Х. Даїдо [108], що детально досліджувалась у роботах Х. Хонг та С. Строгатца [168, 167, 169], яку у подальшому ми будемо називати моделлю (системою) Хонг–Строгатца. Цю модель також можна назвати системою зв'язаних осциляторів з притягуючими та відштовхуючими зв'язками. У цій моделі множина всіх осциляторів розділена на дві групи. Осцилятори першої групи ми будемо називати *конформістами* (conformists). Осцилятори цієї групи отримують позитивні зовнішні сигнали, що сприяють їх синхронізації. Осцилятори першого типу прагнуть синхронізуватись не лише всередині своєї групи, а також синхронізувати активність усіх інших осциляторів у системі. Осцилятори другої групи ми будемо називати *нонконформістами* (contrarians). Осцилятори цієї групи отримують негативні зовнішні сигнали, що сприяють їх десинхронізації. Точніше осцилятори другої групи мають спільне відштовхуюче середнє поле. Осцилятори цієї групи намагаються розподілити рівномірно вплив усіх елементів системи не лише всередині своєї групи, а і для всіх елементів системи.

Дана модель має соціологічну інтерпретацію (соціологічною була і одна

з мотивацій її створення). Конформісти намагаються створити умови для залучення до голосування за певного претендента на посаду/законопроект якомога більшої кількості учасників. Нонконформісти намагаються створити такі умови, щоб переваг голосів не мав жоден претендент/законопроект з запропонованих. Тобто, нонконформісти намагаються рівномірно розпорозити голоси виборців для уникнення прийняття конкретного рішення.

Використовуючи узагальнену ВС теорію Ватанабе–Строгатца [276, 263] та анзатц Отта–Антонсена [251] Х. Хонг та С. Строгатц показали, що система достатньо великої кількості осциляторів здатна генерувати різні можливі динамічні режими: стійкі положення рівноваги, залежні від часу режими, мандрівні хвилі, т.п. Хонг та Строгатц створили певну теорію, що базується на введенні двох різних параметрів порядку та зведенні даної системи за допомогою певної заміни, що використовує ці параметри порядку до системи малої розмірності. Слід відмітити, що даний підхід суттєво використовує нескінченну кількість елементів у системі і має певні недоліки при спробі застосування до скінченно–вимірних систем.

Спеціальним випадком атрактивно–репульсивної моделі можна вважати модель з центральним елементом, який буде розглянуто у розділі 7. У цьому випадку множина конформістів складається лише з одного елемента, а притягуючі осцилятори взаємодіють між собою лише локально.

У даному розділі ми використовуємо біфуркаційний аналіз для вивчення інваріантних многовидів скінченно–вимірних систем з метою розповсюдження результатів Хонг та Строгатца у двох напрямках. По–перше, для системи Хонг–Строгатца ми аналітично опишемо структуру інваріантних многовидів динамічної системи, визначимо типи біфуркацій, що виникають при зміні параметрів, та опишемо межі областей різних режимів у біфуркаційному просторі. Буде також описано новий динамічний режим синхронізації одного з нонконформістів з групою конформістів, що виникає принципово у скінченно–вимірному випадку. По друге, ми розглянемо узагальнення системи Хонг–Строгатца, вводячи фазовий зсув у функції зв'язку. Для такої системи ми наведемо детальний біфуркаційний аналіз та біфуркаційні діаграми для систем малої кількості осциляторів (двох, трьох та чотирьох).



Буде продемонстровано декілька типів нетривіальної динаміки (повільне перемикання між кластерами, хаотична поведінка, тощо), які є неможливими в оригінальній моделі Хонг–Строгатца, але можуть бути присутніми навіть для малих фазових зсувів. Ми застосовуємо альтернативний підхід відносно теорії Хонг–Строгатца, але будемо використовувати деякі елементи цієї теорії та порівнювати отримані результати. Основою даного підходу є зведення моделі до системи у фазових різницях та використання методів, які були продемонстровані у попередніх розділах, та застосовуються впродовж усієї дисертаційної роботи.

## 4.2. Описання моделі та деякі її властивості

### 4.2.1. Осциляторна мережа з притяганням та відштовхуванням

Розглянемо систему глобально зв'язаних ідентичних фазових осциляторів, чия динаміка описується системою звичайних диференціальних рівнянь:

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega - \frac{K_s}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_i - \theta_j - \alpha), \quad i = 1, \dots, N, \quad (4.1)$$

де  $\theta_i \in \mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$  є фазовою змінною  $i$ -го осцилятора,  $\omega$  є натуральною частотою осциляторів,  $K_s$  є параметрами сили зв'язку між осциляторами,  $\alpha \in \mathbb{T}^1$  — фазовий зсув. Фазовий простір системи є  $N$ -вимірним тором  $\mathbb{T}^N$ . Ми припускаємо, що  $K_s$  може приймати одне з двох значень  $K_1 \neq 0$  або  $K_2$ . Випадок  $K_1 = K_2 = 0$  є тривіальним і описує ситуацію незв'язаних між собою осциляторів. Тоді множина усіх осциляторів  $\mathcal{H}$  розпадається на дві підмножини  $\mathcal{H}_1$  та  $\mathcal{H}_2$ , які складаються з осциляторів, що мають вхідні зв'язки  $K_1$  та  $K_2$ , відповідно.

Позначимо через  $N_1$  кількість осциляторів множини  $\mathcal{H}_1$ , а через  $N_2$  кількість осциляторів множини  $\mathcal{H}_2$ . Ми припускаємо, що кожна з множин  $\mathcal{H}_i$  є непорожньою, тобто  $N_1 > 0$ ,  $N_2 > 0$ . Без обмеження загальності (внаслідок симетрії перестановок) осцилятори субпопуляції  $\mathcal{H}_1$  можуть бути проіндексо-

вані як  $\{1, 2, \dots, N_1\} = J_1$ , а осцилятори субпопуляції  $\mathcal{H}_2$  можуть бути проіндексовані як  $\{N_1 + 1, \dots, N\} = J_2$ . Архітектура взаємодії між двома групами глобально зв'язаних осциляторів продемонстрована на рис. 8.20(а).

Використовуючи заміну  $\theta_i \rightarrow \theta_i + \omega t$ , та вказані вище позначення множин індексів, систему (4.1) можна представити у вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{d\theta_i}{dt} &= -\frac{K_1}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_i - \theta_j - \alpha), \quad i \in J_1, \\ \frac{d\theta_i}{dt} &= -\frac{K_2}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_i - \theta_j - \alpha), \quad i \in J_2. \end{aligned} \quad (4.2)$$

У випадку  $K_1 = K_2$  система (4.2) перетворюється на модель Курамото–Сакагучі ідентичних зв'язаних осциляторів (див. підрозділ 2.3). Якщо на додаток  $\alpha = 0$ , то система перетворюється на стандартну модель Курамото. У випадку, коли  $K_1 > 0$ ,  $K_2 < 0$  та  $\alpha = 0$  система (4.2) стає моделлю Хонг–Строгатца [168, 167]. У цій моделі осцилятори підмножини  $\mathcal{H}_1$  ми називаємо *конформістами*, а осцилятори підмножини  $\mathcal{H}_2$  — *нонконформістами*. Ми будемо використовувати ці терміни і для більш загальної системи (4.2). У випадку, коли обидва параметри  $K_1$  та  $K_2$  є додатніми, але  $K_1 \neq K_2$ , то система складається з двох груп неідентичних конформістів. У випадку, коли обидва згаданих параметри є негативними, то система складається з двох груп нонконформістів.

#### 4.2.2. Параметри порядку системи з притягуванням та відштовхуванням

Як і у ситуаціях, описаних у попередніх розділах, для визначення міри синхронізації осциляторів зручно використовувати параметр порядку

$$R(t)e^{i\psi(t)} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j(t)}, \quad (4.3)$$

де  $R$  є амплітудою, а  $\psi$  є фазою комплексного середнього поля. Як зазначалось вище, стандартна модель Курамото, яка складається лише з конформістів (у термінах даного розділу) має лише стійкий стан повної синхронізації з  $R = 1$  (див. рис. 8.20(b)). У протилежному граничному випадку система складається лише з нонконформістів. У цьому випадку осцилятори відштовхують один одного так, що їх фази рівномірно розподіляються по колу (див. рис. 8.20(c)). Такі стани (режими рівномірного розподілу фаз або хвилі обертання) мають  $R = 0$ .

Припустимо, що у систему входять як конформісти так і нонконформісти. Для подальшого дослідження будемо використовувати два різних параметри порядку  $r_1$  та  $r_2$  для кожної з субпопуляцій  $\mathcal{H}_1$  та  $\mathcal{H}_2$ , введені у роботі [167]. Отже, позначимо:

$$r_s e^{i\psi_s} = \frac{1}{N_s} \sum_{j \in J_s} e^{i\theta_j}, \quad s = 1, 2,$$

$$p = \frac{N_1}{N}, \quad q = 1 - p = \frac{N_2}{N},$$

$$\delta = \psi_2 - \psi_1, \quad C = \frac{K_1}{K_1 - K_2},$$

де  $p, q$  — відносні кількості конформістів та нонконформістів,  $\delta$  — середня фазова різниця між субпопуляціями,  $C$  — відносна інтенсивність взаємодії. Отже, у подальшому будемо розрізняти загальний параметр порядку  $R$  усієї популяції осциляторів та часткові параметри порядків  $r_1, r_2$  для підгруп конформістів та нонконформістів. У моделі Хонг–Строгатца осцилятори конкурують у спробі нав'язати свій власний стиль поведінки всім осциляторам у системі. Конформісти не тільки намагаються синхронізувати свою власну субпопуляцію (з  $r_1 = 1$ ), але й намагаються залучити до цієї синхронізації деяких нонконформістів. З іншого боку, нонконформісти намагаються розпошити фази всіх осциляторів у системі (зі своєї і чужої субпопуляції) рівномірно по колу. Остаточна динаміка системи залежить від конкурентного впливу кожної з груп конформістів та нонконформістів на усю популяцію, який визначається зі співвідношення між параметрами  $N_1, N_2, K_1, K_2$ . При

наявності навіть незначного фазового зсуву ( $\alpha \neq 0$ ) динаміка системи може сильно ускладнюватись.

### 4.2.3. Редукція до фазових різниць

Для дослідження колективних властивостей системи (4.2), як і у попередніх розділах, зручно звести цю систему до системи у фазових різницях

$$\varphi_i = \theta_1 - \theta_{i+1}, \quad i = 1, \dots, N - 1. \quad (4.4)$$

Без обмеження загальності ми можемо помножити всі рівняння системи на  $N/K_1$  (оскільки ми раніше припустили, що система має принаймні один конформіст і  $K_1 > 0$ ). Тоді, вводячи новий параметр

$$k = \frac{K_2}{K_1} = 1 - \frac{1}{C}$$

та перемасштабовуючи часу (час буде зворотнім при  $K_1 < 0$ ), запишемо систему у фазових різницях:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_i}{dt} &= -\sin(\varphi_i + \alpha) - \sum_{j=1}^{N-1} \sin(\varphi_j - \alpha) \\ &\quad - \sum_{j=1, j \neq i}^{N-1} \sin(\varphi_i - \varphi_j + \alpha), \quad i = 1, \dots, N_1 - 1, \\ \frac{d\varphi_i}{dt} &= -k \sin(\varphi_i + \alpha) - \sum_{j=1}^{N-1} \sin(\varphi_j - \alpha) \\ &\quad - k \sum_{j=1, j \neq i}^{N-1} \sin(\varphi_i - \varphi_j + \alpha) - (k - 1) \sin \alpha, \quad i = N_1, \dots, N - 1. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Зауважимо, що при  $K_1 < 0$  стійкі режими системи (4.2) стануть нестійкими режимами системи (4.5) та навпаки. Оскільки наш подальший біфуркаційний аналіз системи (4.5) буде стосуватись усієї її динамічної поведінки, то інверсія часу не обмежує її загальності отриманих результатів.

Нижче ми розглянемо систему (4.5) як з негативними, так і з позитивними значеннями параметру  $k$ . Випадок позитивного  $k \neq 1$  відповідає двом групам конформістів чи нонконформістів з двома різними силами взаємодії. Далі буде показано, що система з ненульовими значеннями фазового зсуву з таким параметром  $k$  може мати цікаву нетривіальну динаміку, включаючи хаос.

#### 4.2.4. Симетрії системи

Як і в попередніх розділах, першим етапом дослідження динаміки системи буде вивчення наявних симетрій системи та їх впливу на формування кластерів та інваріантних відносно фазового потоку множин системи. Такі дослідження також допоможуть вивченню біфуркаційної поведінки системи з використанням результатів та методів запропонованих у роботах [146, 43, 147, 145, 131]. У подальшому ми розглядаємо одночасно оригінальну систему (4.2) та систему у фазових різницях (4.5), оскільки певні особливості динаміки виявляються у першій з цих систем, а інші у другій.

Система (4.2) має симетрію перестановок  $\mathbf{S}_{N_1}$  для осциляторів субпопуляції  $\mathcal{H}_1$  та вона має симетрію перестановок  $\mathbf{S}_{N_2}$  для осциляторів субпопуляції  $\mathcal{H}_2$ . Ця система також має симетрію фазового зсуву  $S^1 = \mathbb{T}^1$  вздовж напрямку  $(1, \dots, 1)$ , яка задається дією

$$(\theta_1, \dots, \theta_N) \mapsto (\theta_1 + \varepsilon, \dots, \theta_N + \varepsilon)$$

для будь-яких  $\varepsilon \in \mathbb{T}^1$ . Як і в попередніх моделях типу Курамото, дана симетрія зумовлена залежністю правих частин системи виключно від фазових різниць.

Властивості функції  $\sin(x + \alpha)$  породжують додаткові симетрії у обох системах, що пов'язують змінні, час та параметри. У системі (4.2) дані симетрії задаються наступними діями:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &: (\varphi_1, \dots, \varphi_{N-1}, \alpha, k, t) \mapsto (-\varphi_1, \dots, -\varphi_{N-1}, \alpha, k, t), \\ \gamma_2 &: (\varphi_1, \dots, \varphi_{N-1}, \alpha, k, t) \mapsto (\varphi_1, \dots, \varphi_{N-1}, \alpha + \pi, k, -t). \end{aligned}$$

Дані симетрії дозволяють нам проводити біфуркаційний аналіз системи лише для значень параметру  $\alpha \in [0, \pi/2]$  замість усіх  $\alpha \in \mathbb{T}^1$ . Відмітимо, що друга з симетрій є також параметрично часово-оборотною.

Додаткова симетрія виникає у випадку  $K_2 \neq 0$ , оскільки система (4.2) може бути редукована до системи у фазових різницях у альтернативний до (4.4) спосіб як різниця останнього осцилятора (або будь-якого іншого осцилятора-нонконформіста згідно симетрії  $\mathbf{S}_{N_2}$ ) з іншими осциляторами у наступний спосіб:

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}_i &= \theta_N - \theta_{N-i} = \varphi_{N-i-1} - \varphi_{N-1}, \quad i = 1, \dots, N-2, \\ \bar{\varphi}_{N-1} &= \theta_N - \theta_1 = -\varphi_{N-1}.\end{aligned}\tag{4.6}$$

Система у нових фазових різницях  $\bar{\varphi}_i$  репрезентує ту ж саму оригінальну систему (4.2), а її форма є аналогічною до (4.5) за винятком однієї відмінності, що параметр  $k = K_2/K_1$  замінений у новій системі на  $k_1 = 1/k = K_1/K_2$ . Таким чином, дія

$$\begin{aligned}\gamma_3 : & (\varphi_1, \dots, \varphi_{N-2}, \varphi_{N-1}, \alpha, k, t) \\ & \mapsto \left( \varphi_{N-2} - \varphi_{N-1}, \dots, \varphi_1 - \varphi_{N-1}, -\varphi_{N-1}, \alpha, \frac{1}{k}, -t \right)\end{aligned}\tag{4.7}$$

трансформує векторне поле системи з даною кількістю конформістів у подібну систему з тією ж кількістю нонконформістів. Використовуючи цю властивість, ми можемо отримати інформацію про динаміку системи (4.5) для  $N_1 = 1, \dots, N-1$ , якщо відповідна інформація вже отримана лише для  $N_1 = 1, \dots, [N/2]$ , де через  $[x]$  позначено цілу частину  $x$ . Зокрема, біфуркаційна  $(\alpha, k)$ -діаграма для системи з  $n$  конформістами є ідентичною з біфуркаційною  $(\alpha, 1/k)$ -діаграмою для системи з  $n$  нонконформістами. Біфуркаційна діаграма для  $N_1 = N_2 = N/2$  має біфуркаційну точку з координатами  $(\alpha, 1/k)$ , якщо вона також має біфуркаційну точку з координатами  $(\alpha, k)$ .

### 4.3. Інваріантні многовиди системи

#### 4.3.1. Кластери та відповідні многовиди

Рух кожної координати  $\theta_i$  визначений на  $2\pi$ -періодичному колі  $\mathbb{T}^1$ , яке є факторизацією дійсної лінії  $\mathbb{R}$  по модулю  $2\pi\mathbb{Z}$ . У певних випадках є доцільним розглядати рух  $\theta_i$  на усій лінії  $\mathbb{R}$  (без факторизації). Наприклад, це необхідно для розрізнення двох принципово різних типів поведінки  $\theta_i$  таких як фазово-замкнуті та фазово-незамкнуті (відмінності були продемонстровані у підрозділі 3.9). Нагадаємо, що динаміка є фазово-замкнутою, коли функція  $\theta_i(t)$  є обмеженою на  $\mathbb{R}$ . І навпаки, фазово-незамкнута динаміка відповідає умовам необмеженості  $\theta_i(t)$  на  $\mathbb{R}$ . Те ж саме означення може бути застосовано до фазових різниць  $\theta_i - \theta_j$ . Фазова замкнутість  $\theta_i - \theta_j$  призводить до частотної синхронізації двох осциляторів

$$\Omega_{ij} = \Omega_i - \Omega_j = 0,$$

де середня частота фазового осцилятора задається як

$$\Omega_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\theta_i(t)}{t}, \quad \theta_i(t) \in \mathbb{R}.$$

Симетрії перестановок  $\mathbf{S}_{N_1}$  та  $\mathbf{S}_{N_2}$  призводять до виникнення певних інваріантних многовидів, які відповідають кластеризації осциляторів одного типу. Точніше дані режими описуються наступним твердженням.

**Лема 4.3.1.** Система (4.2) має два наступних типи інваріантних многовидів:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{P}}_{i,j}^1 &= \{(\theta_1, \dots, \theta_N) : \theta_i = \theta_j\}, \quad i, j \in J_1, \quad i \neq j, \\ \tilde{\mathcal{P}}_{i,j}^2 &= \{(\theta_1, \dots, \theta_N) : \theta_i = \theta_j\}, \quad i, j \in J_2, \quad i \neq j, \end{aligned}$$

для всіх значень параметрів  $K_1, K_2, \alpha$ .

**Доведення.** Нехай осцилятори  $\theta_i$  та  $\theta_j$  обидва належать до однієї і тієї ж

множини  $\tilde{\mathcal{P}}_{i,j}^1$  або  $\tilde{\mathcal{P}}_{i,j}^2$ . Це означає, що  $\theta_i - \theta_j = 0$ . Тоді виконується наступне:

$$\begin{aligned} \frac{d\theta_i}{dt} - \frac{d\theta_j}{dt} &= -\frac{K_s}{N} \sum_{l=1}^N \sin(\theta_i - \theta_l - \alpha) + \frac{K_s}{N} \sum_{l=1}^N \sin(\theta_j - \theta_l - \alpha) \\ &= -2\frac{K_s}{N} \sin\left(\frac{\theta_i - \theta_j}{2}\right) \cdot \sum_{l=1}^N \cos\left(\frac{\theta_i + \theta_j}{2} - \theta_l - \alpha\right) = 0, \quad s = 1, 2. \end{aligned}$$

Останнє доводить інваріантність множин  $\tilde{\mathcal{P}}_{i,j}^s$ .  $\square$

Можна безпосередньо переконатись, що остання рівність не виконується у загальному випадку, коли  $\theta_i \in \mathcal{H}_i$ , а  $\theta_j \in \mathcal{H}_2$ . Дійсно, навіть для випадку  $\alpha = 0$  припущення про існування інваріантної множини для осциляторів двох типів призводить до вимоги виконання рівності

$$K_1 \sum_{l=1}^{N_1} \sin \theta_l + K_2 \sum_{l=N_1+1}^N \sin \theta_l = 0$$

для довільних значень осциляторів, що неможливо.

Існування інваріантного многовиду  $\theta_i = \theta_j$  призводить до фазової замкнутості  $i$ -того та  $j$ -того осциляторів, оскільки  $2\pi k$  утворюють непроникні бар'єри на  $\mathbb{R}$  для фазового потоку  $\varphi_{ij} = \theta_i - \theta_j$ . Многовиди  $\tilde{\mathcal{P}}_{i,j}^s$  є  $(N-1)$ -вимірними множинами у фазовому просторі  $\mathbb{T}^N$ . Ці множини є також  $(N-2)$ -вимірними гіперплощинами у  $(N-1)$ -вимірному фазовому просторі системи у фазових різницях (4.5). У фазових змінних дані множини мають вигляд:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{i,j}^1 &= \{(\varphi_1, \dots, \varphi_{N-1}) : \varphi_i = \varphi_j\}, \quad i, j = 0, 1, \dots, N_1 - 1, \quad i \neq j, \\ \mathcal{P}_{i,j}^2 &= \{(\varphi_1, \dots, \varphi_{N-1}) : \varphi_i = \varphi_j\}, \quad i, j = N_1, \dots, N - 1, \quad i \neq j, \end{aligned}$$

де  $\varphi_0 \stackrel{df}{=} 0$ . Многовиди  $\mathcal{P}_{i,j}^s$ ,  $s = 1, 2$ , розділяють весь фазовий простір  $\mathbb{T}^{N-1}$  системи (4.5) на інваріантні області. Зазначимо, що у граничних випадках ідентичних глобально зв'язаних фазових осциляторів:  $N_1 = N$  (лише конформіст) та  $N_2 = N$  (лише нонконформісти) всі інваріантні області є замкнутими



у  $\mathbb{R}^{N-1}$  (всього є  $(N-1)!$  таких інваріантних областей у тороїдальному фазовому просторі  $\mathbb{T}^{N-1}$ ). Структура замкнутих інваріантних областей у граничних випадках була описана у попередньому розділі. У загальному випадку інваріантні області системи (4.5) є необмеженими у  $\mathbb{R}^{N-1}$  для  $N_1 \in \{1, \dots, N-1\}$ , тобто фазові різниці  $\varphi_i - \varphi_j = \theta_{j+1} - \theta_{i+1}$  можуть бути фазово незамкнутими, якщо  $i = 1, \dots, N_1 - 1, j = N_1, \dots, N - 1$ . Отже, може існувати дво-частотний кластерний режим, коли середні частоти конформістів та нонконформістів не співпадають.

Позначимо через  $\mathcal{P}_m^1$  та  $\mathcal{P}_m^2$   $m$ -вимірні множини з простору  $\mathbb{T}^{N-1}$ , що є перетином  $N - m - 1$  інваріантних множин  $\mathcal{P}_{i,j}^1, \mathcal{P}_{i,j}^2$  (включаючи всі перестановки елементів всередині субпопуляцій  $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ ). Ці многовиди описують всі можливі  $(N - m)$ -кластери конформістів або нонконформістів. Таким чином, ми можемо отримати деяку часткову інформацію про динаміку системи, розглядаючи редуковані  $m$ -вимірні системи на відповідних многовидах. Відмітимо, що трансверсальна стійкість таких многовидів може змінюватись від точки до точки.

### 4.3.2. Інваріантний антифазний многовид

Як ми бачили у попередніх розділах, типовим для систем глобально зв'язаних осциляторів також є многовид що цілком складається з антифазних розв'язків

$$\mathcal{M}^{(N)} = \left\{ (\theta_1, \dots, \theta_N) : \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j} = 0 \right\}. \quad (4.8)$$

Існування такого многовиду спричинено, у тому числі, наявністю глобальної симетрії перестановок  $\mathbf{S}_N$  усіх осциляторів системи. У даному випадку система (4.2) не має такої симетрії, вона має лише часткові симетрії перестановок усередині кожної з субпопуляцій. Попередньо здається, що многовид (4.8) повинен розпадатись при руйнуванні симетрії  $\mathbf{S}_N$ . Проте, як показує наступне твердження даний многовид зберігається.

**Лема 4.3.2.** *Множина (4.8) є інваріантним многовидом системи (4.2) для всіх значень параметрів  $K_1, K_2, \alpha$ .*

**Доведення.** Покажемо, що кожна точка  $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_N)$  з множини  $\mathcal{M}^{(N)}$  є положенням рівноваги системи (4.8), а, отже, є інваріантною. Для доведення цього покажемо, що праві частини системи перетворюються у нуль у випадку, коли  $\Theta \in \mathcal{M}^{(N)}$ . З рівності у означенні (4.8) випливає, що  $\sum_{j=1}^N e^{-i\theta_j} = 0$ . Далі маємо

$$\begin{aligned} \frac{K_s}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_l - \theta_j - \alpha) &= \frac{K_s}{N} \operatorname{Im} \left( \sum_{j=1}^N e^{i(\theta_l - \theta_j - \alpha)} \right) \\ &= \operatorname{Im} \left( \frac{K_s}{N} e^{i(\theta_l - \alpha)} \sum_{j=1}^N e^{-i\theta_j} \right) = 0, \end{aligned}$$

де  $\operatorname{Im}z$  позначає уявну частину  $z$ . Остання рівність виконується для  $s = 1, 2$ ,  $l = 1, \dots, N$ , та усіх значень параметрів.  $\square$

Інваріантний многовид  $\mathcal{M}^{(N)}$  є  $(N - 2)$ -вимірною множиною системи, він складається з положень рівноваги та має нульовий параметр порядку  $R = 0$ . Найпростішим прикладом інваріантного многовиду є режим рівномірного розподілу частот, як показано на рис. 8.20(с). Більш нетривіальні приклади осциляторних розподілів на колі показано на рис. 8.20(е)–8.20(г). Тут нонконформісти виграють змагання. Фази всіх осциляторів системи нерівномірно розподілені по колу таким чином, що  $R = 0$ .

#### 4.4. Положення рівноваги моделі Хонг–Строгатца

У цьому підрозділі ми розглядаємо систему (4.2) у випадку нульового фазового зсуву  $\alpha = 0$ . Як зазначалось раніше, цю версію системи ми називаємо моделлю Хонг–Строгатца. Основні результати отримані Х. Хонг та С. Строгатцем [168, 167, 169] стосуються випадку великої кількості зв'язаних осциляторів або системи, отриманої при термодинамічному переході  $N \rightarrow \infty$ . Ми досліджуємо принципово скінченно-вимірну систему та використовуємо альтернативний підхід для відшукування та описання динамічних режимів.

#### 4.4.1. Положення рівноваги системи у фазових різницях

Для описання всіх можливих режимів системи (4.2) використовувати як допоміжний інструмент систему у фазових різницях (4.5). У подальшому дослідженні ми будемо використовувати одночасно обидві системи і обидва набори змінних. Для відшукування положень рівноваги системи (4.5) необхідно розв'язати алгебраїчну систему  $N - 1$  рівнянь. У змінних  $\theta_i$  ця система має наступний вигляд:

$$\begin{aligned} g_1(\theta_1, \dots, \theta_N) - g_i(\theta_1, \dots, \theta_N) &= 0, \quad i = 2, \dots, N_1, \\ g_1(\theta_1, \dots, \theta_N) - kg_i(\theta_1, \dots, \theta_N) &= 0, \quad i = N_1 + 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (4.9)$$

де

$$g_i(\theta_1, \dots, \theta_N) = \sum_{j=1}^N \sin(\theta_i - \theta_j).$$

Наступна Лема дозволяє охарактеризувати всі розв'язки системи (4.9).

**Лема 4.4.1.** *Точка  $(\theta_1, \dots, \theta_N)$  є розв'язком системи (4.9) для  $k \neq 0$ ,  $k \neq -N_2/N_1$  тоді і тільки тоді, коли задовольняє:*

- (i)  $\sum_{j=1}^N e^{i\theta_j} = 0$ ,
- (ii)  $\theta_i - \theta_j \in \{0, \pi\}$ ,  $i, j = 1, \dots, N$ .

**Доведення** цієї леми наведено у Додатку В.7 (див. стор. 388).

Переходячи від змінних  $\theta_i$  до  $\varphi_i$  та застосовуючи отримані у лемі результати до системи диференціальних рівнянь, ми отримуємо наступне твердження.

**Теорема 4.4.1.** *Для  $\alpha = 0$  та будь-яких значень параметру  $k$  таких, що  $k \neq 0$ ,  $k \neq -N_2/N_1$ , всі положення рівноваги системи (4.5) утворюють наступну множину:*

$$FP = FP_{0\pi} \cup \overline{\mathcal{M}}^{(N)},$$

де

$$FP_{0\pi} = \{(\varphi_1, \dots, \varphi_{N-1}) : \varphi_j = \{0, \pi\}, j = 1, \dots, N\},$$

$$\overline{\mathcal{M}}^{(N)} = \left\{ (\varphi_1, \dots, \varphi_N) : \sum_{j=1}^{N-1} e^{i\varphi_j} = -1 \right\}.$$

#### 4.4.2. Біфуркаційні обмеження

З теореми випливає, що положення особливих точок системи (4.5) не залежить від параметру  $k$ , коли  $k \neq 0$ ,  $k \neq -N_2/N_1$ . Система має лише  $2^N$  положень рівноваги з координатами  $0$  та  $\pi$ , що описуються множиною  $FP_{0\pi}$ , та  $(N-3)$ -вимірний многовид  $\overline{\mathcal{M}}^{(N)} \in \mathbb{T}^{N-1}$ . Відмітимо, що  $(N-3)$ -вимірний многовид  $\overline{\mathcal{M}}^{(N)}$  у змінних  $\varphi_i$  фазового простору  $\mathbb{T}^{N-1}$ , представлений у Теоремі 4.4.1, відповідає  $(N-3)$ -вимірному многовиду (4.8) у змінних  $\theta_i$  фазового простору  $\mathbb{T}^N$ . Легко перевірити, що для парно-вимірних просторів (при  $N = 2l$ ,  $l \in \mathbb{N}$ ) інваріантні многовиди  $FP_{0\pi}$  та  $\overline{\mathcal{M}}^{(N)}$  перетинаються у точках  $(\varphi_1, \dots, \varphi_{N-1})$  з  $N/2 - 1$  координат рівних  $0$  та  $N/2$  координат рівних  $\pi$ .

Теорема 4.4.1 показує, що множина режимів, які відповідають положенням рівноваги  $FP_{0\pi}$  системи (4.5) є ширшою за множину режимів, описаних теорією Хонг–Строгатца [167]. Множина точок є ширшою  $FP_{0\pi}$  оскільки не всі її точки є стійкими для довільних значень параметру  $k$ . Проте ми покажемо, що система має більше стійких режимів з  $FP_{0\pi}$  ніж є описано у роботі [167].

Теорема 4.4.1 має два обмеження:  $k \neq 0$  та  $k \neq -N_2/N_1$ . Обидва обмеження є природними і з математичної, і з соціологічної точки зору. Умова  $k = 0$  означає, що  $K_2 = 0$ , тобто конформісти не мають впливу на нонконформістів. У момент  $k = 0$  система має біфуркацію. При цьому система стає виродженою і має  $N_2$  ідентичних рівнянь. У другому випадку, коли  $k = -N_2/N_1$ , система має принаймні два лінійно залежних рівняння. Ми покажемо, що біфуркація також трапляється при цьому значенні параметру  $k$ .

Теорема 4.4.1 також встановлює обмеження на можливі типи біфуркацій положень рівноваги системи. Координати усіх точок множини  $FP_{0\pi}$  залишаються постійними при зміні параметру  $k$ . Отже, сідло-вузлова, транскритична та вилкова біфуркації цих точок є неможливими. Тобто неможливими є всі біфуркації руху, появи та зникнення точок. Однак біфуркації зміни стійко-

сті можуть відбуватись для вказаних положень рівноваги. Коли ізольована особлива точка змінює стійкість у момент критичного значення параметру, інваріантний многовид цієї точки (принаймні один) стає нейтральним та складається з неізольованих особливих точок. Більш точно, нормальна форма на інваріантному многовиді містить лише нульові члени. Цей особливий випадок виродженої біфуркації подібний до виродженого випадку біфуркації Андронова–Хопфа (також відомої як ”вертикальна біфуркація Хопфа”). У подальшому на діаграмах ми будемо позначати цей біфуркаційний випадок літерами  $DB$  (degenerate bifurcation).

Наступний приклад описує вироджену біфуркацію у випадку  $N_1 = 1, N_2 = 2$ . У цьому випадку дво–вимірна система у фазових різницях  $(\varphi_1, \varphi_2)$  має два одно–вимірних інваріантних многовиди для критичного значення параметру  $k = -2$ . Пряма лінія  $\varphi_2 = \varphi_1$  містить дві особливі точки  $(0, 0)$ ,  $(\pi, \pi)$  та їх спільні інваріантні многовиди. Друга крива

$$\varphi_2 = \varphi_1 + 2 \arctan[(2 + \cos \varphi_1) / \sin \varphi_1]$$

містить чотири положення рівноваги  $(0, \pi)$ ,  $(4\pi/3, 2\pi/3)$ ,  $(\pi, 0)$ ,  $(2\pi/3, 4\pi/3)$  та їх інваріантні многовиди. Пряма лінія є нестійкою, а крива є стійкою у трансверсальних напрямках, але обидві вони є нейтральними при  $k = -2$ . Особливі точки  $(4\pi/3, 2\pi/3)$ ,  $(2\pi/3, 4\pi/3)$  належать многовиду  $\mathcal{M}^{(N)}$  (але не множині  $FP_{0\pi}$ ) та вони є ізольованими у фазовому просторі. При варіації параметру стійкість усіх згаданих шести точок змінюються при критичному значенні параметру ( $k = -2$ ). Інваріантні многовиди є нейтральними (складаються з сім’ї неізольованих особливих точок) у момент критичного значення параметру. Інша вироджена біфуркація відповідає критичному значенню параметру  $k = 0$  з інваріантним многовидом  $\varphi_2 = -\varphi_1$ . Бачимо, що і у першому і у другому випадку критичні значення параметрів співпадають з забороненими у теоремі значеннями. Множини неізольованих особливих точок (крім многовиду  $\overline{\mathcal{M}}^{(N)}$ , що також складається з неізольованих точок) з’являються лише при заборонених у теоремі значеннях і вони є також значно ширшими, ніж множина  $FP_{0\pi}$ .

У випадку системи з ненульовим фазовим зсувом вироджені біфуркації стають біфуркаціями корозмірності–два. Наприклад, при варіації двох параметрів вироджена біфуркація відповідає перетину двох сідло–вузлових кривих. Ми також покажемо, що при варіації параметрів точки інваріантного многовиду  $\overline{\mathcal{M}}^{(N)}$  можуть змінювати свою стійкість у двох трансверсальних до многовиду напрямках.

## 4.5. Стійкі режими системи Хонг–Строгатца

У даному підрозділі ми опишемо всі можливі стійкі режими системи у фазових різницях (4.5) для  $\alpha = 0$ . Існують дві принципово різні множини стійких режимів: положення рівноваги з постійним значенням параметра порядку ( $R = \text{const}$ ) та нестационарні режими, параметр порядку змінюється з часом ( $R = R(t)$ ). Обидва режими були знайдені у роботі [167] для нескінченно–вимірних систем. Ми покажемо, що крім описаних у [167] стійких стаціонарних режимів існують і інші, які у цій роботі не згадувались. Наявність нових режимів зумовлена скінченно–вимірністю системи. Також будуть описані деякі нестационарні режими та встановлено найменшу можливу кількість осциляторів, яка дозволяє існування таких режимів.

### 4.5.1. Стаціонарні стійкі режими

Теорема 4.4.1 показує, що множина  $FP$  містить всі положення рівноваги системи (4.5) як ізольовані для підмножини  $FP_{0\pi}$ , так і неізольовані для підмножини  $\overline{\mathcal{M}}^{(N)}$ . Деякі з цих точок є стійкими, інші — ні. Стійкість усіх особливих точок залежить від параметра  $k$ . Подальша наша мета описати всі можливі стійкі режими та параметричні області їх стійкості.

#### 4.5.1.1. Стійкі стани з координатами 0 та $\pi$

Кожна з точок множини  $FP_{0\pi}$  має координати виключно рівні 0 або  $\pi$ . У загальному випадку, така точка може бути представлена у вигляді:

$$\Phi(N_1, N_2, n_1, n_2) = \underbrace{(0, \dots, 0, \pi, \dots, \pi)}_{N_1-1}, \underbrace{(0, \dots, 0, \pi, \dots, \pi)}_{N_2}.$$

З урахуванням перестановок таких точок може бути  $C_{N_1-1}^{n_1} \cdot C_{N_2}^{n_2}$ . Якобіан лінеаризованої системи у такій точці має вигляд:

$$J(N_1, N_2, n_1, n_2) = \begin{pmatrix} A_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{2} & A_2 & -\mathbf{2} & \mathbf{2} \\ -\mathbf{1} + \mathbf{k} & \mathbf{1} - \mathbf{k} & A_3 & \mathbf{1} - \mathbf{k} \\ -\mathbf{1} - \mathbf{k} & \mathbf{1} + \mathbf{k} & -\mathbf{1} - \mathbf{k} & A_4 \end{pmatrix},$$

де  $A_1, A_2, A_3$  та  $A_4 \in n_1, (N_1 - n_1 - 1), n_2$ , та  $(N_2 - n_2)$ -вимірними квадратними матрицями такими, що:

1.  $A_1$  має  $N - 2n - 2$  на діагоналі та 0 за її межами,
2.  $A_2$  має  $-N + 2n + 4$  на діагоналі та 2 за її межами,
3.  $A_3$  має  $k(N - 2n - 1) - 1$  на діагоналі та  $k - 1$  за її межами,
4.  $A_4$  має  $k(-N + 2n + 3) + 1$  на діагоналі та  $k + 1$  за її межами.

Тут ми використали позначення  $n = n_1 + n_2$ . Жирним шрифтом ми позначили квадратні матриці відповідних розмірностей, заповнені однаковими елементами: 0, -2,  $-1 + k$ , і так далі.

Тип вказаної матриці Якобіану дозволяє нам трансформувати її спочатку до блочно-трикутної та, скориставшись методом математичної індукції, підрахувати власні значення. Ми не будемо тут наводити дуже громіздкі перетворення для знаходження власних значень матриці. Для знаходження стійкості положень та визначення біфуркацій цих точок нам в основному потрібні лише вирази дійсних частин власних значень, оскільки типи біфуркацій дуже обмежені і не вимагають більш детальної інформації (описано вище). Тому в подальшому ми будемо демонструвати лише остаточний результат досліджень, без проміжних перетворень. Обчислення показують, що деякі точки з множини  $FP_{0\pi}$  є стійкими для певних значень параметру  $k$ , а інші є нестійкими (нестійкі вузли, сідла чи вироджені сідла) для усіх значень  $k$ . Стійкі режими можна підрозділити на кілька груп (як схематично показано на рис.8.20).

**Синхронізація з одним нонконформістом ( $S_1$ -стан).** Початок координат системи (4.5) відповідає режиму повної синхронізації всіх осциляторів  $\Phi_{sync} = (0, \dots, 0)$ . У цьому випадку конформісти виграють змагання, синхронізуючись всередині своєї групи і синхронізуючи з собою групу нонконформістів. У термінах параметрів порядку  $R = 1$ , що приводить до  $r_1 = r_2 = 1$ ,  $\delta = 0$ . Як ми зазначали раніше, така ситуація відбувається для стандартної моделі Курамото, тобто для  $N_1 = N$ , тобто коли система складається лише з конформістів. У випадку долучення конформістів до загальної мережі ситуація зміниться. Додатні значення параметру  $k = K_2/K_1 > 0$  описують ситуацію двох різних груп конформістів (які згодні синхронізуватись) і, отже, у цьому випадку положення  $\Phi_{sync}$  також є стійким. Очевидно, що нонконформісти почнуть відщеплюватись від загальної груп у разі свого існування, тобто при  $N_2 \geq 1$  та  $k < 1$  (дві групи мають зв'язки  $K_1, K_2$  різного знаку). Позначимо  $k_{S_1}$  перше негативне параметричне значення параметру  $k$ , коли точка  $\Phi_{sync}$  втрачає свою стійкість (індекс параметру  $S_1$  натякає на тип іншого режиму, що з'явиться після біфуркації). Значення  $k_{S_1}$  визначається у залежності від кількості конформістів наступним чином:

$$k_{S_1} = \begin{cases} 0, & N_1 = 1, \dots, N - 2, \\ -\frac{1}{N-1}, & N_1 = N - 1, \\ -\infty, & N_1 = N. \end{cases}$$

Останнє означає що лише один нонконформіст у системі ( $N_1 = N - 1 \iff N_2 = 1$ ) може бути притягнутий синхронною групою з  $N - 1$  конформістів. Такий режим, який ми називаємо  $S_1$ -режимом, виникає при

$$k \in [-1/(N-1), 0].$$

Такий режим є можливим виключно для скінченно-вимірної з одним нонконформістом, оскільки для позитивної та негативної осциляторних фракцій виконується  $p \rightarrow 1, q \rightarrow 0$  при  $N \rightarrow \infty$ . Зауважимо, що вищевказана формула включає очевидний випадок повної синхронізації, що відповідає системі з



двома групами конформістів  $K_1 > 0$  та  $K_2 > 0$ .

$\pi$ -стан ( $\pi S$ ). Слідуючи за [167], будемо називати  $\pi$ -станом режим прямої антифазної поляризації груп конформістів та нонконформістів, тобто при  $r_1 = r_2 = 1$ ,  $\delta = \pi$ . На рис. 8.20(d) показано приклад розподілу осциляторів по колу для такого режиму, коли  $N_1 = 4$ ,  $N_2 = 3$ . Координати точок, що відповідають  $\pi$ -стану, розподіляються згідно наступному виразу:

$$\Phi(N_1, N_2) = \left( \underbrace{0, \dots, 0}_{N_1-1}, \underbrace{\pi, \dots, \pi}_{N_2} \right) \in \mathbb{T}^{N-1}, \quad N_1 = 0, \dots, N-1.$$

Ці точки є асимптотично стійкими, коли

$$k < k_{\pi S} = -\frac{N_2}{N_1} \quad \text{для} \quad N_1 > N_2, \quad N \geq 3.$$

Таким чином,  $\pi$ -стан є можливим лише тоді, коли конформісти домінують над нонконформістами. Можна перекотись у тому, що загальний параметр порядку  $R = (N_1 - N_2)/N = 2p - 1$ , коли  $N_1 > N_2$ . Результати відносно стійкості точок  $\Phi(N_1, N_2)$  узгоджуються з результатами роботи [167], які були представлені у термінах параметрів  $(p, C)$ .

$\pi$ -подібний стан ( $\pi S_1$ ): **Один нонконформіст-ренегат.** У додаток до режимів повної синхронізації та  $\pi$ -стану система (4.5) може мати деякі інші асимптотично стійкі положення рівноваги з множини  $FP_{0\pi}$ . Координати цих положень рівноваги описуються виразом:

$$\Phi_1(N_1, N_2) = \left( \underbrace{0, \dots, 0}_{N_1-1}, \underbrace{0, \pi, \dots, \pi}_{N_2} \right) \in \mathbb{T}^{N-1}, \quad N_1 = 1, \dots, N-2.$$

Вони є стійкими, коли

$$k \in \left( -\frac{N_2}{N_1}; -\frac{N_2-2}{N_2} \right) \quad \text{для} \quad 2 \leq N_2 \leq N_1 + \frac{1 - (-1)^N}{2}.$$

Тобто система знаходиться у режимі, коли всі конформісти є синхронізованими у своїй групі і  $N_2 - 1$  нонконформістів також синхронізовані у своїй,

але один *нонконформіст-“ренегат”* приєднався до групи конформістів (як зображено на рис. 8.20(i)). Відмітимо, що цей випадок відсутній у класифікації стійких режимів у роботі [167]. Частковий параметр порядку групи конформістів у цьому випадку  $r_1 = 1$  у той час, як параметр порядку нонконформістів  $r_2 = (N_2 - 2)/N_2$  та фазовий зсув  $\delta = \pi$ . Загальний параметр порядку має вигляд:

$$R = \frac{|(N_1 + 1) - (N_2 - 1)|}{N} = \frac{N_1 - N_2 + 2}{N} = 2p - 1 - \frac{2}{N}.$$

Цей параметр порядку залежить не лише від розмірів фракцій  $p$ ,  $q$ , а також від числа осциляторів  $N$ . Біфуркаційне значення  $k_{\pi S_1} = -(N_2 - 2)/N_2$  також не може бути виражено з використанням лише значень розмірів осциляторних фракцій. Таким чином,  $\pi S_1$ -стан можливий виключно для *скінченно-вимірних систем*, що і пояснює відсутність цього стану у класифікації нескінченно-вимірних систем Х. Хонг та С. Строгатца.

**$\pi$ -стан з нульовим параметром порядку ( $\pi S_M$ ).** Всі точки многовиду  $\overline{\mathcal{M}}^{(N)}$  з координатами 0 та  $\pi$  належать перетину множин  $\pi S_M = \mathcal{M} \cap FP_{0\pi}$ . Множина  $\pi S_M$  є непорожньою лише тоді, коли  $N$  є парним числом, а положення рівноваги мають  $N/2 - 1$  нульових координат та  $N/2$  координат різних  $\pi$  (з усіма перестановками 0 та  $\pi$ ). Такі точки є стійкими лише у одному трансверсальному до  $\mathcal{M}^{(N-1)}$  напрямку для значень параметру

$$k < k_{\pi S_M} = -\frac{N_1}{N_2}, \quad N_2 = 1, \dots, N - 1,$$

та вони є нейтральними у інших  $N - 2$  напрямках. Обчислення параметрів порядку показують, що виконуються співвідношення

$$r_1 = r_2 = 0 \quad \text{або} \quad N_1 r_1 = N_2 r_2$$

за винятком спеціального випадку  $N_1 = N_2 = N/2$ , коли

$$r_1 = r_2 = 1, \quad R = 0, \quad \delta = \pi.$$

Це означає, що стійка точка  $\pi S_{\mathcal{M}}$  належить перетину множин  $IS \cup B\pi S$  (ці множини будуть описані нижче) або множині  $P$  особливих точок, що відображають ситуацію рівної кількості конформістів та нонконформістів.

**Зауваження 4.5.1.** Множина стійких положень рівноваги системи (4.5) є суттєво вужчою за множину  $FP$ . Існує значна кількість положень рівноваги з множини  $FP_{0\pi}$ , які не є стійкими для будь-яких значень параметру  $k$  (джерела, сідла, вироджені сідла). Множина

$$FP_{0\pi}^{stable}(k) = S_1 \cup \pi S \cup \pi S_1 \cup \pi S_{\mathcal{M}}$$

є множиною всіх точок, що можуть бути стійкими для відповідних значень параметру  $k$ .

Множина стійких точок  $FP_{0\pi}$  може бути розширеною, якщо система (4.5) розглядається з більш загальною функцією взаємодії, яка має вищі гармоніки. Припустимо, що функцією взаємодії є довільна непарна періодична функція  $f(x)$  така, що  $f(\pi) = 0$ . Комп'ютерна симуляція показує, що всі точки у множині  $FP_{0\pi}$  стають стійкими при правильному підборі параметрів  $k$ ,  $a = \frac{df(x)}{dx} \Big|_{x=0}$  та  $b = \frac{df(x)}{dx} \Big|_{x=\pi}$ . Аналітичне доведення цього факту є доволі складною проблемою.

#### 4.5.1.2. Інваріантний многовид $\overline{\mathcal{M}}^{(N)}$ : нонконформісти виграють

Другою підмножиною (окрім  $PF_{0\pi}$ ), що була описана Теоремою 4.4.1, є многовид  $\overline{\mathcal{M}}^{(N)}$ , який цілком складається з положень рівноваги та має загальний параметр порядку  $R = 0$ . Цей многовид є об'єднанням двох множин  $\overline{\mathcal{M}}^{(N)} = IS \cup B\pi S$  (описаних у роботі [167]), перша з яких  $IS$  називається *некогерентним станом*, а друга  $B\pi S$  — *розмитим  $\pi$ -станом*.

Ми нагадуємо, що  $\dim(\overline{\mathcal{M}}^{(N)}) = N - 3$  у просторі  $\mathbb{T}^{N-1}$  системи у фазових різницях. Отже, дві координати кожної з точок цього многовиду  $\varphi_{N-2}, \varphi_{N-1}$  можуть бути представлені у вигляді функцій від інших координат  $\varphi_1, \dots, \varphi_{N-3}$  згідно формулам (2.27), (2.28) з підрозділу 2.4. Для спрощення позначень будемо також писати  $\mathcal{M} := \overline{\mathcal{M}}^{(N)}$ .

Наступне твердження буде сформульоване для більш загального випадку, ніж той, який розглядається у даному підрозділі, а саме для випадку системи

(4.5) з довільним фазовим зсувом  $\alpha$  (у даному підрозділі ми розглядаємо лише випадок  $\alpha = 0$ ).

**Лема 4.5.1.** Ранг Якобіану системи у фазових різницях (4.5) є наступним:

$$\text{rank}(\mathcal{J}) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } (\varphi_1, \dots, \varphi_{N-1}) \in \pi S_{\mathcal{M}}, \\ 2, & \text{якщо } (\varphi_1, \dots, \varphi_{N-1}) \in \mathcal{M} \setminus \pi S_{\mathcal{M}}, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} de\mathcal{J} &= \mathcal{J}(\varphi_1, \dots, \varphi_{N-1}, k, \alpha) = \partial(G_1, \dots, G_{N-1})/\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_{N-1}), \\ G_i(\varphi_1, \dots, \varphi_{N-1}, k, \alpha), \quad i = 1, \dots, N-1, & \text{— праві частини системи (4.5)}. \end{aligned}$$

**Доведення.** Як було показано у Лемі 4.3.2 многовид  $\mathcal{M}$  цілком складається з особливих точок для довільних значень параметрів  $\alpha$  та  $k$ . Точки даного многовиду розділяються на дві підмножини  $\pi S_{\mathcal{M}}$  та  $\mathcal{M} \setminus \pi S_{\mathcal{M}}$ , відносно кількості нульових власних значень. Далі доведення даної леми є аналогічним доведенню Лемі 2.4.2. У обох лемах розглядається один і той же об'єкт, доводяться ідентичні твердження, але для різних осциляторних систем (2.4) та (4.5). Відмінність у доведеннях полягає у тому, що у даному випадку елементи матриці перших  $N_1 - 1$  рядків та останніх  $N_2$  рядків мають різну структуру, а фазовий зсув  $\alpha$  є константою.  $\square$

Лема 4.5.1 виконується для довільних фазових зсувів  $\alpha$ , тобто для більш загальної системи, ніж модель Хонг–Строгатца (при  $\alpha = 0$ ). Тобто наявність фазового зсуву у системи з притягуючими та відштовхуючими елементами не лише не руйнує інваріантну множину  $\mathcal{M}$  та її структуру, а і зберігає певні властивості стійкості для двох різних типів симетрії.

З Лемі 4.5.1 випливає, що  $N - 3$  власних значень особливих точок многовиду є

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_{N-3} = 0.$$

Інші два власні значення є функціями координат точок многовиду:

$$\lambda_{N-2} = h_1(\varphi_1, \dots, \varphi_{N-3}), \quad \lambda_{N-1} = h_2(\varphi_1, \dots, \varphi_{N-3}).$$

У дво-кластерному стані ще одне власне значення рівне нулю ( $\lambda_{N-2} = 0$ ).

Інваріантний многовид  $\mathcal{M}$  є неперервною множиною неізолюваних особливих точок. Згідно Лема 4.5.1 стійкість цих точок всередині многовиду є нейтральною. Стійкість кожної точки у двох трансверсальних до многовиду напрямках залежить від положення цієї точки на многовиді. Стійкість двох різних точок многовиду може бути різною навіть для одних і тих же значень параметрів системи.

Для опису біфуркацій точок многовиду потрібно розглядати параметр системи, як функцію, залежну від змінних на многовиді  $k = k(\mathcal{M}) = k(\varphi_1, \dots, \varphi_{N-1})$ . Тоді принаймні одна точка многовиду є трансверсально стійкою, якщо  $k < k_{\max}(\mathcal{M}) = \max_{\varphi_j \in \mathcal{M}} k(\varphi_1, \dots, \varphi_{N-1})$  та всі точки цього многовиду є трансверсально стійкими, якщо  $k < k_{\min}(\mathcal{M}) = \min_{\varphi_j \in \mathcal{M}} k(\varphi_1, \dots, \varphi_{N-1})$ . Також зазначимо, що *теорія біфуркація без параметрів* (див. роботи [128, 218] та наведений у них список літератури) може бути гарно застосована для дослідження якісної структури многовиду  $\mathcal{M}$ .

**Некогерентний стан** (*IS* — Incoherent State). Відповідно до роботи [167] будемо називати *некогерентним (інкогерентним) станом* режим з  $r_1 = r_2 = 0$  (рис. 8.20(g)). Існує многовид особливих точок з властивостями  $r_1 = r_2 = 0$ , що є підмножиною многовиду  $\mathcal{M}$ , оскільки загальний параметри порядку у цьому випадку  $R = 0$ . Позначимо  $\mathcal{M}_s \in \mathbb{T}^N$  множини, для яких  $r_s = 0$ ,  $s = 1, 2$ . Кожна з цих множин є  $(N_s - 2)$ -вимірною у  $\mathbb{T}^N$ . Отже, множина

$$\mathcal{M}_{IS} \{(\theta_1, \dots, \theta_N) : (\theta_1, \dots, \theta_{N_1}) \in \mathcal{M}_1, (\theta_{N_1+1}, \dots, \theta_N) \in \mathcal{M}_2\}$$

є  $m$ -вимірною, де

$$m = m_1 + m_2, \quad m_s = \begin{cases} 0, & N_s = 0, \\ 1, & N_s = 2, \quad N_s \neq 1. \\ N_s - 2, & N_s \geq 3, \end{cases}$$

Многовид  $\mathcal{M}_{IS}$  є  $(m - 1)$ -вимірним для  $(N - 1)$ -вимірної системи (4.5) у фазових різницях.  $\dim(\mathcal{M}_{IS}) < \dim(\mathcal{M})$ , коли  $N_s \neq N$ .

Різні положення рівноваги многовиду  $\mathcal{M}_{IS}$  можуть мати різні стійкості

у двох трансверсальних до цього многовиду напрямках у залежності від їх розташування. Біфуркаційний параметр  $k_{IS} = k_{IS}(\Phi)$  є функцією, де  $\Phi$  складається з  $(m - 1)$  координат  $\varphi_i$ . Існує інтервал

$$[k_{\min(IS)}, k_{\max(IS)}] = \left[ \min_{\Phi \in \mathcal{M}_{IS}} k(\Phi), \max_{\Phi \in \mathcal{M}_{IS}} k(\Phi) \right]$$

значень параметра  $k$  де многовид поступово втрачає стійкість своїх точок.

Як приклад розглянемо випадок  $N = 7$ ,  $N_1 = 4$ ,  $N_2 = 3$ . Многовид  $\mathcal{M}_{IS}$  є дво-вимірним у фазовому просторі  $\mathbb{T}^6$ . Він може бути описаний дво-параметричною множиною

$$\mathcal{M}_{IS} = (\pi, \phi_1, \phi_1 + \pi, \phi_2, \phi_2 + 2\pi/3, \phi_2 + 4\pi/3) \in \mathbb{T}^6$$

з  $r_1 = r_2 = 0$ . Обчислення показують, що біфуркаційний параметр  $k$  залежить лише від першого з параметрів многовиду і  $\mathcal{M}_{IS}$  є стійким, коли

$$k < k(\mathcal{M}_{IS}) = k_{IS}(\phi_1) = -4(1 + |\cos \phi_1|)/5.$$

Отже,  $[k_{\min(IS)}, k_{\max(IS)}] = [-8/3, -4/3]$ .

**Розмитий  $\pi$ -стан** (*B $\pi$ S* — blurred  $\pi$  state). Наступним режимом, можливим для системи (4.1) є так званий *розмитий  $\pi$ -стан*, який задовольняє умовам  $pr_1 = qr_2$  (що еквівалентно  $N_1 r_1 = N_2 r_2$ ) та  $\delta = \pi$  (див. рис. 8.20(f)). Назва відображає те, що конформісти концентруються навколо синхронного стану, розміщуючись у деякій області (не в одній точці), а нонконформісти концентруються в області протифази конформістам. Розмитий  $\pi$ -стан є підмножиною многовиду  $\mathcal{M}$ . Більш точно

$$\mathcal{M}_{B\pi S} = \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_{IS}, \quad \dim(\mathcal{M}_{IS}) = N - 3 \quad \text{у фазовому просторі } \mathbb{T}^{N-1}.$$

Таким чином  $\mathcal{M}_{B\pi S}$  є  $(N - 3)$ -вимірною множиною неізольованих положень рівноваги системи у фазових різницях. Усі ці положення рівноваги мають  $(N - 3)$  нульових власних значень всередині многовиду та два інших власних значення, що є функціями координат на многовиді і які характеризують

стійкість у трансверсальних до многовиду напрямках. Як і у попередньому випадку є два важливих біфуркаційних значення  $k_{\min(B\pi S)}$  та  $k_{\max(B\pi S)}$ .

Як приклад, розглянемо систему з чотирьома конформістами та трьома нонконформістами.  $\dim(\mathcal{M}_{B\pi S}) = 4$  у фазовому просторі системи (4.5). Перевіримо стійкість одно-параметричного многовиду  $\mathcal{M}_{B\pi S}$ , який можна представити у вигляді:

$$\mathcal{M}_{B\pi S}(\phi) = (0, \pi, \varphi, 2\pi/3, 4\pi/3, \varphi + \pi) \in \mathbb{T}^6.$$

Обчислення показують, що локальні параметри порядку:

$$r_1 = \frac{1}{4}\sqrt{2(1 + \cos \varphi)}, \quad r_2 = \frac{1}{3}\sqrt{2(1 + \cos \varphi)}.$$

Кожна з точок  $\mathcal{M}_{B\pi S} \in$  нейтральною у чотирьох напрямках всередині многовиду та стійкою у двох трансверсальних напрямках, коли

$$k < k_{B\pi S}(\phi) = -\frac{2 \left( 2 \sin^2 \phi + 6 + \sqrt{36 + 13 \sin^2 \phi - 4 \sin^2(2\phi)} \right)}{4 \cos \phi + 5}.$$

Параметрична область зміни стійкості є досить широкою:  $k_{B\pi S(\phi)} \in [-6, -8/3]$ . Приклад показує, що трансверсальна стійкість, параметри порядку та параметричні області стійкості суттєво залежать від розташування точки на  $B\pi S$ -многовиді.

І остаточно сформулюємо основні властивості режимів глобальної перемоги нонконформістів, тобто коли  $R = 0$  у термінах оригінальної системи (4.2).

1. Кожен режим з  $R = 0$  є неізолюваним;
2. Всі розв'язки з  $R = 0$  складають неперервну  $(N - 2)$ -вимірну множину (інваріантний многовид)  $\mathcal{M}$ ;
3.  $\mathcal{M}$  є об'єднанням некогерентних режимів та розмитих  $\pi$ -станів;
4. Кожен режим є стійким у двох трансверсальних до многовиду напрямках та нейтральним у інших напрямках;

5. Трансверсальна стійкість є різною для різних розв'язків многовиду та залежить розташування їх на  $\mathcal{M}$ .
6. Біфуркаційні значення параметру  $k$  також залежать від положення розв'язку на многовиді.

#### 4.5.2. Нестационарні стійкі режими

Вище були описані режими, що відносяться до положень рівноваги системи у фазових різницях. Остання властивість спричиняла постійність параметру порядку  $R = \text{const}$ . Далі розглянемо режими з непостійним параметром порядку  $R = R(t)$ .

*Мандрівні хвилі* ( $TW$  — traveling waves). Розглянемо режим, коли всі конформісти є синхронізованими ( $r_1 = 1$ ), а взаємне розташування нонконформістів змінюється у фазовому просторі з часом (параметр порядку у цьому випадку не може бути константою  $r_2 = r_2(t)$ ). Тоді кут  $\delta = \delta(t)$  також не може бути константою, у протизагагу до попередніх режимів, де  $\delta = 0$  або  $\delta = \pi$ . Глобальний параметр порядку тоді також не є постійним:  $R = R(t)$ . Режим з такими властивостями був названий режимом (станом) *мандрівної хвилі* у [167]. Слід зазначити, що термін "мандрівна хвиля" є коректним для випадку дуже великої (чи нескінченної) кількості осциляторів, зокрема нонконформістів (як у [167, 169]). У випадку, коли число осциляторів є порівняно невеликим, важко говорити про "хвилі" у звичайному значенні цього слова. Однак ми зберігаємо цей термін для систем довільної розмірності, оскільки властивості режимів з  $r_1 = 1$  та  $r_2 = r_2(t)$  є однаковими для довільної кількості осциляторів та подібних параметричних областей.

Умова  $r_1 = 1$  редукує систему (4.5) до системи на  $N_2$ -вимірному многовиді  $\mathcal{P}_{N_2}^1 \in \mathbb{T}^{N-1}$  ( $\varphi_i = 0$ ,  $i = 1, \dots, N_1 - 1$ ):

$$\frac{d\varphi_i}{dt} = -kN_1 \sin \varphi_i - \sum_{j=1}^{N_2} \sin \varphi_j - k \sum_{j=1, j \neq i}^{N_2} \sin(\varphi_i - \varphi_j), \quad i = 1, \dots, N_2. \quad (4.10)$$

Стійкість режимів мандрівних хвиль може бути визначена у два кроки:



1. Знаходження фазово незамкнених граничних циклів для  $N_2$ -вимірної системи (4.10) всередині многовиду;
2. Дослідження стійкості розв'язків у трансверсальних до многовиду напрямках.

Перші  $N_1 - 1$  рівнянь системи (4.5):

$$\frac{d\varphi_i}{dt} = -\sin \varphi_i - \sum_{j=1}^{N_2} \sin \varphi_j - \sum_{j=1, j \neq i}^{N_2} \sin(\varphi_i - \varphi_j), \quad i = 1, \dots, N_1 - 1, \quad (4.11)$$

відповідають за трансверсальну стійкість многовиду. Ця підсистема має змінні  $(\varphi_1, \dots, \varphi_{N_1-1})$  та параметри  $(\varphi_{N_1}, \dots, \varphi_{N-2})$ . Якобіан лінеаризації системи (4.11) у початку координат має наступні власні значення:

$$\lambda_i = -N_1 - \sum_{j=N_1}^{N-1} \cos \varphi_j, \quad i = 1, \dots, N_1 - 1.$$

З останнього випливає, що многовид  $\mathcal{P}_{N_1}^1$  є трансверсально стійким для  $N_1 \geq N_2$ . Отже, всі стійкі траєкторії (4.11) є стійкими для (4.5) коли  $N_1 \geq N_2$ . Остання умова є необхідною, але не достатньою для трансверсальної стійкості.

Відмітимо, що режим, коли всі нонконформісти є синхронізованими ( $r_2 = 1$ ), але принаймні один конформіст є несинхронізований з іншими ( $r_1 \neq 1$ ) є неможливим. Це можна пояснити трансверсальною нестійкістю інваріантного многовиду  $\mathcal{P}_{N_1}^2(\varphi_{N_1}, \dots, \varphi_{N-1})$  для всіх значень  $k$ , коли  $r_1 \neq 1$ .

Система (4.10) має симетрію перестановок змінних  $\varphi_i$ . Режим мандрівних хвиль відповідає *фазово незамкненим* граничним циклам (негомологічним нулю періодичним орбітам на торі) для систем у фазових різницях. Ці цикли виникають та зникають внаслідок біфуркації складки стійких та нестійких циклів або у результаті сідло-зв'язної біфуркації. Існування стійкого граничного циклу системи (4.10) є необхідною умовою існування режимів мандрівних хвиль.

Система (4.10) не може мати режим мандрівних хвиль у найпростішому нетривіальному випадку  $N = 3$ ,  $N_1 = 2$ , оскільки єдино можливий такий ре-

жимом мусить бути на лінії  $\varphi_1 = 0$ . Однак, згідно Лемі 4.4.1 два положення рівноваги знаходяться на цій лінії у точках  $0$  та  $\pi$ , незалежно від значення параметра  $k$ , і вони запобігають вільному проходженню фазової точки уздовж лінії. З тієї ж причини система з двома конформістами та довільною кількістю нонконформістів також не може мати мандрівних хвиль. Аналіз системи (4.10) у дво-вимірному випадку показує, що вона не має стійких граничних циклів для довільних значень параметрів  $N_1, k$ . Ця система має дві квадратні інваріантні області у  $\mathbb{T}^2$ , обмежені інваріантними лініями  $\varphi_2 = \pm\varphi_1$ . З аналогічних міркувань система (4.10) може мати мандрівні хвилі для довільної кількості осциляторів лише за умови  $N_1 \in [3, N - 1]$ .

Якщо всі конформісти синхронізовані, то періодичні, квазі-періодичні та навіть хаотичні мандрівні хвилі можуть існувати у підмножині нонконформістів (рис. 8.21(ліва панель)). Ідентифікація цих типів динаміки, а також визначення параметричних областей їх існування проводилось за допомогою чисельного аналізу.

**Періодичні мандрівні хвилі ( $TW_P$ ).** У цьому режимі всі фазові різниці нонконформістів  $\varphi_{N_1+1}, \dots, \varphi_N$  є періодичними (система має стійкий граничний цикл на інваріантному многовиді  $\mathcal{P}_{N_1}^1$ ). Це значить, що частковий параметр порядку  $r_2(t)$  є періодичним і, отже,  $R(t)$  є періодичним також. Періодичні мандруючі хвилі виникають, коли  $k \in (k_P, k_Q)$  для  $k_Q < 0$  ( $k_Q$  зазвичай близьке до нуля). Найменшими розмірностями для існування даного режиму є  $N = 5$  та  $N_1 = 2$ . Крім того, чотири-вимірна система з трьома нонконформістами має стійкий періодичний режим для малих (за модулем) негативних значень параметра  $k$ . Такий режим може формально вважатись  $TW$  станом з одним конформістом (звичайно  $r_1 = 1$  у цьому випадку).

**Квазі-періодичні мандрівні хвилі ( $TW_Q$ ).** Система може мати стійкі квазі-періодичні режими ((с) у правій панелі рис. 8.21) з квазі-періодичними функціями  $r_2(t)$  та  $R(t)$ . Цей режим виникає у дуже вузькій параметричній області  $k \in (k_Q, 0)$ . Коли  $k = 0$  система (4.5) стає виродженою та має  $N_2$  еквівалентних рівнянь. Таким чином, інваріантний підпростір  $\mathcal{P}_{N_1}^1$  заповнений прямими лініями при біфуркаційному значенні  $k = 0$ . Вузький квазі-періодичний атрактор виникає, коли  $k$  стає негативним. Другий

тим мандруючих хвиль виникає як перехідний режим від періодичного до хаотичного атрактора (згідно роботам [279, 244]) для  $k \in (k_C, k_P)$ . Перехід від періодичного до квазі-періодичного, а тоді і до хаотичного атрактора показано на рис. рис. 8.21 у правій панелі. Найменші розмірності системи для існування квазі-періодичного режиму:  $N_1 = 2$ ,  $N_2 = 3$ .

**Мандрівний хаос ( $TW_C$ ).** Детермінованих хаос можливий, коли  $N_2$ -вимірна система (4.10) має фазово-незамкнуту хаотичну траєкторію. Хаотичний атрактор виникає внаслідок біфуркацій гомоклінічних дотиків або внаслідок біфуркаційного сценарію Руеля-Такенса-Ньюхауса [279, 244]. Хаос існує, коли  $k \in (k_{C_1}, k_{C_2})$ . Найменше число осциляторів, що вимагається для існування мандрівного хаосу, є  $N_1 = N_2 = 3$ . У цьому частковому випадку  $k_{C_1} \approx -0.3554$ ,  $k_{C_2} \approx -0.2174$ .

## 4.6. Система з фазовим зсувом

Розглянемо загальний випадок системи (4.2) з двома типами взаємодії, а саме коли ця система має ненульовий фазовий зсув  $\alpha \in \mathbb{T}^1$ . Модель Хонг-Строгатца є частковим випадком даної системи не лише при  $\alpha = 0$ . При  $\alpha = \pi$  взаємозв'язок між осциляторами мініє місцями конформістів та нонконформістів. Відмітимо, що при  $k = 1$  отримуємо стандартну модель Курамото-Сакагучі (динаміку якої детально описану у підрозділі 2.3), що відповідає наявності у системі лише конформістів при  $N_1 = N$  або лише нонконформістів при  $N_2 = N$ .

### 4.6.1. Система двох осциляторів

Найпростішою можливою системою з двома типами взаємодії є модель з одним конформістом та одним нонконформістом:  $N_1 = N_2 = 1$ . У цьому випадку система (4.2) зводиться до одного рівняння типу (4.5). Останнє рівняння має лише два положення рівноваги  $\varphi_1 = \pi$  та  $\varphi_1^* = -2 \arctan\left(\frac{k-1}{k+1} \tan \alpha\right)$ . Таким чином, рівняння має три лінії транскритичних біфуркацій  $k = -1$ ,  $\alpha = \pm\pi/2$ , що виникають у точці  $\varphi_1 = \pi$ . Точка  $\varphi_1 = \pi$  відповідає режиму антифази конформіст-нонконформіст з  $R = 0$ . Цей режим є стійким у параметричних областях  $k < -1$ ,  $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$  та  $k > -1$ ,  $\alpha \in (\pi/2, 3\pi/2)$ .

### 4.6.2. Система трьох осциляторів

Для випадку  $N = 3$  вже можливі дві конфігурації  $N_1 = 1, N_2 = 2$  та  $N_1 = 2, N_2 = 1$  (випадки  $N_1 = 3$  та  $N_1 = 0$  відповідають моделі Курамото–Сакагучі і були розглянуті у розділі 1). Оскільки число конформістів у першому випадку є рівним числу нонконформістів у другому, то ситуація задовольняє симетрії  $\gamma_3$  (4.7). У даному випадку ця дія має вигляд

$$\gamma_3 : (\varphi_1, \varphi_2, \alpha, k, t) \mapsto (-\varphi_1, \varphi_2 - \gamma_1, \alpha, 1/k, -t). \quad (4.12)$$

Параметр  $k$  першої системи трансформується у параметр  $1/k$  другої. Обидві редуковані системи (4.5) для  $N = 3$  мають нуль-вимірні інваріантні многовиди  $\overline{\mathcal{M}}^{(N)}$ , що складаються з двох частин  $\overline{\mathcal{M}}_1^{(3)} = (2\pi/3, 4\pi/3)$ ,  $\overline{\mathcal{M}}_2^{(3)} = (4\pi/3, 2\pi/3)$ . Дія  $\gamma_3$  переводить  $\overline{\mathcal{M}}_1^{(3)} \mapsto \overline{\mathcal{M}}_2^{(3)}$  та навпаки.

Система (4.5) має інваріантний многовид  $\mathcal{P}_1^1 = \{(\varphi_1, \varphi_2) : \varphi_1 = 0\}$  для  $N_1 = 2$ . Система (4.5) має інваріантний многовид  $\mathcal{P}_1^2 = \{(\varphi_1, \varphi_2) : \varphi_1 = \varphi_2\}$  для  $N_2 = 2$ . Дія  $\gamma_3$  переводить многовид  $\mathcal{P}_1^1$  першої системи у  $\mathcal{P}_1^2$  другої. Інваріантний многовид  $\mathcal{P}_1^1$  не розділяє фазовий простір  $\mathbb{T}^2$  на інваріантні області (існує лише одна інваріантна область). Ситуація суттєво відрізняється від стандартної моделі Курамото–Сакагучі, яка має  $\mathbb{Z}_3$  симетрію і, внаслідок цього, її фазовий простір розділяється на дві інваріантні області трьома інваріантними многовидами  $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0, \varphi_1 = \varphi_2$ .

Фазові портрети для моделі *двох конформістів* ( $N_1 = 2$ ) та *одного нонконформіста* ( $N_2 = 1$ ) для різних значень параметрів зображено на рис. 8.23. У даному випадку система (4.5) має симетрію  $\mathbb{Z}_2$  задану дією  $\gamma : (\varphi_1, \varphi_2) \mapsto (-\varphi_1, \varphi_2 - \varphi_1)$ . Біфуркаційні лінії даної системи у просторі параметрів  $(\alpha, k)$  показано на рис. 8.22. Система має наступні біфуркації:

- 1) Біфуркація Андронова–Хопфа (АН) у інваріантних многовидах  $\mathcal{M}_i^{(3)}$ ,  $i = 1, 2$ , що відбувається на лініях  $\alpha = \pm\pi/2$ .
- 2) Транскритична біфуркація (ТС) також у  $\mathcal{M}_i^{(3)}$  при  $k = -1/2$ . Дана біфуркація відбувається з джерелами і сідлами при  $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$  та з стоками та сідлами при  $\alpha \in (\pi/2, 3\pi/2)$ .
- 3) Сідло–вузлова біфуркація (SN) на інваріантному многовиді  $\mathcal{P}_1^1$ . Ця біфур-

кація генерує мандрівну хвилю, що відповідає зникненню особливої точки на  $\varphi_1 = 0$  та її трансформації у стійкий (для  $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$ ) чи нестійкий (для  $\alpha \in (\pi/2, 3\pi/2)$ ) граничний цикл, що є фазово-незамкнутим вздовж  $\varphi_2 = 0$ . Вироджена біфуркація у  $\alpha = \pm\pi/2$  змінює стійкість цього циклу. Дана біфуркація відбувається одночасно з АН біфуркацією.

4) Вилкова біфуркація (PF), що відбувається на інваріантному многовиді  $\mathcal{P}_1^1$  у трансверсальному до нього напрямку.

5) Сідло-зв'язна (гетероклінічна) біфуркація (НС), що призводить до виникнення гомоклінічних та гетероклінічних граничних циклів у біфуркаційний момент. Гомоклінічні та гетероклінічні цикли (що складаються з двох сідлових чи сідло-вузлових точок та їх одно-вимірних інваріантних многовидів) бувають двох типів: фазово-замкнуті (рис. 8.23(b), (e)–(h)) та фазово-незамкнуті (рис. 8.23(b), (f)–(h), (n), (o)). Ці гетероклінічні біфуркації є переходом до виникнення фазово-замкнутих та фазово-незамкнутих граничних циклів (рис. 8.23(c), (f)–(h)). Крім окремих граничних циклів можуть утворюватись однопараметричні сім'ї фазово-замкнутих та незамкнутих періодичних орбіт, що обмежуються гомо чи гетероклінічними циклами (рис. 8.23(b), (e)–(h)). Такі конструкції трапляються при  $(\alpha, k) = (\pm\pi/2, -1)$  при перетині кількох ліній у параметричному просторі.

6) Біфуркації перетворення гомоклінічних циклів у гетероклінічні при русі параметру  $k$  вздовж біфуркаційних ліній  $\alpha = \pm\pi/2$  (як наприклад перетворення від фазового портрету рис. 8.23(b) через рис. 8.23(e) до рис. 8.23(f) при  $(\alpha, k) = (\pm\pi/2, 1)$ ).

7) Транскритичні біфуркації фазово-незамкнутих граничних циклів.

Фазово-незамкнуті граничні та гетероклінічні цикли є типовими для системи з двома типами зв'язків та фазовим зсувом (і для довільної кількості конформістів та нонконформістів при  $N \geq 3$ ). Такі траєкторії відповідають режимам мандруючих хвиль (синхронізації конформістів  $r_1 = 1$ ,  $r_2 = r_2(t) \in [0, 1]$ , рис. 8.23(d)). Може бути і більш загальна ситуація, коли обидва параметри порядків конформістів та нонконформістів є функціями часу  $r_1(t)$ ,  $r_2(t)$  та  $\delta = \delta(t)$ . Останнє відповідає існуванню стійкого фазово-незамкнутого граничного циклу з ненульовою фазовою різницею  $\varphi_1 \neq 0$

(див. рис. 8.23(j)–(m) та (p)). Система має багато біфуркаційних точок корозмірності 2, зокрема,  $SN \cap TC$ ,  $AN \cap TC$ ,  $PF \cap HC$  та інші. Багато біфуркаційних ліній перетинаються у одній точці, як це трапляється у точках  $(0, -1/2)$ ,  $(\pi, -1/2)$ ,  $(\pm\pi/2, -1/2)$ ,  $(\pm\pi/2, 1)$  та  $(\pm\pi/3, -1/2)$  параметричної площини.

Фазові портрети системи *одного конформіста* ( $N_1 = 1$ ) та *двох нонконформістів* ( $N_2 = 2$ ) можуть бути отримані з попередніх результатів для  $N_1 = 2$ ,  $N_2 = 1$  (рис. 8.23) при застосуванні симетрії, заданої дією (4.12). Зокрема, дія симетрії відобразить многовид  $\varphi_1 = 0$  системи з  $N_1 = 2$  у многовид  $\varphi_1 = \varphi_2$  системи з  $N_1 = 1$ , а частини многовиду  $\overline{\mathcal{M}}^{(3)}$  є інваріантними відносно цієї симетрії. Будь-яка біфуркаційна крива біфуркаційної діаграми рис. 8.22(права панель) відповідає певній біфуркаційній кривій на діаграмі рис. 8.22(ліва панель) після відображення  $(\alpha, k) \mapsto (\alpha, 1/k)$ . Біфуркації SN та PF тепер відповідають інваріантному многовиду  $\varphi_1 = \varphi_2$ . Біфуркаційна лінія  $k = 0$  відповідає біфуркаційній лінії на нескінченності, що не могла бути зображеною на рис. 8.22(ліворуч) для  $N_1 = 2$ . Перетин цієї лінії означає перетворення конформістів у нонконформістів та навпаки. У випадку  $k = 0$  весь фазовий простір заповнений траєкторіями, що є прямими лініями.

### 4.6.3. Система чотирьох осциляторів

У випадку  $N = 4$  є три нетривіальних розподіли конформістів та нонконформістів з  $N_1 = 1, 2, 3$ .

*Інваріантні многовиди.* Інваріантні многовиди  $\mathcal{P}_2^1$  та  $\mathcal{P}_2^2$  відповідають кластерам двох конформістів та двох нонконформістів, та є площинами у фазовому просторі  $\mathbb{T}^3$  редукованої системи (4.5). Положення інваріантних многовидів у фазовому просторі для різних конфігурацій конформістів–нонконформістів зображено на рис. 7 роботи [86, Burylko, Kazanovich, Borisuyuk]. Усі системи різних конфігурацій мають один спільний інваріантний многовид згідно Лемі 4.3.2, який складається з однопараметричних ліній  $\overline{\mathcal{M}}^{(4)}(\varphi) = (\varphi, \pi, \varphi + \pi)$  (та перестановок) у  $\mathbb{T}^3$ . Як було зазначено вище, кожна частина  $\overline{\mathcal{M}}^{(4)}$  складається з положень рівноваги, що є нейтральними між собою (одне власне значення кожної точки є нульовим) та може мати різні типи стійкості у двох трансверсальних до многовиду напрямком. Трансверсальні

власні значення до ліній  $\overline{\mathcal{M}}^{(4)}$  є різними у кожному випадку і залежними від змінної  $\varphi$ :

$$\lambda_{1,2}(\varphi) = \frac{1}{2} \left( \tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\xi \sin^2 \varphi} \right), \quad \text{де } \tau = (N_1 + \xi N_2) \cos \alpha, \quad \xi = (\xi_1 + \xi_2)(\xi_3 + \xi_4)$$

$\xi_j, j = 1, \dots, 4$ , дорівнює 1 або  $k$  так, що  $\sum_{j=1}^4 \xi_j = N_1 + kN_2$ . Таким чином можна описати трансверсальну стійкість  $\overline{\mathcal{M}}^{(4)}$ , та знайти біфуркації цих його особливих точок.

*Три конформісти та один нонконформіст.* Розглядаємо випадок  $N_1 = 3, N_2 = 1$ . Інваріантні многовиди  $\mathcal{P}_2^1$  описуються (у термінах фазових різниць) рівностями  $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0, \varphi_1 = \varphi_2$ . Фазові різниці між конформістами є обмеженими, у той час, як фазова різниця між нонконформістом та конформістом може зростати до нескінченності у  $\mathbb{R}^3$ . Система має  $\mathbb{Z}_3$  симетричну групу обертань навколо центральних ліній  $\varphi_1 = 2\pi/3, \varphi_2 = 4\pi/3$  та  $\varphi_1 = 4\pi/3, \varphi_2 = 2\pi/3$  у кожній інваріантній області.

Біфуркаційна діаграма для  $(\alpha, k)$ -параметричної площини представлена на рис. 8.24(ліворуч). З Теорема 4.4.1 відомо, що на додаток до особливих точок многовиду  $\overline{\mathcal{M}}^{(4)}$  система має вісім положень рівноваги з координатами 0 та  $\pi$ . Зникнення особливих точок  $(0, 0, 0)$  та  $(0, 0, \pi)$  після сідло-вузлової (SN) біфуркації призводить до прохідності інваріантної лінії  $\mathcal{P}_1^1 \varphi_1 = \varphi_2 = 0$ . Ця лінія є стійким фазово незамкнутим граничним циклом, коли система параметрів знаходиться всередині квазі-трикутників, сформованих SN біфуркаційними лініями та лініями транскритичних біфуркацій  $\text{TC}_{\text{cycles}}$ . Лінія HC відповідає гомоклінічній (сідло-зв'язній) біфуркації сідла на кожній з трьох інваріантних площин  $\mathcal{P}_2^i$ . Ця біфуркація призводить до виникнення трьох симетричних сідлових циклів всередині кожної інваріантної площини. Ці сідлові цикли є стійкими всередині інваріантних многовидів та нестійкими у трансверсальних до многовидів напрямках.

Симетрична транскритична біфуркація  $\text{TC}_{\text{cycles}}$  стійкого граничного циклу  $\mathcal{P}_1^1$  та трьох сідлових циклів відбувається при  $\alpha = \pm\pi/2$ . Ця біфуркація є подібною до транскритичної біфуркації сідел та джерела, описаної у підроз-

ділі 2.5.1 та проілюстрованої на рис. 2.1. У біфуркаційний момент лінія  $\mathcal{P}_1^1$  є виродженим сідловим циклом з шести сідловими комітками. Глобально ці цикли утворюють гомоклінічний цикл (гетероклінічний у фазовому просторі  $\mathbb{R}^3$  замість  $\mathbb{T}^3$ ). У цьому випадку стійкий та нестійкий дво-вимірні інваріантні многовиди є інваріантними площинами:  $W_2^u(\mathcal{P}_1^1) = W_2^s(\mathcal{P}_1^1) = \mathcal{P}_2^1$ .

Хаотична траєкторія всередині інваріантного регіону з'являється у точці біфуркації  $\alpha = \pi/2$ . Ця траєкторія є фазово незамкнутою вздовж змінної  $\varphi_3$ . Фазова точка рухається у тому ж напрямку, як і фазова точка виродженого сідлового циклу  $\mathcal{P}_1^1$ , метушившись біля інваріантної площини  $\mathcal{P}_2^1$ , намагаючись досягти сідлового циклу та зразу втікаючи від нього. Хаотичний аттрактор існує на вузькій області параметрів  $\alpha > \pi/2$  (переріз Пуанкаре хаотичної траєкторії продемонстровано на лівій панелі рис. 8.24(a)), після чого при збільшенні параметру він перетворюється на квазі-періодичний аттрактор та згодом на стійкий фазово незамкнутий граничний цикл всередині інваріантної області (відповідно до [279, 244]). Цей стійкий цикл зникає разом з сідловим циклом у біфуркації складки (лінія F на рис. 8.24(праворуч)).

Всі три фазово незамкнуті аттрактори (періодичний, квазі-періодичний та хаотичний) мають непостійний параметр порядку  $r_1 = r_1(t)$ . Цей факт робить неможливими дані режими у стандартній моделі Хонг–Строгатца, оскільки для неї  $r_1 = 1$ . Система з фазовим зсувом може показувати хаотичну поведінку навіть для двох груп конформістів. Переріз Пуанкаре згаданої хаотичної траєкторії продемонстровано на правій панелі рис. 8.24(b)) для  $k = 2$  та  $\alpha = \pi/2$ . Нагадаємо, що при  $\alpha = 0$  (випадок Хонг–Строгатца) можлива лише повна синхронізація двох груп конформістів при  $K_1 > 0, K_2 > 0$ .

Будь-яка особлива точка многовиду  $\overline{\mathcal{M}}^{(4)}$  відповідає розмитому  $\pi$ -стану з параметром порядку  $r_1 = 1/3, r_2 = 1$ . Всі такі точки мають однаковий тип трансверсальної стійкості, за винятком точок з координатами 0 та  $\pi$  (які мають один додатковий напрямок нейтральної стійкості для будь-яких значень параметрів). Вироджена біфуркація Андронова–Хопфа (АН) відбувається для кожної точки інваріантного многовиду  $\overline{\mathcal{M}}^{(4)}$  при  $\alpha = \pi/2$ . Однак, граничний цикл не виникає після цієї біфуркації у зв'язку з непарною симетрією системи щодо параметру  $\alpha = \pm\pi/2$ . Додатково, вироджена біфуркація



(лінія  $DG(\mathcal{M})$  на діаграмі) відбувається для точок многовиду, коли  $k = -1$ . Ця біфуркація змінює стійкість положень рівноваги у трансверсальних напрямках. Транскритична біфуркація (ТС) відбувається на інваріантних многовидах  $\mathcal{P}_2^1$  у точках, що відповідають  $\pi$ -станам системи при  $k = -1/3$ .

*Два конформісти та два нонконформісти.* У цьому випадку дві інваріантні площини  $\mathcal{P}_2^1$  та  $\mathcal{P}_2^2$  є несиметричними одна одній та вони не розділяють фазовий простір на інваріантні області. Оскільки системи має однакове число конформістів та нонконформістів, існують обидві біфуркаційні лінії  $(\alpha, k)$  та  $(\alpha, 1/k)$  відповідно до симетрії  $\gamma_3$  (біфуркаційна діаграма зображена на рис. 8 роботи [86]). На відміну від попереднього випадку, не всі лінії інваріантного многовиду  $\overline{\mathcal{M}}^{(4)}$  є взаємно симетричними. Одно-параметрична множина  $\overline{\mathcal{M}}^{(4)}$  репрезентує два різних режими: *інкогерентні стани* з координатами  $(\pi, \varphi, \pi + \varphi)$  та *розмиті  $\pi$ -стани* з координатами  $(\varphi, \pi, \pi + \varphi)$ . Параметр порядку розмитого  $\pi$ -стану залежить від координати,  $r_1 = r_2 = \sqrt{(1 + \cos \varphi)/2}$ . Трансверсальна стійкість є однаковою для кожної точки на двох інваріантних лініях, за винятком точок, що мають координати  $0, \pi$ , які репрезентують  $\pi S_{\mathcal{M}}$  режим та мають додаткову нейтральну стійкість (згідно Лемі 4.5.1).

Вироджена біфуркація Андронова–Хопфа розмитих  $\pi$ -станів многовиду  $\overline{\mathcal{M}}^{(4)}$  (без виникнення граничного циклу) відбувається при  $\alpha = \pm\pi/2$  та довільних  $k$ . Весь фазовий простір (за винятком многовиду  $\overline{\mathcal{M}}^{(4)}$ ) заповнений множиною неізолюваних періодичних орбіт. Фазово замкнуті та фазово незамокнуті періодичні орбіти співіснують на біфуркаційній лінії про певних значеннях  $k$ . Інша біфуркація Андронова–Хопфа  $B\pi S$  точок виникає при  $k = -1$ .  $B\pi S$  множина є трансверсально стійкою при  $k < -1$ ,  $|\alpha| < \pi/2$  та при  $k > -1$ ,  $\pi/2 < \alpha < 3\pi/2$ . Точки лінії *інкогерентного стану* є виродженими сідлами (різних стійкостей) для всіх значень параметрів. Вилкова біфуркація (PF) виникає для точки, що належить інваріантному многовиду  $\mathcal{P}_2^2$  у трансверсальному напрямку до цієї площини. Одне стійке положення рівноваги породжує дві нові стійкі точки. Особливі точки зникають у транскритичній біфуркації (ТС) на лінії  $\alpha = \pm\pi/2$  (яка співпадає з АН біфуркаційної лінією) та змінюють свої стійкості у виродженій біфуркації на лінії  $k = 0$ . Для  $\alpha = \pm\pi/2$  стійке положення рівноваги системи існує у біфуркаційній області,

де інваріантний многовид  $\overline{\mathcal{M}}^{(4)}$  є нестійким у трансверсальних напрямках. Гомоклінічні біфуркації (НС) також відбуваються на інваріантних площинах  $\mathcal{P}_2^1, \mathcal{P}_2^2$  та вони призводять до виникнення сідлових циклів.

З описаного вище бачимо, що дві системи з різною кількістю конформістів та нонконформістів мають абсолютно різну біфуркаційну динаміку.

*Один конформіст та три нонконформісти.* Розглянемо випадок  $N_1 = 1, N_2 = 3$ . У цьому випадку інваріантні площини розділяють фазовий простір  $\mathbb{T}^3$  на дві трикутні інваріантні області. Система (4.5) має  $\mathbb{Z}_3$  симетричну групу обертань навколо одної з центральних ліній  $\mathcal{L}_1 = \{\varphi_1 - \varphi_2 = 2\pi/3, \varphi_1 - \varphi_3 = 4\pi/3\}$ ,  $\mathcal{L}_2 = \{\varphi_1 - \varphi_2 = 4\pi/3, \varphi_1 - \varphi_3 = 2\pi/3\}$  на кут  $2\pi/3$  з одночасним зсувом вздовж лінії на  $2\pi/3$  (обертання навколо тору). Як було зазначено вище, біфуркаційна  $(\alpha, k)$ -діаграма для випадку  $N_1 = 1$  може бути отримана з біфуркаційної діаграми для  $N_1 = 3$  (рис. 8.24(ліва панель)) заміною  $k$  на  $1/k$ . Крім того нова біфуркаційна діаграма матиме біфуркаційну лінію  $k = 0$ , що відповідає біфуркації на нескінченності для попереднього випадку.

#### 4.6.4. Режими, які є неможливими у моделі Хонг–Строгатца

Підсумовуючи сказане вище, можна сказати, що при  $\alpha \neq 0$  виникають нові режими, що є неможливими у оригінальній моделі Хонг–Строгатца. Перша відмінність є у можливості взаємного *обертання двох синхронних кластерів* конформістів ( $r_1 = 1$ ) та нонконформістів ( $r_2 = 1$ ) з рухомим кутом між кластерами  $\delta = \delta(t)$ . Це обертання відповідає траєкторії, що рухається вздовж одно-вимірної лінії, яка є перетином двох гіперплощин

$$\mathcal{P}_{N_2}^1 \cap \mathcal{P}_{N_1}^2 = \{(\varphi_1, \dots, \varphi_{N-1}) : \varphi_1 = \dots = \varphi_{N_1-1} = 0, \varphi_{N_1} = \dots = \varphi_{N-1}\}.$$

Відповідно до Теорема 4.4.1, початок координат та особливі точки  $(0, \dots, 0, \pi, \dots, \pi)$  (з  $N_1 - 1$  координат 0 та  $N_2$  координат  $\pi$ ) належать до інваріантної лінії  $\mathcal{P}_{N_2}^1 \cap \mathcal{P}_{N_1}^2$  коли  $\alpha = 0$ . Це робить взаємне обертання згаданих вище кластерів неможливим для моделі Хонг–Строгатца. З іншого боку, при зміні параметру  $\alpha$  дві особливі точки (зі згаданих) починають рухатись

вздовж інваріантної лінії  $\mathcal{P}_{N_2}^1 \cap \mathcal{P}_{N_1}^2$  та, згодом, зникають у сідло–вузловій біфуркації. У результаті інваріантна лінія стає прохідною при  $\alpha \neq 0$ ,  $\alpha \neq \pi$  для фазової точки, що відповідає руху двох кластерів один відносно одного. Найпростіший випадок вказаного режиму спостерігається при  $N_1 = N_2 = 2$ .

Другою відмінністю є режим *фазово-незамкннутих атракторів*. Цей режим припускає коливання не лише нонконформістів, а і конформістів. При  $\alpha = 0$  притягуючий зв'язок між конформістами змушує їх знаходитись разом, а періодичні режими є стійкими у цьому випадку, лише коли вони належать до многовидів  $\mathcal{P}_m^1$ . У загальному випадку система може мати два кластери конформістів та нонконформістів зі складною динамікою всередині кожного з кластерів та без синхронізації кластерів між собою. Осцилятори є фазово-замкнутими всередині кожного кластера, але немає фазової-замкнутості між кластерами. На додаток, повна синхронізація всередині кластерів конформістів з  $r_1 = 1$ , періодичні, квазі-періодичні та хаотичні режими можуть виникати (з  $r_1 = r_1(t)$ ), коли  $\alpha \neq 0$  та  $\alpha \neq \pi$ .

Стійкі *гомоклінічні та гетероклінічні цикли* є також неможливими при  $\alpha = 0$ . Можна переконатись, що гетероклінічний цикл, що складається з двох точок  $(0, 0)$ ,  $(\pi, \pi)$  та їх одно-вимірних інваріантних многовидів існує на дво-вимірному многовиді  $\mathcal{P}_2^1$  (два нонконформісти) для будь-якої кількості конформістів  $N_1$  та достатньо малих (за модулем) негативних значень  $k$ , але цей цикл є нестійким. Гомоклінічні та гетероклінічні цикли можуть існувати на многовидах вищих розмірностей (система (4.10)), але вони є вже нестійкими всередині многовидів. Введення фазового зсуву призводить до трансформації нестійких гомоклінічних та гетероклінічних циклів до стійких (за допомогою різних біфуркацій). Це також призводить до виникнення стійких гомо та гетероклінічних циклів всередині інваріантних многовидів (див., наприклад, рис. 8.23).

*Багатовимірні нейтральних періодичних орбіт та гетероклінічних циклів* можливі лише для  $\alpha = \pm/2$ . Різні типи цих дво-вимірних структур показано на рис. 8.23. У загальному випадку (довільній кількості осциляторів) фазово-незамкнуті періодичні орбіти заповнюють всю інваріантну область (структури розмірності  $N - 1$ ) та співіснують з гомо та гетероклінічними ци-

клами. Гетероклінічні цикли (або їх множини) є бар'єрами між множинами періодичних орбіт різної топології.

#### 4.7. Загальні властивості багатовимірної системи з притяганням та відштовхуванням

На завершення даного розділу коротко опишемо основні властивості осциляторних систем з притягуючими та відштовхуючими зв'язками. Умови існування, властивості стійкості, біфуркацій та мультистабільності різних колективних режимів взаємодії конформістів та нонконформістів також описано у роботах [86, 82] більш детально.

Як було показано вище редукція системи (4.2) до системи у фазових різницях (4.5) є зручним методом дослідження інваріантних множин, атракторів та біфуркацій. Даний метод є більш ефективним за метод Хонг–Строгатца у випадку скінченно вимірних (а особливо мало вимірних) систем, оскільки дозволяє описувати режими з малими скінченними кластерами. Даний метод є також ефективним при наявності фазового зсуву у функції взаємодії. Використовуючи даний підхід, було виявлено, що система (4.2) і її редукція (4.5) мають інваріантні кластерні многовиди  $\mathcal{P}_m^1$ ,  $\mathcal{P}_m^2$  та антифазний многовид  $\mathcal{M}^{(N)}$  для майже всіх значень параметрів  $k$ ,  $\alpha$  (за винятком  $k = 0$ ,  $k = -N_2/N_1$ , де системи вироджуються) та довільної кількості конформістів  $N_1$  та нонконформістів  $N_2$ . Багато біфуркацій відбуваються саме на цих інваріантних многовидах і тому є зручними для дослідження. Просте описання певних інваріантних множин також допомагає зрозуміти глобальні біфуркації (зокрема гетероклінічних циклів), частинами яких є локальні біфуркації на цих інваріантних множинах. Важливою відмінністю систем з притягуючими та відштовхуючими зв'язками від стандартних глобально зв'язаних систем є те, що інваріантні многовиди перших (систем) розділяють фазовий на інваріантні області таким чином, що фазові траєкторії є (у загальному випадку) фазово незамкнутими (рис. 7 роботи [86]). Таким чином, система ідентичних осциляторів з двома типами взаємодії може мати *десинхронізацію* на відміну від глобально зв'язаних систем ідентичних осциляторів.

Вкажемо на деякі (не всі) біфуркації для системи (4.5) у загальному випадку та їх локалізацію.

1. Система має біфуркаційні лінії  $\alpha = \pm\pi/2$  у кожній точці інваріантного многовиду  $\mathcal{M}^{(N)}$  для всіх значень  $N_1$  та  $N_2$ .
2. Система має дві симетричні лінії біфуркацій сідло–вузла, що перетинаються у точці  $(\alpha, k) = (0, -N_2/N_1)$  (біфуркація корозмірності 2). Цей перетин відповідає виникненню стійкого  $\pi$ -стану у моделі Хонг–Строгатца для менших значень  $k$ .
3. Система має транскритичну (або вилкову для  $N_1 = N_2$ ) біфуркацію на лінії  $k = -N_2/N_1$ . Ця лінія також перетинає згадувану вище біфуркаційну точку корозмірності 2.
4. Система має складну структуру у граничних випадках  $\alpha = \pm\pi/2$ . У даному випадку існують та співіснують (в залежності від розмірності) неперервні множини неізолюваних фазово–замкнених та фазово–незамкнених періодичних орбіт, гомоклінічні та гетероклінічні структури сідлових точок та сідлових граничних циклів, а також хаотичні траєкторії. Важливим є нейтральна стійкість розв’язків різних типів у фазовому просторі.
5. Введення фазового зсуву радикально змінює динаміку системи. Нові стійкі режими (фазово незамкнуті траєкторії, гетероклінічні цикли, т.п.) виникають при  $\alpha \neq 0$ . Система є чутливою до малих збурень параметру.
6. Нетривіальна динаміка (квазі–періодичність, хаос) для двох різних груп конформістів або двох груп нонконформістів можлива лише при ненульовому фазовому зсуві.

Підсумовуючи, можна зазначити, що система (4.2) з двома типами взаємодії та фазовим зсувом ( $\alpha \neq 0$ ) є значно складнішою за систему Хонг–Строгатца і має значно ширший спектр можливих режимів і, відповідно, можливих біфуркацій. Крім параметрів, динаміка системи суттєво залежить від кількості притягуючих та відштовхуючих зв’язків.

У даному підрозділі була розглянута система, зв’язки у якій можна представити матрицею  $K = (K_{ij})_{i,j=1}^N$ , де  $K_{ij} = K_1 > 0$  при  $i = 1, \dots, N_1$  та  $K_{ij} = K_2 < 0$  при  $i = N_1 + 1, \dots, N$ . Природнім узагальненням даної ситуації є система з матрицею зв’язків, яка є більш загальною і має рядки однакових

елементів:  $K_{ij} = K_i, i = 1, \dots, N$  (подібні системи розглядаються, зокрема, у [262, 111]). Тоді можна називати *конформістами* осцилятори, дія на які інших осциляторів є позитивно ( $K_i > 0$ ), а *нонконформістами* осцилятори з такою ж негативною дією. Динаміка даної системи звичайно є складнішою за (4.2) але зберігає багато властивостей, описаних вище. Зокрема відповідна система у фазових різницях при  $\alpha = 0$  має всі ті ж положення рівноваги, що і (4.5). Отже, використовуючи методи, наведені у [168, 167, 86] можна досить повно описати колективні режими даної системи.

# Розділ 5

## Співіснування консервативної та дисипативної динамік у кільцевих мережах зв'язаних осциляторів

### 5.1. Попередні результати

Багато природничих явищ можуть досліджуватись, використовуючи мережі зв'язаних осциляторних систем. Прикладами є взаємозв'язані напівпровідникові лазери [302], нейронні мережі [21, 270], механічні системи [180], біологічні осцилятори [312] та інше. У межах слабого зв'язку, динаміка кожної підсистеми може бути описаною скалярною фазовою змінною, а зв'язана система може бути зведена до мережі фазових осциляторів. В цьому контексті одновимірні масиви з періодичними умовами широко вивчались в роботах [101, 283, 230, 312, 139, 323, 343, 342, 259]. Симетрія обертання такої системи є джерелом багатой динамічної поведінки, включаючи обертальні хвилі [270, 348, 148, 335, 343, 69, 258, 149], гетероклінічні цикли [159, 201, 208, 126, 33, 17, 35], симетричний хаос [110, 230, 259, 348], химерні стани [207, 14, 211, 249, 340, 155, 32, 23], компактони [261]. Як застосування в науці про нейрони, біфуркаційні механізми в кільцях нейронів моделей типу Ходжкіна–Хакслі з гальмуючими та збуджуючими синапсами вивчались в роботах [54, 297, 179, 339], де були виявлені складні динамічні сценарії та мультистабільність. Специфічна структура з'єднань на колі у випадку направлених нелокальних зв'язків з кількома найближчими сусідами призводить до

виникнення самоорганізованих структур з когерентно–некогерентною динамікою, так званих химерних станів, якій була присвячена значна кількість робіт і які будуть детально розглядатись у наступному розділі.

Хоча для деяких застосувань, таких як молекулярні ланцюги, зв'язок кожного елемента з сусідніми є симетричним щодо відображення в просторі, для інших систем такий зв'язок є суттєво направленим. Це відбувається, наприклад, у лазерних системах з прямим зчепленням через оптичну взаємодію або в нейронних системах, де нейрони зв'язуються в одному напрямку за допомогою хімічних синапсів. Отже, існує потреба у теоретичному осмисленні динамічних властивостей кілець з несиметричними (анізотропними) зчепленнями.

У цьому розділі ми зосереджуємося на специфічному випадку анізотропії, коли матриця зв'язку між елементами є кососиметричною. У цьому випадку система має зворотньо–часову симетрію і динаміка системи демонструє співіснування Гамільтоново–подібних і дисипативних областей у фазовому просторі для одних і тих же значень параметрів. Крім того, може існувати більше одного "острова" Гамільтонового типу, а розв'язки в консервативній області можуть бути періодичними, квазіперіодичними або хаотичними. У деяких випадках динаміка системи стає суто консервативною.

Ми нагадаємо, що часово–оборотна (time–reversible, часово–реверсивна) симетрія  $\mathcal{R}$  системи  $dx/dt = G(x)$  є інволюцією  $\mathcal{R}$  фазового простору, що задовольняє умову

$$G(\mathcal{R}\Phi) = -\mathcal{R}(G(\Phi)) \quad (5.1)$$

та  $\mathcal{R}^2 = id$ , де  $id$  означає ідентичну трансформацію. Зокрема, з властивості часово–оборотної симетрії системи випливає, що  $\mathcal{R}(\Phi(-t))$  є розв'язком системи, якщо таким є  $\Phi(t)$ . Добре відомо, що часово–оборотна симетрія суттєво впливає на геометрію фазового простору. Класичні результати щодо існування сімей періодичних розв'язків, еліптичних особливих точок та інваріантних торів можна знайти у роботах [254, 29, 292, 143, 79, 213, 295]. Примітно, що такі динамічні особливості консервативних або Гамільтонових систем можуть у



реверсивних системах співіснувати з дисипативною динамікою. У подальшому для розпізнавання цих динамічних ознак будемо використовувати терміни "Гамільтоново-подібна" та "дисипативна" динаміка. Тут ми не даємо точного означення терміну "Гамільтоново-подібної" динаміки, а його значення буде детально описано у конкретних випадках у подальших твердженнях.

Зазначимо, що часово-оборотні системи є предметом широкого теоретичного дослідження, в той час як приклади описання співіснування Гамільтоново-подібної та дисипативної динаміки для конкретних природничих явищ трапляються не дуже часто. А. Політі з співавторами показали таку динаміку в трьох-вимірній лазерній системі [266]. Масиви надпровідникових з'єднань Джозефсона з глобальною взаємодією елементів були розглянуті в роботах [321, 320], де було показано співіснування дисипативної та Гамільтоново-подібної структури, що є негомологічною нулю. Нескінченний ланцюг локально зв'язаних фазових осциляторів з реверсивними властивостями вивчався Топажем та Піковським у роботі [318], а асиметричне кільце з тими ж властивостями у роботі Піковського та Розенау [261]. Остання модель є частковим випадком системи (5.6), що буде розглянута у даному розділі. М. Голубітський, М. Крупа та Ч. Лім довели існування сім'ї періодичних та квазі-періодичних розв'язків у системі анізотропно зв'язаних сфер (Stokeslet model) [143], використовуючи реверсивну симетрію. Загальні теоретичні результати динаміки у часово-оборотних системах викладені у роботах [239, 114, 292, 138, 214, 274, 129, 52, 215, 349, 77, 75, 294, 303], а найбільш широкий огляд таких робіт представлено у роботі Дж. Ламба та Дж. Робертса [213].

Даний розділ присвячено дослідженню систем зв'язаних осциляторів з циркулянтною матрицею взаємодії. Буде показано, що дана система має розв'язки, що описують хвилі обертання (rotatin waves) та буде детально вивчено властивості стійкості, мультистабільності та біфуркацій таких розв'язків. Найбільш цікаві властивості дана система показує у випадку, коли матриця зв'язку є також кососиметричною. В даному розділі буде показано, що система з циркулянтною кососиметричною матрицею є часово-оборотною. Буде показано, що реверсивність системи разом з її іншими специфічними

властивостями призводять до співіснування Гамільтоново-подібної та дисипативної динаміки у одному й тому ж фазовому просторі. Більш детально будуть розглянуті випадки взаємодіючих осциляторів на кільцевій мережі з різними зв'язками у напрямку за та проти годинникової стрілки по кільцю. Детально будуть проаналізовані біфуркаційні переходи в системі з кількома параметрами та наведені схематичні та біфуркаційні діаграми, а також фазові портрети. Буде досліджуватись вплив власних частот осциляторів, симетрій та структури функцій зв'язку на загальну динаміку системи, зокрема на наявність консервативно-дисипативної динаміки в системі.

## 5.2. Осциляторна модель з циркулянтним зв'язком

Розглянемо наступний трансляційно-інваріантне коло зв'язаних фазових осциляторів з періодичними крайовими умовами

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_i + \sum_{j=1}^N K_j g(\theta_i - \theta_{i+j}), \quad i = 1, \dots, N, \quad (5.2)$$

де  $\theta_i \in [0, 2\pi)$  – фазові змінні,  $\omega_i$  – власні частоти,  $g(x)$  – гладка  $2\pi$ -періодична функція зв'язку,  $K_j$ ,  $j = 1, \dots, N$ , – параметри сили взаємодії між осциляторами, а всі індекси беруться по модулю  $N$ . Коефіцієнт  $K_N = K_0$  визначає самовплив осцилятора на себе. У даному розділі ми завжди припускаємо, що функція  $g(\cdot)$  є достатньо гладкою для гарантування існування і єдиності розв'язків і не будемо в подальшому на цьому зупинятися. Система (5.2) може бути переписаною у більш традиційному для моделей Курамото вигляді наступним чином:

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_i + \sum_{j=1}^N K_{j-i} g(\theta_i - \theta_j), \quad i = 1, \dots, N,$$

та вона описує мережу осциляторів з параметрами сили зв'язку, що задаються за допомогою *циркулянтної* матриці зв'язків:

$$K = \text{circ}(K_0, K_1, \dots, K_{N-1}) = \begin{pmatrix} K_0 & K_1 & \dots & K_{N-2} & K_{N-1} \\ K_{N-1} & K_0 & K_1 & \ddots & K_{N-2} \\ \vdots & K_{N-1} & K_0 & \ddots & \vdots \\ K_2 & \ddots & \ddots & \ddots & K_1 \\ K_1 & K_2 & \dots & K_{N-1} & K_0 \end{pmatrix}. \quad (5.3)$$

Рис. 8.25 показує приклади мереж з циркулянтним з'єднанням для семи осциляторів з параметрами взаємодії  $K_0, K_1, \dots, K_6$ . Зауважимо, що система (5.2) може бути зведена до класичної моделі Курамото глобально зв'язаних фазових осциляторів у випадку, коли  $K_i = K_0$  для всіх  $i = 1, \dots, N - 1$ , та  $g(x) = \sin x$ .

Вводячи нові змінні

$$\varphi_i = \theta_1 - \theta_{i+1}, \quad i = 1, \dots, N - 1, \quad (5.4)$$

зведемо систему (5.2) до системи у фазових різницях:

$$\frac{d\varphi_i}{dt} = \Delta_i + \sum_{j=1}^{N-1} K_j (g(\varphi_j) - g(\varphi_{i+j} - \varphi_i)), \quad i = 1, \dots, N - 1, \quad (5.5)$$

де  $\Delta_i = \omega_1 - \omega_{i+1}$ , індекси беруться по модулю  $N$  та  $\varphi_0 = 0$ . Зауважимо, що оригінальна система (5.2) має  $\mathbb{S}^1$ симетрію фазового зсуву  $\theta_i \mapsto \theta_i + \text{const}$ , що дозволяє редукувати її до системи в фазових різницях (5.5), де редукована система має на одну змінну менше та вже не має прямої  $\mathbb{S}^1$ симетрії.

В даному розділі ми здебільшого розглядатимемо випадок ідентичних осциляторів  $\Delta_i = 0$ , за винятком підрозділу 5.6. У підрозділі 5.5 будуть детально розглянуті мало-вимірні систем зі специфічним зв'язком  $K_j = a$ ,  $K_{-j} = b$ ,  $j = 1, \dots, l$ ,  $l < N/2$ ,

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + a \sum_{j=1}^l g(\theta_i - \theta_{i+j}) + b \sum_{j=N-l}^{N-1} g(\theta_i - \theta_{i+j}), \quad j = 1, \dots, N. \quad (5.6)$$

Схематична діаграма на рис. 8.25 демонструє приклади графів семи зв'язаних осциляторів з (а)  $l = 1$ , (б)  $l = 2$  та (с)  $l = 3$ , де зв'язки в різних напрямках позначено стрілками різних кольорів.

Відповідна (5.6) система у фазових різницях має вигляд:

$$\frac{d\varphi_i}{dt} = \Delta_i + a \sum_{j=1}^l (g(\varphi_j) - g(\varphi_{i+j} - \varphi_i)) + b \sum_{j=N-1}^{N-l} (g(\varphi_j) - g(\varphi_{i+j} - \varphi_i)), \quad (5.7)$$

$i = 1, \dots, N - 1$ . У випадку ідентичних осциляторів  $\omega_i = \omega$ ,  $i = 1, \dots, N$ , без обмеження загальності ми можемо вважати  $a = 1$ , оскільки те ж отримується при редукції часу. У цьому випадку і для специфічної функції зв'язку  $g(x) = -\sin(x - \alpha)$  ми будемо мати справу лише з двома біфуркаційними змінними  $b$  та  $\alpha$ .

### 5.3. Синхронізація розв'язків та хвилі обертання

Легко показати, що синхронний розв'язок

$$\Theta_{sync}(t) = \{(\theta_1(t), \dots, \theta_N(t)) : \theta_i(t) = \theta_j(t), i, j = 1, \dots, N\}$$

завжди існує для системи ідентичних осциляторів для всіх  $t \in \mathbb{R}$ . Для системи у фазових різницях (5.7) цей розв'язок відповідає положенню рівноваги  $\Phi_{sync}$ :  $\varphi_i = 0$ ,  $i = 1, \dots, N - 1$ . Насправді, редукована система (5.7) може мати багато різноманітних положень рівноваги в залежності від функції зв'язку  $g(x)$ , хоча деякі з них з'являються винятково в результаті симетрії обертання у мережі з'єднань. Відмітимо, що циркулянтна структура зв'язків у мережі та ідентичність осциляторів індукують еквіваріантність системи відносно циклічної групи  $\mathbb{Z}_N$ , що задається дією:

$$\gamma : (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N) \longmapsto (\theta_N, \theta_1, \dots, \theta_{N-1}).$$

Для редукованої системи (5.7) ця симетрія задається як:

$$\tilde{\gamma} : (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{N-1}) \mapsto (-\varphi_{N-1}, \varphi_1 - \varphi_{N-1}, \dots, \varphi_{N-2} - \varphi_{N-1}).$$

Можна безпосередньо переконатись, що розв'язки системи (5.6), задані у формі

$$\begin{aligned} \Theta_{splay}(t) &= \widetilde{\mathcal{M}}_k(t) = \left( \tilde{\theta}_1(t), \tilde{\theta}_2(t), \dots, \tilde{\theta}_N(t) \right) = \\ &= \left( \theta(t, k), \theta(t, k) - \frac{2\pi k}{N}, \dots, \theta(t, k) - \frac{(N-1)2\pi k}{N} \right), \quad k = 0, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (5.8)$$

де  $\theta(t, k) = \left( \omega + \sum_{j=1}^N K_j g \left( \frac{2jk\pi}{N} \right) \right) t$ , є інваріантними відносно дії симетрії  $\gamma$  для будь-якої функції зв'язку. Дійсно, підставляючи вираз (5.8) в  $i$ -те рівняння системи (5.2), отримуємо

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\theta}_i(t)}{dt} &= \omega + \sum_{j=1}^N K_j g \left( \frac{2jk\pi}{N} \right) = \omega + \sum_{j=1}^N K_j g \left( \theta(t, k) - \frac{2(i-1)\pi k}{N} - \right. \\ &\quad \left. - \theta(t, k) + \frac{2(i+j-1)\pi k}{N} \right) = \omega + \sum_{j=1}^N K_j g \left( \tilde{\theta}_i(t) - \tilde{\theta}_{i+j}(t) \right). \end{aligned}$$

З останньої тотожності видно, що згадані розв'язки існують для всіх значень  $k$  та довільних функцій зв'язку  $g$ . Вираз (5.8) задає *обертальні хвилі* з хвильовими номерами  $k$ , де кожен осцилятор зсунутий по фазі на  $2\pi k/N$  відносно кожного зі своїх сусідів.

Відповідні розв'язки редукованої системи (5.7) є її положеннями рівноваги і вони задаються виразами \

$$\Phi_{splay} = \mathcal{M}_k = \left( \frac{2k\pi}{N}, \frac{4k\pi}{N}, \dots, \frac{2(N-1)k\pi}{N} \right). \quad (5.9)$$

Дійсно, підставляючи значення (5.9) в праві частини системи (5.7) перекону-

ємось, що

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{N-1} K_j (g(\varphi_j) - g(\varphi_{i+j} - \varphi_i)) = \\ & = \sum_{j=1}^{N-1} K_j \left( g \left( j \frac{2k\pi}{N} \right) - g \left( (i+j) \frac{2k\pi}{N} - i \frac{2k\pi}{N} \right) \right) = 0. \end{aligned}$$

В подальшому особливі точки  $\mathcal{M}_k$  ми також будемо називати хвилями обертання. Відмітимо, що синхронний розв'язок є хвилею обертання  $\mathcal{M}_0$  з нульовим хвильовим номером. Узагальнюючи сказане вище, сформулюємо наступне твердження.

**Лема 5.3.1.** *Для будь-якої функції зв'язку  $g$  система зв'язаних ідентичних фазових осциляторів (5.6) має розв'язки типу хвиль обертання (5.8) з усіма можливими хвильовими номерами  $k$ . Відповідні розв'язки системи у фазових різницях (5.5) є положеннями рівноваги (5.9).*

Відмітимо, що система (5.5) може мати і інші положення рівноваги на додачу до  $\mathcal{M}_k$  в залежності від типу матриці та функції зв'язку, приклади яких буде продемонстровано в подальшому.

Для подальших досліджень важливо описати взаємовідношення між розв'язками системи (5.2) та відповідної системи у фазових різницях (5.5). Ми розглянемо систему зв'язаних ідентичних осциляторів більш загального вигляду:

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + \sum_{j=1}^N K_{ij} g(\theta_i - \theta_j), \quad i = 1, \dots, N, \quad (5.10)$$

і її відповідне зведення до фазових різниць:

$$\frac{d\varphi_i}{dt} = \Delta_i + \sum_{j=1}^N (K_{1,j} g(\varphi_{j-1}) - K_{i+1,j} g(\varphi_{j-1} - \varphi_{i-1})), \quad i = 1, \dots, N-1. \quad (5.11)$$

Системи (5.2) та (5.5) є частковим випадком відповідних систем (5.10) та

(5.11) для випадку  $K_{ij} = K_{j-i}$ ,  $i, j = 1, \dots, N$ . Наступне твердження показує, що Якобіани матриць оригінальної та редукованої систем, визначені для відповідних розв'язків, мають однакові множини власних значень, за винятком одного тривіального, індукованого симетрією фазового зсуву в оригінальній системі.

**Лема 5.3.2.** *Нехай  $A$  та  $B$  є Якобіанами матриць (5.10) та (5.11) відповідно, що визначені у відповідних точках  $(\theta_1, \dots, \theta_N)$  та  $(\varphi_1, \dots, \varphi_{N-1})$ ,  $\varphi_i = \theta_1 - \theta_{i+1}$  ( $i = 1, \dots, N - 1$ ). Тоді виконується наступне відношення*

$$\det(A - \lambda I_N) = -\lambda \det(B - \lambda I_{N-1}),$$

де  $I_N$  є  $N \times N$ -вимірною одиничною матрицею.

**Доведення** даної леми наведено у Додатку В.8 (див. стор. 393).

Відмітимо, що додаткове нульове власне значення матриці  $A$  відповідає нейтральній стійкості кожного розв'язку оригінальної системи (5.2) вздовж вектора  $v = (1, \dots, 1)$ , яка в свою чергу, є наслідком симетрії фазового зсуву. Разом зі зникненням однієї розмірності у системі фазових різниць (5.11) припадає і симетрія фазового зсуву, що також відображається у зникненні відповідного власного значення Якобіану.

### 5.3.1. Стійкість хвиль обертання

Наступна лема описує спектр хвиль обертання  $\mathcal{M}_k$ .

**Лема 5.3.3.** *Власні значення матриці Якобіану системи (5.2) у точках, що відповідають хвилям обертання  $\mathcal{M}_k$ , є наступними:*

$$\lambda_m(\mathcal{M}_k) = \sum_{j=1}^{N-1} K_j \eta_{kj} \left(1 - e^{i \frac{2mj\pi}{N}}\right), \quad m = 1, \dots, N - 1, \quad (5.12)$$

де  $\eta_{kj} = g' \left(\frac{2\pi k}{N} j\right)$ .

**Доведення** цієї леми наведено у Додатку В.9 (див. стор. 395).

З рівності (5.12) випливає, що система має  $[N/2]$  комплексно спряжених пар (випадок, коли  $\text{Im } \lambda = 0$  також враховується):

$$\lambda_{N-m}(\mathcal{M}_k) = \lambda_{-m}(\mathcal{M}_k) = \bar{\lambda}_m(\mathcal{M}_k), \quad (5.13)$$

де  $\bar{\lambda}$  – комплексно спряжене до  $\lambda$  число. Зокрема, рівність  $\text{Im}(\lambda_{N/2}(\mathcal{M}_k)) = 0$  виконується для будь-яких  $\mathcal{M}_k$ , коли  $N$  є парним числом.

Наступний результат випливає з Лема 5.3.3 і підсумовує властивості стійкості хвиль обертання  $\mathcal{M}_k$ :

Наслідок 5.3.1. Виконуються наступні властивості

– Якщо виконується нерівність

$$\text{Re}(\lambda_m(\mathcal{M}_k)) = \sum_{j=1}^{N-1} K_j \eta_{kj} \left( 1 - \cos \left( \frac{2mj\pi}{N} \right) \right) < 0$$

для всіх  $m = 1, \dots, N-1$ , тоді хвиля обертання  $\mathcal{M}_k$  є асимптотично стійкою.

– Якщо існує індекс  $1 \leq m \leq N-1$  такий, що  $\text{Re}(\lambda_m(\mathcal{M}_k)) > 0$ , тоді хвиля обертання є нестійкою.

– Якщо існує індекс  $1 \leq m \leq N-1$ ,  $m \neq N/2$  такий, що  $\text{Re}(\lambda_m(\mathcal{M}_k)) = 0$ , тоді існує пара комплексно спряжених власних значень

$$\lambda_{\pm m}(\mathcal{M}_k) = \pm i\Omega_m, \quad \Omega_m = - \sum_{j=1}^{N-1} K_j \eta_{kj} \sin \left( \frac{2mj\pi}{N} \right).$$

Наслідок 5.3.1 показує, що умови  $\text{Re}(\lambda_m(\mathcal{M}_k)) = 0$  забезпечують границі стійкості для хвиль обертання та синхронного розв'язку при  $k = 0$ . У випадку, коли  $\Omega \neq 0$  може відбуватися біфуркація Андронова–Хопфа [144, 209, 298, 154].

Використовуючи комплексну спряженість:  $\nu_{-m} = \bar{\nu}_m$ , можемо переписати



дійсну та уявну частини власних значень (5.12) у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\lambda_m(\mathcal{M}_k)) = & \sum_{j=1}^{[(N-1)/2]} (K_j \eta_{kj} + K_{-j} \eta_{-kj}) \left( 1 - \cos \left( \frac{2mj\pi}{N} \right) \right) + \\ & + \frac{1}{2} ((-1)^N + 1) ((-1)^{m+1} + 1) K_{N/2}, \end{aligned} \quad (5.14)$$

$$\operatorname{Im}(\lambda_m(\mathcal{M}_k)) = - \sum_{j=1}^{[(N-1)/2]} (K_j \eta_{kj} - K_{-j} \eta_{-kj}) \sin \left( \frac{2mj\pi}{N} \right), \quad (5.15)$$

де  $[\cdot]$  – ціла частина числа. Наслідок 5.3.1 разом з рівнянням (5.14) показують можливість виникнення виродженої біфуркації, яка має до  $[(N-1)/2]$  критичних пар власних значень у Якобіана в особливій точці  $\mathcal{M}_k$ .

**Зауваження 5.3.1.** Система (5.5) має інші особливі точки крім початку координат та хвиль обертання (5.9). Наприклад, для непарних функцій зв'язку вона має положення рівноваги  $\tilde{\Phi} = (\tilde{\varphi}_1, \dots, \tilde{\varphi}_{N-1})$  з координатами 0 та  $\pi$  ( $\tilde{\varphi}_i \in \{0, \pi\}$ ). Легко перевірити, що матриця Якобіану системи (5.2) вздовж розв'язку  $\tilde{\Theta}$  (відповідний до розв'язку  $\tilde{\Phi}$  системи (5.5)) не є циркулянтною. Отже, власні значення  $\lambda_m(\tilde{\Theta})$  не можуть бути розподіленими подібно (5.12).

### 5.3.2. Модель з несиметричними протилежними зв'язками

Використовуючи результати Наслідку 5.3.1 до системи (5.7), отримуємо наступні твердження для важливого часткового випадку, який буде розглядатись в подальшому в деталях.

Наслідок 5.3.2. У точках  $\mathcal{M}_k$ ,  $k = 0, \dots, N-1$ , системи (5.7), що описують хвилям обертання відбувається біфуркація, якщо

$$\operatorname{Re}(\lambda_m(\mathcal{M}_k)) = \sum_{j=1}^l (a\eta_{kj} + b\eta_{-kj}) \left( 1 - \cos \left( \frac{2mj\pi}{N} \right) \right) = 0 \quad (5.16)$$

для деяких  $1 \leq m \leq [(N - 1)/2]$ . Якщо додатково виконується рівність

$$\Omega := \text{Im}(\lambda_m(\mathcal{M}_k)) = - \sum_{j=1}^l (a\eta_{kj} - b\eta_{-kj}) \sin\left(\frac{2mj\pi}{N}\right) \neq 0, \quad (5.17)$$

тоді виникає пара комплексно спряжених критичних власних значень  $\lambda_{\pm m} = \pm i\Omega$ .

Наслідок 5.3.3. Всі власні значення хвилі обертання  $\mathcal{M}_k$  системи (5.7) осциляторів, зв'язаних по колу лише з найближчими сусідами ( $l = 1$ ), належать уявній осі, якщо задовольняється умова

$$ag'(2k\pi/N) + bg'(-2k\pi/N) = 0. \quad (5.18)$$

Якщо додатково  $g'(2k\pi/N) \neq 0$ , то серед цих власних значень є  $[(N - 1)/2]$  комплексно спряжених пар.

Розв'язки  $\mathcal{M}_k$  є асимптотично стійкими, якщо виконується умова  $ag'(2k\pi/N) + bg'(2k\pi/N) < 0$ .

Умови (5.16) та (5.17) можуть бути спрощеними для синхронного розв'язку  $\Phi_{sync} = \mathcal{M}_0$  системи (5.7) до наступного вигляду:

$$\text{Re}(\lambda_m(\mathcal{M}_0)) = g'(0)(a + b) \sum_{j=1}^l \left(1 - \cos\left(\frac{2mj\pi}{N}\right)\right) = 0, \quad m = 1, \dots, N - 1, \quad (5.19)$$

$$\text{Im}(\lambda_m(\mathcal{M}_0)) = -g'(0)(a - b) \sum_{j=1}^l \sin\left(\frac{2mj\pi}{N}\right) \neq 0. \quad (5.20)$$

Останній множник в правій частині виразу (5.19) є завжди додатним а останній множник в правій частині (5.20) є ненульовим тому, що  $m \neq 0$ ,  $j \neq 0$ . Для визначення біфуркацій синхронного розв'язку ми отримуємо наступні умови

Наслідок 5.3.4. Синхронний розв'язок  $\mathcal{M}_0$  системи (5.7) зі взаємодією лише найближчих сусідів ( $l = 1$ ) має всі власні значення чисто уявними, якщо

виконується умова

$$a = -b \neq 0 \quad \text{чи} \quad g'(0) = 0. \quad (5.21)$$

У випадку  $g'(0) = 0$  всі власні значення є нульовими.

Розв'язок  $\Phi_{sync}$  є асимптотично стійким, якщо  $ag'(0) + bg'(0) < 0$ .

Прикладом системи, у яких всі власні значення синхронізації нульові є модель Курамото–Сакагучі [282] з функцією зв'язку  $g(x) = -\sin(x - \alpha)$  для значення  $\alpha = \pm\pi/2$ , при якому відбувається вироджена транскритична біфуркація, оскільки  $g'(0) = -\cos(0 - \alpha) = 0$  (та виконуються інші умови).

У випадку  $a = b$ , коли функція зв'язку є симетричною, умова (5.16) зводиться до наступної:

$$\sum_{j=1}^l (\eta_{kj} + \eta_{-kj}) \left( 1 - \cos \left( \frac{2mj\pi}{N} \right) \right) = 0. \quad (5.22)$$

Зокрема, умова виконується для всіх  $k$ , якщо похідна функції зв'язку є непарною  $g'(x) = -g'(-x)$ . Тоді виконуються наступні твердження.

Наслідок 5.3.5. Нехай  $a = b$  в системі (5.7) та функція зв'язку є парною  $g(x) = g(-x)$ . Тоді спектр хвиль обертання  $\mathcal{M}_k$  є критичним, тобто  $\text{Re}(\lambda_m(\mathcal{M}_k)) = 0$  для  $m = 1, \dots, N - 1$  та  $k = 0, \dots, N - 1$ .

Наслідок 5.3.6. Нехай  $a = -b$  в системі (5.7) та функція зв'язку є непарною  $g(x) = -g(-x)$ . Тоді спектр хвиль обертання  $\mathcal{M}_k$  є критичним.

## 5.4. Співіснування динаміки Гамільтонового типу та дисипативної динаміки

У цьому підрозділі ми розглядаємо систему (5.2) довільного числа  $N$  зв'язаних ідентичних осциляторів. Буде показано, що фазовий простір може розщепитись на регіони з дисипативною і Гамільтоново-подібною динамікою у випадку, коли матриця взаємодії є крім циркулянтної ще і *кососиметричною*, тобто  $K_j = -K_{-j}$ .

### 5.4.1. Часово–оборотна симетрія системи

Для косо–симетричного зв'язку системи (5.2) та (5.5) можуть бути переписані наступним чином:

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega + \sum_{j=1}^{[(N-1)/2]} K_j (g(\theta_i - \theta_{i+j}) - g(\theta_i - \theta_{i-j})), \quad (5.23)$$

$$\frac{d\varphi_i}{dt} = \sum_{j=1}^{[(N-1)/2]} K_j (g(\varphi_j) - g(\varphi_{-j}) - g(\varphi_{i+j} - \varphi_i) + g(\varphi_{i-j} - \varphi_i)) \quad (5.24)$$

з  $i = 1, \dots, N-1$ . Зауважимо, що  $K_0 = 0$ , а також  $K_{N/2} = 0$ , коли  $N$  є парним.

Покажемо, що система є часово–оборотною.

**Лема 5.4.1.** Система (5.24) має часово–оборотну симетрію  $\mathcal{R} : \mathbb{T}^{N-1} \rightarrow \mathbb{T}^{N-1}$ , де

$$\mathcal{R}(\varphi_1, \dots, \varphi_{N-1}) = (\varphi_{N-1}, \dots, \varphi_1), \quad t \mapsto -t. \quad (5.25)$$

**Доведення.** Можна переконатись, що для правих частин системи (5.5), записаної у векторній формі (8.11), виконуються перетворення

$$\begin{aligned} G_i(\mathcal{R}\Phi) &= G_i(\varphi_{N-1}, \dots, \varphi_1) = \\ &= \sum_{j=1}^{[(N-1)/2]} K_j (g(\varphi_{-j}) - g(\varphi_j) - g(\varphi_{-(i+j)} - \varphi_{-i}) + g(\varphi_{-(i-j)} - \varphi_{-i})) = \\ &= - \sum_{j=1}^{[(N-1)/2]} K_j (g(\varphi_j) - g(\varphi_{-j}) - g(\varphi_{(-i)+j} - \varphi_{-i}) + g(\varphi_{(-i)-j} - \varphi_{-i})) = \\ &= -G_{-i}(\varphi_1, \dots, \varphi_{N-1}) = -G_{N-i}(\Phi) \end{aligned}$$

для будь–яких  $i = 1, \dots, N-1$ . З останнього випливає, що

$$(G_1(\mathcal{R}\Phi), \dots, G_{N-1}(\mathcal{R}\Phi))^T = -\mathcal{R}(G_1(\Phi), \dots, G_{N-1}(\Phi))^T.$$

Лемі доведено.  $\square$

Ми наголошуємо, що властивість часової оборотності є незалежною від функції зв'язку  $g(x)$ .

Інваріантний (фіксований) підпростір інволюції  $\mathcal{R}$  у даному випадку описується як

$$\text{Fix } \mathcal{R} = \{\Phi \in \mathbb{T}^{N-1} : \mathcal{R}\Phi = \Phi\} = \left\{ \Phi \in \mathbb{T}^{N-1} : \varphi_i = \varphi_{N-i}, 1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{N-1}{2} \right\rfloor \right\}.$$

В загальному випадку розмірність цієї множини визначається як

$$d(N) := \dim(\text{Fix } \mathcal{R}) = N - 1 - [(N - 1)/2] = [N/2].$$

Позначимо  $L^+(t)$  частину траєкторії  $\Phi^*(t)$  системи (5.24):

$$L_t^+ = \{\Phi^*(t) : \Phi^*(t_0) = \Phi_0^* \in \text{Fix } \mathcal{R}, t \in [t_0, t_1]\}.$$

$\Phi^*(t)$  є періодичною, якщо  $\Phi^*(t_1) \in \text{Fix } \mathcal{R}$  для  $t_1 \geq t_0$ , оскільки існує симетрична траєкторія  $L_t^- = \mathcal{R}L_t^+$  така, що  $\Phi^*(-t_1) = \mathcal{R}\Phi^*(t_1) = \Phi^*(t_1)$  і, отже,  $\Phi^*(t) = L_t^+ \cup L_t^-$ . Використовуючи та розширюючи ці міркування бачимо, що підпростір  $\text{Fix } \mathcal{R}$  є зручним для опису динамічних особливостей системи завдяки наступним властивостям:

- Якщо деяка орбіта перетинає  $\text{Fix } \mathcal{R}$  в двох точках, то вона є періодичною і вона складається з двох частин, що відображаються з однієї у іншу за допомогою інволюції  $\mathcal{R}$ .
- Кожна неперіодична траєкторія може перетинати  $\text{Fix } \mathcal{R}$  не більше одного разу (у протилежному випадку ця траєкторія є періодичною).
- Якщо оборотна система має положення рівноваги стік чи джерело, тоді воно не належить  $\text{Fix } \mathcal{R}$ .
- Якщо оборотна система має стік (джерело)  $\mathcal{M}$ , тоді  $\mathcal{R}\mathcal{M}$  є положенням рівноваги і воно є джерелом (стоком).
- Якщо траєкторія починається у джерелі та перетинає  $\text{Fix } \mathcal{R}$ , тоді вона прямує до симетричного стоку та ця траєкторія є гетероклінічною (як

показано на рис. 8.27, рис. 8.28, рис. 8.29). Відмітимо, що з оборотності системи не впливає існування траєкторії, що починається з витoku і перетинає  $\text{Fix } \mathcal{R}$ , тобто стік і відповідний витік можуть бути незв'язаними спільною траєкторією.

Оскільки всі траєкторії, що перетинають  $\text{Fix } \mathcal{R}$  двічі є періодичними за часом, то для подальших досліджень було б інформативним розглянути перетин підпростору  $\text{Fix } \mathcal{R}$  з його інволюцією відносно потоку системи:

$$\mathcal{F}_t(\text{Fix } \mathcal{R}) = \{\Phi(t) : \Phi(0) \in \text{Fix } \mathcal{R}, t \in \mathbb{R}\}.$$

Реверсивні періодичні траєкторіях виникають для кожної з точок перетину  $\text{Fix } \mathcal{R} \cap \mathcal{F}_t(\text{Fix } \mathcal{R})$ . Оскільки розмірність  $\mathcal{F}_t(\text{Fix } \mathcal{R})$  задається виразом  $d_t(N) := \dim(\mathcal{F}_t(\text{Fix } \mathcal{R})) = [N/2] + 1$  відповідно до теореми про трансверсальність, то розмірність перетину в просторі  $\mathbb{T}^{N-1}$  у загальному випадку буде задаватись формулою:

$$\begin{aligned} d^*(N) &:= \dim(\text{Fix } \mathcal{R} \cap \mathcal{F}_t(\text{Fix } \mathcal{R})) \\ &= d(N) + d_t(N) - (N - 1) = \begin{cases} 1, & \text{коли } N \text{ є непарним,} \\ 2, & \text{коли } N \text{ є парним.} \end{cases} \end{aligned}$$

Тому, в загальному випадку можна очікувати, що система (5.24) має лише одно або дво-параметричні сім'ї періодичних орбіт, в залежності від парності розмірності фазового простору. Приклади таких сімей будуть описані у підрозділі 5.5 про мало-вимірні системи. Зокрема, у випадках  $N = 3$  та  $N = 4$ , коли фазовий простір редукованої системи (5.24) має розмірності 2 та 3 відповідно, сім'ї періодичних орбіт заповнюють відкриті множини в фазовому просторі, формуючи Гамільтоново-подібні області, заповнені періодичними орбітами. Лише у вказаних випадках  $d^*(N) = d(N)$ , що також неявно доводить неможливість існування квазі-періодичних розв'язків для цих систем. Для більших розмірностей  $N \geq 5$  виконується нерівність  $d^*(N) < d(N)$ , що натякає на існування складніших за періодичні реверсивних розв'язків. Вже

для  $N = 5$ , коли фазовий простір системи (5.24) є чотири-вимірний, сім'ї періодичних орбіт не заповнюють повністю відкриту множину фазового простору, а лише формують дво-вимірні інваріантні многовиди. У результаті у решті фазового простору з'являються інші динамічні режими такі, як квазі-періодичні чи хаотичні розв'язки.

### 5.4.2. Співіснування різних розв'язків

Наступне твердження описує співіснування розв'язків різного типу у фазовому просторі.

**Теорема 5.4.1.** *Для функцій зв'язку, що задовольняють умову  $g'(0) \neq 0$  та для майже всіх кососиметричних матриць зв'язку  $K$  таких, що  $K_j = -K_{-j}$ , система (5.24) має наступні динамічні режими:*

(А) *Сім'ї періодичних розв'язків в околі точки  $M_0$ : Існує одно-параметрична сім'я періодичних розв'язків  $\Phi_\sigma(t)$  в околі  $M_0$ , коли  $N$  є непарним, та дво-параметрична сім'я  $\Phi_{(\sigma_1, \sigma_2)}(t)$  періодичних розв'язків, коли  $N$  є парним, з періодом близьким до  $2\pi/\Omega_m$ , де  $\Omega_m = 2g'(0) \sum_{j=1}^{[(N-1)/2]} K_j \sin\left(\frac{2mj\pi}{N}\right)$ .*

(В) *Щільна множина інваріантних торів в околі  $M_0$ : При виконанні умов нерезонансності та невиродженості (b1) та (b2), вказаних нижче, в будь-якому околі  $M_0$  існують аналітичні  $[(N-1)/2]$ -вимірні квазіперіодичнітори з несумірними частотами близькими до  $\Omega_1, \dots, \Omega_{[(N-1)/2]}$ . Тори є інваріантними відносно потоку системи і відносно до оборотного перетворення  $\mathcal{R}$ . Крім того, якщо  $U_\varepsilon$  є  $\varepsilon$ -околом точки  $M_0$ , тоді міра Лебега інваріантного тору прямує до повної міри околу  $U_\varepsilon$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .*

(b1) *Умова нерезонансності:  $(q, \Omega) = \sum_{m=1}^{[(N-1)/2]} q_m \Omega_m \neq 0$  виконується для всіх  $q$  з  $|q| \leq 2l + 2$  та де-яким  $l \in \mathbb{N}$ .*

(b2) *Умова невиродженості: Ведучий кубічний член (тобто їх уявні частини) нормальної форми є невиродженими.*

(С) *Твердження (А) та (В) виконуються також для околу точки  $M_{N/2}$ , якщо  $N$  є парним.*

(D) *Дисипативна динаміка: Положення рівноваги  $M_k$ ,  $k \neq 0$ , є стоком*

якщо умова

$$\operatorname{Re}(\lambda_m(\mathcal{M}_k)) = \sum_{j=1}^{[(N-1)/2]} K_j (\eta_{kj} - \eta_{-kj}) \left( 1 - \cos \left( \frac{2mj\pi}{N} \right) \right) < 0 \quad (5.26)$$

задовольняється для всіх  $m = 1, \dots, N - 1$ . У цьому випадку  $\mathcal{M}_{-k}$  є джерелом.

**Доведення.** (А) Існування сім'ї періодичних орбіт може бути показано за допомогою центральної теореми Ляпунова для часово-оборотних систем [114, 324, 143]. Перевіримо виконання умов цієї теореми у двох окремих випадках для непарних і парних  $N$ .

Часова оборотність системи була доведена у Лемі 5.4.1. Легко переконатись, що  $\mathcal{R}\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}_0$ , що означає:  $\mathcal{M}_0 \in \operatorname{Fix}\mathcal{R}$ . Використовуючи ко-со-симетричність матриці  $K$  та вираз (5.12), власні значення для синхронного стану  $\mathcal{M}_0$  можна записати у вигляді:

$$\begin{aligned} \lambda_m(\mathcal{M}_0) = g'(0) \sum_{j=1}^{[(N-1)/2]} (K_j + K_{-j}) \left( 1 - \cos \left( \frac{2mj\pi}{N} \right) \right) - \\ - \imath g'(0) \sum_{j=1}^{[(N-1)/2]} (K_j - K_{-j}) \sin \left( \frac{2mj\pi}{N} \right) = - \\ - \imath 2g'(0) \sum_{j=1}^{[(N-1)/2]} K_j \sin \left( \frac{2mj\pi}{N} \right) =: \imath \Omega_m, \quad (5.27) \end{aligned}$$

для будь-яких  $m = 1, \dots, N - 1$ . Отже,  $\lambda_{\pm m}(\mathcal{M}_0) = \pm \imath \Omega_m$ ,  $m = 1, \dots, [(N - 1)/2]$  та  $\lambda_{N/2}(\mathcal{M}_0) = 0$ , якщо  $N$  є парним числом. Останній вираз показує, що наступні умови нерезонансності виконується для майже всіх значень  $K_j$  при  $N \geq 5$  та точно для всіх значень  $K$  для  $N = 3$ ,  $N = 4$ :

- i) всі  $\imath \Omega_m$  є простими власними значеннями матриці Якобіану  $B(\mathcal{M}_0)$ ;
- ii)  $m\Omega_m$  не є власними значеннями  $B(\mathcal{M}_0)$  для всіх  $n > 1$ .

Коли  $N$  є непарним числом, усі умови Теорема 1.1 з роботи Голубіцько-



го–Крупи–Ліма [143] виконуються в околі  $\mathcal{M}_0 \in \text{Fix } \mathcal{R}$ . Отже, згідно цієї теореми, існує одно–параметрична сім'я періодичних розв'язків  $\Phi_\sigma(t)$  системи (5.24).

У випадку парного  $N$  можна застосувати Теорему 2.1 з роботи [143]. Для виконання умов цієї теореми, необхідно додатково перевірити, що  $\mathcal{R}$  є ідентичною трансформацією на  $\ker(B(\mathcal{M}_0))$ . Дійсно, можна переконатись, що власний вектор тривіального власного значення  $\lambda_{N/2}(\mathcal{M}_0) = 0$  має вигляд  $v = (1, 0, 1, 0, \dots, 1, 0, 1)^T$  та  $V_0 = \ker(B(\mathcal{M}_0)) = \text{span}(v) = (\varphi, 0, \varphi, 0, \dots, \varphi, 0, \varphi)$ ,  $\varphi \in \mathbb{T}^1$ . Отже  $\dim V_0 = 1$  та пересвідчуємося, що  $\mathcal{R}v = v$ . Далі, згідно Теоремі 2.1 [143], існує дво–параметрична сім'я періодичних розв'язків у околі  $\mathcal{M}_0$  у випадку, коли розмірність  $N$  є парною. Період цих розв'язків є близьким до  $2\pi/\Omega_m$ .

(В) Існування щільних сімейств квазі–періодичних торів впливає з КАМ теорії для оборотних систем [254, 29, 293, 79, 78, 213, 77]. Доведення даного пункту полягає у перевірці виконання умов Лемі і Теоремі з роботи М. Севрюка [293]. Ці умови перевіряються окремо для двох різних випадків: (а) коли розмірність фазового простору редукованої системи  $N - 1$  є парною, тоді застосовуємо Теорему Севрюка з  $m = (N - 1)/2$ ,  $k = 0$  і (б) коли ця розмірність є непарною, тоді використовуємо теорему для  $m = (N - 2)/2$ ,  $k = 1$ . Система (5.24) є аналітичною в околі початку координат  $\mathcal{M}_0 \in \mathbb{T}^{2m+k} = \mathbb{T}^{N-1}$ , часо–оборотною (згідно Лемі 5.4.1), а також  $\mathcal{M}_0$  є положенням рівноваги при всіх значеннях  $K_j$  і  $\mathcal{R}\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}_0$ . В доведенні пункту (А) було доказано, що система має  $[(N - 1)/2]$  пару уявних власних значень  $\lambda_{\pm m}(\mathcal{M}_0) = \pm i\Omega_m$ , які є несумірними згідно вимозі (b1). Інше власне значення  $\lambda_{N/2}(\mathcal{M}_0)$  у випадку непарного фазового простору (5.24) є завжди нульовим, що також задовольняє умови Лемі Севрюка для  $k=1$ . Використовуючи термінологію роботи М. Севрюка [293], переконуємось, що в умовах його Теоремі  $S_0 = \lambda_{N/2}$  для парних  $N$ ,  $M$  – ненульове число, оператор  $\Gamma = (\Omega_1, \dots, \Omega_{[(N-1)/2]})$  є невиродженим згідно умові (b2),  $\lambda_\mu = 0$ . Відмітимо, що оскільки розглядаються два найпростіших випадки  $k = 0$  та  $k = 1$  (доповнюючий до сім'ї торів підпростір або відсутній, або одно–вимірний), то нерівності Лемі і Теоремі Севрюка виконуються автоматично, матричні вирази з умови теореми перетворюються

на числові і легко перевіряються. Таким чином отримуємо виконання твердження пункту (В).

(С) Легко перевірити, що положення рівноваги  $\mathcal{M}_{N/2}$  є нейтральним, оскільки  $\eta_{N/2j} - \eta_{-N/2j} = 0$  та, отже,  $\operatorname{Re}(\lambda_m(B(\mathcal{M}_{N/2}))) = 0$  для будь-яких  $m$ . Оскільки  $\mathcal{M}_{N/2} \in \operatorname{Fix} \mathcal{R}$ , то для доведення пункту (С) використовуються всі ті ж самі аргументи, що і в (А) та (В).

(D) Як було показано вище, система (5.24) має положення рівноваги  $\mathcal{M}_k$  незалежно від значень її параметрів. Для перевірки стійкості цих точок може бути використана Лема 5.3.3 та її наслідки. Зокрема, дійсні частини власних значень в Якобіану в точках  $\mathcal{M}_k, k \neq 0$  можна представити у вигляді:

$$\operatorname{Re}(\lambda_m(\mathcal{M}_k)) = \sum_{j=1}^{[(N-1)/2]} K_j (\eta_{kj} - \eta_{-kj}) \left( 1 - \cos \left( \frac{2mj\pi}{N} \right) \right), \quad (5.28)$$

$m = 1, \dots, N-1$ . Відповідно до часово-оборотної симетрії  $\mathcal{R}$  положення рівноваги  $\mathcal{M}_{-k}$  є джерелом у тому випадку, коли  $\mathcal{M}_k$  є стоком і навпаки.

Теорему доведено.  $\square$

**Зауваження 5.4.1.** Умова (5.26) є лише достатньою і вона може бути послабленою, використовуючи той факт, що система має інші аттрактори/репелери крім положень рівноваги  $\mathcal{M}_k$ .

**Зауваження 5.4.2.** У випадках, коли функція  $g(x)$  є парною чи непарною, система може мати додаткові специфічні властивості. Можна переконатись в тому, що умова (5.26) не виконується, коли  $g(x)$  є непарною. Також  $\operatorname{Im}(\lambda_m(\mathcal{M}_0)) = 0, m = 1, \dots, N-1$ , коли  $g(x)$  є парною. Зі сказаного випливає, що в даній ситуації початок координат є виродженим сідлом а консервативна область звузилась до однієї точки.

**Зауваження 5.4.3.** Відмітимо, що з суперпозицій симетрій  $Z_N$  та  $\mathcal{R}$  випливає існування  $N-1$  інших реверсивних симетрій  $\mathcal{R}_i, i = 2, \dots, N$ . Таким чином, існують  $N-1$  гіперплощин  $\operatorname{Fix} \mathcal{R}_i = \tilde{\gamma}_{Z_N}^i \operatorname{Fix} \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_1 := \mathcal{R}$ , які є інваріантними (фіксованими) відносно трансформацій  $\mathcal{R}_i, i = 2, \dots, N$ . Всі  $\operatorname{Fix} \mathcal{R}_i$  перетинаються у точці  $\mathcal{M}_0$ , якщо  $N$  є непарним числом, і вони перетинаються вздовж одновимірної лінії  $V_0 \in \mathbb{T}^{N-1}$  (з доведення (А) попередньої теореми),

якщо  $N$  є парним (для доведення останнього твердження потрібно кілька раз застосувати перетворення  $\gamma$  до  $\text{Fix } \mathcal{R}$  та порівняти отримані результати).

**Зауваження 5.4.4.** Якщо періодична орбіта перетинає одну  $\text{Fix } \mathcal{R}_i$  у двох точках, тоді є  $N$   $Z_N$ -симетрично залежних орбіт. Якщо періодична орбіта перетинає принаймні дві  $\text{Fix } \mathcal{R}_i$ , тоді вона перетинає всі з них. Як буде проілюстровано далі в підрозділі 5.5, у мало-вимірних Гамільтоново-подібна динаміка локалізована навколо початку координат, коли  $N$  є непарним та вона транслюється вздовж лінії  $V_0$ , коли  $N$  є парним числом. Також є другий “острів” Гамільтоново-подібної динаміки у парно-вимірному випадку навколо нейтрального положення рівноваги  $\mathcal{M}_{N/2}$ .

У цьому підрозділі було показано, що системи зв’язаних фазових осциляторів з циркулянтним косо-симетричним зв’язком може мати Гамільтоново-подібну динаміку (з деякою долею умовності таку динаміку можна вважати консервативною) у відкритій області в фазовому просторі, а залишок фазового простору заповнений дисипативною динамікою. Також було показано, що областей Гамільтоново-подібної динаміки може бути декілька і вони можуть мати принципово різну структуру у парно та непарно-вимірних випадках простору. Також було описано структуру консервативних областей. В наступному підрозділі буде детально розглянуто властивості консервативно-дисипативних систем починаючи з систем найменшої розмірності, коли така динаміка існує. Будуть показані важливі особливості таких систем, а також біфуркації переходів від більш регулярної динаміки до консервативно-дисипативної (з точки зору теорії біфуркацій така динаміка сама є біфуркаційною або перехідною).

## 5.5. Біфуркаційні властивості мало-вимірних систем

У цьому підрозділі детально буде досліджуватись мало-вимірні системи (5.6)–(5.7) зі специфічними функціями взаємодії. В основному ми розглядаємо функцію зв’язку типу Курамото–Сакагучі [282]:

$$g(x) = -\sin(x - \alpha) \tag{5.29}$$

з фазовим зсувом  $\alpha$ . У випадку  $b = -a$  система має часово-оборотну симетрію (5.25), що призводить до співіснування Гамільтоново-подібної та дисипативної динамік, як це було показано у Теоремі 5.4.1. Наступні результати проілюструють Теорему 5.4.1 і, крім того, нададуть більш детальну інформацію про властивості розв'язків як у дисипативних, так і у консервативних областях. Зокрема, ми опишемо структуру границь вказаних областей та вплив параметрів на розміри цих областей.

Зазначимо, що у випадку симетричного зв'язку  $a = b$  система (5.7) має дієдральну симетрію  $D_N$ . Крім того, система (5.7) з функцією з'єднання Курamoto-Сакагучі (5.29) має додаткові симетрії  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  та  $\Gamma_3$ , які задаються перетвореннями:

$$\begin{aligned}\gamma_1 &: (\varphi_1, \dots, \varphi_{N-1}, a, b, \alpha, t) \mapsto (\varphi_1, \dots, \varphi_{N-1}, -a, -b, \alpha, -t), \\ \gamma_2 &: (\varphi_1, \dots, \varphi_{N-1}, a, b, \alpha, t) \mapsto (-\varphi_1, \dots, -\varphi_{N-1}, a, b, -\alpha, -t), \\ \gamma_3 &: (\varphi_1, \dots, \varphi_{N-1}, a, b, \alpha, t) \mapsto (\varphi_1, \dots, \varphi_{N-1}, a, b, \alpha + \pi, -t).\end{aligned}$$

### 5.5.1. Три зв'язані осцилятори

Система  $N = 3$  ідентичних осциляторів з функцією зв'язку Курamoto-Сакагучі (5.29), записана у фазових різницях, має наступний вигляд:

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi_1}{dt} &= -\sin(\varphi_1 - \alpha) - b \sin(\varphi_2 - \alpha) - b \sin(\varphi_1 + \alpha) - \sin(\varphi_1 - \varphi_2 + \alpha), \\ \frac{d\varphi_2}{dt} &= -\sin(\varphi_1 - \alpha) - b \sin(\varphi_2 - \alpha) - \sin(\varphi_2 + \alpha) - b \sin(\varphi_2 - \varphi_1 + \alpha).\end{aligned}\tag{5.30}$$

Без обмеження загальності ми можемо покласти  $a = 1$ , оскільки теж саме можна досягнути масштабуванням часу у системі. Отже, надалі будемо розглядати систему, яка має лише два параметри  $b$  та  $\alpha$ .

Як показано у значній кількості досліджень, система лише трьох зв'язаних осциляторів може показати дуже варіативну та складну динаміку в залежності від структури зв'язків (див., наприклад, [148, 149, 30, 245]). В подальшому ми повністю опишемо динамічні властивості системи (5.30). Зокрема, Теорема 5.5.1 резюмує співіснування Гамільтоново-подібних та ди-

сипативних динамік, а також більш детально опише структуру фазового простору для косо-симетричного з'єднання  $b = -1$ . Біфуркаційна діаграма у площині параметрів  $\alpha$  та  $b$  показана на рис. 8.26 а типові фазові портрети для різних значень параметрів показані на рис. 8.27.

### 5.5.1.1. Симетрії та положення рівноваги

Циркулянтна  $\mathbb{Z}_3$ -симетрія в системі (5.30) генерується дією  $\gamma_{\mathbb{Z}_3} : (\varphi_1, \varphi_2) \mapsto (-\varphi_2, \varphi_1 - \varphi_2)$ . Початок координат системи  $\mathcal{M}_0 = (0, 0)$ , а також дві особливі точки  $\mathcal{M}_1 = (2\pi/3, 4\pi/3)$  та  $\mathcal{M}_2 = (4\pi/3, 2\pi/3)$  є еквіваріантними відносно дії  $\gamma_{\mathbb{Z}_3}$ . Незважаючи на те, що положення цих точок у фазовому просторі не залежить від параметрів системи, їх стійкість від зміни параметрів залежить. Крім особливих точок  $\mathcal{M}_k$  система має також  $\mathbb{Z}_3$ -симетричні сідла. Для  $\alpha = 0$  координати цих сідел є  $(0, \pi)$ ,  $(\pi, 0)$ ,  $(\pi, 0)$  (див. мал. 8.27(а)) та вони змінюються в залежності від параметрів. Сідла існують для всіх значень параметрів за винятком  $\alpha = \pm\pi/2$ . Одно-вимірні стійкі та нестійкі інваріантні многовиди (сепаратриси) трьох сідел утворюють  $\mathbb{Z}_3$ -гетероклінічні цикли для певних значень параметрів. На рис. 8.27(с), (f), (g) та (j) показано структуру цих гетероклінічних циклів та їх структурну деформацію при зміні параметрів.

### 5.5.1.2. Біфуркації системи

На діаграмі рис. 8.26(а) показано лінії кожної з біфуркацій системи трьох осциляторів. Як випливає з Наслідку 5.3.2 та умови (5.16), лінії біфуркації Андронова-Хопфа, що відбуваються у точках  $\mathcal{M}_k$ , задаються за допомогою виразу:

$$H_k = \left\{ (\alpha, b) : b = -\frac{\cos(2k\pi/3 - \alpha)}{\cos(2k\pi/3 + \alpha)} \right\}, \quad k = 0, 1, 2.$$

Зокрема, біфуркаційна лінія початку координат  $\mathcal{M}_0$  є прямою  $b = -1$ .

$\mathbb{Z}_3$ -симетрична транскритична біфуркація початку координат виникає на біфуркаційній лінії  $\alpha = \pm\pi/2$ , коли друга з умов біфуркації (5.21)  $g'(0) = 0$  також виконується. У цьому випадку три симетричні сідлові точки (рис. 8.27(b)) досягають початку координат одночасно та утворюють вироджене (з шести сідловими комірками) сідло у біфуркаційний момент

(рис. 8.27(d), (k)). При подальшій зміні параметру всі сідла проходять початок координат змінюючи його стійкість а також змінюючи стійкість своїх одно-вимірних многовидів на протилежні.

Дві гетероклінічні біфуркаційні лінії  $HC$  є дуже близькими до ліній біфуркацій Андронова–Хопфа  $H_1$  та  $H_2$  особливих точок  $\mathcal{M}_1$  та  $\mathcal{M}_2$ , відповідно. Лінії  $HC$  та  $H$  біфуркацій перетинаються у точках  $(\alpha, b) = (0, -1)$ ,  $(\pm\pi/2, 1)$ ,  $(\pm\pi/2, -1)$  і у точці, де координата  $b$  є близькою до  $-0.4$ . Глобальна  $HC$  біфуркація складається з трьох симетричних сідлових з'єднань та вона утворює стійкий (рис. 8.27(g)) або нестійкий (рис. 8.27(f)) гетероклінічні цикли. У результаті, граничні цикли виникають в результаті  $H$  біфуркацій Андронова–Хопфа та зникають у результаті  $HC$  гетероклінічних  $\mathbb{Z}_3$ -симетричних біфуркацій (або навпаки). Третій тип  $HC$  біфуркаційної лінії співпадає з біфуркаційною лінією  $H_0$  (біфуркація Андронова–Хопфа в нулі)  $b = -1$ . Відмітимо, що у останньому випадку співпадають біфуркаційні лінії двох біфуркацій, але самі біфуркації відбуваються у різних частинах фазового простору.

Система (5.30) є консервативною у двох точках біфуркацій корозмірності-два  $(\alpha, b) = (0, -1)$  (рис. 8.27(c)) та  $(\alpha, b) = (\pm\pi, -1)$ . У цих випадках система має перший інтеграл:

$$E(\varphi_1, \varphi_2) = \cos \varphi_1 + \cos \varphi_2 + \cos(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Система є також консервативною у випадку  $(\alpha, b) = (\pi/2, 1)$  (рис. 8.27(d)).

Області, де початок координат є стійким складаються з двох частин 1)  $b > -1$ ,  $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$  та 2)  $b < -1$ ,  $\alpha \in (\pi/2, 3\pi/2)$  (зафарбовано сірим кольором на рис. 8.26(a)). Області стійкості особливих точок  $\mathcal{M}_k$ ,  $k = 1, 2$ , є смугами, що знаходяться між двома сусідніми лініями  $H_i$  та вони мають ширину  $\pi$  вздовж осі  $\alpha$ . Смуги стійкості та нестійкості кожної точки чергуються. Зокрема, область стійкості точки  $\mathcal{M}_1$  лежить між двома (синіми) лініями  $H_1$  на біфуркаційній діаграмі рис. 8.26(a) і вона задовольняє нерівностям

$$\arctan\left(\frac{1+b}{\sqrt{3}(1-b)}\right) + 2n\pi < \alpha < \arctan\left(\frac{1+b}{\sqrt{3}(1-b)}\right) + (2n+1)\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Випадок  $b = -1$  ( $\alpha$  є будь-якими) є особливо для нас цікавим. У цьому випадку система має часово-оборотну симетрію  $\mathcal{R}$ , яка описується дією (5.25). Лінія  $\text{Fix } \mathcal{R} : \{(\varphi_1, \varphi_2), \varphi_1 = \varphi_2\}$  є фіксованою (інваріантною) щодо вказаної симетрії. Відмітимо, що ця лінія не є інваріантною множиною відносно потоку системи. Суперпозиція  $\mathbb{Z}_3$  та  $\mathcal{R}$  дає нам дві інші реверсивні симетрії з відповідними фіксованими підпросторами  $\varphi_1 = 0$  та  $\varphi_2 = 0$ . У результаті, система має консервативну та дисипативну області, що співіснують у фазовому просторі  $\mathbb{T}^2$ , відмічені жовтим та білим кольором на рис. 8.27(j), відповідно. Наступне твердження покаже, що фазовий портрет, зображений на рис. 8.27(j) якісно зберігається для майже всіх значень параметру  $\alpha$ , кол  $b = -1$ .

**Теорема 5.5.1.** *Для  $b = -1$  та  $\alpha \notin \{0, \pm\pi/2, \pi\}$  система (5.30) має наступну динаміку у фазовому просторі:*

(А) Гамільтоново-подібна область: існує область у фазовому просторі, що містить початок координат  $\mathcal{M}_0$  та яка є заповненою одно-параметричною сім'єю періодичних орбіт. Ця область є обмеженою  $\mathbb{Z}_3$ -еквіваріантним гетероклінічним циклом, що складається з трьох сідлових точок, з'єднаних одновимірними інваріантними многовидами цих точок. Відповідні сідлові точки належать до фіксованого підпростору оборотної симетрії  $\text{Fix } \mathcal{R}$  або одного з його симетричних відображень відносно дії  $\mathbb{Z}_3$ .

(В) Дисипативна область: Точки  $\mathcal{M}_1$  та  $\mathcal{M}_2$  є стоком та джерелом, відповідно. Тобто, існують околиці точок  $\mathcal{M}_1$  та  $\mathcal{M}_2$  такі, що всі траєкторії, що починаються у даних околицях, асимптотично притягуються до  $\mathcal{M}_1$  і, відповідно, відштовхуються від  $\mathcal{M}_2$  (прямують до  $\mathcal{M}_2$  у зворотньому часі).

**Доведення.** (А) З Теорема 5.4.1 випливає, що система (5.30) має одно-параметричну сім'ю  $\Phi_\sigma(t)$  періодичних розв'язків з періодами близькими до  $2\pi/\Omega_1$ , де  $\Phi_0(t) = \mathcal{M}_0$ , а параметр  $\sigma$  змінюється вздовж лінії  $\text{Fix } \mathcal{R}$ . Отже, окіл точки  $\mathcal{M}_0$  є заповнений періодичними орбітами.

Далі покажемо, що максимальна область  $\mathcal{D}_0$ , що містить множину нейтральних періодичних орбіт є обмеженою гетероклінічним циклом. Відомо,

що границя інваріантної області є інваріантною відносно потоку системи. Для нашої дво-вимірної системи можливо три типи таких інваріантних множин: граничний цикл, гомоклінічний цикл чи гетероклінічний цикл. Граничний циклу такої ситуації неможливий, оскільки він повинен бути нейтральним з середини (він обмежує нейтральні періодичні орбіти), але тоді він буде нейтральним також і з зовні, оскільки будь-яка траєкторія в малому околі цього циклу перетинає  $\text{Fix } \mathcal{R}$  двічі і, отже є періодичною. Таким чином, передбачувана періодична гранична періодична орбіта може бути лише нейтральною і, отже, внутрішньою по відношенню до  $\mathcal{D}_0$ , що, очевидно, призводить до протиріччя. Гомоклінічний цикл також не може бути границею області  $\mathcal{D}_0$ , оскільки, згідно умові  $\mathbb{Z}_3$ -симетрії, може бути три окремих симетричних гомоклінічних петлі, що базуються на трьох окремих сідлах  $S_i$ , але обмежують одну й ту ж нейтральну фіксовану точку  $\mathcal{M}_0$ . Отже, ці гомоклінічні орбіти мусять перетинати одна одну, що призводить до протиріччя. Таким чином,  $\mathbb{Z}_3$ -симетричний гетероклінічний цикл є єдиною можливою границею для області  $\mathcal{D}_0$ . Більш конкретно, він складається з трьох сідел  $S_1(\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}) \in \text{Fix } \mathcal{R}_1$ ,  $S_2(-\tilde{\varphi}, 0) \in \text{Fix } \mathcal{R}_2$ ,  $S_3(0, -\tilde{\varphi}) \in \text{Fix } \mathcal{R}_3$ , де  $\tilde{\varphi} = \pi - 2\alpha$ ,  $\text{Fix } \mathcal{R}_i = \tilde{\gamma}_{\mathbb{Z}_3}^{i-1} \text{Fix } \mathcal{R}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , та трьох одно-вимірних інваріантних многовидів цих сідел. Кожен зі згаданих многовидів з'єднує два сідла і є стійким по відношенню до одного сідла та нестійким по відношенню до іншого.

(В) Власні значення особливої точки  $\mathcal{M}_1 \in \lambda_{1,2}(\alpha) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \sin \alpha \pm i \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha$ . Отже, для  $\alpha \in (0, \pi/2)$  особлива точка  $\mathcal{M}_1$  є стоком, а для  $\alpha \in (\pi/2, \pi)$  ця точка є джерелом. Також переконуємось, що  $\mathcal{M}_2$  є джерелом, коли  $\mathcal{M}_1$  є стоком і навпаки.  $\square$

На додаток до твердження теореми, можна також показати, що дисипативна область є однозв'язною і вона заповнена гетероклінічними траєкторіями, що стартують з точки  $\mathcal{M}_2$  та прямують у точку  $\mathcal{M}_1$  (або навпаки). Граничні гетероклінічні траєкторії є дещо складнішими ніж ті, що належать дисипативній області, вони складаються з сідла і двох його інваріантних многовидів з кінцями у  $\mathcal{M}_1$  та  $\mathcal{M}_2$ . Дане твердження є непрямим наслідком з попередньої теореми і воно використовує обмеженість консервативної області.



Чисельні експерименти, проведені за допомогою програм AUTO [115] та DsTool [44] підтверджують структуру консервативної  $\mathbb{T}^2$  та дисипативної  $\mathbb{T}^2 \setminus \mathcal{D}_0$  областей (див. (рис. 8.27(j), де ці області відмічено жовтим та білим кольорами).

Відмітимо, що система (5.30) має також і інші часово-оборотні симетрії  $\mathcal{R}' : (\varphi_1, \varphi_2) \mapsto (-\varphi_2, -\varphi_1)$  у біфуркаційних точках корозмірності-два  $(\alpha, b) = (0, -1)$  та  $(\alpha, b) = (\pm\pi/2, 1)$  (рис. 8.27(c) та (d), відповідно). Фіксованим підпростором для  $\mathcal{R}'$  є  $\text{Fix } \mathcal{R}' = \{(\varphi_1, -\varphi_1), \varphi_1 \in \mathbb{T}^1\}$ . Інша часово-оборотна симетрія  $\mathcal{R}'' : (\varphi_1, \varphi_2) \mapsto (-\varphi_1, -\varphi_2)$  існує, коли  $\alpha = \pm\pi/2$  для будь-якого значення параметру  $b$  (рис. 8.27(d), (k) та (l)). Дана оборотна симетрія принципово відрізняється від попередніх тим, що її фіксований підпростір є вже не одно-вимірною, а нуль-вимірною множиною.  $\text{Fix } \mathcal{R}''$  в цій ситуації складається з двох точок  $(\varphi_1, \varphi_2) = (0, 0)$  та  $(\varphi_1, \varphi_2) = (\pi, \pi)$  на відміну від попереднього випадку, коли  $\text{Fix } \mathcal{R}'$  є прямою лінією.

Ми детально описали кососиметричну ситуацію, тобто коли  $b = -1$ . Як уже наголошувалось, вся ця лінія є біфуркаційною в просторі двох параметрів. Відмітимо, що одночасно три біфуркації відбуваються при переході параметру  $b$  через цю лінію: вироджена біфуркація Андронова-Хопфа, сідло-вузлова біфуркація, гетероклінічна біфуркація. Перша з цих біфуркація змінює стійкість точки  $\mathcal{M}_0$  на протилежну, друга формує однопараметричну сім'ю періодичних орбіт, склеюючи частини дуже щільної спіралі і потім розриваючи їх, третя біфуркація є гетероклінічною і вона формує гетероклінічний цикл, що обмежує сім'ю періодичних орбіт. Отже, часово-оборотна динаміка створюється за допомогою цих трьох одночасних біфуркацій завдяки косо-симетричності зв'язків між осциляторами.

### 5.5.2. Чотири зв'язані осцилятори

Система (5.7) для  $N = 4$  ідентичних осциляторів є трьох-вимірною для фазових різниць  $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$  і вона має вигляд:

$$\frac{d\varphi_i}{dt} = g(\varphi_1) - g(\varphi_{i+1} - \varphi_i) + b(g(\varphi_3) - g(\varphi_{i+3} - \varphi_i)), \quad i = 1, 2, 3, \quad (5.31)$$

де  $g(x) = -\sin(x - \alpha)$ . Тут також покладемо  $a = 1$ , що не обмежує загальності розгляду. Окрім синхронізованого розв'язку  $\mathcal{M}_0$  в початку координат, система (5.31) має завжди інші три положення рівноваги  $\mathcal{M}_1 = (\pi/2, \pi, 3\pi/2)$ ,  $\mathcal{M}_2 = (\pi, 0, \pi)$  та  $\mathcal{M}_3 = (\pi, 0, \pi)$  незалежно від функції зв'язку  $g(x)$ . Інші положення рівноваги виникають вже при появі додаткових гармонік у функції  $g(x)$ . Проведення біфуркаційного аналізу кожного з положень рівноваги дозволяє побудувати біфуркаційну діаграму.

Біфуркаційна діаграма в площині параметрів  $(\alpha, b)$  для  $N = 4$  показана на рис.8.26(b), де зображено лінії біфуркації Андронова–Хопфа ( $H$ ) та транскритична біфуркація ( $TC$ ). Область стійкості синхронного розв'язку є тією ж, що і для трьох осциляторів і вона позначена сірим кольором на малюнку. Область стійкості антисинхронної точки  $\mathcal{M}_2$  (дві пари осциляторів знаходяться в антифазі) співпадає з областю нестійкості синхронного стану. Області стійкості особливих точок  $\mathcal{M}_1$  та  $\mathcal{M}_3$  також доповнюють одна одну в біфуркаційній площині та є розділеними лініями  $\alpha = 0$ ,  $\alpha = \pi$  та  $b = 1$ .

Відмітимо, що біфуркаційні лінії на діаграмі рис. 8.26(b) показують не лише локальні, а й глобальні біфуркації, які відбуваються одночасно. Так, зокрема лінія одночасних двох локальних біфуркації Андронова–Хопфа  $b = -1$  є також лінією сідлово–зв'язних біфуркацій, у результаті яких в момент біфуркації виникають періодичні орбіти, які одразу ж зникають. Згадана вище біфуркація є аналогічною плоскій глобальній біфуркації для трьох осциляторів при переході параметру  $b$  через значення  $-1$ . У момент біфуркації ми маємо щільну множину періодичних орбіт, яка при найменшому збуренні параметру перетворюється у щільно намотану спіраль. Вказана спіраль змотується (розмотується) до переходу через біфуркаційне значення і розмотується (змотується) після нього. Оскільки центр спіралі також мусить змінювати свою стійкість, то всередині відбувається вироджена біфуркація Андронова–Хопфа. На зовнішній границі спіралі також відбувається гетероклінічна біфуркація, яка утворює границю сім'ї періодичних орбіт і яка існує лише в момент біфуркації. Іншою глобальною біфуркацією є гетероклінічна/транскритична біфуркація, де вироджені сідла, утворені внаслідок транскритики, є вузлами гетероклінічних циклів.

Відмітимо також, що система є консервативною в точках корозмірності—два  $(\alpha, b) = (0, -1)$  та  $(\alpha, b) = (\pi, -1)$  біфуркаційної площини. При таких значеннях параметрів система (5.31) має два перших інтеграли

$$I_1(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = \varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3,$$

$$I_2(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = \cos(\varphi_1) + \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \cos(\varphi_2 - \varphi_3) + \cos(\varphi_3).$$

Випадок косо-симетричного зв'язку веде до появи співіснування Гамільтоново-подібних та дисипативних динамік. Наступне твердження описує ситуацію детальніше.

**Теорема 5.5.2.** *Для  $b = -1$  та  $\alpha \notin \{0, \pm\pi/2, \pm\pi\}$  система (5.30) має наступну динаміку у фазовому просторі:*

(А) Гамільтоново-подібні області: існують околиці  $\mathcal{D}_0$  та  $\mathcal{D}_2$  положень рівноваги  $\mathcal{M}_0$  та  $\mathcal{M}_2$ , які є обмеженими дво-параметричними сім'ями періодичних розв'язків.

(В) Дисипативна область: Положення рівноваги  $\mathcal{M}_1$  є або стоком, або джерелом. Положення рівноваги має доповнюючі до  $\mathcal{M}_3$  властивості стійкості.

**Доведення.** Доведення даного твердження базується на Теоремі 5.4.1. Зробимо лише декілька зауважень відносно ідеї доведення.

(А) Відповідно до (5.12), власні значення початку координат мають вигляд  $\lambda_{1,3}(\mathcal{M}_0) = \pm i\Omega_1 = \pm i2 \cos(\alpha)$  та  $\lambda_2 = 0$ . Для  $\alpha \neq \pm\pi/2$  виконується  $\Omega_1 \neq 0$ . Двопараметрична сім'я періодичних розв'язків знаходиться у області, обмеженій тетраедро-подібною сім'єю гетероклінічних циклів (яка буде описана детально нижче). Гетероклінічну структуру границі області  $\mathcal{D}_0$  можна довести у спосіб, подібний до доведення пункту (А) з попередньої теореми з урахуванням нейтральності періодичних орбіт в околиці  $\mathcal{M}_0$  та симетрій системи  $\mathcal{R}, \mathbb{Z}_4$ . З симетрій системи також впливає, що консервативна область  $\mathcal{D}_2$  навколо іншої нейтральної особливої точки  $\mathcal{M}_2$  має ту ж структуру, що і  $\mathcal{D}_0$ , відрізняючись лише протилежними напрямками векторного поля всередині області. Зауважимо, що Гамільтоново-подібні області  $\mathcal{D}_0$  та  $\mathcal{D}_2$  звужуються

до точок  $\mathcal{M}_0$  та  $\mathcal{M}_2$ , коли значення  $|\alpha|$  досягає  $\pi/2$ .

(В) Доведення пункту (В) проводиться аналогічно такому ж доведенню у попередній теоремі з урахуванням формули (5.12).  $\square$

Наведені нижче спостереження дають більш детальну інформацію та завершують глобальну картину динаміки в фазовому просторі при  $b = -1$ , вони також підсумовані у схематичних зображеннях на рис. 8.28(a), (b). Відмітимо, що суперпозиція симетрій  $\mathbb{Z}_4$  та  $\mathcal{R}$  дає іншу часово-реверсивну симетрію  $\mathcal{R}'$  з інваріантною множиною  $\text{Fix } \mathcal{R}' : \{(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) : \varphi_2 = 0\}$ . Перетин площин  $\text{Fix } \mathcal{R}$  та  $\text{Fix } \mathcal{R}'$  дає одно-вимірний інваріантний відносно потоку підпростір  $V_0 = \text{Fix } \mathcal{R} \cap \text{Fix } \mathcal{R}' = \{(\varphi, 0, \varphi), \varphi \in \mathbb{T}^1\} = \text{span } v$ , де  $v = (1, 0, 1)$  є власним вектором, відповідним власному значенню  $\lambda_2 = 0$  положення рівноваги  $\mathcal{M}_0$ . Можна безпосередньо переконатись, що вся лінія  $V_0$  є заповненою особливими точками.

Використовуючи всю наведену вище інформацію, опишемо структуру внутрішньої частини та границі консервативної області. Використовуючи Теорему 5.4.1 переконуємось, що точка  $\mathcal{M}_0$  оточена дво-параметричною сім'єю нейтральних періодичних орбіт. Крім того, всі внутрішні траєкторії  $\mathcal{D}_0$  мають  $\mathbb{Z}_4$ -симетричне обертання навколо лінії нейтральних точок  $V_0$ , а також дві реверсивні симетрії  $\mathcal{R}$  та  $\mathcal{R}'$  і перетинають по два рази площини  $\text{Fix } \mathcal{R}$  та  $\text{Fix } \mathcal{R}'$ . Аналогічно міркуванням доведення пункту (А) Теорема 5.5.1) переконуємось, що границя області  $\mathcal{D}_0$  може складатись лише з траєкторій, які є нейтральними відносно внутрішньої частини цієї області та не є нейтральними відносно зовнішньої її частини. Особливими точками, що належать границі області можуть бути лише вироджені сідла, які мають один притягуючий, один нейтральний та один відштовхуючий напрямки своїх одновимірних інваріантних многовидів. траєкторії, що належать границі  $\mathcal{D}_0$ , або мають власну внутрішню симетрію  $\mathbb{Z}_4$ , або мають інші симетричні дублікати самих себе. Враховуючи вище сказане, переконуємось, що границя області  $\mathcal{D}_0$  має наступну структуру – це *тетрадро-подібна* поверхня, чотирма ребрами якої є гетероклінічний цикл з сідлами  $S_1, S_2, S_3, S_4$  у вершинах, а інші два ребра складаються з одно-параметричних множин неізольованих вироджених сідел (як це зображено на рис. 8.28(b)). Ребра  $S_1S_2, S_2S_3, S_3S_4, S_4S_1$  є криволіній-

ними одно-вимірними многовидами сідел і вони також є  $\mathbb{Z}_4$ -симетричними одне відносно іншого. Два інші одно-вимірні інваріантні многовиди кожного сідла, що не належать гетероклінічному циклу, з'єднані з іншими особливими точками  $\mathcal{M}_1$  та  $\mathcal{M}_3$  (як показано на малюку). Ребра тетраедра  $S_1S_3$  та  $S_2S_4$  є прямими лініями (на відміну від інших ребер) і вони цілком заповнені сідлами, які є виродженими вздовж самих ребер і невиродженими у трансверсальних напрямках.  $S_1S_3$  і  $S_2S_4$  переводяться одне в інше згідно  $\mathbb{Z}_2$ -симетрії. Як показано на рис. 8.28(b), тетраедро-подібна конструкція нанизується на пряму  $V_0$ . На відміну від гетероклінічного циклу  $S_1S_2S_3S_4$ , що складається з чотирьох траєкторій, всі інші гетероклінічні цикли границі  $\partial\mathcal{D}_0$  складаються лише з двох траєкторій. Ці цикли складаються з двох сідел  $S$  та  $S'$ , симетричних відносно центру відрізка  $S_1S_3$  (точки, яка є перетином  $S_1S_3 \cap V_0$ ) і їх одно-вимірних інваріантних многовидів, кожен з яких є одночасно притягуючим для одного сідла і відштовхуючим для іншого. Неперервна множина описаних дво-частинних циклів, що базуються на сідлах з  $S_1S_3$  утворює дві з чотирьох граней квазі-тетраедра. Інші дві грані границі  $\partial\mathcal{D}_0$  утворюються симетрично з сім'ї гетероклінічних циклів, що базуються на лінії  $S_2S_4$ . Гетероклінічні грані граничної множини позначені на рис. 8.28(b) червоним, грані з множини нейтральних особливих точок позначені синім, приклади двох гетероклінічних циклів виділені зеленим на гранях тетраедро-подібної граничної області.

На малюнку видно, які трансформації переводять тетраедро-подібну структуру у саму себе, а саме: поворот навколо  $V_0$  на кут  $\pi$ , дзеркальне відображення відносно  $\text{Fix } \mathcal{R}$  або  $\text{Fix } \mathcal{R}'$  зі зміною напрямку всіх траєкторій, поворот навколо центру  $\mathcal{M}_0$  таким чином, щоб кожне з сідел  $S_i$  попало на місце сідла  $S_{i+1}$  (індекси беруться по модулю 4).

Положення рівноваги  $\mathcal{M}_2$  також належить підпростору  $V_0$  та має всі ті ж властивості, що і  $\mathcal{M}_0$ . Друга консервативна область  $\mathcal{D}_2$  є трансляцією області  $\mathcal{D}_0$  вздовж вектора  $v$  на довжину  $\pi$  (половину довжини тору вздовж даного напрямку). Всі періодичні орбіти всередині  $\mathcal{D}_2$  та всі гетероклінічні цикли на границі цієї області мають протилежні напрямки по відношенню до таких же у  $\mathcal{D}_0$ .

Отже, система (5.31) має дві подібні консервативні області  $\mathcal{D}_0$  та  $\mathcal{D}_2$  які доповнюються дисипативною областю  $\mathbb{T}^3 \setminus (\mathcal{D}_0 \cup \mathcal{D}_2)$ . Перетини Пуанкаре множин  $\mathcal{D}_0$ ,  $\mathcal{D}_2$  та  $\mathbb{T}^3 \setminus (\mathcal{D}_0 \cup \mathcal{D}_2)$  з  $\text{Fix } \mathcal{R}$  показані на рис. 8.28(c). Точки многовиду  $V_0$ , що пронизує обидві області  $\mathcal{D}_0$  та  $\mathcal{D}_2$  є цілком нейтральними при  $V_0 \cap (\mathcal{D}_0 \cup \mathcal{D}_2)$ . Але інші точки цього многовиду з  $V_0 \setminus (\mathcal{D}_0 \cup \mathcal{D}_2)$  є нейтральними лише вздовж нього самого та є сідловими у двох трансверсальних до  $V_0$  напрямках. Через згадані з  $V_0 \setminus (\mathcal{D}_0 \cup \mathcal{D}_2)$  проходять гетероклінічні траєкторії, що зв'язують  $\mathcal{M}_3$  та  $\mathcal{M}_1$  (див. рис. 8.28(a), (b)).

Кожна періодична траєкторія з  $\mathcal{D}_0$  крутиться навколо  $V_0$  та перетинає  $\text{Fix } \mathcal{R}$  у двох точках  $(\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \bar{\varphi}_1)$  та  $(\bar{\varphi}_1 - \bar{\varphi}_2, -\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_1 - \bar{\varphi}_2)$ , а площину  $\text{Fix } \mathcal{R}'$  у точках  $(-\bar{\varphi}_1, 0, \bar{\varphi}_2 - \bar{\varphi}_1)$  та  $(\bar{\varphi}_2 - \bar{\varphi}_1, 0, -\bar{\varphi}_1)$ , де  $\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2$  – початкові значення траєкторії на  $\text{Fix } \mathcal{R}$ . Можна переконатись, що  $\text{Fix } \mathcal{R}$  містить дві лінії неізольованих особливих точок  $\varphi_2 = 2(\varphi_1 + \alpha) \pm \pi$  (чи, еквівалентно, це одна лінія на торі  $\mathbb{T}^2$  з числом обертання 1:2). Кожна особлива точка цієї лінії є виродженим сідлом, яке є нейтральним сідлом, тобто, вона є нейтральною вздовж самої лінії і вона має притягуючий та відштовхуючий одно-вимірні інваріантні многовиди у трансверсальних до згаданої лінії напрямках. Згідно до симетрії обертання, інша інваріантна площина  $\text{Fix } \mathcal{R}'$  має також одно-параметричні лінії вироджених сідел, які визначаються виразом  $\varphi_3 = -\varphi_1 + 2\alpha \pm \pi$ . Особливі точки на перетині згаданих ліній з  $V_0$  мають всі нульові власні значення. Всього є чотири такі точки з координатами  $(\pm\pi \pm \alpha, 0, \pm\pi \pm \alpha)$ . Ці точки лежать на границі між консервативною та дисипативною областями (вони позначені жовтим та темно синім кольорами на рис. 8.28(c)). Одно-параметрична сім'я одно-вимірних многовидів сідел формує дво-вимірні поверхні (трубки), які є границею між Гамільтоново-подібною  $\mathcal{D}_0$  ( $\mathcal{D}_2$ ) та дисипативною областями. Вся поверхня сепаратрис складається з гетероклінічних циклів, що з'єднують два вироджених сідла тої ж самої інваріантної лінії. Інші інваріантні многовиди згаданих сідел з'єднані з  $\mathcal{M}_1$  чи  $\mathcal{M}_3$ .

Як буде показано нижче, при  $\alpha = 0$  (та  $\alpha = \pi$ , симетрично) система є повністю консервативною і, отже,  $\mathcal{D}_0 \cup \mathcal{D}_2 = \mathbb{T}^3$ . При збільшуванні параметру  $|\alpha|$  від нуля кожна з консервативних областей стискається, звільняючи простір для дисипативної динаміки. І при досягненні  $|\alpha|$  значення  $\pi/2$  обидві

консервативні області стягнуться до особливих точок  $\mathcal{M}_0$  та  $\mathcal{M}_2$  (які в цей момент є виродженими сідлами), надаючи можливість дисипативній області максимально розширитись і заповнити весь фазовий простір.

### 5.5.3. П'ять та більше зв'язаних осциляторів

Розглянемо систему  $N$  взаємодіючих осциляторів (5.6) з функцією зв'язку (5.29) та її редукований варіант у фазових змінних (5.7). Відмітимо, що на відміну від систем трьох та чотирьох осциляторів, коли можливий зв'язок кожного осцилятора лише з найближчим сусідом ( $l = 1$  в системі (5.6)), для випадку  $N \geq 5$  осциляторів можливий також зв'язок і з двома та більшою кількістю найближчих сусідів, а саме  $l$  змінюється від 1 до  $[N/2]$  у загальному випадку в системі (5.6). Вже у випадку системи п'яти осциляторів дві різні системи для  $l = 1$  та  $l = 2$  мають різні динамічні властивості. Крім того, у цьому випадку ситуація є набагато складнішою ніж у попередніх випадках  $N \leq 4$ , оскільки при  $N = 5$  фазовий простір системи у фазових різницях (5.7) є чотири-вимірним і його уява та графічне представлення є часто дуже складним. Незважаючи на це, наведені вище результати дають повну картину локальних біфуркацій та можливість досить повно описати глобальну динаміку. Використовуючи Лему 5.3.1, Наслідок 5.3.2 та формулу (5.16), можна знайти всі лінії біфуркації Андронова–Хопфа для випадків довільної кількості осциляторів  $N$  з довільною кількістю зв'язків з сусідами  $l \leq [N/2]$ .  $N$  ліній біфуркацій Андронова–Хопфа для кожної з хвиль обертання  $\mathcal{M}_k$  описуються наступним виразом:

$$H_k = \left\{ (\alpha, b) : b = - \frac{\sum_{j=1}^l \cos(2kj\pi/N - \alpha) (1 - \cos(2mj\pi/N))}{\sum_{j=1}^l \cos(2kj\pi/N + \alpha) (1 - \cos(2mj\pi/N))} \right\}, \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (5.32)$$

Запис формул біфуркаційних ліній є значно простішим у випадку, коли графом зв'язків є одновимірне коло ( $l = 1$ ). Тоді формула (5.32) спрощується до вигляду:  $b = -\cos(2k\pi/N - \alpha)/\cos(2k\pi/N + \alpha)$ . Відмітимо, що кожна з біфуркаційних ліній для особливих точок  $\mathcal{M}_k$ ,  $k = 1, \dots, N-1$ , з координатами  $(\alpha, b)$  має свою копію зі зсувом на пів періода та з координатами  $(\alpha + \pi, b)$ ,

відповідно. Такі дві лінії розділяють параметричний циліндр на дві смуги: одна є смугою стійкості точки  $M_k$ , а друга є смугою її нестійкості (частіше за все точка є сідловою). Парно-вимірний та непарно-вимірний випадки є принципово відмінними. У парно-вимірному випадку кожні дві лінії біфуркацій Андронова–Хопфа  $H_k$  та  $H_{k+N/2}$  співпадають між собою. У випадку непарно-вимірною  $N$  усі  $H_k$  є різними.

Дослідження стійкості положень рівноваги також показує, що система має дві лінії транс критичних біфуркацій  $\alpha = \pm\pi/2$ . Така транс критична біфуркація полягає у тому, що  $N$  симетричних сідел попадають одночасно у початок координат, де знаходиться синхронізований розв'язок  $M_0$ . Сідла проходять через початок координат змінюючи стійкості своїх інваріантних многовидів, а також змінюючи стійкість  $M_0$  на протилежну.

Вираз (5.32) вказує на те, що лінія біфуркації Андронова–Хопфа не залежить від кількості осциляторів у системі та кількості зв'язків між ними і завжди є прямою лінією  $b = -1$ . Це значення параметру  $b$  відповідає косо-симетричності зв'язків у моделі, спричиняє ряд цікавих властивостей (як і у випадках менших розмірностей). Розглянемо детально динаміку системи у косо-симетричному випадку для  $N = 5$  осциляторів та  $l = 1$  зв'язків кожного осцилятора з сусідами справа і зліва. Наступна теорема є наслідком Теорема 5.4.1 з урахуванням розмірності фазового простору та особливостей зв'язків між елементами системи.

**Теорема 5.5.3.** *Для  $b = -1$  та  $\alpha \notin \{0, \pm\pi/2, \pm\pi\}$  система (5.7)  $n$ 'яти осциляторів з функцією зв'язку (5.29) має наступну динаміку у фазовому просторі:*

(А) Гамільтоново-подібна область: (i) В околі положення рівноваги  $M_0$  існує одно-параметрична область періодичних розв'язків. (ii) В будь-якому околі  $M_0$  існує аналітичний дво-вимірний тор, який є інваріантним відносно потоку системи та відносно оборотної трансформації  $\mathcal{R}$ . Крім того, якщо  $U_\varepsilon$  є  $\varepsilon$ -околом точки  $M_0$ , то міра Лебега інваріантних торів прямує до повної міри околу  $U_\varepsilon$ , коли  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

(В) Дисипативна область: Для  $0 < \alpha < \pi$  хвилі обертання  $M_1, M_2$  є



стоками, а  $M_3, M_4$  є джерелами. Для  $-\pi < \alpha < 0$  стійкості точок є протилежними, тобто  $M_1, M_2$  – джерела,  $M_3, M_4$  – стоки.

Опишемо динаміку всередині та на межі Гамільтоново-подібної області  $\mathcal{D}_0$ . Теорема 5.5.3 вказує на те, що окіл особливої точки  $M_0$  щільно заповнений дво-параметричною множиною квазі-періодичних торів, в яку влітається п'ять одно-параметричних (однакових відносно симетрії  $\mathbb{Z}_5$ ) множин періодичних орбіт. Намагання описати межу цієї множини  $\partial\mathcal{D}_0$  приводить до висновку, що така межа може складатись лише з особливих точок типу сідло та гетероклінічних орбіт. У випадку п'яти осциляторів ця область є криволінійним многогранником у чотири-вимірному фазовому просторі, яка базується на п'яти вершинах  $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5$ , кожна з яких є сідловою точкою і всі разом вони є  $\mathbb{Z}_5$  симетричними. Кожне сідло  $S_i$  має дво-вимірний відштовхуючий та двовимірний притягуючий інваріантні многовиди. Гранями многогранника є одновимірні інваріантні многовиди цих сідел  $S_1S_2, S_2S_3, S_3S_4, S_4S_5, S_5S_1, S_1S_3, S_2S_4, S_3S_5, S_4S_1, S_5S_2$  (послідовність індексів вказує на напрямок траєкторії). Описаний граф з 5-ти сідел та 10-ти гетероклінічних траєкторій має замкнуті цикли з 3, 4 та 5 вершинами, що відповідають гетероклінічним циклам динамічної системи. Так система має два максимальних гетероклінічних цикли  $S_1S_2S_3S_4S_5$  та  $S_1S_3S_5S_2S_4$ . Трійки сідел також утворюють дво-вимірні грані, коли ці сідла не утворюють гетероклінічні цикли (наприклад грань  $S_1S_2S_3$ ). Такі грані заповнені гетероклінічними траєкторіями (у попередньому прикладі всі вони йдуть з  $S_1$  в  $S_3$ ). Також межа  $\partial\mathcal{D}_0$  чотири-вимірної множини  $\mathcal{D}_0$  обмежена трьох-вимірними гранями (вигляду  $S_1S_2S_3S_4$ ), які цілком заповнені гетероклінічними траєкторіями. Можна переконатись у тому, що стартуючи з будь-якого сідла і проходячи 3, 4 або 5 гетероклінічних траєкторій, повертаємося до того ж сідла. Отже, вся межа області  $\mathcal{D}_0$  цілком складається з гетероклінічних циклів, які разом утворюють одно, дво чи три-вимірні множини. Вся конструкція  $\mathcal{D}_0$  має симетрії  $\mathbb{Z}_5$  та  $\mathcal{R}$ .

На рис. 8.29(b) проілюстровано динаміку системи (5.7) для  $N = 5$ , використовуючи дво-вимірний фіксований підпростір інволюції  $\mathcal{R}$ :

$$\text{Fix } \mathcal{R} = \{(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4) : \varphi_1 = \varphi_4, \varphi_2 = \varphi_3\}.$$

Червона область на рис. 8.29(b) ілюструє Гамільтоново-подібні області, а синя – дисипативну. Зокрема червона область відповідає точкам, які відповідають орбітам з усіма Ляпуновськими експонентами близькими до нуля (меншими по модулю за  $10^{-4}$ ). Синя область належить до басейну притягання однієї з хвиль притягання: світло синя до  $\mathcal{M}_2$ , а темно-синя до  $\mathcal{M}_1$ . Чорні лінії на рис. 8.29(b) відповідають двом одно-параметричним сім'ям періодичних орбіт. Дві чорні лінії перетинаються у точці  $\mathcal{M}_0$  на перерізі Пуанкаре. У фазовому просторі  $\mathbb{T}^4$  системи (5.7) існує п'ять дво-вимірних поверхонь періодичних розв'язків, які мають спільну точку  $\mathcal{M}_0$ .

Аналітичні та чисельні дослідження показують, що динаміка системи (5.7) природньо ускладнюється з додаванням нових розмірностей. Незважаючи на це, певні риси є інваріантними і до розмірності системи. Згідно Теоремі 5.4.1 співіснування Гамільтоново-подібної та консервативної динаміки завжди присутнє для системи (5.7) з косо-симетричними зв'язками, тобто при  $b = -1$ . Суттєва відмінність динаміки спостерігається у парно-вимірних та непарно-вимірних систем. Так непарно-вимірні системи мають *одно-параметричну* сім'ю періодичних орбіт в околі синхронного розв'язку  $\mathcal{M}_0$ , фіксовані множини різних інволюцій перетинаються в *одній точці*:

$$\bigcap_{i=1}^N \text{Fix } \mathcal{R}_i = \mathcal{M}_0,$$

межа консервативної області  $\mathcal{D}_0$  складається з *ізолюваних невироджених* сідел та гетероклінічних траєкторій. На відміну від непарно-вимірних систем, парні системи мають *дво-параметричну* сім'ю періодичних орбіт в околі синхронного розв'язку  $\mathcal{M}_0$ , фіксовані множини різних інволюцій перетинаються вздовж *одно-вимірного підпростору*:

$$\bigcap_{i=1}^N \text{Fix } \mathcal{R}_i = V_0$$

і всі періодичні і квазі-періодичні траєкторії обертаються навколо лінії нейтральних особливих точок  $V_0$ , межа консервативної області  $\mathcal{D}_0$  складається з *неперервних множин вироджених* сідел та гетероклінічних траєкторій. Детальніше можна сказати, що  $\partial\mathcal{D}_0 \in \mathbb{Z}_N$ -симетричною та  $(N-2)$ -вимірною гіперповерхнею у  $\mathbb{T}^{N-1}$  або гіпербагатогранником, що може бути описаний повним графом, який базується на сідлових точках  $S_i, i = 1, \dots, N$ , як вершинах. Всі  $N(N-1)/2$  одновимірні ребра  $\partial\mathcal{D}_0$  є інваріантними многовидами сідел  $S_i$  та формують гетероклінічні цикли у випадку непарних  $N$ . Лише  $N(N-3)/2$  ребер  $\partial\mathcal{D}_0$  є гетероклінічними траєкторіями у випадку парної кількості осциляторів, інші  $N$  ребер цілком складаються з однопараметричних множин вироджених сідел. Зміна параметру  $|\alpha|$  від 0 до  $\pi/2$  проводить трансформацію від повністю консервативної системи до консервативно-дисипативної і, врешті, до повністю дисипативної (як і у описаних випадках малої розмірності). Додатковий чисельний аналіз показує наявність хаотичних траєкторій у Гамільтоново-подібній області (принаймні для  $N \geq 6$ ), які перемішуються з періодичними та квазі-періодичними орбітами. Відмітимо, що хаотичні траєкторії є консервативного типу, тобто вони не є атрactorами чи репелерами, вони є нейтральними по відношенню до сусідніх траєкторій (подібні до класичних АВС-потоків [25, 116]).

## 5.6. Неідентичні осцилятори

### 5.6.1. Бездивергентна динаміка

Як було показано, система (5.7) є Гамільтоново-подібною у всьому фазовому просторі для трьох та чотирьох осциляторів коли функція зв'язку  $g(x) = -\sin x$  та  $a = -b$ . У цьому випадку система має  $N$  нейтральних хвиль обертання  $\mathcal{M}_k$ , сідлові особливі точки, гетероклінічні структури, неперервні множини періодичних орбіт (як показано на рис. 8.27(с) для трьох осциляторів) та квазі-періодичні чи хаотичні траєкторії (для вищих розмірностей). У цьому випадку векторне поле має нульову дивергенцію навіть для довільних фазових різниць  $\Delta_i = \omega_1 - \omega_{i+1}$ . Наступне твердження узагальнить ці результати.

**Теорема 5.6.1.** (А) Система (5.5) з довільними фазовими різницями  $\Delta_i$ ,  $i = 1, \dots, N-1$ , косо-симетричною матрицею зв'язків:  $K_{-j} = -K_j$  та непарною функцією зв'язків є бездивергентною.

(В) Система (5.5) з довільними фазовими різницями  $\Delta_i$ ,  $i = 1, \dots, N-1$ , симетричною матрицею зв'язків:  $K_{-j} = K_j$  та парною функцією зв'язків є бездивергентною.

Доведення. (А) З припущення непарності функції зв'язку:  $g(x) = -g(-x)$  впливає парність її похідної:  $g'(x) = g'(-x)$ . Тоді безпосередньо переконуємось, що для системи (5.5), записаної у векторній формі (8.11), виконуються перетворення

$$\begin{aligned} \operatorname{div}G(\Phi) &= \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\partial \dot{\varphi}_i}{\partial \varphi_i} = \sum_{i=1}^{[(N-1)/2]} K_i (g'(\varphi_i) - g'(\varphi_{-i})) + \\ &+ \sum_{i=1}^{N-1} \left( \sum_{j=1}^{[(N-1)/2]} K_j (g'(\varphi_{i+j} - \varphi_i) - g'(\varphi_{i-j} - \varphi_i)) \right) = \\ &= \sum_{j=1}^{[(N-1)/2]} K_j \left( \sum_{i=0}^{N-1} (g'(\varphi_{i+j} - \varphi_i) - g'(\varphi_{i-j} - \varphi_i)) \right) = \\ &= \sum_{j=1}^{[(N-1)/2]} K_j \left( \sum_{i=0}^{N-1} (g'(\varphi_{i+j} - \varphi_i) - g'(\varphi_i - \varphi_{i+j})) \right) = 0. \end{aligned}$$

Що і треба було показати. Доведення пункту (В) проводиться аналогічно з урахуванням того факту, що  $g(x) = g(-x) \implies g'(x) = -g'(-x)$ .  $\square$

**Зауваження 5.6.1.** Система Курамото–Сакагучі зв'язаних осциляторів з фазовим зсувом  $\alpha = \pi/2$  є частковим випадком системи, описаної в пункті (В).

Бездивергентна системи зв'язаних осциляторів може демонструвати співіснування періодичних, квазі-періодичних та хаотичних траєкторій для систем вищих порядків. На рис. 8.30 показано знайдені чисельно розв'язки різних типів для різних початкових значень та для однакових фіксованих зна-

чень параметрів ( $N = 7, l = 2, a = -b = -1, g(x) = -\sin x$ ). Гомологічні та негомологічні нулю розв'язки на вказаному малюку співіснують у фазовому просторі.

Наступні два твердження дозволяють знайти два незалежні перші інтеграли у певних випадках.

**Теорема 5.6.2.** Система (5.24) для  $N \geq 3$  зі взаємодією лише між найближчими сусідами:

$$\frac{d\varphi_i}{dt} = K_1(g(\varphi_1) - g(\varphi_{N-1}) - g(\varphi_{i+1} - \varphi_i) + g(\varphi_{i-1} - \varphi_i))$$

та непарною функцією зв'язку  $g(x)$  має перший інтеграл

$$E_1(\varphi_1, \dots, \varphi_{N-1}) = \sum_{i=0}^{N-1} h(\varphi_i - \varphi_{i+1}),$$

де  $h'(\varphi) = g(\varphi)$ ,  $\varphi_N = \varphi_0 = 0$ . Зауважимо, що  $h(\varphi)$  є парною.

Доведення. Система у фазових змінних (5.24) є редукцією системи (5.23) в оригінальних змінних  $\theta_i$  і ця редукція можлива завдяки симетрії фазового зсуву  $\mathbb{S}^1$ , яка, в свою чергу, є можливою внаслідок того, що права частина (5.23) містить лише фазові різниці. Перехід  $\varphi_i = \theta_1 - \theta_{i+1}$  від (5.24) до (5.23) означає фіксацію однієї змінної  $\theta_1$  зі втратою симетрії. Фактично, перехід до фазових різниць еквівалентний розгляду оригінальної  $N$ -вимірної системи при фіксації  $\theta_1 = 0$  (це зробити дозволяє нам симетрія). Отже, якщо оригінальна система має перший інтеграл, який також буде залежним виключно від фазових різниць  $E_1(\theta_1 - \theta_2, \dots, \theta_1 - \theta_N)$  то редукована система буде мати той же перший інтеграл у нових змінних  $E_1(\varphi_1, \dots, \varphi_{N-1})$ . Таким чином, замість оригінальної постановки задачі, ми доведемо, що система (5.23) має перший інтеграл, записаний у вигляді

$$E_1(\varphi_1, \dots, \varphi_{N-1}) = E_1(\theta_1 - \theta_2, \dots, \theta_1 - \theta_N) = \sum_{i=1}^N h(\theta_i - \theta_{i+1}),$$

де індекс  $i$  береться по модулю  $N$ . Легко переконатись, що

$$\frac{dE_1}{d\theta_i} = g(\theta_i - \theta_{i+1}) - g(\theta_{i-1} - \theta_i).$$

Система (5.23) у випадку одно-вимірного кільця зв'язків має вигляд

$$\frac{d\theta_1}{dt} = F_i(\theta_1, \dots, \theta_N) = \omega + K_1 (g(\theta_i - \theta_{i+1}) - g(\theta_i - \theta_{i-1})).$$

Без обмеження загальності можемо покласти  $\omega = 0$ , оскільки цей параметр можна прибрати з системи за допомогою заміни  $\theta_i \rightarrow \theta_i + \omega t$ . Похідна функції  $E_1$  вздовж векторного поля  $F$  системи (5.23) має вигляд:

$$\begin{aligned} L_F E_1 &= \sum_{i=1}^N F_i \frac{dE_1}{d\theta_i} = \sum_{i=1}^N F_i K_1 (g(\theta_i - \theta_{i+1}) - \\ &- g(\theta_i - \theta_{i-1})) (g(\theta_i - \theta_{i+1}) - g(\theta_{i-1} - \theta_i)) = \\ &= K_1 \sum_{i=1}^N (g(\theta_i - \theta_{i+1}) - g(\theta_i - \theta_{i-1})) (g(\theta_i - \theta_{i+1}) + g(\theta_i - \theta_{i-1})) = \\ &= K_1 (g^2(\theta_1 - \theta_2) - g^2(\theta_1 - \theta_N) + g^2(\theta_2 - \theta_3) - g^2(\theta_2 - \theta_1) + \\ &+ \dots + g^2(\theta_N - \theta_1) - g^2(\theta_N - \theta_{N-1})) = \\ &= K_1 (g^2(\theta_1 - \theta_2) - g^2(\theta_N - \theta_1) + g^2(\theta_2 - \theta_3) - g^2(\theta_1 - \theta_2) + \\ &+ \dots + g^2(\theta_N - \theta_1) - g^2(\theta_{N-1} - \theta_N)) = 0. \end{aligned}$$

При перетвореннях ми скористались непарністю функції  $g$  та парністю її квадрату.  $\square$

**Теорема 5.6.3.** Розглянемо систему (5.24) з парною кількістю осциляторів, непарною функцією  $g(\varphi)$  та косо-симетричною матрицею ( $K_j = -K_{-j}$ ) і  $K_j = 0$  для парних  $j$ , тобто осцилятори є з'єднаними найближчими сусідами, третіми сусідами, п'ятими сусідами і так далі. Тоді така система має перший інтеграл

$$E_2(\varphi_1, \dots, \varphi_{N-1}) = \sum_{i=1}^{N-1} (-1)^{i-1} \varphi_i.$$

**Доведення** цієї теореми наведено у Додатку В.10 (див. стор. 396).

### 5.6.2. Попарно рівновіддалені власні частоти та оборотність системи

У цьому підрозділі ми покажемо, що загальна система (5.5) може мати оборотні властивості, якщо матриця зв'язку є косо-симетричною, а частоти не є ідентичними, але задовольняють певним співвідношенням. Система (5.5) з косо-симетричним зв'язком може бути представлена у вигляді:

$$\dot{\varphi}_i = \Delta_i + \sum_{j=1}^{[(N-1)/2]} K_j (g(\varphi_j) - g(\varphi_{-j}) - g(\varphi_{i+j} - \varphi_i) + g(\varphi_{i-j} - \varphi_i)), \quad (5.33)$$

де  $i = 1, \dots, N - 1$  (див. також (5.24)).

**Лема 5.6.1.** Система (5.33) є часово-оборотною з інволюцією  $\mathcal{R}$ , визначеною за допомогою перетворення (5.25) тоді і тільки тоді, коли виконуються наступне співвідношення між різницями частот:

$$\Delta_{N-i} = -\Delta_i, \quad i = 1, \dots, [N/2] \quad (5.34)$$

**Доведення.** Перепишемо систему (5.33) у наступному вигляді:

$$\frac{d\varphi_i}{dt} = \tilde{G}_i(\varphi_1, \dots, \varphi_{N-1}) = \Delta_i + G_i(\varphi_1, \dots, \varphi_{N-1}), \quad i = 1, \dots, N - 1, \quad (5.35)$$

де  $G(\varphi_1, \dots, \varphi_{N-1}) = G(\Phi)$  – права частина системи ідентичних осциляторів, записаної у векторній формі. Використовуючи властивість (5.25) та (5.34), пересвідчуємо, що

$$\tilde{G}_i(\mathcal{R}\Phi) = \Delta_i + G_i(\mathcal{R}\Phi) = -(-\Delta_i + G_{N-i}(\Phi)),$$

а також

$$-\tilde{G}_{N-i}(\Phi) = -(\Delta_{N-i} + G_{N-i}(\Phi)).$$

Співставляючи кожен з рядків останніх двох рівностей, отримуємо:

$$\tilde{G}(\mathcal{R}\Phi) = -\mathcal{R}(\tilde{G}(\Phi)),$$

що і доводить реверсивність системи (5.33).  $\square$

**Зауваження 5.6.2.** Відмітимо, що умова (5.34), а, отже, умови Лема 5.6.1 зберігаються у частковому випадку рівно-розподілених частот  $\omega_j = \omega_0 + hj$ ,  $h$  – дійсний крок, коли число осциляторів  $N$  є непарним.

У наведеному випадку умова оборотності (5.25) задовольняється тоді і тільки тоді, якщо задовольняється умова (5.34), що відповідає до рівновіддаленого розподілу пар власних частот навколо частоти першого осцилятора:  $(\omega_{i+1} + \omega_{N-i+1})/2 = \omega_1$ . Також нагадаємо, що  $\Delta_{N/2} = 0$ , коли  $N$  є парним. Позначимо  $\Phi(\mathcal{M}_k, \Delta)$  розв'язки алгебраїчної системи  $G_i(\Phi(\mathcal{M}_k, \Delta)) = 0$ ,  $i = 1, \dots, N-1$ ,  $\Delta = (\Delta_1, \dots, \Delta_{N-1})$ , для параметрів якої виконується умова (5.34) і такої, що  $\Phi(\mathcal{M}_k, 0) = \mathcal{M}_k$ . Тобто  $\Phi(\mathcal{M}_k, \Delta)$  є особливими точками диференціальної системи (5.35), які є продовженням особливих  $\mathcal{M}_k$  при зміні від нуля параметрів  $\Delta_i$  (під продовженням особливих точок ми розуміємо їх рух у фазовому просторі при зміні параметрів). Зокрема,  $\Phi_0 = \Phi(\mathcal{M}_0, \Delta)$ , є продовження точки, яка була у початку координат при невеликій зміні параметрів  $\Delta_i$ ,  $\Phi_0(\mathcal{M}_0, \mathbf{0}) = \mathcal{M}_0$  при  $\Delta = \mathbf{0}$ . Гіперболічність лінійно стійкої особливої точки  $\Phi(\mathcal{M}_k, \Delta)$  гарантує однозначне продовження цього положення рівноваги у фазовому просторі зі збереженням стійкості. Це означає існування дисипативної частини системи (5.35) при невеликих збуреннях параметрів  $\Delta_i$ . Положення рівноваги  $\Phi_0$ , яке стартувало з початку координат перед початком руху параметрів  $\Delta_i$ , завжди належить фіксованому підпростору  $\text{Fix}\mathcal{R}$  інволюції  $\mathcal{R}$  у випадку виконання умови (5.34). Останнє твердження є наслідком Лема 5.6.1. Згідно Наслідку 5.3.1 точка  $\mathcal{M}_0$  є нейтральною. Використовуючи ті ж методи можна показати, що особлива точка  $\Phi_0$  (продовження  $\mathcal{M}_0$ ) залишається також нейтральною при виконанні (5.34). Подібно доведенню Теорема 5.4.1 можна показати, що область  $\mathcal{D}_{\Phi_0}$ , яка є околом точки  $\Phi_0$ ,



має ту ж структуру, що і  $\mathcal{D}$  для точки  $\mathcal{M}_0$  при виконанні (5.34). Наприклад, періодичні орбіти, описані у пункті (А) згаданої теореми зберігаються, оскільки вони з'явилися завдяки загальному перетину  $\mathcal{F}_t(\text{Fix } \mathcal{R})$  та  $\text{Fix } \mathcal{R}$ . Область  $\mathcal{D}_{\Phi_0}$  є Гамільтоново-подібною і має всі ті ж властивості, які описані в Теоремі 5.4.1. Ця область рухається разом з точкою  $\Phi_0$  вздовж підпростору  $\text{Fix } \mathcal{R}$ , при цьому можлива трансформація цієї області. Таким чином, консервативно-дисипативна динаміка системи зберігається при малих збуреннях попарно рівно-віддалених параметрів  $\Delta_i$ , коли особливі точки  $\Phi_0(\Delta)$  та  $\Phi(\mathcal{M}_k, \Delta)$  існують та зберігають свої стійкості. Підсумовуючи наведені міркування, ми сформулюємо без доведення наступне твердження.

**Твердження 5.6.2.** Система у фазових змінних (5.24)) має співіснування Гамільтоново-подібної та дисипативної динамік у випадку, коли власні частоти оригінальної системи є попарно рівновіддаленими (виконується (5.34)) та принаймні одна з особливих точок  $\Phi(\mathcal{M}_k, \Delta)$ ,  $k \neq 0$ , є джерелом чи стоком.

Останнє твердження перевірялось за допомогою чисельних експериментів.

Як було показано вище, система ідентичних осциляторів (5.24) має  $\mathbb{Z}_N$  та  $\mathcal{R}$  симетрії. Суперпозиція цих симетрій призводить до  $N$  різних інволюцій  $\mathcal{R}_i$  з фіксованими підпросторами  $\text{Fix } \mathcal{R}_i$ , відповідно. Умова (5.34) завжди залишає одну з оборотних симетрій  $\mathcal{R}_j$  при  $\Delta_i \neq 0$ , але при цьому руйнується симетрія  $\mathbb{Z}_N$  і разом з нею (у загальному випадку) руйнуються інші симетрії  $\mathcal{R}_i$ ,  $i \neq j$ . Очевидно, що разом з тим варіації власних частот руйнують також  $N - 1$  (або  $(N - 1)/2$  у парному випадку) інваріантних до оборотності гіперплощин  $\text{Fix } \mathcal{R}_i$ ,  $i \neq j$ , але  $\text{Fix } \mathcal{R}_j$  при цьому зберігається.

### 5.6.3. Системи з фазово незамкнутою консервативною областю

Гамільтоново-подібна динаміка системи неідентичних осциляторів (5.33) може суттєво відрізнятись від динаміки ідентичних осциляторів. Для ідентичних осциляторів можливі лише розв'язки гомологічні нулю, які обертаються навколо нейтральної  $\mathcal{M}_0$ . Чисельних обрахунків показує, що уже в найпростішому нетривіальному випадку система (5.33) може мати негомологічної до

нуля періодичні орбіти (котрі на розділяють  $\mathbb{T}^2$  на дві частини) і такі орбіти з'являються при достатньо великих значеннях  $|\Delta_i|$ . На рис. 8.27(o) показано (зеленим кольором) область, заповнена одно-параметричною сім'єю негомологічних нулю періодичних орбіт. Також може бути співіснування гомологічної нулю та негомологічної нулю консервативних областей, як це показано на рис. 8.27(o) жовтим та зеленим кольорами, відповідно. Співіснування багатьох областей двох описаних типів показано на рис. 8.27(p) для  $N = 3$  та функції зв'язку типу Гансела–Мато–Моньє

$$g(x) = -\sin(x - \alpha) + p \sin(2x). \quad (5.36)$$

Стартуючи з системи ідентичних осциляторів, тобто коли  $|\Delta_i| = 0$ , та змінюючи параметри  $\Delta_i$ , отримуємо рух кожної з особливих точок  $\Phi(\mathcal{M}_k, \Delta)$ , описаних у попередньому підрозділі, а також інших особливих точок, які є здебільшого сідловими. Значні зміни параметрів  $\Delta_i$  призводять до різноманітних біфуркацій, типи яких залежать співвідношення вказаних параметрів. Найбільш типовими є локальні сідло–вузлові, транскритичні та вилкові біфуркації. Збільшення  $|\Delta_i|$  до певних бар'єрних значень призведе до біфуркацій зникнення точок  $\Phi(\mathcal{M}_k, \Delta)$ . Гомологічні нулю Гамільтоново подібні області  $\mathcal{D}_{\Phi_0}$  зникнуть разом зі зникненням особливої точки  $\Phi_0$  у інваріантному підпросторі  $\text{Fix } \mathcal{R}$ . Зникнення внаслідок біфуркацій гіперболічних точок при умовах симетрії  $\mathcal{R}$  та співвідношеннях (5.34) призводить навпаки до появи негомологічних нулю Гамільтоново подібних областей (як показано, зокрема на рис. 8.27(n), (o), (p)). Подібна ситуація з негомологічними нулю областями спостерігається, зокрема, для іншого типу реверсивних систем у роботах [321, 320] та [318]. Зі сказаного вище впливає важливість оцінки значень параметрів, коли система не має жодної особливої точки.

**Лема 5.6.2.** Система (5.33) не має положень рівноваги, коли виконується одна з наступних рівностей:

$$\min_{x \in \mathbb{T}^1} g(x) > -4[(N - 1)/2] \min_i |\Delta_i|$$

або

$$\max_{x \in \mathbb{T}^1} g(x) < -4[(N-1)/2] \max_i |\Delta_i|.$$

**Доведення.** Доведення леми випливає з умови  $\Delta_i + G_i(\Phi) > 0$  (або  $< 0$ ) для  $i = 1, \dots, [N/2]$ . Відмітимо, що умови даної леми виконуються лише при достатньо великих значеннях фазових різниць.  $\square$

Оцінки, наведені у лемі є досить грубими, але у випадку попарної рівновіддаленості власних частот (5.34) та при умові часової оборотності системи, ці оцінки гарантують заповненість всього фазового простору негомологічними нулю орбітами. Чисельні підрахунки показують, що в залежності від розподілу параметрів, дані орбіти можуть бути періодичними, квазі-періодичними чи хаотичними консервативного типу. Від розподілу часто також залежать номери обертання вказаних траєкторій.

## 5.7. Великі системи ( $N \rightarrow \infty$ ) та нелінійне рівняння Шрьодінгера

У цьому підрозділі ми розглянемо динаміку в околі синхронного розв'язку  $\theta_i = \theta$  у випадку нескінченної кількості ідентичних осциляторів ( $N \rightarrow \infty$ ), але коли кожен осцилятор з'єднаний зі скінченною кількістю  $2l$  сусідів:

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega + \sum_{j=-l}^l K_j g(\theta_i - \theta_{i+j}), \quad i = 1, \dots, N, \quad (5.37)$$

з *косо-симетричною* матрицею зв'язків  $K$ , тобто  $K_j = -K_{-j}$ ,  $j = 1, \dots, l$ . Ми знову наголошуємо, що у вказаному випадку динаміка системи є реверсивно, тобто Гамільтоново-подібною.

Використовуючи "спів-обертальні" координати  $\psi_i = \theta_i - \left( \omega + g(0) \sum_{j=-l}^l K_j \right) t$ , зводимо систему (5.37) до наступного вигляду:

$$\frac{d\psi_i}{dt} = \sum_{j=-l}^l K_j f(\psi_i - \psi_{i+j}), \quad (5.38)$$

де  $f(x) = g(x) - g(0)$ . Оскільки  $f(0) = 0$ , то одно-вимірний інваріантний многовид синхронізації

$$\Psi_{sync} = \{(\psi_1, \dots, \psi_N) : \psi_i = \psi, \quad i = 1, \dots, N\}$$

цілком складається з положень рівноваги  $\psi_i = \psi = \text{const}$ , які утворюються одне з одного внаслідок симетрії фазового зсуву  $\mathbb{S}^1$ . Отже всі ці положення рівноваги мають нейтральну стійкість вздовж многовиду  $\Psi_{sync}$  та однакові властивості стійкості для кожної точки у трансверсальних до многовиду напрямках. Таким чином, для вивчення динаміки в околі синхронного розв'язку, достатньо розглянути початок координат  $\psi_i = 0$ ,  $i = 1, \dots, N$ , системи (5.38). Відмітимо, що у цьому розділі ми не будемо розглядати систему у фазових різницях типу (5.5), а будемо працювати прямо з системою (5.38). Цей підхід ми використовуємо з метою збереження симетрії фазового зсуву для подальшої зручної роботи з амплітудними рівняннями. Також відмітимо, що властивість  $f(0) = 0$  спричиняє відсутність члену з коефіцієнтом  $K_0$  у сумах правих частин нової системи.

Розкладаючи функцію  $f(x)$  у ряд Тейлора в точці нуль, перепишемо систему (5.38) у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_i}{dt} = & \sum_{j=-l}^l Q_j \psi_{i+j} + \frac{f''(0)}{2f'(0)} \sum_{j=-l}^l Q_j (\psi_i - \psi_{i+j})^2 + \\ & + \frac{f'''(0)}{6f'(0)} \sum_{j=-l}^l Q_j (\psi_i - \psi_{i+j})^3 + O(\|\psi\|^4), \end{aligned} \quad (5.39)$$

де  $f^{(n)}(0) = \left. \frac{d^n}{dx^n} f(x) \right|_{x=0}$ ,

$$Q_0 = f'(0) \sum_{j=-l, j \neq 0}^l K_j,$$

$$Q_j = -K_j f'(0), \quad j = -l, \dots, l, \quad j \neq 0.$$

Матриця Якобі  $Q$  є циркулянтною та, подібно до 5.12), її власні значення можна описати за допомогою виразу:

$$\lambda_m(Q) = \sum_{j=-l}^l Q_j e^{i2\pi jm/N}, \quad m = 1, \dots, N.$$

Для гранично великих значень  $N$  спектр може бути апроксимований за допомогою *асимптотично неперервного спектру* як це було показано у роботах [343, 342] наступним чином:

$$\lambda(\phi) = \sum_{j=-l}^l e^{ij\phi} Q_j = Q_0 + \sum_{j=1}^l \left( (Q_j + Q_{-j}) \cos(j\phi) + i(Q_j - Q_{-j}) \sin(j\phi) \right), \quad \phi \in [0, 2\pi]. \quad (5.40)$$

Функція  $\phi \mapsto \lambda(\phi)$ ,  $\phi \in [0, 2\pi]$ , описує замкнуту криву у комплексній площині  $\mathbb{C}$ . З припущення косо-симетричності матриці  $K$  системи (5.37) та означення матриці  $Q$  впливає кососиметричність останньої, тобто  $Q_{-j} = -Q_j \in \mathbb{R}$ . У останньому випадку вираз (5.40) спрощується до наступного:

$$\lambda(\phi) = i 2 \sum_{j=1}^l Q_j \sin(j\phi) = i \tilde{\omega}(\phi) \quad \text{with } \tilde{\omega}(\phi) \in \mathbb{R}.$$

Отже, весь спектр знаходиться на уявному інтервалі  $[-i \max_{\phi} \tilde{\omega}(\phi), i \max_{\phi} \tilde{\omega}(\phi)] \subset i\mathbb{R}$ . Позначимо також  $\omega_0 = \tilde{\omega}(\phi_0)$ , тобто значення спектру у конкретній точці  $\lambda(\phi_0) = i\omega_0$ .

**Теорема 5.7.1.** *Припустимо, що система (5.39) задовольняє наступним умовам:*

- (i) матриця зв'язків є косо-симетричною:  $Q_j = -Q_{-j}$ ;
- (ii) існує  $\phi_0 \neq 0$  таке, що  $\tilde{\omega}(\phi_0) \neq 0$  та  $\tilde{\omega}''(\phi_0) \neq 0$ ;
- (iii) функція зв'язку має кубічну нелінійність в нулі:  $f''(0) = 0$ ;
- (iv) виконується нерезонансна умова:  $\sum_{j=1}^l Q_j \sin^3(j\phi_0) \neq 0$ .

Введемо малий параметр  $\varepsilon = 1/N$ . Тоді багатомасштабний анзац

$$\psi_i(t) = \varepsilon \mathcal{A}(T_1, x_i, T_2) e^{i(\omega_0 t + \phi_0 i)} + \varepsilon^3 \mathcal{A}^3(T_1, x_i, T_2) e^{3i(\omega_0 t + \phi_0 i)} v_3 + c.c., \quad (5.41)$$

з амплітудою  $\mathcal{A} \in \mathbb{C}$ , залежною від перемасштабованих координат  $T_1 = \varepsilon t$ ,  $T_2 = \varepsilon^2 t$  та  $x_i = \varepsilon i$  (с.с. позначає комплексно-спряжену частину,  $v_3 \in \mathbb{R}$ ) до системи (5.39) веде до розв'язності умов включно до порядку  $\varepsilon^3$ :

$$i\partial_{T_2} u = \frac{1}{2} \tilde{\omega}''(\phi_0) \partial_\xi^2 u + \rho |u|^2, \quad (5.42)$$

з періодичними граничними умовами

$$u(\xi, T_2) = u(\xi + 1, T_2), \quad (5.43)$$

де розв'язок  $u(\xi, T_2)$  з  $\xi \in [0, 1]$  пов'язаний з амплітудою  $\mathcal{A}$  наступним чином:

$$\mathcal{A}(T_1, x_i, T_2) = u(\tilde{\omega}'(\phi_0)T_1 + x_i, T_2)$$

та

$$\rho = \frac{2f'''(0)}{f'(0)} \sum_{j=1}^l Q_j \sin(j\phi_0) (\cos(j\phi_0) - 1). \quad (5.44)$$

**Доведення** цієї теореми наведено у Додатку В.11 (див. стор. 398).

Рівняння (5.42) є нелінійним рівнянням Шрьодінгера. Значення  $v_3 = v_3(\phi_0)$  описується виразом (8.18).

У роботі [88, Burylko, Mielke, Wolfrum, Yanchuk] наведено подібну до Теореми 5.7.1 (Теорема 7.1 в [88]), запропоновану німецьким математиком А. Мільке. У даній теремі завдяки зміненим вимогам забезпечується взаємозв'язок нескінченно-вимірної осциляторної системи з нелінійним рівнянням Шрьодінгера та квазі-періодичними крайовими умовами. Доведення цієї теореми базується на методі, розробленому у роботі [192], адаптованому до просторового дискретного випадку [139, 342].

Для подальшого біфуркаційного та порівняльного аналізу оригінальної осциляторної системи та рівняння Шрьодінгера (5.42), (5.44) можна, зокрема, використовувати результати робіт [163, 192, 139, 342, 20, 6].

# Розділ 6

## Слабкі химерні стани у мінімальних мережах фазових осциляторів

### 6.1. Поняття “химерний стан”

Як було показано вище, моделі зв’язаних осциляторів є багатим джерелом прикладів високо-вимірної динамічної поведінки, а також класів систем, які можуть бути використані для розуміння виникнення широкого діапазону динамічних явищ. Одне з таких явищ, де спостерігається співіснування когерентної та некогерентної поведінки, було названо “*химерним станом*”. У даному розділі ми дамо означення поняття “*слабка химера*” для скінченої мережі зв’язаних нерозрізняваних фазових осциляторів. Існування та динаміка режиму, описаного у даному означенні, відносно легко перевіряється та гарно описується. Також вказане означення дає можливість досліджувати стійкість та біфуркаційні переходи слабких химер у мережах малої розмірності. Хоча *химери* у багатьох високо-розмірних системах не є *слабкими химерами* у тому розумінні, яке ми тут означаємо, ми припускаємо, що слабкі химери можуть бути відповідальними за організацію динаміки більш загальних химерних станів.

У попередніх підрозділах було показано, що навіть самі прості мережі зв’язаних осциляторів можуть бути синхронізованими (різним чином) або повністю десинхронізованими. Виникнення різних режимів залежить як від

графів побудови самої мережі, так і динаміки окремих елементів у вузлах мережі. У 2002 році Й. Курамото та Д. Баттогтох виявили певний інтригуючий динамічний режим у системі не-глобально зв'язаних осциляторів. Кількома роками пізніше Д. Абрамс та С. Строгатц назвали такі розв'язки “химерними станами” або просто “химерами” [14, 15]. Дані режими описують колективну поведінку осциляторів, які розділяються на дві (або більше) групи, перша з яких є когерентною, у той час як інша є інкогерентною (у певному сенсі). Враховуючи те, що всі осцилятори у системі були рівноправними, то поведінка розділення на групи (під дією спільного векторного поля), коли одна частина їх поводитись дуже відмінно від іншої, виглядала дуже інтригуючою і привернула увагу багатьох вчених. Курамото та Баттогтох розглядали математичну модель та описали химерні режими аналітично та чисельно. У зв'язку з цим виникло питання, чи описує дана модель якісь фізичні чи біологічні режими і яким чином. Так спочатку були створені штучні механічні та фізичні системи, які б показували химерні режими, а пізніше існування таких режимів було знайдено та підтверджено і у природньому середовищі. Було показано, що химерні стани виникають у механіці [231, 180], хімії [316], біології [232], науці про нейрони [210, 56], електроніці [216, 241], оптиці [325], електрохімії [332], соціології [152] та при дослідженні поведінки фінансового ринку [350]. Важливим для теоретичного дослідження химерних станів, на нашу думку, стала запропонована Е. Оттом та Т. Антонсенем теорія [251] (анзатц Отта–Антонсена). Цікавим є і той факт, що перші експериментальні дослідження, що підтвердили існування химерних станів [155, 316], з'явилися приблизно через десятиріччя після першої теоретичної роботи [207].

Останнім часом дослідження химерних станів відбувається дуже інтенсивно, впроваджуються нові поняття динамічних режимів, пов'язаних з химерами, досліджуються химери на різноманітних мережах взаємодії елементів та з різними індивідуальними вузлами, химерні стани описуються все більш широкими класами динамічних систем [212, 247, 300, 253, 58, 152, 182, 51]. З огляду на величезну кількість робіт по даній тематиці, здається, що дані режими є набагато загальнішими ніж припускалось з їх виявленням. У більшості робіт про химери немає чіткого аналітичного визначення химерного



стану, який би міг бути застосований до систем малої розмірності. Наприклад, у роботі [15] сказано: “Для певного вибору параметрів та початкових умов, масив (осциляторів) може бути розділений на дві області: одна складається з когерентних, фазово–замкнених осциляторів, яка співіснує з іншою некогерентною областю, дрейфуючих осциляторів”, але, зокрема, слова “область”, “некогерентний”, “дрифтувати” вимагають точних тлумачень перед тим як бути застосованими до мало–вимірних систем. Перше строге означення дещо звуженого поняття химери було дано у роботі [32, Ashwin, Burylko].

У даному розділі ми розглянемо базові динамічні властивості мереж нерозрізняваних фазових осциляторів та пропонуємо точне математичне означення *слабких химерних станів*. Далі будуть наведені базові результати про неможливість існування слабких химерних станів у мережах глобально зв’язаних фазових осциляторів. Певним чином буде сконструйовано мережу *чотирьох* осциляторів та показано, що дана система є мінімально можливою для існування химерних станів. Буде описано модульну структуру мережі (мережа складається з певних блоків), яка показує химерну динаміку. Різні мережі шести та десяти осциляторів будуть досліджуватись. Буде показано, що у приведених прикладах систем химерні аттрактори можуть бути принаймні квазі–періодичними, а у більш складних система і гетероклінічними чи хаотичними. Також будуть вивчатись немодульовані мережі (системи шести осциляторів, зв’язаних з найближчими та другими по близькості сусідами), які мають притягуючі слабкі химери, а також будуть розглянуті біфуркаційні переходи у даних системах. Будуть описані деякі особливості певних класів розглянутих систем. Зокрема, ми відмітимо, що у випадку кільцевої системи типу Курамото–Сакагучі (яка часто використовуються для демонстрації химерних режимів) має сім’ї слабких химер з виродженою стійкістю. За нашим припущенням останнє явище пов’язане з тим фактом, що химери можуть бути перехідними режимами у симуляціях мало–компонентних мереж.

## 6.2. Мережі з химерами

Перші результати про *когерентно-некогерентні* режими були представлені у роботі [207] для комплекснозначної осциляторної системи, заданої рівнянням типу Гінзбурга–Ландау з періодичними крайовими умовами. Ті ж химерні режими має і фазова частина рівняння Гінзбурга–Ландау, що задається рівнянням:

$$\frac{\partial \theta(y, t)}{\partial t} = \omega + \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{G}(y - \bar{y}) \sin(\theta(y, t) - \theta(\bar{y}, t) + \alpha) d\bar{y}, \quad (6.1)$$

де  $y \in \mathbb{T}^1$  — просторова змінна,  $\theta(y, t)$  — фаза осцилятора у позиції  $y$ ,  $\omega$  — частота,  $\alpha$  — параметр фазового зсуву,  $\mathcal{G}(y - \bar{y})$  є непарною функцією (ядром), що забезпечує нелокальний зв'язок між осциляторами на колі в залежності від відстані між ними  $|y - \bar{y}|$ . У перших роботах [207, 14] ядро мало відповідно вигляд  $\mathcal{G}(y) = \kappa \exp(-\kappa|y|)/2$  та  $\mathcal{G}(y) = (1 + \kappa \cos y)/(2\pi)$ , де  $\kappa$  — параметр. Теоретичні дослідження щодо когерентно некогерентних станів, які згодом стали називатись *химерними станами* [14], підтверджуються чисельними експериментами для великої кількості зв'язаних осциляторів і параметру фазового зсуву  $\alpha$ , близького до  $\pi/2$ .

Проробивши два кроки (перехід до скінченної системи, виділення фазових змінних) від рівняння (6.1) можна перейти до скінченно-вимірної системи Курамото–Сакагучі з циркулянтною симетричною матрицею  $K = (K_{ij})_{i,j=1}^N$ , елементи якої розподілені подібно до  $\mathcal{G}(y)$ , де  $|y|$  — дискретний аналог відстані елемента матриці до діагонального елемента, як робиться у переважній більшості перших робіт по химерах. Будемо застосовувати подібний підхід, але на більш загальних мережах.

Отже, розглянемо мережу  $N$  зв'язаних фазових осциляторів, яка описується системою диференціальних рівнянь:

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + \sum_{j=1}^N K_{ij} g(\theta_i - \theta_j), \quad (6.2)$$

де  $(\theta_1, \dots, \theta_N) \in \mathbb{T}^N = [0, 2\pi)^N$  — фазові змінні,  $\omega_i$  — власні частоти,  $K_{ij}$  —

сили зв'язків (вплив  $j$ -го осцилятора на  $i$ -й),  $g(x)$  — гладка  $2\pi$ -періодична функція зв'язку. Фазові осцилятори є ідентичними, якщо  $\omega_i = \omega$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Без обмеження загальності можна вважати  $\omega = 0$ , як це показувалось у попередніх розділах. Будемо вивчати модель типу Гансела–Манно–Моньє [159, 160], тобто систему (6.2) з функцією зв'язку

$$g(x) = -\sin(x - \alpha) + r \sin(2x) \quad (6.3)$$

з двома параметрами  $\alpha$  та  $r$ . Нагадаємо, що при  $r = 0$  система (6.2) редукується до випадку моделі типу Курамото–Сакагучі [282].

**Означення 6.2.1.** Будемо казати, що осцилятори є нерозрізнюваними, якщо осцилятори є ідентичними та взаємозамінними у сенсі, що кожен з них має однакову кількість та силу зв'язків [43].

Вище наведене означення є еквівалентне до наступних тверджень (які з різних боків описують природу мережі):

- (i) Потрібно лише одне рівняння для означення системи, з точністю до перестановок.
- (ii)  $\in N$  перестановок  $\sigma_i \in \mathbf{S}_N$  з  $\sigma_i(i) = i$  для  $i = 1, \dots, N$ , таких, що матриця  $K = \{K_{ij}\}_{i,j=1}^N$  задовольняє умові

$$K_{ij} = k_{\sigma_i(j)}$$

для деякого вектора  $k_i$  та для всіх  $i \neq j$  (а саме матриця є перестановкою векторів сил зв'язків).

- (iii) Система є інваріантною відносно групи симетрії перестановок, що діє транзитивно на множині  $N$  осциляторів.

Відмітимо, що множина систем з циркулянтним зв'язком (з матрицею взаємодії вигляду (5.3)) є підмножиною нерозрізнюваних мереж того ж порядку.

**Означення 6.2.2.** Будемо казати, що осцилятори  $i$  та  $j$  на траєкторії системи (6.2) є частотно синхронізованими, якщо

$$\Omega_{ij} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} (\theta_i(t) - \theta_j(t)) = 0,$$

де ми вибираємо неперервне представлення для  $\theta_i(t)$ ,  $\theta_j(t)$ .

**Означення 6.2.3.** [32, Ashwin, Burylko] Будемо говорити, що множина  $\mathcal{A}$  є *слабким химерним станом* для системи нерозрізняваних фазових осциляторів, якщо вона є зв'язною ланцюгово-рекурентною інваріантною відносно потоку множиною такою, що на кожній траєкторії з множини  $\mathcal{A}$  існують індекси  $i$ ,  $j$  та  $k$  такі, що  $\Omega_{ij} \neq 0$ , а  $\Omega_{ik} = 0$ .

Ми не накладаємо жодних обмежень на динамічну поведінку чи стійкість траєкторій з множини  $\mathcal{A}$ . Якщо така траєкторія є сідлового типу чи має нейтральну стійкість, її поведінка буде спостерігатись як перехідний режим для типових початкових умов [341]. Якщо  $\mathcal{A}$  є  $\omega$ -граничною множиною для деяких початкових умов, тоді  $\mathcal{A}$  є *зв'язною та ланцюгово-інваріантною* [135]. Отже, ми включаємо останні дві умови як необхідні умови того, що динаміка множини  $\mathcal{A}$  описується довго-строковою поведінкою однієї траєкторії.

Внаслідок дрефту інкогерентного регіону, химерні стани для великих  $N$  не є, по суті, слабкими химерами. Проте, як буде показано нижче, нестійкі химери можуть відігравати таку важливу роль у формуванні (загальних) химер у мережах фазових осциляторів, як періодичні орбіти відіграють важливу роль у формуванні хаотичної динаміки.

Є певний елемент несподіванки у визначенні слабких химер: можна очікувати, що системи нерозрізняваних фазових осциляторів є завжди частотно синхронізованими, але це не відповідає дійсності для багатьох мереж (як ми покажемо далі). Для інших систем вигляду (6.2) ми знаходимо множину параметрів при яких існують *притягуючі* слабкі химерні стани (атрактори), коли виконуються наступні умови:

- (a) є принаймні чотири осцилятори в системі,
- (b) мережа має принаймні дві різних сили зв'язків,
- (c) функція зв'язку має принаймні два компоненти розкладу Фур'є (тобто  $r \neq 0$  для функції (6.3)).

Відмітимо, що з умови **(a)** випливає з умови **(b)** для системи нерозрізняваних осциляторів. З наведених у літературі прикладів випливає, що **(c)** не є необхідною умовою існування слабких химерних станів, але дана умова гарантує бістабільність химерних станів і повної синхронізації. Умова **(c)** також буде використана нами при побудові прикладу мінімальних слабких химер.

Відмітимо, що до введення означення слабких химерних станів у 2015 році у роботі П. Ешвіна та автора [32], під означенням химер неформально вважались режими, у певному сенсі подібні до режимів описаних у роботах [207, 14, 15]. Незважаючи на те, що поняття слабких химер звужує множину (загальних) химер, воно однозначним та простим для формальної перевірки. Дане означення використовуються у роботах присвячених описанню химер у мережах малої розмірності та у роботах, де аналітичні результати є не менш важливими за комп'ютерну симуляцію.

### 6.3. Нерозрізнявані фазові осцилятори та слабкі химерні стани

Спочатку розглянемо систему (6.2) з глобальною взаємодією (кожен з кожним), де  $K_{ij} = K$ ,  $i, j = 1, \dots, N$ . У цьому випадку система має повну симетрію перестановок  $\mathbf{S}_N$  і, як наслідок, система має інваріантні підпростори, що відповідають кластерам  $\theta_i = \theta_j$  (по модулю  $2\pi$ ) для будь-яких  $i \neq j$ . З наявності таких  $(N - 1)!$  інваріантних підпросторів корозмірності–один випливає, що також буде перестановка осциляторів  $k(j)$  така, що

$$\theta_{k(1)} \leq \theta_{k(2)} \leq \dots \leq \theta_{k(N)} \leq \theta_{k(1)} + 2\pi, \quad (6.4)$$

виконується для кожної траєкторії системи. Дані обмеження роблять можливим наступне твердження.

**Лема 6.3.1.** Для глобально зв'язаних  $N$  ідентичних осциляторів з  $K_{ij} = K$  та довільною  $g(x)$  всі траєкторії системи (6.2) є частотно синхронізованими. Слабкі химерні стани у даної системи не існують.

**Доведення.** Перша частина лема є переформульованою Лемою 5.3 з роботи П. Ешвіна та Дж. Свіфта [43]. Друга частина лема випливає з першої та

Означення 6.2.3, оскільки для існування слабких химер необхідно наявності принаймні двох частотно десинхронізованих осциляторів  $\theta_i$  та  $\theta_j$ .  $\square$

Описаний в теоремі результат не узагальнюється для більш складних систем, у яких кожен вузол задається більше ніж одним рівнянням, оскільки і умова (6.4) у цьому випадку не є обов'язковою для виконання. Дійсно, химерні стани були знайдені для глобально-зв'язаних мереж з дво-вимірними вузлами [286, 291, 225].

Далі ми покажемо, що слабкий зв'язок між двома підмережами (чи модулями) може спричинити існування слабких химерних станів, зокрема для мереж зображених на рис. 8.31 .

### 6.3.1. Мінімальна мережа зі стійким химерним станом

Розглянемо систему *чотирьох* осциляторів (6.2) з графом зв'язків, представленим на рис. 8.31(a), функцією взаємодії (6.3) та силами зв'язків  $K_{ij} \in \{1, \varepsilon\}$ . Тобто ми розглядаємо мережу з двох сильно зв'язаних між собою пар осциляторів  $\theta_1, \theta_3$  та  $\theta_2, \theta_4$  зі зв'язками  $K_{13} = K_{24} = 1$ , у той час, як всі інші чотири зв'язки є близькими до нуля:  $K_{12} = K_{23} = K_{34} = K_{41} = \varepsilon$ ,  $K_{ij} = K_{ji}$ . Очевидно, що тоді осциляторна мережа складається з нерозрізнюваних елементів. Система (6.2) у цьому випадку має вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{d\theta_1}{dt} &= \omega + (g(\theta_1 - \theta_3) + g(0)) + \varepsilon (g(\theta_1 - \theta_2) + g(\theta_1 - \theta_4)), \\ \frac{d\theta_2}{dt} &= \omega + (g(\theta_2 - \theta_4) + g(0)) + \varepsilon (g(\theta_2 - \theta_3) + g(\theta_2 - \theta_1)), \\ \frac{d\theta_3}{dt} &= \omega + (g(\theta_3 - \theta_1) + g(0)) + \varepsilon (g(\theta_3 - \theta_4) + g(\theta_3 - \theta_2)), \\ \frac{d\theta_4}{dt} &= \omega + (g(\theta_4 - \theta_2) + g(0)) + \varepsilon (g(\theta_4 - \theta_1) + g(\theta_4 - \theta_3)). \end{aligned} \quad (6.5)$$

**Теорема 6.3.1.** Існує відкрита множина параметрів  $(r, \alpha)$  така, що чотирьох-осциляторна система (6.2), (6.3) має притягуючий химерний стан для  $\varepsilon = 0$ , який зберігається для всіх  $\varepsilon$ , коли  $|\varepsilon|$  достатньо мала величина.

**Доведення.** Система (6.5) спеціально сконструйована таким чином, щоб побудувати розв'язки, які задовольняють умовам Означення 6.2.3. Спочатку

розглянемо *розщеплену* на два блоки по два осцилятори мережу при  $\varepsilon = 0$ . Осцилятори у кожному блоці між собою пов'язані, але блоки між собою не пов'язані і можуть рухатись по фазі як завгодно один відносно одного. Довівши стійкість певних розв'язків у середині кожного блоку, ми покажемо, що формально мережа задає стійкий химерний стан (синхронізація всередині блоків та десинхронізація зовні). Проблема лише в тому, що елементи системи не з'єднані між собою при  $\varepsilon = 0$  і тому вона не може вважатись повноцінною мережею. Отже, далі треба буде показати, що знайдені стійкі режими для розщепленої системи будуть існувати і залишаться стійкими при *слабкій взаємодії* між блоками при малих  $\varepsilon$  (коли система може вважатись повноцінною). Відмітимо, що стійкі режими у кожному з блоків повинні мати *різну* структуру, оскільки у протилежному випадку блоки синхронізуються між собою при появі слабкої взаємодії у глобальній мережі. Для виконання останньої вимоги ми покажемо *бістабільність* у внутрішній динаміці блоку.

Зведемо систему (6.5) до системи у фазових різницях за допомогою введення нових координат:

$$\varphi_1 = \theta_1 - \theta_3, \quad \varphi_2 = \theta_2 - \theta_4, \quad \varphi_3 = \theta_1 - \theta_2$$

та введемо позначення  $g_{ij} = g(\theta_i - \theta_j)$ . Тоді отримаємо три-вимірну систему наступного вигляду:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_1}{dt} &= g_{13} - g_{31} + \varepsilon(g_{12} + g_{14} - g_{32} - g_{34}), \\ \frac{d\varphi_2}{dt} &= g_{24} - g_{42} + \varepsilon(g_{21} + g_{23} - g_{41} - g_{43}), \\ \frac{d\varphi_3}{dt} &= g_{13} - g_{24} + \varepsilon(g_{12} + g_{14} - g_{21} - g_{23}). \end{aligned}$$

Позначивши  $g(\varphi) = (p(\varphi) + q(\varphi))/2$ , де  $p(\varphi)$  є парною частиною функції, а

$q(\varphi)$  є її непарною частиною, переписуємо останню систему у вигляді:

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi_1}{dt} &= q(\varphi_1) + \varepsilon(g(\varphi_3) + g(\varphi_3 + \varphi_2) - g(-\varphi_1 + \varphi_3) - g(\varphi_2 + \varphi_3 - \varphi_1)), \\ \frac{d\varphi_2}{dt} &= q(\varphi_2) + \varepsilon(g(-\varphi_3) + g(\varphi_1 - \varphi_3) - g(-\varphi_2 - \varphi_3) - g(\varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3)), \\ \frac{d\varphi_3}{dt} &= g(\varphi_1) - g(\varphi_2) + \varepsilon(g(\varphi_3) + g(\varphi_3 + \varphi_2) - g(-\varphi_3) - g(\varphi_1 - \varphi_3)).\end{aligned}\quad (6.6)$$

Спочатку розглянемо систему (6.6) для  $\varepsilon = 0$ . У цьому випадку два перші рівняння мають однаковий простий вигляд:

$$\frac{d\varphi}{dt} = q(\varphi), \quad (6.7)$$

для  $\varphi = \varphi_i$ ,  $i = 1, 2$ . У випадку, коли функція зв'язку  $g$  має вигляд (6.3), можемо записати

$$q(\varphi) = g(\varphi) - g(-\varphi) = -2 \sin \varphi \cos \alpha + 2r \sin(2\varphi) = 2 \sin \varphi (-\cos \alpha + 2r \cos \varphi).$$

Рівняння (6.7) має область бістабільності у параметричній площині  $(\alpha, r)$ , де співіснують два атрактори:  $\varphi = 0$  та  $\varphi = \pi$  (як це було показано у підрозділі 3.9.1). Умовою бістабільності даного рівняння є одночасне виконання нерівностей  $q'(0) < 0$  та  $q'(\pi) < 0$ . Оскільки  $q'(0) = -2 \cos \alpha + 4r$  та  $q'(\pi) = 2 \cos \alpha + 4r$ , то потрібно вимагати одночасне виконання нерівностей  $r < -(\cos \alpha)/2$  та  $r < (\cos \alpha)/2$ . Таким чином, область бістабільності рівняння (6.7) у площині  $(\alpha, r)$  описується умовою:

$$r < \min\{\cos \alpha, -\cos \alpha\}/2 = -|\cos \alpha|/2. \quad (6.8)$$

Розглянемо початкові умови  $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = (0, \pi, \xi)$ . При  $\varepsilon = 0$  ці періодичні умови лежать на періодичній орбіті

$$(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)) = (0, \pi, \Omega t + \xi),$$

де  $\Omega := g(0) - g(\pi) = 2 \sin \alpha$  є незалежним від параметру  $r$ . Ця періодична



орбіта є компактною рекурентною інваріантною множиною, яка не є частотно синхронізованою при  $\alpha \neq k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Ця періодична орбіта є стійкою з експонентами Флоке:  $0$ ,  $q'(0)2\pi/\Omega$  та  $q'(\pi)2\pi/\Omega$ . І, остаточно, з гіперболічності лінійно стійкої періодичної орбіти впливає умова існування стійкої періодичної орбіти при малих збуреннях параметрів. Зокрема, для будь-яких  $(\alpha, r)$ , що задовольняють (6.8) знайдеться  $\varepsilon_0(r, \alpha)$  таке, що слабкий химерний стан зберігається для всіх  $\varepsilon$ , де  $|\varepsilon| < \varepsilon_0(\alpha, r)$ .  $\square$

Ми не даємо верхньої границі  $\varepsilon_0(r, \alpha)$  за винятком зауваження, що у будь-якому випадку  $\varepsilon \searrow 0$  при  $r + |\cos \alpha|/2 \nearrow 0$ . З Теорема 6.3.1 впливає, що слабкий химерний стан повинен зникнути при  $\varepsilon = 1$ , і тому  $\varepsilon_0(r, \alpha) < 1$ . Ця слабка химера є виродженою при  $r = 0$ , оскільки немає бістабільності синфазного та антифазного станів рівняння (6.7) у цьому випадку. Крива  $r = -\frac{1}{2} \cos \alpha$  у параметричній площині системи (6.6) відповідає субкритичній вилоківій біфуркації на інваріантній площині  $\varphi_1 = 0$  стійкого циклу з координатою  $\varphi_2 = \pi$  та двох сідлових періодичних орбіт з координатами  $\varphi_2 = \pm \arccos(\cos \alpha / (2r))$  при  $\varepsilon = 0$ . Крива  $r = \frac{1}{2} \cos \alpha$  відповідає субкритичній вилоківій біфуркації на інваріантній площині  $\varphi_2 = \pi$  такого ж стійкого циклу з координатою  $\varphi_1 = 0$  та двох сідлових циклів з координатами  $\varphi_1 = \pm \arccos(\cos \alpha / (2r))$ .

Система (6.3.1) може бути узагальненою для двох типів слабких зв'язків:  $\varepsilon_1$  від осцилятора  $\theta_i$  до  $\theta_{i+1}$  та  $\varepsilon_2$  від осцилятора  $\theta_i$  до  $\theta_{i-1}$ . У цьому випадку мережа задається *направленим* графом або циркулянтною матрицею

$$K = \text{circ}(K_1, \dots, K_4) = \text{circ}(0, \varepsilon_1, 1, \varepsilon_2) = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_1 & 1 & \varepsilon_2 \\ \varepsilon_2 & 0 & \varepsilon_1 & 1 \\ 1 & \varepsilon_2 & 0 & \varepsilon_1 \\ \varepsilon_1 & 1 & \varepsilon_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

У цьому випадку система має  $\mathbb{Z}_4$  симетрію. У частковому, описаному системою (6.5) граф зв'язку є ненаправленим, а матриця  $K$  є циркулянтною і симетричною. Теорема 6.3.1 може бути узагальненою у цьому випадку наступним

чином. У симетричному випадку  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$  система у фазових різницях (6.6) має інваріантну площину  $\varphi_1 = 0$ , а також існує химерний стан з  $\varphi_1 = 0$ . У випадку узагальненої системи для  $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$  площина вже не є інваріантною відносно потоку, але досить містить слабкі химерні розв'язки. Відмітимо, що система стає вже зв'язаною, якщо  $\varepsilon_1$  (або  $\varepsilon_2$ ) стає нерівним нулю, у той час, коли  $\varepsilon_2$  (відповідно  $\varepsilon_1$ ) залишається рівним нулю.

Існує ще одна система чотирьох осциляторів, яка має стійкі слабкі химерні стани. Це система, зв'язки у якій задаються матрицею

$$K = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon & 0 & 1 \\ \varepsilon & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \varepsilon \\ 1 & 0 & \varepsilon & 0 \end{pmatrix}$$

та зображені на рис. 8.32. На відміну від попередніх випадків, зв'язки у мережі не є глобальними, але система при цьому є зв'язною при  $\varepsilon \neq 0$ , нерозрізною та, аналогічно до попередніх випадків, буде мати стійкі химерні стани.

У даному підрозділі була сконструйована *мінімальна нерозрізювана модульна мережа* таким чином, щоб задана на ній певним чином динамічна система мала *стійку слабку химеру*. Побудова такого химерного стану та доведення його стійкості мало конструктивний характер. Виявляється, що ідея побудови модульних мереж з химерами може бути використана і для систем з більшою кількістю як модулів, так і елементів окремого модуля. При цьому необхідно враховувати динамку всередині кожного блоку системи, яка, очевидно, ускладнюється і урізноманітнюється зі збільшення розмірності. Далі ми опишемо алгоритми побудови модульних химер у кількох конкретних випадках та в цілому.

### 6.3.2. Гетероклінічні химери у блочних мережах

Розглянемо мережу двох блоків (модулів), кожен з яких складається з  $k = N/2$  взаємодіючих осциляторів з сильними зв'язками всередині блоків та слабкими зв'язками між блоками. Такі мережі показано на рис. 8.31 для

систем дво, три та п'яти-вимірних блоків. Блочна система задається виразом:

$$\begin{aligned}\frac{d\theta_i}{dt} &= \omega + \sum_{j=1}^k g(\theta_i - \theta_j) + \varepsilon \sum_{j=k+1}^{2k} g(\theta_i - \theta_j), \quad i = 1, \dots, k, \\ \frac{d\theta_i}{dt} &= \omega + \varepsilon \sum_{j=1}^k g(\theta_i - \theta_j) + \sum_{j=k+1}^{2k} g(\theta_i - \theta_j), \quad i = k + 1, \dots, 2k.\end{aligned}\quad (6.9)$$

де всі індекси беруться по модулю  $N$ . Мережа (6.9) з двох  $k$ -вимірних блоків побудована аналогічно системі з двох дво-вимірних блоків (6.6) спеціально таким чином, щоб зберегти особливості попередньої системи. Як було показано у розділі 3, система трьох осциляторів вже демонструє дуже нетривіальну динаміку та співіснування атракторів різних типів. Використовуючи мультистабільність кількох різних режимів три-вимірної осциляторної системи, та наведену у попередній теоремі конструкцію, можна показати існування слабких химерних станів більш складної динаміки.

**Теорема 6.3.2.** Існує відкрита множина параметрів  $(r, \alpha)$  така, що шести-осциляторна система (6.9), (6.3) при  $k = 3$  має притягуючий химерний стан для  $\varepsilon = 0$ , який зберігається для всіх  $\varepsilon$ , коли  $|\varepsilon|$  достатньо мала величина. Дана система може мати кілька типів химерних станів, які відрізняються між собою динамікою (повна синхронізація, два кластери, глобальна антифаза, граничний цикл, гетероклінічний цикл) всередині двох три-вимірних модулів, а модулі десинхронізовані між собою.

**Доведення.** Спочатку виконаємо деякі перетворення для загальної дво-блочної системи, оскільки ситуація є загальною. Використовуючи три типи нових змінних

$$\begin{aligned}\varphi_i &= \theta_1 - \theta_{i+1}, \quad i = 1, \dots, k-1, \quad \varphi_0 \stackrel{df}{=} 0, \\ \bar{\varphi}_i &= \theta_{k+1} - \theta_{i+k+1}, \quad i = 1, \dots, k-1, \quad \bar{\varphi}_0 \stackrel{df}{=} 0, \\ \tilde{\varphi} &= \theta_1 - \theta_{k+1},\end{aligned}$$

зводимо систему (6.9) до  $(2N - 1)$ -вимірної системи вигляду:

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi_i}{dt} &= \sum_{j=0}^{k-1} [g(\varphi_j) - g(\varphi_j - \varphi_i) + \varepsilon (g(\bar{\varphi}_j + \tilde{\varphi}) - g(\varphi_j - \varphi_i + \tilde{\varphi}))], \quad i = 1, \dots, k, \\ \frac{d\bar{\varphi}_i}{dt} &= \sum_{j=0}^{k-1} [g(\bar{\varphi}_j) - g(\bar{\varphi}_j - \bar{\varphi}_i) + \varepsilon (g(\varphi_j + \tilde{\varphi}) - g(\bar{\varphi}_j - \varphi_i + \tilde{\varphi}))], \quad i = 1, \dots, k, \\ \frac{d\tilde{\varphi}}{dt} &= \sum_{j=1}^{k-1} [g(\varphi_j) - g(\bar{\varphi}_j)] + \varepsilon \sum_{j=0}^{k-1} [g(\bar{\varphi}_j + \tilde{\varphi}) - g(\varphi_j - \tilde{\varphi})].\end{aligned}\quad (6.10)$$

При  $\varepsilon = 0$  система (6.10) розщеплюється на дві однакові  $(k - 1)$ -вимірні системи

$$\frac{d\varphi_i}{dt} = \sum_{j=0}^{k-1} g(\varphi_j) - g(\varphi_j - \varphi_i), \quad i = 1, \dots, k, \quad (6.11)$$

для двох симетричних типів змінних  $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_k)$ ,  $\bar{\Phi} = (\bar{\varphi}_1, \dots, \bar{\varphi}_k)$ ,  $k = N/2$ , та рівняння

$$\frac{d\tilde{\varphi}}{dt} = \sum_{j=1}^{k-1} [g(\varphi_j) - g(\bar{\varphi}_j)], \quad (6.12)$$

яке описує взаємозв'язок між двома блоками (для взаємного місцеположення блоків осциляторів на колі достатньо вибрати по одному довільному з блоку).

Когерентну частину химерних станів забезпечують аттрактори у середині блоків, координати яких позначимо через  $\Phi_{atr}$ ,  $\bar{\Phi}_{atr}$ , оскільки блок-система (6.11) є глобально зв'язаною і має лише фазово замкнуті траєкторії. Права частина рівняння (6.12) не залежать від власної змінної, а залежить лише від взаємного розташування траєкторій аттракторів  $\Phi_{atr}$ ,  $\bar{\Phi}_{atr}$  двох блоків між собою. У випадку, коли дані аттрактори є положеннями рівноваги

$$\tilde{\varphi}(t) = \Omega t + \xi, \quad \Omega = \sum_{j=1}^{k-1} [g(\varphi_j) - g(\bar{\varphi}_j)],$$

тобто аттрактори є фазово незамкнутими один відносно іншого з середньою частотою  $\langle d\tilde{\varphi}(t)/dt \rangle = \Omega$ .  $\Omega \neq 0$ , оскільки аттрактори  $\Phi_{atr}$ ,  $\bar{\Phi}_{atr}$  не іденти-

чні. Середня кутова швидкість між блочними групами осциляторів за час  $T$  можна визначити, як

$$\Omega(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \sum_{j=1}^{k-1} [g(\varphi_j(\tau)) - g(\bar{\varphi}_j(\tau))] d\tau.$$

Умова  $\langle \Omega \rangle = \lim_{t \rightarrow \infty} \Omega(t) = 0$  може виконуватись лише при дуже специфічних вимогах, що без припущення додаткових симетрій порушуються. Останнє призводить до фазової незамкнутості блоків при  $\varepsilon = 0$ . Невеликі збурення системи зберігають фазову замкнутість системи всередині блоків та залишають ненульовою середню частоту руху блоків один відносно одного, тобто слабкі химери різних типів зберігаються при невеликих значеннях з інтервалу, залежного від параметрів системи.

Далі переходимо до часткового випадку  $N = 2k = 6$ . Почнемо з  $\varepsilon = 0$ . З досліджень, проведених у підрозділі 3 відомо, що три-вимірна система (6.11) (при  $k = 3$ ) з функцією взаємодії (6.3) має співіснування кількох різних аттракторів для досить широких параметричних областей у  $(\alpha, r)$ -площині. Отже, можна вибрати спеціальні значення параметрів  $\alpha$  та  $r$  таких, що забезпечують бістабільність (це можна зробити, зокрема, за допомогою біфуркаційної діаграми 8.8). Наприклад, для параметрів  $\alpha = -1.7$ ,  $\alpha = -0.15$  система має співіснування синфазного стану  $(\varphi_1, \varphi_2)$  та рівномірно розподіленого стану  $(\varphi_1, \varphi_2) = (2\pi/3, 4\pi/3)$ . Крім цих режимів, було показано мультистабільність дво-кластерних режимів, граничних циклів та гетероклінічних циклів. Зокрема,  $\mathbb{Z}_3$ -симетричний гетероклінічний цикл співіснує з положенням рівномірного розподілу фаз, коли параметри  $(\alpha, r)$  належать лінії  $DE$  сідло-вузлової гомоклінічної біфуркації на діаграмі 8.8. Останні можуть співіснувати з іншими аттракторами на частинах біфуркаційних ліній у параметричному просторі. Відмітимо, що середня фазова частота взаємного руху блоків осциляторів у загальному випадку залежить від часу і двох параметрів  $\Omega = \Omega(t, \alpha, r)$ . У кожному конкретному випадку (двох співіснуючих аттракторів) її середнє значення не буде нульовим для широкої області параметрів, а слабкий химерний розв'язок має вигляд  $(\Phi_{atr}, \bar{\Phi}_{atr}, \langle \Omega \rangle t + \xi)$ . Як зазначалось невеликі збурення.

Як зазначалось вище, вказана траєкторія не буде руйнуватись (лише деформуватись) при незначних збурення цього параметру. Тому буде існувати деяке граничне значення  $\varepsilon_0(\alpha, r)$  таке, що при  $|\varepsilon| < \varepsilon_0(\alpha, r)$  описаний химерний стан буде все ще зберігатись.  $\square$

Згідно результатам робіт [32, 58, 314, 57] для дво-блочних систем (6.9) розмірності  $N \geq 8$  крім гетероклінічних химер можуть існувати хаотичні химери. Можливості існування химер більш складної структури у блочних системах відкриваються при ускладненні функції взаємодії шляхом залучення нових гармонік та додаткових параметрів. Приклади квазі-періодичних та хаотичних химер проілюстровано на рис. 2 та рис. 3 роботи [32, Ashwin, Burylko] для систем шести та десяти осциляторів, показано залежність від часу середніх частот осциляторів та проекції фазових різниць. Зокрема на рис. 3 роботи [32] продемонстровано існування когерентно-некогерентних розв'язків для значень параметрів  $r = 0.2$ ,  $\alpha = 4.51239$ ,  $\omega = 0.1$  та  $\varepsilon = 0.1$  десяти-вимірної двох ідентичних модулів, зв'язаних функцією

$$g(\varphi) = -\sin(x - \alpha) + r \sin(2\varphi - \beta).$$

Так, остання система при відсутності зв'язків ( $\varepsilon = 0$ ) має мультистабільність двох атракторів: повністю синфазного стану та гетероклінічного циклу, що зв'язує 30 сідлових періодичних орбіт. Збурення  $\varepsilon$  залишає гетероклінічний цикл у проекції на один з блоків, але взаємодія між блоками спричиняє квазі-періодичну та хаотичну поведінку (в залежності від параметрів) у системі в цілому.

Ідея конструювання блочних систем з химерами є досить плідною і дозволяє аналітично довести існування складних стійких химер для систем більшої розмірності.. Розглянемо мережу з  $N = mk$  осциляторів  $\theta \in \mathbb{T}^{m \times k}$  і задається системою:

$$\frac{d\theta_{ij}}{dt} = \omega + \sum_{q=1}^k \left[ K_{ij,iq} g(\theta_{ij} - \theta_{iq}) + \varepsilon K_{ij,pq} \sum_{p=1, p \neq i}^m K_{ij,iq} g(\theta_{ij} - \theta_{pq}) \right],$$

де  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, k$ , а сили зв'язків  $K_{ij,pq} \in \{0, 1\}$  вибрані таким чи-

ном, щоб осцилятори у мережі були нерозрізняваними. Система розщеплюється на  $m$  блоків по  $k$  осциляторів у кожному. Динаміка у кожному модулі  $\theta \in \mathbb{T}^k$  керується системою

$$\frac{d\theta_j}{dt} = \omega + \sum_{q=1}^k L_{jq} g(\theta_i - \theta_q), \quad j = 1, \dots, k,$$

для деякого  $L_{iq} \in \{0, 1\}$ . Якщо динаміка у окремому модулі є мультистабільною, то можна отримати достатні умови існування слабких химерних станів усієї системи для  $\varepsilon > 0$ . Навіть у випадках модулів з гіперболічними періодичними атракторами, коли добуток атракторів є негіперболічним та має  $m$  нульових експонент Ляпунова, можна очікувати дуже складну поведінку (включаючи хаос) для довільних збурень. Вказаний вище метод дає широкі можливості для "конструювання" химерних станів різних типів [32, 58, 41, 35, 314, 57]

## 6.4. Слабкі химерні стани у немодульованих мережах

Для блочних мереж, розглянутих у попередньому підрозділі, факторизація на мультистабільні модулі дозволяє зрозуміти слабкі химери як стійкі явище у даних мережах. Також напрошується ідея, що химери асоціюються з "просторовим хаосом" — експоненціальним масштабуванням кількості атракторів, оскільки кількість модулів прямує до нескінченності [247]. Тим не менш, багато химер, які досі були досліджені в літературі, не мають такої модульної структури. Тому далі будуть розглянуті кілька мереж шести осциляторів, що мають не модульну структуру, але біфуркації в яких приводять до існування химер.

### 6.4.1. Стійкі та нейтральні слабкі химери у мережах шести осциляторів

Три різні неглобально зв'язані структури шести нерозрізнюваних осциляторів зображено на рис. 8.33. Для кожної з цих мереж у системі з функцією зв'язків (6.3) можливі притягуючі слабкі химерні стани. Наприклад, кожна з трьох систем має стійку слабку химеру при  $\alpha = 1.6$ ,  $r = -0.01$ .

Розглянемо мережу, зображену на рис. 8.33(а), що задається системою

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega + \sum_{|i-j|=1,2} g(\theta_i - \theta_j) \quad i = 1, \dots, 6, \quad (6.13)$$

з функцією зв'язку (6.3), де індекси беруться за модулем 6. Дана система має багато симетрій та відповідних їм інваріантних многовидів, дані про які підсумовано у Таблиці 6.1. На додаток інваріантних просторів, спричинених симетріями, структура з'єднань означає, що існують додаткові інваріантні підпростори, що асоціюються з певними особливостями зв'язків у мережі. Трьох-секційні структури мереж для цієї системи проілюстровано на рис. 6 роботи [32, Ashwin, Burylko].

Подальші дослідження показують, що існує відкрита множина у просторі параметрів біля  $\alpha = 1.56$ ,  $r = -0.1$ , де система має стійкі слабкі химери, стійкість яких поступово втрачається при  $r \rightarrow 0$ . На рис. 8.34 продемонстровано типовий химерний розв'язок, що належить підпростору  $A_7 \subset A_1$  та має вигляд

$$(\theta_1, \dots, \theta_6) = (\phi_1, \phi_2, \phi_1, \phi_1 + \pi, \phi_2, \phi_1 + \pi), \quad (6.14)$$

де  $\phi_1, \phi_2$  — змінні на підпросторі. Однакова динаміка може бути знайденою для підпросторів  $A_1$  та  $A_2$ , оскільки у обох випадках три-секційна структура підпросторів є однаковою (рис. 7 у [32]). Інші інваріантні підпростори, наприклад, підпростір  $A_6$

$$(\theta_1, \dots, \theta_6) = (\phi_1, \phi_1 + \pi, \phi_2, \phi_1, \phi_1 + \pi, \phi_2 + \pi),$$

мають слабкі химерні розв'язки, що є стійкими при  $r = 0$  та  $\pi/2 < \alpha < \pi$ .



Табл. 6.1: Інваріантні підпростори системи шести осциляторів

Підпростір $\Sigma$	Типова точка $(\theta_1, \dots, \theta_6)$	Розмірність
$\mathbb{D}_6$	$(a, a, a, a, a, a)$	1
$\mathbb{D}_6^-$	$(a, a + \pi, a, a + \pi, a, a + \pi)$	1
$\mathbb{Z}_6^1$	$(a, a + \zeta, a + 2\zeta, a + 3\zeta, a + 4\zeta, a + 5\zeta)$	1
$\mathbb{Z}_6^2$	$(a, a + 2\zeta, a + 4\zeta, a, a + 2\zeta, a + 4\zeta)$	1
$\mathbb{D}_3$	$(a, b, a, b, a, b)$	2
$\mathbb{Z}_3$	$(a, b, a + 2\zeta, b + 2\zeta, a + 4\zeta, b + 4\pi)$	2
$\mathbb{D}_2$	$(a, b, a, a, b, a)$	2
$\mathbb{D}_2^-$	$(a, b, a, a + \pi, b + \pi, a + \pi)$	2
$\mathbb{Z}_2^1$	$(a, b, c, a, b, c)$	3
$\mathbb{Z}_2^2$	$(a, b, c, a + \pi, b + \pi, c + \pi)$	3
$A_0$	$(a, b, c, a, d, e)$	5
$A_1$	$(a, b, c, a, c, b)$	3
$A_2$	$(a, b, b, a, c, c)$	3
$A_3$	$(a, b, c, a + \pi, c + \pi, b + \pi)$	3
$A_4$	$(a, b, b + \pi, a + \pi, c + \pi, c)$	3
$A_5$	$(a, a + \pi, b, a, a + \pi, b)$	2
$A_6$	$(a, a + \pi, b, a, a + \pi, b + \pi)$	2
$A_7$	$(a, a + \pi, b, a + \pi, a, b)$	2

### 6.4.2. Слабкі химерні стани та біфуркації для шести–осциляторної системи

Означення химерних станів та проведені вище дослідження дають один з методів їх виявлення та дослідження. Метод полягає у відшуканні інваріантних підпросторів мінімальної розмірності, де принаймні два осцилятори є фазово замкнутими, а один з них є фазово незамкнутий з третім. Знайдена таким методом структура вже буде слабким химерним станом, незалежно від поведінки та стійкості фазових змінних за межами інваріантного підпростору. З цієї точки зору опишемо більш детально динаміку системи (6.13) всередині підпростору  $A_1$ . Перепишуючи систему (6.13) у інваріантному підпросторі  $A_1$  (6.14), отримуємо:

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi_1}{dt} &= \omega + 2g(\phi_1 - \phi_2) + 2g(\phi_1 - \phi_3), \\ \frac{d\varphi_2}{dt} &= \omega + 2g(\phi_2 - \phi_1) + 2g(\phi_2 - \phi_3) + g(0), \\ \frac{d\varphi_3}{dt} &= \omega + 2g(\phi_3 - \phi_1) + 2g(\phi_3 - \phi_2) + g(0),\end{aligned}$$

відповідно до три–секційної структури мережі. За допомогою нових змінних

$$\xi = \phi_1 - \phi_3, \quad \eta = \phi_2 - \phi_3,$$

редукуємо останню систему до системи у фазових різницях:

$$\begin{aligned}\frac{d\xi}{dt} &= 2g(\xi - \eta) + 2g(\xi) - 2g(-\xi) - g(-\eta) - g(0), \\ \frac{d\eta}{dt} &= 2g(\xi - \eta) + g(\eta) - 2g(-\xi) - g(-\eta).\end{aligned}\tag{6.15}$$

Для фазового зв'язку (6.3) при  $\alpha = \pi/2$ ,  $r = 0$  система (6.15) спрощується до наступної:

$$\begin{aligned}\frac{d\xi}{dt} &= -2 \cos(\eta - \xi) + \cos \eta + 1, \\ \frac{d\eta}{dt} &= -2 \cos(\eta - \xi) + 2 \cos \xi, .\end{aligned}\tag{6.16}$$

Векторне поле (6.16) має нульову дивергенцію — всі особливі точки є сідлами або центрами, а всі періодичні орбіти є нейтрально стійкими. Існує "смуга" нейтрально стійких слабких химерних станів, що обертаються навколо  $\xi$  та "острови" нейтрально стійких періодичних орбіт, які не є слабкими химерами (див. рис. 8.35(d)). Біфуркаційна діаграма на рис. 8.36 демонструє гілки положень рівноваги та періодичних розв'язків при варіації параметру  $\alpha$  та двох фіксованих значеннях  $r = 0$ ,  $r = -0.01$ . Можна переконатись, що існує стійкий химерний стан  $A_1$  для  $|\alpha - \pi/2|$  та малих ненульових  $r$ . Останні пов'язані з гомоклінічними біфуркаціями гілок на рис. 8.36. Детальніший аналіз показує, що багато з химер є стійкими у трансверсальних до  $A_1$  напрямках. У загальному випадку трансверсально стійкі химерні розв'язки можуть співіснувати з іншими трансверсально нестійкими.

Детальний чисельний аналіз проводився за допомогою програм XPPAUT [121] та DsTool [44]. Для визначення біфуркацій слабких химер треба враховувати кілька специфічних особливостей. Зокрема, треба враховувати те, що незамкнуті траєкторії у кількох фазових координатах можуть бути вбудованими у системи вищої розмірності як замкнуті. У подальшому описанні вважаємо, що малі літери відповідають фазовим портретам рис. 8.35, а великі — біфуркаційній діаграмі рис. 8.36. Біфуркація Андронова–Хопфа фазово замкнутого (нехимерного) циклу відбувається для  $0 < \alpha < \pi/2$  при збільшенні параметру  $r$  (наприклад, при  $\alpha = 1.5$ ,  $r = 0.011707$ ) та  $B$ ,  $O$ . Гомоклінічна біфуркація нехимерного циклу відбувається при  $M$ ,  $N$  з переходами від (b) до (c) та від (e) до (f). Сідло–зв'язні біфуркації слабких химерних циклів відбуваються у точках  $A$ ,  $C$ ,  $E$ ,  $K$  та зображені на фазових портретах (g), (k). Сідло–вузлова біфуркація двох химерних циклів відбувається у точці  $L$ , а вилкова біфуркація трьох химерних циклів у точці  $B$  з переходом від (i) до

(j). Є також сідло–вузлова біфуркація положень рівноваги у  $I$ ,  $H$  та (l). Також присутня вилкова біфуркація положень рівноваги у (b) при  $\alpha \approx 2.91$ , яка є виродженою у  $J$ ,  $D$ , тобто при  $r = 0$ ,  $\alpha = 0$  та  $\alpha = \pi$ .

Для  $r = 0$  на діаграмі рис. 8.36(a) є лінія вироджених біфуркацій  $D$ ,  $B$ ,  $O$ , що розпадається на криві регулярних сідло–вузлових біфуркацій  $I$ ,  $H$  при збуреннях  $r \neq 0$ . При  $r = 0$  існує лише одна гілка стійкої слабкої химери  $BC$  для  $\alpha > \pi/2$ , у той час, як можлива мультистабільність у області  $BL$  між синфазним розв’язком, слабкою химерою та ”нехимерною” періодичною орбітою при  $r \neq 0$ .

Скажемо кілька слів про інші шести осциляторні мережі, зображені на рис. 8.33. Мережа зв’язків лише з найближчими сусідами (рис. 8.33(b)) має притягуючі періодичні слабкі химерні розв’язки на інваріантному підпросторі  $A_4$  (див. Табл. 6.1). Мережа шести осциляторів з трьома входами (рис. 8.33(c)) має періодичні слабкі химерні стани, що належать до інваріантного підпростору з типовими точками  $(\theta_1, \dots, \theta_6) = (a, b, c, c + \pi, b + \pi, a + \pi)$ . Остання система має також слабкі химерні стани для функції зв’язків Курамото–Сакагучі  $r = 0$ , що неможливо для двох попередніх мереж.

Окремі дослідження показали, що найменшою розмірністю системи з одно–гармонічною функцією зв’язку ( $g(x) = -\sin(x + \alpha)$ ) є 5, коли мережа включає зв’язки лише з двома найближчими сусідами. У цьому випадку система має слабкі химери, що належать інваріантному многовиду з типовою фазовою точкою  $(\theta_1, \dots, \theta_5) = (a - b, a - c, a, a + b, a + c)$ . Відмітимо, що химери для кільця п’яти осциляторів з одногармонічною функцією можливі також у тому випадку, коли граф зв’язків є орієнтованим, але мережа є циркулянтною (задається системою (5.6) для  $N = 5$  при  $a \neq b$ ).

## 6.5. Декілька зауважень відносно химер

У даному підрозділі було дане означення слабого химерного стану (запропоноване вперше П. Ешвінім та автором дисертації у роботі [32]), яке є першим строгим аналітичним означення химер. Означення дане для мереж нерозрізнюваних фазових осциляторів та базується на нетривіальній класте-

ризації частот. Означення має лише мінімальні обмеження на динаміку та стійкість нового об'єкту. Обмеження у даному визначенні дається на тип мережі та динаміку у вузлах мережі. Проте дане означення може бути узагальненим, наприклад для зв'язаних хаотичних осциляторів, чії середні є різними для різних осциляторів у аттракторі мережі. Для узагальнення, зокрема, можна розширити поняття нерозрізнуваної мережі індивідуальних елементів до нерозрізнуваної мережі окремих багато-вимірних блоків. Незважаючи на те, що дане означення є не дуже зручним для дослідження нескінченних осциляторних масивів, отриманих внаслідок термодинамічних переходів (у цьому випадку зручно застосовувати теорію Отта–Антонсена [251, 211, 212, 264]), проте воно є простим та математично чітким у дослідженні скінченних мереж, особливо мало-вимірних.

Химери у великих системах часто спостерігаються як повільні та випадкові дрейфи інкогерентних кластерів (наприклад, див. [341]). Це означає, що стійка химера може мати ідентичні частоти при обчисленні протягом досить довгих часових шкал, якщо тільки регіони різної поведінки не "прив'язані" до областей з фіксованими правилами. Ми припускаємо, що слабкі химери, хоча і не стійкі в такій ситуації, послужать для організації поведінки всередині атрактора. Наші дослідження пропонують пояснення підстав, чому у більшості відомих та добре описаних випадків химери є перехідними режимами. Останнє пояснюється виродженням (нейтрально стійким) характером слабких химер, що є прототипами химер великих розмірностей і які мають великий період життя. Відмітимо, що у даному розділі було показано (Теорем 6.3.1), що слабкі химери можуть бути асимптотично стійкими, що заперечує певні припущення для "класичних" химер, як транзитивних станів.

Як було згадано раніше, система *глобально* зв'язаних ідентичних фазових осциляторів, кожен з яких (разом зі зв'язком) задається одним рівнянням вигляду (6.2) не може мати химерних станів. У випадку, коли осцилятори представлені більш складними рівняннями (одна з умов порушується), химери можуть існувати і на глобальних мережах ідентичних зв'язків. Зокрема, у роботі [344] показано існування химер у моделі Курамото–Сакагучі з глобальним зв'язком та *запізненням*. У [286] описуються химери у глобально зв'язних

комплекснозначних осциляторах Стюарта–Ландау. У [66] продемонстровано існування химер у мережі чотирьох глобально зв'язаних лазерів.

У роботі [225] показано існування слабких химер у розширеній *моделі Курamoto–Сакагучі з інерцією*. Останній випадок порушує два пункти вимог, описаних вище, система є глобально зв'язаною і мінімальна кількість осциляторів дорівнює три, але при цьому кожен осцилятор описується рівнянням другого порядку (або дво–вимірною системою). Остання робота показує, що мінімальною кількістю елементів (довільної природи) для існування химер у динамічній системі, є три.

Дослідження химерних режимів проводяться у різних напрямках: побудова все більш складних мереж ідентичних елементів, де існують химери; перевірка існування химер у відомих мережах, але іншими вузловими елементами; порівняння відповідних результатів для скінченно та нескінченно–вимірних систем; експериментальні дослідження та порівняння їх з теоретичними результатами та комп'ютерною симуляцією; описання химерних режимів, що мають додаткові властивості (хаотичні, фрактальні, гетероклінічні, транзитивні, тощо), дослідження стійкості ті біфуркацій химерних режимів. Зокрема, у роботі [191] дається класифікація химерних станів за різними ознаками. Велика кількість останніх робіт відносно даної тематики засвідчує, що химери є однією з найпопулярніших тем досліджень колективних режимів складних систем, що має дуже широкі перспективи для подальшого розвитку.

## Розділ 7

# Системи осциляторів з центральним елементом

### 7.1. Змагання за синхронізацію у системах з центральним елементом

У даному розділі розглядаються дві моделі, що об'єднані способом з'єднання елементів мережі. Обидві системи складаються з центрального керуючого елемента та зв'язаних з ним периферичних керованих елементів. Перша модель (що розглядається у підрозділі 7.1) Курамотівського типу, її елементами є фазові осцилятори. Друга модель (підрозділ 7.2) є узагальненням першої, вона містить додаткові рівняння, що описують зміну сил зв'язків між осциляторами (адаптацію) в залежності від положення їх фаз, а також рівняння зміни частоти центрального елемента. Обидві моделі мають біологічну мотивацію, а описані нижче результати будуть мати біологічну інтерпретацію.

#### 7.1.1. Вступ до моделей з центральним елементом

Мережі з центральним елементом з'являються як частини більш складних мереж в таких різноманітних областях, як системи зв'язку, соціальні мережі та нейронна структура мозку ссавців. В останньому випадку вони

широко розповсюджені завдяки конвергентній організації сполук в ієрархії структур мозку [112, 351]. Такі мережі можуть відігравати важливу роль у моделюванні мультисенсорної інтеграції [151, 347] та уваги [104, 72].

Увага є здатністю тварин виділяти з великого обсягу інформації, що надходить одночасно, деяку частину (зазвичай найбільш цікаву або важливу), яка повинна бути піддана більш детальній обробці. Згідно з однією з гіпотезою система уваги є ієрархічною, тобто у ній є певна підсистема, що називається центральним виконуючим елементом (*central executive*), яка організує включення того чи іншого об'єкту у фокус уваги [45, 46, 104, 71]. Недавні експериментальні дані [153] показують, що взаємодія центрального елемента системи уваги з нейронними ансамблями, що представляють зорові об'єкти, здійснюється шляхом синхронізації на частотах у гамма діапазоні. У роботах [203, 204, 186, 187] була запропонована та проаналізована модель уваги, що базується на фазовому автопідлаштуванні частоти в системі фазових осциляторів. Згідно цій моделі у фокус уваги включається той об'єкт, який кодується у корі коливальною активністю, що є синхронізованою з активністю центрального елемента. Ця модель була використана для реалізації послідовного вибору об'єктів у фокус уваги [72] та для одночасного відслідковування руху декількох цільових об'єктів [188]. Вивчення систем з центральним елементом може бути корисним для розуміння ролі синхронізації у когнітивних функціях. Моделі фазових осциляторів забезпечують зручний та математично придатний інструмент для таких досліджень. Детально біологічну мотивацію виникнення математичної осциляторної моделі уваги можна знайти у дисертаційній роботі Я.Б. Казановича [10]. У даній роботі наведено дуже широку бібліографію відносно математичних досліджень когнітивних процесів мозку, дискутується широкий клас різноманітних моделей, заданих на мережах з центральним елементом та хабами, детально інтерпретуються різні режими колективної динаміки у термінах нейронних процесів мозку.

У даному розділі ми розглядаємо спеціальний тип осциляторних систем: мережі з центральним блоком (елементом). У мережах з центральним блоком глобальна взаємодія елементів реалізується через *центрального осцилятора (ЦО)*, який має прямі і зворотні зв'язки з усіма іншими осциляторами,



які називаються *периферичними осциляторами (ПО)*. Крім з'єднань з ЦО, ПО можуть мати локальні зв'язки зі своїми сусідами, які є, як правило, набагато слабшими ніж центральним [72, 188, 190]. Різні типи архітектур підключення мереж з центральним елементом показані на рис. 8.37. Архітектура на рис. 8.37(а) називається *зірково-подібною системою*. Система з такими зв'язками є найбільш затребуваною для описання різних природничих явищ, та вона є найкраще вивченою. Н рис. 8.37(b)–(f) зображено різні типи архітектур мереж з локальними зв'язками між ПО.

Незважаючи на те, що динаміка мереж фазових осциляторів з центральним блоком (та еквівалентних їй систем у фазових різницях) вивчалась у великій кількості робіт [185, 186, 187, 72, 74, 73], повний аналіз стійкості положень рівноваги у таких системах та їх біфуркацій ще далекий від завершення. Аналіз більш складних атракторів, що відповідають різним колективним режимам, є складною задачею навіть для мало-вимірних випадків. У даному підрозділі особливу увагу ми будемо приділяти дослідженню стійкості режимів, коли *периферичні осцилятори конкурують за синхронізацію з центральним*: лише  $k$  з ПО можуть бути синхронізовані з ЦО у той час, як інші  $(N - k)$  ПО знаходяться у протифазі або коливаються близько до протифази. Частковий випадок  $k = 1$  є найбільш бажаним з біологічної точки зору і він відповідає осциляторному аналогу процедури *переможець отримує все* (і буде дуже детально розглянутий для більш загальної моделі у підрозділі 7.2).

Відмітимо, що перед початком досліджень ефект конкуренції ПО за синхронізацію був для нас не очевидним. Для стандартної моделі Курамото глобально зв'язаних осциляторів (зв'язок усіх зі всіма) протифазні режими також присутні, але лише у випадках, коли осцилятори всієї групи розділяються на дві множини: конформістів та нонконформістів (як було показано у розділі 4). У цьому випадку центральним елементом може виступати вся група конформістів. Ренегатний режим, описаний у розділі 4 також можна трактувати у цьому розумінні як режим переможець отримує все. Режим глобальної протифази, що можливий у мережах з глобальним зв'язком, не може добре змодельовати ситуацію з біологічної точки зору. Ситуація є принципово іншою для системи з центральним елементом. Всі ПО під впливом

динамічної системи розщеплюються на підмножини, що знаходяться у взаємній антифазі і це відбувається незважаючи на однорідний вплив ЦО на всі ПО. Крім того простий аналітичний опис областей параметрів, що відповідають вказаним режимам, дозволяє сконструювати систему з частковими синфазними/протифазними співвідношеннями осциляторної активності. Важливим з біологічної точки зору є розуміння механізму переходів між різними динамічними режимами при зміні параметрів, зокрема, переходів між стійкістю та нестійкістю різних типів режимів конкуренції. Також важливим є дослідження мультистабільності різних режимів та параметричних областей їх існування.

### 7.1.2. Система з ідентичними периферичними осциляторами

Ми досліджуємо систему зв'язаних фазових осциляторів з зірко-подібним зв'язком (рис. 8.37(a)). Будемо вважати, що центральний осцилятор має індекс 0, а периферичні мають індекси  $i = 1, \dots, N$ . Ми розглядаємо модель, динаміка якої задається системою звичайних диференціальних рівнянь:

$$\frac{d\theta_0}{dt} = \omega_0 + \sum_{i=1}^N f(\theta_i - \theta_0), \quad (7.1)$$

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + g(\theta_0 - \theta_i), \quad i = 1, \dots, N, \quad (7.2)$$

де  $(\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_N) \in \mathbb{T}^{N+1}$  — фазові змінні на  $(N + 1)$ -вимірному торі,  $\theta_i \in [0, 2\pi)$ ,  $\omega_i$ ,  $i = 0, \dots, N$ , — власні частоти осциляторів,  $f(x)$  та  $g(x)$  — функції впливу ПО на ЦО та навпаки, відповідно. Вважаємо, що функції зв'язку  $f(x)$ ,  $g(x)$  є непарними,  $2\pi$ -періодичними та гладкими. З таких припущень, зокрема, випливає, що

$$f(0) = f(\pi) = g(0) = g(\pi) = 0.$$

Віднімаючи рівняння (7.1) від (7.2), отримуємо:

$$\frac{d\varphi_i}{dt} = \Delta_i - \sum_{j=1}^N f(\varphi_j) - g(\varphi_i), \quad i = 1, \dots, N, \quad (7.3)$$

де

$$\varphi_i = \theta_i - \theta_0, \quad \Delta_i = \omega_i - \omega_0.$$

Спочатку ми обмежимося розглядом ідентичних периферичних осциляторів:

$$\omega_i = \omega, \quad i = 1, \dots, N, \quad (7.4)$$

тобто при  $\Delta_i = 0$  у системі (7.3). Позначимо:

$$f'(0) = a_1, \quad f'(\pi) = a_2, \quad g'(0) = b_1, \quad g'(\pi) = b_2. \quad (7.5)$$

Відмітимо, що система (7.3), яка тут розглядається як допоміжна, має власну цінність для застосувань [321, 320, 190]. Система (7.3), (7.4) має симетрію перестановок  $\mathbf{S}_N$ , що є спільною властивістю з оригінальною системою (у змінних  $\theta_i$ ) глобально зв'язаних ідентичних осциляторів. Головною відмінністю є те, що розглядувана у даному розділі редукована система вже не має симетрії фазового зсуву. Незважаючи на те, що система (7.3), (7.4) має інваріантні кластерні режими  $\varphi_i = \varphi_j$ ,  $i \neq j$  (що відповідають кластерам  $\theta_i = \theta_j$  оригінальної системи (7.1), (7.2)), дані кластери вже не виділяють замкнуту інваріантну область  $\bar{\mathcal{C}}$  у  $\mathbb{T}^N$  оскільки  $\varphi_i = 0$  не є інваріантними множинами системи у даному випадку. На відміну від системи з глобальним зв'язком, система з зірко-подібним зв'язком має *фазово незамкнуті режими*, що відповідають негомологічним нулю траєкторіям.

Випадок  $N = 1$  системи (7.3) є простим та добре відомим, тому у подальшому ми будемо розглядати випадки  $N \geq 2$ .

### 7.1.3. Положення рівноваги у зірко-подібних системах

Можна переконатись у тому, що точки  $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_N)$  з координатами  $\varphi_i \in \{0, \pi\}$ ,  $i = 1, \dots, N$ , є положеннями рівноваги системи (7.3), (7.5) (проте, система може мати і інші положення рівноваги). Позначимо через  $\Phi_k$  точки,

що мають  $k$  координат рівних 0 та  $(N - k)$  координат рівних  $\pi$ . Дана точка відповідає режиму, коли  $k$  ПО виграли боротьбу за синхронізацію з ЦО, а  $N - k$  інших ПО її програли (знаходяться у протифазі що ЦО). З точки зору моделювання уваги стійкі режими  $\Phi_k$  можуть бути добре проінтерпретованими, оскільки описують ситуації, коли  $k$  об'єктів (властивостей) попали у фокус уваги, а інші ні. У цих позначеннях точка  $\Phi_N = \Phi_{sync}$  — режим повної синхронізації,  $\Phi_0$  — режим антифази усієї ПО з ЦО,  $\Phi_1$  — режим *переможець отримає все* (лише один ПО виграв змагання за синхронізацію з ЦО). Згідно симетрії, всі точки  $\Phi_k$  мають однакову стійкість, дослідження якої і є нашою найближчою задачею.

Лінеаризуючи систему (7.3), можна записати власні значення положень рівноваги  $\Phi_k$ . Пропускаючи громіздкі перетворення наведемо кінцевий результат. В залежності від параметру  $k$  згадані власні значення мають наступний вигляд:

$$k = 0 : \quad \lambda_{1,\dots,N-1} = -b_2, \quad \lambda_N = -Na_2 - b_2, \quad (7.6)$$

$$k = 1 : \quad \lambda_{1,\dots,N-1} = -b_2 \text{ (при } N \geq 3), \quad \lambda_{N-1,N} = z, \quad (7.7)$$

$$2 \leq k \leq N - 2 : \quad \lambda_{1,\dots,k-1} = -b_1, \quad \lambda_{k,\dots,N-2} = -b_2, \quad \lambda_{N-1,N} = z, \quad (7.8)$$

$$k = N - 1 : \quad \lambda_{1,\dots,N-2} = -b_1 \text{ (при } N \geq 3), \quad \lambda_{N-1,N} = z, \quad (7.9)$$

$$k = N \quad \lambda_{1,\dots,N-1} = -b_1, \quad \lambda_N = -Na_1 - b_1, \quad (7.10)$$

де

$$z = -z_1 \pm \sqrt{z_2^2 + z_3}, \quad (7.11)$$

$$z_1 = 0 \quad (7.12)$$

$$z_2 = \frac{-Na_2 + k(a_1 + a_2) + (b_1 - b_2)}{2}, \quad (7.13)$$

$$z_3 = k(N - k)a_1a_2. \quad (7.14)$$

Відмітимо, що для стислості позначень у формулах (7.7)–(7.9) одна змінна  $z$  використовується для позначення двох різних значень, визначених у (7.11).

Відповідно до (7.11)–(7.14) змінні  $z$ ,  $z_1$ ,  $z_2$ ,  $z_3$  залежать від параметрів  $N$ ,  $k$ ,  $a_1, a_2, b_1, b_2$ . Отже, умови стійкості положення рівноваги  $\Phi_k$  можуть бути сформульовані у термінах нерівностей співвідношень між цими параметрами.

**Теорема 7.1.1.** *Редукована система (7.3) ідентичних фазових осциляторів має (крім інших) антифазні положення рівноваги  $\Phi_k \in \mathbb{T}^N$ , з  $k$  координатами рівними 0 та  $(N - k)$  координатами рівними  $\pi$ . Положення рівноваги є асимптотично стійким, якщо*

$$k = 0 : \quad b_2 > 0, a_2 > -\frac{b_2}{N}, \quad (7.15)$$

$$k = 1 : \quad b_2 > 0 \text{ (при } N \geq 3), z_1 > 0, d < 0, \quad (7.16)$$

$$2 \leq k \leq N - 2 : \quad b_1 > 0, b_2 > 0, z_1 > 0, d < 0, \quad (7.17)$$

$$k = N - 1 : \quad b_1 > 0 \text{ (при } N \geq 3), z_1 > 0, d < 0, \quad (7.18)$$

$$k = N : \quad b_1 > 0, a_1 < -\frac{b_1}{N}, \quad (7.19)$$

де  $d = z_2^2 + z_3 - z_1^2 < 0$ , а параметри  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$ ,  $b_2$  визначаються виразами (7.5).

**Доведення.** Існування розв'язків  $\Phi_k$  перевіряється безпосередньо. Нерівності (7.15)–(7.19) описують всі випадки  $\operatorname{Re}(\lambda(\Phi_k)) < 0$ ,  $k = 1, \dots, N$ , що отримуються з представлень (7.6)–(7.10) для різних значень параметру  $k$ .  $\square$

Подальші перетворення показують, що останні дві нерівності кожного рядка (7.16)–(7.18) можуть бути трансформовані до наступного вигляду:

$$M_1 : L_1 = L_1(a_1, a_2, b_1, b_2, N, k) = kb_2a_1 + (N - k)b_1a_2 + b_1b_2 > 0, \quad (7.20)$$

$$M_2 : L_2 = L_2(a_1, a_2, b_1, b_2, N, k) = ka_1 + (N - k)a_2 + (b_1 + b_2) > 0. \quad (7.21)$$

Нерівності (7.20), (7.21) описують дві півплощини по відношенню до координат  $(a_1, a_2)$ . Оскільки для стійкості  $\Phi_k$  повинні виконуватись обидві ці нерівності, то множина  $M = M_1 \cap M_2$ , то множина містить множину стійкості даної точки. На рис. 2, 4, 5 роботи [190, Kazanovich, Vugulko, Borisyuk] проде-

монстровано приклади областей стійкості, нестійкості та мультистабільності  $\Phi_k$  для різної кількості ПО та при різних параметрах функцій взаємодії  $f, g$ .

**Зауваження 7.1.1.** Результати, подібні описаним у Теоремі 7.1.1 можна отримати і для більш загальної системи, коли функції  $f(x)$  та  $g(x)$  перетинають координатну вісь одночасно у іншій парі точок (не обов'язково 0 та  $\pi$ ). Крім того, достатньо припустити, щоб лише одна з функцій  $f(x)$  чи  $g(x)$  була непарною.

#### 7.1.4. Зірко-подібні мережі з дво-гармонічною взаємодією

Більш детально опишемо випадок, коли функції зв'язків є двогармонічними, а саме коли

$$f(x) = a(\sin x + r \sin(2x)), \quad g(x) = b(\sin x + p \sin(2x)), \quad (7.22)$$

де  $a, b, r, p$  — параметри. У даному випадку система у фазових змінних (7.3) має такий вигляд:

$$\frac{d\varphi_i}{dt} = - \sum_{j=1}^N a(\sin \varphi_j + r \sin(2\varphi_j)) - b(\sin \varphi_i + p \sin(2\varphi_i)), \quad i = 1, \dots, N. \quad (7.23)$$

Використовуючи результати Теоремі 7.1.1, можна записати умови стійкості положень рівноваги  $\Phi_k$ ,  $k = 0, \dots, N$ , що відповідають різним режимам боротьби ПО за синхронізацію. Умови стійкості  $\Phi_k$  системи (7.23) в термінах співвідношень між параметрами функцій (7.22) представлено у Таблицях 8.3–8.4 Наведених у Додатку Д. Відмітимо, що ці умови суттєво відрізняються для випадку найменшої розмірності системи (Табл. 8.3, 8.4).

Відмітимо, що система (7.23) має і інші положення рівноваги, крім  $\Phi_k$ , а також інші динамічні структури (періодичні траєкторії, гетероклінічні структури, тощо), які описують різні режими колективної динаміки. Для повного описання існування різних атракторів системи та їх біфуркаційних перетворень варто крім аналітичних досліджень використовувати і чисельні, оскільки система є сильно нелінійною. Детальні дослідження для систем ма-

лої розмірності проведено у роботах [85, 2, 190]. Висновки про динаміку систем довільної розмірності робляться на базі ієрархічних структур, які має дана система. Далі стисло наведемо найважливіші результати, отримані у роботах, вказаних вище.

**Симетрії, інваріантні многовиди та біфуркації.** Як згадувалось вище, редукована система (7.3) має симетрію перестановок  $\mathbf{S}_N$ , що відповідає перестановкам ПО. Редукована система уже не має симетрії фазового зсуву. Для дво-гармонічних функцій (7.22) система має параметричні часо-реверсивні симетрії, що можуть бути охарактеризовані діями  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ , згенерованими наступним чином:

$$\begin{aligned}\gamma_1 &: (\varphi_1, \dots, \varphi_N, a, b, p, r, t) \mapsto (-\varphi_1, \dots, -\varphi_N, a, b, p, r, -t), \\ \gamma_2 &: (\varphi_1, \dots, \varphi_N, a, b, p, r, t) \mapsto (\varphi_1, \dots, \varphi_N - a, -b, p, r, -t), \\ \gamma_3 &: (\varphi_1, \dots, \varphi_N, a, b, p, r, t) \mapsto (\varphi_1 + \pi, \dots, \varphi_N + \pi, a, b, -p, -r, -t).\end{aligned}$$

Ці симетрії дозволяють робити висновки про динаміку системи, розглядаючи лише позитивні (негативні) значення параметрів.

Використовуючи симетрії мережі зв'язків та непарності функцій  $f, g$ , можна знайти інваріантні многовиди системи (7.23), а також більш детально описати її біфуркаційні властивості. Дана система має два типи інваріантних кластерних многовидів:

#### 1. $m$ -вимірні многовиди

$$\mathcal{M}_m = \{(\varphi_1, \dots, \varphi_N) : \varphi_{k_1} = \varphi_{k_2} = \dots = \varphi_{N-m+1}\}, \quad m = 1, \dots, N,$$

що відповідають  $(n-m+1)$ -кластерам ПО з урахуванням їх  $\mathbf{S}_N$  симетрії. Відмітимо, що інваріантний многовид

$$\mathcal{M}_1 = \{(\varphi_1, \dots, \varphi_N) : \varphi_1 = \dots = \varphi_N\}$$

є лінією дієдральної симетрії  $\mathbf{D}_N$ . Існують також інваріантні многовиди

вигляду  $\mathcal{M}_m$ , що відповідають кластерним режимам, коли система має  $l$  груп з  $d_j$ ,  $j = 1, \dots, l$ , осциляторів у кожній групі ( $d_1 + \dots + d_l = d = N - m + l$ ) з ідентичними значеннями фаз.

## 2. $m$ -вимірні многовиди

$$\mathcal{Q}_m = \{(\varphi_1, \dots, \varphi_N) : \varphi_{k_i} + \varphi_{k_j} = 0, \varphi_{k_l} \in \{0, \pi\}\},$$

$$i = 1, \dots, m, j \neq i, l = 2m + 1, m = 1, \dots, [N/2],$$

(де  $[x]$  — ціла частина числа  $x$ ), що виникають у відповідності симетрії непарності правих частин системи. Всього є  $n = n(m, N)$  інваріантних многовидів  $\mathcal{Q}_m$  у  $\mathbb{T}^N$ , де

$$n = n(m, N) = 2^{N-2m} C_N^{2m} (2m - 1)!.$$

Інваріантні многовиди розмірності  $(N - 1)$  розбивають фазовий простір  $\mathbb{T}^N$  системи (7.3) на інваріантні області.

На відміну від інваріантних областей глобально зв'язаних систем, у даному випадку такі області є фазово незамкнутими (крім  $N = 2$ ). Інваріантні многовиди менших розмірностей пронизують фазовий простір, утворюючи певні мережеві структури. Ці мережеві структури часто є основою народження складних гетероклінічних з'єднань та гетероклінічних циклів. Геометрію інваріантних многовидів проілюстровано для випадку  $N = 3$  на рис. 7.25(a)–(d) для фазового простору  $\mathbb{T}^3$ .

Система (7.23) має наступні біфуркації положень рівноваги  $\Phi_k$ :

**1.** Біфуркації *Андронова–Хопфа* у точці  $\Phi_k$ , що задається у параметричному просторі поверхнею:

$$AH(\Phi_k) = \{(a, b, r, p) : 4bp + 2Nar + (2k - N)a = 0\}, \quad k = 1, \dots, N - 1;$$



**2.** *Вилкові біфуркації*, що у залежності від параметру  $k$  задаються виразами:

$$PF(\Phi_k) = \{(a, b, r, p) : a(N(4pr + 2r - 2p - 1) + 4k(p - r)) + b(4p^2 - 1) = 0\},$$

$$k = 1, \dots, N - 1,$$

$$PF(\Phi_N) = \{(a, b, r, p) : b(2p + 1) + Na(2r + 1) = 0\},$$

$$PF(\Phi_0) = \{(a, b, r, p) : b(2p - 1) + Na(2r - 1) = 0\}$$

та призводять до появи (зникнення) двох нових точок всередині інваріантного многовиду  $\mathcal{M}_m$ ;

**3.** *Вилкові біфуркації*, що відбуваються на біфуркаційних поверхнях:

$$PF_*(\Phi_k) = \{(a, b, r, p) : p = -1/2\}, \quad k = 1, \dots, N,$$

$$PF^*(\Phi_k) = \{(a, b, r, p) : p = 1/2\}, \quad k = 0, \dots, N - 1,$$

у транскритичних до інваріантних многовидів напрямках та призводять до появи  $k - 1$  для  $PF_*(\Phi_k)$  та  $N - k - 1$  для  $PF^*(\Phi_k)$  пар нових положень рівноваги з кожної особливої точки  $\Phi_k$ ;

**4.** *Вироджена біфуркація "перемикання"*, що відбувається на гіперплощині:

$$SW(\Phi_k) = \{(a, b, r, p) : b = 0\}, \quad k = 0, \dots, N,$$

що змінює напрямок впливу центрального осцилятора на периферичні.

Звичайно, крім локальних біфуркацій система має і глобальні біфуркації різних типів. Найбільш типовими для даної системи є різні типи біфуркацій гетероклінічних циклів. Зокрема існування гетероклінічного циклу для найпростішого випадку трьох осциляторів (двох ПО) можна описати для редукованої системи (7.3). У цьому випадку фазовий простір  $\mathbb{T}^2$  ділиться інваріантними многовидами  $\varphi_2 = \varphi_1$  та  $\varphi_2 = -\varphi_1$  на дві однакові області на торі (рис. 4 роботи [85]). Гетероклінічний  $\mathbb{Z}_2$ -симетричний цикл, що з'єднує особливі точки  $\varphi_N = (0, 0)$  та  $\varphi_2 = (\pi, \pi)$  є гетероклінічним циклом, якщо ці точки є сідлами, а на вказаних інваріантних многовидах немає інших особли-

вих точок. Відмітимо, що у такому випадку буде існувати два різних чотирикутних гетероклінічних цикли на торі, у яких фазова точка (всього циклу) по два рази проходить через кожне сідло. Гетероклінічні цикли для наступної розмірності ( $N = 3$ ) можуть бути доволі складними (див. рис. 7.25(e)–(h)) та бути основою (скелетом) для народження консервативного та регулярного хаосу у системі.

Існування гетероклінічних циклів є типовим явищем для систем з симетріями, як було показано у всіх попередніх розділах для подібних та інших ситуацій. Деякі гетероклінічні біфуркації базуються на локальних біфуркаціях сідлових точок, і тому їх біфуркаційні лінії можна знайти аналітично. При наявності додаткових умов лінії гетероклінічних біфуркацій можна знайти за допомогою формули (2.26), а також використовуючи інформацію про належність частин гетероклінічних циклів інваріантним многовидам. Проте, у багатьох випадках біфуркаційні лінії можна знайти лише з застосуванням чисельних методів. Відмітимо, що для систем старших розмірностей гетероклінічні цикли можуть базуватись не лише на сідлових особливих точках, а також на сідлових циклах. Мережі гетероклінічних структур є доволі складними уже для  $N = 3$  (як показано на рис. 8.39), перебудови їх інваріантних многовидів призводять до виникнення хаотичної поведінки системи.

Типовою рисою системи (7.3) є також мультистабільність різних  $\Phi_k$ , що описують різні режими кластеризації. Завдяки симетрії перестановок  $\mathbf{S}_N$  система має  $C_N^k$  симетричних точок  $\Phi_k$ , всі з яких мусять бути стійкими одночасно. Позначимо через  $\mathcal{P}_k(a_1, a_2, b_1, b_2, N)$  непорожню область у параметричному просторі, де точка  $\Phi_k$  є стійкою. У загальному випадку область мультистабільності можна означити непорожню множину

$$\mathcal{P}_J = \bigcap_{k \in J} \mathcal{P}_k,$$

де  $J$  є множиною натуральних чисел з діапазону  $\{1, 2, \dots, N\}$ . З наведених вище результатів випливає, що для довільних параметрів є монотонна залежність:  $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}_1 \subset \dots \subset \mathcal{P}_N$ . Детально мультистабільність режимів боротьби за синхронізацію описана у роботі [190, Kazanovich, Burylko, Borisyuk]

та проілюстрована діаграмами 4, 5. Також можливе співіснування положень рівноваги  $\Phi_k$  з іншими атрactorами (що видно вже для найпростішого нетривіального випадку ЦО+2ПО), зокрема з періодичними орбітами та гетероклінічними циклами.

Велика кількість описаних вище колективних властивостей зберігаються і для більш загальної системи з зірко-подібною структурою зв'язків, але з різними функціями впливу  $f_1, \dots, f_N$  ПО на центральний. Відповідна система у фазових різницях має такий вигляд:

$$\frac{d\varphi_i}{dt} = - \sum_{j=1}^N f_j(\varphi_j) - g(\varphi_i), \quad i = 1, \dots, N. \quad (7.24)$$

Дана система втрачає частину симетрій в залежності від співвідношень функцій  $f_i$  між собою. Дана система також має (крім інших) ті ж положення рівноваги  $\Phi_k$  при виконанні умов (7.22).

Детальний аналіз біфуркаційних переходів для системи трьох (при  $N = 2$ ) та чотирьох осциляторів (при  $N = 3$ ) для було наведено у [85, 2] з ілюстраціями фазових портретів для різних значень параметрів та біфуркаційних діаграм. На рис. 8.38 наведено чотири зі вказаних біфуркаційних діаграм. Відмітимо, що оскільки функції зв'язків системи є непарними і, отже, праві частини системи є непарними у загальному, то внаслідок симетрії всі сідло-вузлові біфуркації у цьому випадку замінюються вилковими біфуркаціями (відбувається певне виродження). Також точка біфуркації Богданова–Такенса у цьому випадку є перетином біфуркаційних ліній Андронова–Хопфа, гомоклінічної та вилкової.

**Ієрархічна структура системи.** Система (7.24) має інваріантні многовиди  $\mathcal{M}_m, \mathcal{Q}_m$  для довільних функцій  $f_1, \dots, f_N, g$ . Важливою є ієрархічна структура системи (7.24) відносно своїх інваріантних многовидів  $\mathcal{M}_m$ , що присутня на відміну від більшості осциляторних систем заданих на мережах з іншою архітектурою. Це означає, що будь-яка  $m$ -вимірна система (7.24) має туж динаміку, як і динаміка на деякому інваріантному многовиді  $\mathcal{M}_m$  загальної  $N$ -вимірної системи (7.24) ( $m < N$ ). Точніше, розглянемо інваріан-

тний многовид  $\mathcal{M}_m$  з індексами координат  $j = 1, \dots, N - m + 1$ . Тоді динаміка на цьому многовиді задовольняє рівнянню (7.24) у нових змінних

$$\tilde{\varphi}_1 = \varphi_1, \tilde{\varphi}_2 = \varphi_{N-m+2}, \dots, \tilde{\varphi}_m = \varphi_N$$

та з новими функціями зв'язку

$$\begin{aligned} \tilde{f}_1(\tilde{\varphi}_1) &= \sum_{j=1}^{N-m+1} f_j(\varphi_1), \\ \tilde{f}_2(\tilde{\varphi}_2) &= f_{N-m+2}(\varphi_{N-m+2}), \dots, \tilde{f}_m(\tilde{\varphi}_m) = f_N(\varphi_N). \end{aligned}$$

Таку ж ієрархічну властивість можна описати і для більш складної класифікації системи, коли система має  $l$  груп з  $d_j$ ,  $j = 1, \dots, l$ , осциляторів у кожній групі з ідентичними значеннями фаз. Нові функції  $\tilde{f}_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , у правій частині системи (7.24) є також непарними та задовольняють умовам  $\tilde{f}_i(0) = \tilde{f}_i(\pi) = 0$ . У загальному випадку (і як показано у [2, 190]) інваріантні многовиди  $\mathcal{M}_m$  мають різну трансверсальну стійкість у різних своїх точках, що залежить від значень змінних всередині многовидів та значень параметрів системи. Наведена ієрархічна властивість дозволяє автоматично описувати динаміку системи на її певних інваріантних многовидах, використовуючи вже отримані результати для цієї ж системи менших розмірностей.

### 7.1.5. Система з локальними зв'язками між периферичними елементами

У роботах [74, 71, 190] досліджуються колективна динаміка систем з центральним елементом у випадках, коли периферичні елементи взаємодіють між собою, тобто коли система (7.1), (7.2) має більш загальний вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{d\theta_0}{dt} &= \omega_0 + \sum_{i=1}^N f(\theta_i - \theta_0), \\ \frac{d\theta_i}{dt} &= \omega + g(\theta_0 - \theta_i) + \sum_{k \in \mathcal{N}_i} h(\theta_k - \theta_i), \quad i = 1, \dots, N, \end{aligned}$$

де  $h(x)$  — функція локальної взаємодії між ПО,  $\mathcal{N}_i$  — множина індексів взаємодії ПО між собою (різні типи взаємодії зображень на рис. 8.37). Очевидно, що системи зі слабкими периферичними зв'язками більш точно моделюють реальні нейронні процеси. Особливу увагу у згаданих роботах приділено питанню впливу архітектури периферичних зв'язків та сили взаємодії між різними ПО на загальну колективну динаміку системи. Було детально досліджено умови стійкості режиму повної синхронізації ( $\Phi_N$  для системи у фазових різницях). Виявилось, що положення повної синхронізації є асимптотично стійким при відсутності зворотнього впливу від ПО, але воно втрачає свою стійкість при наявності зворотніх зв'язків залежно від кількості ПО та архітектури мережі між ними. Було показано, що параметричні умови стійкості  $\Phi_{sync} = \Phi_N$  (в залежності від параметрів  $a_1 = f'(0)$ ,  $b_1 = g'(0)$ ,  $c = h'(0)$ ) є ідентичними у випадку, коли ПО зв'язані на прямій та на плоскій ґратці, а також вони є ідентичними, коли архітектура мережі ПО має форму кола та тору. Так стійкість з мережею ПО на прямій руйнується швидше, ніж на колі при збільшенні кількості осциляторів у мережі. Було також встановлено, що стійкість антифазних режимів може бути легко зруйнована при появі незначних зв'язків між ПО.

### 7.1.6. Консервативний хаос

Осциляторна зіркоподібна система з трьома та більше ПО може демонструвати досить складну хаотичну поведінку. Можна вказати зв'язок між векторним полем (7.1), (7.2) та добре відомим АВС-поток (Arnold–Beltrami–Childress flow), який вперше досліджувався у роботі В. Арнольда [26]. Розглянемо систему

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi_1}{dt} &= A \sin \varphi_3 + C \cos(\varphi_2 - \delta), \\ \frac{d\varphi_2}{dt} &= B \sin \varphi_1 + A \cos(\varphi_3 - \delta), \\ \frac{d\varphi_3}{dt} &= C \sin \varphi_2 + B \cos(\varphi_1 - \delta).\end{aligned}\tag{7.25}$$

Система (7.25) є ABC потоком з параметрами  $A, B, C$  при  $\delta = 0$  та співпадає з системою у фазових різницях (7.3) для моделі з трьома ПО і функціями зв'язків  $f(x) = g(x) = -\sin x$ , при  $A = B = C = 1, \delta = \pi/2$ . Хаотична поведінка ABC потоку вивчалась і описана у літературі з різних точок зору [99, 116, 137, 127, 40]. Система має так званий консервативний хаос, коли хаотична траєкторія заповнює майже весь фазовий тор  $\mathbb{T}^3$  за винятком однієї дво-вимірних інваріантних многовидів цієї системи. Характерною рисою консервативного хаосу є нульова дивергенція фазового простору. Подібну поведінку мають фазові потоки системи (7.1), (7.2) трьох ПО при певному розподілі параметрів. Так задана система має три інваріантні площини  $\mathcal{M}_2$  вигляду  $\varphi_i = \varphi_j$ , що розділяють фазовий простір  $\mathbb{T}^3$  на дві інваріантні області, заповнені хаотичними фазово-незамкнутими траєкторіями [85]. Інваріантні області у три-вимірному тору  $\mathbb{T}^3$  (який зручно представляти кубом на схематичних діаграмах) є трикутними необмеженими призмами (трубами), що мають симетрію  $\mathbb{Z}_3$  та розташовані навколо ліній симетрії:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1 &= \{(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) : \varphi_1 - \varphi_2 = 2\pi/3, \varphi_1 - \varphi_3 = 4\pi/3\}, \\ \mathcal{L}_2 &= \{(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) : \varphi_1 - \varphi_2 = 4\pi/3, \varphi_1 - \varphi_3 = 2\pi/3\}.\end{aligned}$$

Фазовий простір також пронизаний одно-вимірними інваріантними множинами  $\mathcal{M}_1: \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3$  та  $\mathcal{Q}_1$  вигляду  $\varphi_i + \varphi_j = 0, \varphi_k \in \{0, \pi\}, i, j, k = 1, 2, 3$  (рис 8.39(a)–(d)).

Аналізуючи умови стійкості положень рівноваги (7.15)–(7.19) можна знайти відкриту область у просторі параметрів таку, що всі точки  $\Phi_k \in \mathbb{T}^3$  системи є сідловими, а інших положень рівноваги система не має. На рис 8.39(e)–(h) схематично зображено ситуацію, коли система має положеннями рівноваги лише сідлові точки  $\Phi_0, \Phi_3$ , та сідло-вузлові точки  $\Phi_1, \Phi_2$  (котрих по три, враховуючи симетрію) і всі ці точки з'єднані між собою у гетероклінічний цикл за допомогою одновимірних інваріантних многовидів  $W^u(\Phi_k), W^s(\Phi_k)$ , частина з яких співпадає зі згаданими вище многовидами  $\mathcal{M}_1, \mathcal{Q}_1$ , а інші (фокусні) належать многовидам типу  $\mathcal{M}_2$ . Весь фазовий про-

стір у цьому випадку пронизаний мережею гетероклінічних циклів. Ці гетероклінічні цикли є основою існування хаотичних траєкторій подібно ситуації, описаній у роботі Л. Шильнікова про хаос у околі петлі сідло–фокуса [299]. У випадку системи (7.25) приклад такого гетероклінічного циклу зображено на рис. 7.25(e) (де перепозначено  $O := \Phi_3$ ,  $\Pi := \Phi_0$ ). Цей гетероклінічний цикл

$$\mathcal{H}_3(\Phi_3, \Phi_1, \Phi_0) = \mathcal{H}_3(\Phi_3, W^u(\Phi_3), \Phi_1, W^u(\Phi_1), \Phi_0, W^u(\Phi_0))$$

складається з: сідлової синхронної точки  $\Phi_3 = \Phi_{sync}$ , її одно–вимірного інваріантного многовиду  $W^u(\Phi_3) = W^s(\Phi_1)$ , що лежить на  $\mathcal{Q}_1$ ; сідло–фокусної точки  $\Phi_1$ ; його нестійкого спірале–видного многовиду  $W^u(\Phi_1) = W^s(\Phi_0)$ , що належить інваріантній площині  $\mathcal{Q}_2$ ; сідлової точки  $\Phi_0$ ; її нестійкого многовиду  $W^u(\Phi_0) = W^s(\Phi_3)$ , що співпадає з  $\mathcal{M}_1$ . Такий гетероклінічний цикл існує лише при виконанні усіх зв’язків  $W^u(\Phi_i) = W^s(\Phi_j)$ . Відмітимо, що такий гетероклінічний цикл можливий саме на торі  $\mathbb{T}^3$  (оскільки всі вершини куба є ідентичними (рис. 7.25(e)), і неможливий у  $\mathbb{R}^3$ , де гетероклінічний цикл містить два сідло–фокуси (рис. 7.25(g)). Умови існування хаосу можна описати у термінах співвідношень дійсних частин сідло–фокусу  $\Phi_1$  (як у Теоремі Шильнікова) та певних умов гомоклінічних дотиків, що є досить нетривіальними. Біфуркації корозмірності два (типу Шильнікова–Хопфа чи Белякова), описані, зокрема у роботах [91, 298, 92], призводять до появи гетероклінічних циклів, вузлами яких є сідлові точки та сідлові цикли (рис. 7.25(h)). Ці біфуркації є причиною деформації та стискання хаосу, який може займати вже не весь тороїдальний фазовий простір, а починає стискатись навколо лінії  $\mathcal{L}_1$  (або  $\mathcal{L}_2$ ) при зміні параметрів у (7.25). Структура хаотичних траєкторій показана на рис. 14 роботи [85]. А рис. 15 цієї ж роботи демонструє, що максимальна Ляпуновська експонента може бути позитивною для великої області параметрів системи, що чисельно підтверджує хаотичність траєкторій системи. Відмітимо, що рух фазової точки вздовж гетероклінічної траєкторії з різними вузлами  $\Phi_k$  відповідає моделюванню перемикування уваги з одного об’єкту на інший у нейронній системі.

Згідно зі згаданою вище ієрархічністю структури відносно власних ін-

варіантних многовидів, система у фазових різницях розмірності  $N \geq 4$  має хаотичну структуру всередині інваріантних многовидів  $\mathcal{M}_m$ ,  $m = 3, \dots, N-1$ , якщо вона має таку структуру при  $N = 3$ . Отже для системи фазових осциляторів з центральним елементом можна підібрати функції зв'язку таким чином, що вона буде мати консервативний хаос, подібний до АВС потоку або хаотичний атрактор для довільних розмірностей  $N \geq 3$ .

## 7.2. *Переможець отримує все* в моделях з центральним елементом та адаптацією

### 7.2.1. *Динамічний режим переможець отримує все*

*Переможець отримує все* (ПОВ) є обчислювальним принципом в штучних нейронних мережах для впровадження таких функцій, як конкурентне навчання, прийняття рішень та вибір дії [162, 345]. Відповідно до цього принципу, нейрони в системі конкурують один з одним за адаптацію. Зазвичай лише один нейрон або популяція нейронів з найбільшим зовнішнім імпульсом стає переможцем у цій конкуренції та пригнічує активність інших нейронів.

Традиційно ПОВ моделі можуть бути розділеними на кілька категорій в залежності від типів елементів у їх конструкціях. У більш ранніх версіях ПОВ моделей використовують безімпульсні блоки, що працювали з аналоговими вхідними та вихідними сигналами [346, 119, 53, 183, 290]. Пізніше були вдосконалені функціональні принципи цих моделей, були отримані аналітичні та обчислювальні результати відносно динаміки та стійкості різноманітних режимів [76, 229, 125, 281, 269, 61, 156]. Такі системи можуть бути зручно впроваджені у VLSI схемах [217, 100, 305] (very-large-scale integration – процес створення інтегральної схеми, об'єднуючи тисячі транзисторів у єдиний чіп). Для того, щоб зробити ПОВ системи сумісними з пристроями, подібними до мозку, розроблялись та вивчались ПОВ мережі імпульсних (spiking) елементів [103, 221, 178, 93] разом з їх VLSI блоками [173, 250]. ПОВ системи застосовувались також для побудови кремнієвої мережі [172, 219], ієрархічних моделей зору [272] та для моделювання когнітивних функцій



[175, 174, 304, 181, 220]. Було доведено, що операція *переможець отримує все* є обчислювально потужнішою у порівнянні з іншими нелінійними операціями, наприклад, пороговими [223, 222].

Гіпотеза тимчасової кореляції стимулювала розвиток ПОВ систем на основі синхронізації коливальної активності [301]. На базі осциляторної системи Ван дер Поля була розроблена модель зв'язаних гальмуючих нейронів для послідовного вибору об'єктів на зображенні за допомогою ПОВ принципів [328]. Подібне впровадження ПОВ режиму було реалізоване в системі ФіцХью–Нагумо з глобальною гальмівною нейронною взаємодією [329]. В роботі [240] була побудована система з адаптивно з'єднаних ПОВ ланцюгів, де кожен ланцюг є осцилятором, керованим взаємодією між багатьма збуджуючими елементами та загальною гальмуючою силою. Змагання між збуджуючими елементами призводить до того, що лише один нейрон залишається у збудженому стані. Перемикання між станами контролюється за допомогою зовнішньої стимуляції.

Традиційно в ПОВ системах вихідні сигнали конкурують за активацію через латеральне гальмування або рекурентне гальмування. У цьому підрозділі ми пропонуємо альтернативний підхід до ПОВ проблеми, який базується на синхронізації в осциляторній мережі з центральним елементом. Як і в попередніх підрозділах цього розділу, розглянемо систему, що побудована з осциляторів з радіальною архітектурою зв'язків. Тобто є *центральний осцилятор (ЦО)*, який зв'язаний з множиною *периферичних осциляторів (ПО)* за допомогою зв'язків у прямому і зворотньому напрямках. Ми покажемо, що конкуренція між ПО за синхронізацію з центральним може бути організована таким чином, що лише один з ПО виграє цю конкуренцію. Цей ПО буде працювати когерентно з центральним в той час коли фази інших ПО будуть суттєво відрізнятися від фази центрального. Це також призводить до резонансного збільшення активності ПО–переможця в той час, як активність інших ПО буде зменшеною до низького рівня.

Ми будемо використовувати узагальнені фазові осцилятори як елементи ПОВ системи. Узагальнена система відрізняється від оригінальної системи (7.1), (7.2), побудованої на базі моделі Курамото тим, що певні параметри

нової системи трансформуються у динамічні змінні. У випадку нової системи змінні включають власну частоту центрального осцилятора  $\omega_0$  та сили взаємодій від периферичних осциляторів до центрального  $a_1, \dots, a_N$ . Сила взаємодії ПО адаптується як функція подібності між її фазою та фазою ЦО. Для отримання ПОВ режиму сили зв'язку від ПО до ЦО бути додатними, а сили зв'язку у зворотньому напрямку – негативними.

Перевагою розглядуваної тут ПОВ осциляторної системи – це можливість її впровадження в апаратну техніку, таку, як прилади оптичних лазерів чи масиви з'єднань Джозефсона. Зауважимо, що між ПО відсутня взаємодія, тому число зв'язків у системі  $2N$ .

ПОВ системи узагальнених осциляторів з центральним елементом були запропоновані Я. Казановичем та Р. Борисюком у роботах [185, 186, 187] з метою моделювання візуального пошуку. Дуже детальне описання біологічної мотивації побудови даної моделі представлено також у докторській роботі Я. Казановича [10]. Автори моделі здебільшого використовували статистичні методи їх дослідження з застосуванням комп'ютерних експериментів. У даному розділі та у роботі [87] наведено детальний математичний аналіз динаміки цих систем.

В даному розділі представлено математична теорія осциляторних мереж ПОВ. У випадку, коли всі ПО мають однакові власні частоти, встановлено умови, коли лише один з цих ПО виграє змагання. Цей переможець синхронізується з ЦО тоді, як усі інші ПО перебувають у протифазі до ЦО. ПОВ динаміка відповідає існуванню положення стійкої рівноваги у фазовому просторі редукованої системи у фазових різницях.

Використовуючи біфуркаційний аналіз та теорію збурень, ми показуємо, що у випадку неідентичних власних частот ПО систем може демонструвати як стаціонарні, так і коливні версії ПОВ режиму в залежності від співвідношень між параметрами системи. У стаціонарному режимі ПО–переможець працює майже у фазі з ЦО тоді, як модуль різниці між іншими ПО та ЦО є близьким, але не рівним, до  $2\pi$ . У коливній версії ПОВ режиму існує єдиний ПО–переможець, котрий працює майже у фазі за ЦО (з дуже незначними відхиленнями) у той час, як фази інших ПО осцилюють далеко від фази ЦО

або ж бігають незалежно по колу у позитивному чи негативному напрямку. Ми показуємо, що поява коливного ПОВ режиму обумовлена біфуркації *сідло-вузол на інваріантному торі* (SNIT), яка є узагальненням для вищих розмірностей добре відомої біфуркації *сідло-вузол на інваріантному циклі* (SNIC) (див. [122, 176]). Комп'ютерна симуляція для значної кількості різних параметрів підтверджує наші теоретичні результати [189, 3, 87].

### 7.2.2. Описання моделі з адаптацією

Система, яку ми розглядаємо, є узагальненням осциляторної моделі з центральним елементом, описаної у попередньому підрозділі. Ця система містить центральний осцилятор та набір з  $N$  периферичних осциляторів. ЦО взаємодіє з усіма ПО через пряму та зворотню взаємодію. ПО не зв'язані між собою. Динаміка системи описується наступними рівняннями:

$$\frac{d\theta_0}{dt} = \omega_0 + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N a_j f(\theta_j - \theta_0), \quad (7.26)$$

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + bg(\theta_0 - \theta_i), \quad i = 1, \dots, N, \quad (7.27)$$

$$\frac{d\omega_0}{dt} = \frac{\alpha}{N} \sum_{j=1}^N a_j f(\theta_j - \theta_0), \quad (7.28)$$

$$\frac{da_i}{dt} = \beta (-a_i + c + \gamma h(\theta_i - \theta_0)), \quad i = 1, \dots, N, \quad (7.29)$$

де  $(\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n, \omega_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{T}^{n+1} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  – змінні,  $\omega_i, i = 1, \dots, N, \alpha, \beta, \gamma, b, c$  – параметри. В системі (7.26)–(7.29)  $\theta_i$  є поточними фазами, а  $\omega_i$  є власними частотами осциляторів,  $a_i$  та  $b$  описують силу взаємодії між осциляторами. Ми також асоціюємо  $a_i$  з амплітудами периферичних осциляторів. Додатні значення сил взаємодії відповідають намаганням осциляторів до синхронізації, а негативні – до десинхронізації. Ми також припускаємо, що параметри  $\alpha, \beta, \gamma$  та  $c$  є завжди додатними.

Функції  $f, g, h$  є  $2\pi$ -періодичними та задовольняють наступним умовам:

$$f(x) = -f(-x), \quad f'(0) > 0 \quad f'(\pi) = 0, \quad (7.30)$$

$$g(x) = -g(-x), \quad g'(0) > 0, \quad g'(\pi) < 0, \quad (7.31)$$

$$h(x) = h(-x), \quad h(0) = 1, \quad h(\pi) = 0, \quad h'(0) = h'(\pi) = 0. \quad (7.32)$$

Отже функції  $f$  та  $g$  є парними, а функція  $h$  є непарною. З періодичності та непарності функцій  $f$  та  $g$  випливають також властивості  $f(0) = f(\pi) = g(0) = g(\pi) = 0$ . Ми припускаємо, що функції  $f(x)$ ,  $g(x)$  не мають інших нулів на інтервалі  $(0, \pi)$ . Ми також вимагаємо, що функція  $h(x)$  була монотонною на інтервалі  $[0, \pi]$  (а, отже, і на  $[-\pi, 0]$ ).

Система (7.26)–(7.29) є узагальненням попередньої моделі, побудованої на базі моделі Курамото фазових осциляторів, при введенні двох нових типів рівнянь: рівняння для адаптації власної частоти центрального осцилятора  $\omega_0$  та рівнянь для адаптації амплітуд  $a_i$ . Значення рівняння (7.28) стає більш прозорим, якщо його переписати у вигляді:

$$\frac{d\omega_0}{dt} = \alpha \left( \frac{d\theta_0}{dt} - \omega_0 \right).$$

Відповідно цьому рівнянню власна частота ЦО адаптується у напрямку поточної частоти. Параметр  $\alpha$  контролює швидкість адаптації.

Значення рівнянь (7.29) полягає у тому, що відбувається резонансне збільшення амплітуди коливань  $i$ -го ПО до рівня  $c + \gamma$ , якщо він працює у фазі з центральним, у іншому випадку ця амплітуда зменшується до рівня  $c$ . Параметр  $\beta$  контролює швидкість адаптації амплітуди.

Система (7.26)–(7.29) є подібною до системи, описаної у попередньому розділі, створеної з метою організації конкуренції між ПО за синхронізацію з ЦО таким чином, що у типовому випадку лише один осцилятор може виграти це змагання. Ми покажемо, що така ситуація можлива у випадку  $b < 0$ . Інші

типи динаміки, включаючи мультистабільність та хаотичні режими, є також можливою в залежності від значень інших параметрів.

Два типи динаміки можуть бути асоційованими з ПОВ режимом в системі (7.26)–(7.29). У стаціонарному випадку ми можемо сказати, що  $i$ -тий ПО виграє змагання, якщо він є єдиним ПО, що має амплітуду, яка асимптотично прямує до  $c + \gamma$ , у той час як амплітуди інших ПО дорівнюють  $c$ . У нестаціонарному випадку амплітуди ПО вже не є постійними. Ми вважатимемо, що  $i$ -тий ПО виграє змагання, якщо амплітуда  $a_i$  цього осцилятора асимптотично сконцентрована у області, що перевищує значення  $c + \gamma - \delta$  у той час, як амплітуди інших ПО  $a_j$ ,  $j \neq i$ , змінюються в області нижче значення  $c + \delta$ , де  $\delta$  є малим параметром. Нашою метою є знаходження умов існування стаціонарних та нестаціонарних ПОВ режимів. Для цього ми спочатку детально розглянемо систему (7.26)–(7.29) у випадку, коли ПО є ідентичними ( $\omega_i = \omega$ ), а потім, збурюючи частоти дану та накладаючи додаткові умови на функції зв'язків, будемо вивчити випадок неідентичних ПО.

Деякі результати відносно системи (7.26)–(7.29) можуть бути отриманими у випадку більш загальних функцій зв'язку при виконанні лише умов (7.30)–(7.32). Більш тонкі та складні результати вимагають специфікації функцій  $f$ ,  $g$ ,  $h$ . У цьому випадку ми будемо використовувати наступні типи функцій:

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{|x - \pi|^\nu}{\pi^{\nu-1}}\right), & x \in [0, \pi], \\ -\sin\left(\frac{|x + \pi|^\nu}{\pi^{\nu-1}}\right), & x \in [-\pi, 0], \end{cases} \quad (7.33)$$

$$g(x) = \sin x, \quad (7.34)$$

$$h(x) = \begin{cases} \left(\frac{\mu^2 - x^2}{\mu^2}\right)^\sigma, & |x| < \mu, \\ 0, & \mu \leq |x| \leq \pi, \end{cases} \quad (7.35)$$

з параметрами  $\nu > 1$ ,  $\sigma \gg 1$ ,  $\mu \in (0, \pi)$ . Графіки функцій  $f$  та  $h$  зображені на рис. 8.40 для кількох різних значень параметрів.

Функція  $f(x)$  має простий максимум на інтервалі  $(0, \pi)$  і симетричний

мінімум на  $(-\pi, 0)$  такі, що

$$x_{\max} = -x_{\min} = \pi (1 - 2^{-1/\nu}), \quad f(x_{\max}) = -f(x_{\min}) = 1$$

та

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} x_{\max} = 0.$$

Таким чином, збільшуючи значення параметру  $\nu$ , можна неперервно рухати точку максимуму (та, відповідно, мінімуму) від  $\pi/2$  (та, відповідно, від  $-\pi/2$ ) до нуля (див. рис. 8.40(a)). Параметр  $\nu$  також описує нахил функції  $f$  у нульовій точці:

$$f'(0) = \nu.$$

Легко переконатись у тому, що  $f'(\pi) = 0$  для  $\nu > 1$ , що підтверджує виконання однієї з умов (7.30).

Параметр  $\sigma$  контролює "ширину" функції  $h$ . Збільшення параметру  $\sigma$  робить тоншим та гострішим пік функції  $h(0)$  (див. рис. 8.40(b)). Нижче ми покажемо, як зміни значень параметрів  $\nu$  та  $\sigma$  впливають на появу та існування різних ПОВ режимів.

Як і в попередніх розділах, для зручності досліджень ми зафіксуємо в нулі фазу центрального осцилятора. Використовуючи фазові різниці

$$\varphi_i = \theta_i - \theta_0, \quad i = 1, \dots, N, \quad (7.36)$$

зведемо систему (7.26)–(7.29) до наступної:

$$\frac{d\varphi_i}{dt} = \omega_i - \omega_0 - bg(\varphi_i) - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N a_j f(\varphi_j), \quad i = 1, \dots, N, \quad (7.37)$$

$$\frac{d\omega_0}{dt} = \frac{\alpha}{N} \sum_{j=1}^N a_j f(\varphi_j), \quad (7.38)$$

$$\frac{da_i}{dt} = \beta (-a_i + c + \gamma h(\varphi_i)), \quad i = 1, \dots, N. \quad (7.39)$$

Дана система буде основним об'єктом нашого дослідження, але остаточні висновки ми будемо робити у термінах оригінальної системи.

### 7.2.3. Ідентичні периферичні осцилятори

Розглянемо симетричний випадок *рівних власних частот* периферичних осциляторів:

$$\omega_i = \omega, \quad i = 1, \dots, N. \quad (7.40)$$

Тоді система (7.37)–(7.39) приймає вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_i}{dt} &= \omega - \omega_0 - bg(\varphi_i) - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N a_j f(\varphi_j), \quad i = 1, \dots, N \\ \frac{d\omega_0}{dt} &= \frac{\alpha}{N} \sum_{j=1}^N a_j f(\varphi_j), \\ \frac{da_i}{dt} &= \beta (-a_i + c + \gamma h(\varphi_i)), \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (7.41)$$

Система (7.41) має симетрію перестановок  $\mathbf{S}_N$ : перестановки будь-яких пар змінних  $(\varphi_i, a_i)$  та  $(\varphi_j, a_j)$  не змінить властивості системи. Введемо скорочення. Позначимо:

$$\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_N), \quad a = (a_1, \dots, a_N),$$

$$\Phi_k := (\underbrace{0, \dots, 0}_k, \underbrace{\pi, \dots, \pi}_{N-k}), \quad k = 0, \dots, N,$$

$$\Psi_k = (\underbrace{c + \gamma, \dots, c + \gamma}_k, \underbrace{c, \dots, c}_{N-k}), \quad k = 0, \dots, N.$$

Використовуючи ці позначення, сформулюємо наступне твердження.

**Лема 7.2.1.** *При виконанні умов (7.30)–(7.32) система (7.41) має лише наступні положення рівноваги:*

$$P_k = (\Phi, \omega_0, a) = (\Phi_k, \omega, \Psi_k), \quad k = 0, \dots, N. \quad (7.42)$$

**Доведення.** Потрібно розв'язати алгебраїчну систему

$$\begin{aligned} \omega - \omega_0 - bg(\varphi_i) - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N a_j f(\varphi_j) &= 0, \quad i = 1, \dots, N \\ \sum_{j=1}^N a_j f(\varphi_j) &= 0, \\ -a_i + c + \gamma h(\varphi_i) &= 0, \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (7.43)$$

утворену з рівності нулю правих частин системи (7.41). Легко переконатись, що точки (7.42) є розв'язками такої алгебраїчної системи (7.43). Припустимо існування інших розв'язків цієї системи, та використовуючи припущення (7.30)–(7.32), отримуємо протиріччя. Переконаємось у цьому. Підставляючи  $(N + 1)$ -й рядок системи у попередні  $N$  та прирівнюючи їх між собою отримуємо вираз:

$$g(\varphi_1) = g(\varphi_2) = \dots = g(\varphi_N).$$

Припустимо, що існує точка  $\bar{P}_k = (\bar{\Phi}, \bar{\omega}_0, \bar{a})$ , що задовольняє останню рівність і при цьому  $\bar{\varphi}_i \neq 0$  та  $\bar{\varphi}_i \neq \pi$ . З вимоги рівності нулю функції  $g(x)$  лише у точках  $0, \pi$  на періоді та її непарності виливає що всі координати  $\bar{\varphi}_i$  належать або  $(0, \pi)$  або  $(-\pi, 0)$ . Припустимо, що всі  $\bar{\varphi}_i \in (0, \pi)$  (у другому випадку доведення аналогічне). Оскільки за припущенням  $c > 0$  та згідно з властивостей функції  $h$  випливає, що  $h(x) \geq 0$ , то згідно останнім  $N$  рівнянням системи (7.43)  $\bar{a}_i = c + \gamma h(\bar{\varphi}_i) \geq c > 0$ . Також з властивостей функції  $f$  випливає, що  $f(\bar{\varphi}_i) > 0$ ,  $i = 1, \dots, N$ , коли  $\bar{\varphi}_i \in (0, \pi)$ . Використовуючи останні нерівності отримуємо, для точки  $\bar{P}_k$  повинна виконуватись нерівність

$$\sum_{j=1}^N \bar{a}_j f(\bar{\varphi}_j) > 0,$$

що протирічить  $(N + 1)$ -му рівнянню системи (7.43).  $\square$



Лема 7.2.1 стверджує, що система у різницях ідентичних осциляторів має лише  $2^N$  особливих точок  $P_k$ , що відповідають різним значенням  $k$  периферичних осциляторів, які одночасно синхронізовані з центральним. Для кожного фіксованого  $k \in C_N^k$  симетричних точок  $P_k$ , чиє існування зумовлено симетрією перестановки. Точка  $P_1$  відповідає синхронізації фаз ЦО лише з ПО, коли інші ПО є у протифазі до ЦО. Цей випадок можна розглядати як ПОВ процедуру, коли один ПО виграє змагання за синхронізацію з ПО. Синхронізований периферичний осцилятор називається *переможцем* в той час, як інші ПО є *невдахами*.

Наступна твердження опише стійкість положень рівноваги з Лемми 7.2.1.

**Теорема 7.2.1.** Система у різницях (7.37)–(7.39) для ідентичних периферичних осциляторів може мати або стійке положення рівноваги (повна синхронізація) для  $b > 0$  або  $N$  стійких положень рівноваги  $P_1$  (ПОВ процедура) разом з одним стійким положення рівноваги  $P_0$  (відсутність ПО–переможців) для  $b < 0$ . Інші  $2^N - N - 2$  положень рівноваги  $P_k$ ,  $k = 2, \dots, N - 1$ , є нестійкими точками (сідлами) для будь-яких значень параметрів. Точка  $P_N$  є стійкою, якщо  $N \geq 2$  та  $b > 0$ .

Положення рівноваги  $P_1$  є стійкою, якщо

$$b < 0, \quad (c + \gamma)f'(0) + Nbg'(0) > 0. \quad (7.44)$$

**Доведення** цієї теореми неведене у Додатку В.12 (див. стор. 403).

Теорема 7.2.1 описує структуру фазового простору для системи ідентичних фазових осциляторів з адаптацією (7.41). Теорема показує, що у випадку  $b > 0$  (тобто, коли і центральний, і периферичний осцилятори діють один на одного притягуючим чином) ситуація є досить простою: система має лише один аттрактор, який відповідає повній синхронізації всіх ПО з ЦО. У випадку  $b < 0$  ситуація є небагато цікавішою. У цьому випадку весь фазовий простір розділяється на  $N + 1$  басейнів притягання  $N$  симетричних стійких ПОВ точок  $P_1$  та одної стійкої точки, яка відповідає ситуації антифази кожного ПО з ЦО. Всі режими  $P_k$ ,  $k = 2, \dots, N - 1$ , які відповідають синхронізації більше одного ПО з центральним, є нестійкими (точніше сідловими). Таким чином

може бути лише один переможець у боротьбі ПО за синхронізацію з ЦО або програють всі. Сідлові точки також відграють важливу роль при дослідженні динаміки системи. Зокрема, інваріантні многовиди  $W^u(P_k)$  та  $W^s(P_k)$  розділяють фазовий простір на області притягання атракторів. Знаючи, що частина власних значень кожного з сідел є додатною, можна зробити висновок, що розділяючими є многовиди сідел, у яких відштовхуючим є лише один напрямок. Отже, бар'єрними для системи є  $N$  многовидів  $W^s(P_{N-1})$ . Чисельні дослідження показують, що розділяючі поверхні мають дуже нетривіальну структуру.

Відмітимо, що Теорема 7.2.1 для функцій зв'язку загального вигляду (7.30)–(7.30). Звуження даних функцій до вигляду (7.33)–(7.35) у даному випадку не вимагається (але буде потрібно у подальшому для більш складної ситуації неідентичних осциляторів). Проте, для випадку (7.33)–(7.35), де  $f'(0) = \nu$  та  $g'(0) = 1$  умова стійкості ПОВ режимів  $P_1$  спроститься до наступної:  $-(c + \gamma)\nu/N < b < 0$ . З останнього виразу видно, що у випадку значної кількості периферичних осциляторів

$$N \geq -\frac{(c + \gamma)\nu}{b}$$

система не буде мати стійких ПОВ режимів. У цьому випадку єдиним атрактором буде режим без переможців.

Додатковий аналіз показує, що система (7.41) має біфуркацію Андронова–Хопфа у точці  $P_k$ , якщо  $\alpha(c + \gamma)f'(0) = 0$ . Біфуркація Андронова–Хопфа спричиняє виникнення стійких граничних циклів в околі положень рівноваги  $P_0$ ,  $P_1$  та  $P_N$  (які втратять свою стійкість після біфуркації). У випадку біфуркацій навколо інших  $P_k$  утворені цикли будуть мати сідловий тип. Також можлива вилкова біфуркація точок  $P_2, \dots, P_{n-1}$  при відповідних умовах. Але остання біфуркація змінює лише розмірність стійких та нестійких інваріантних многовидів даних сідлових точок і не змінює при цьому не може зробити ці точки стійкими.

Система (7.41) ідентичних осциляторів має інваріантний многовид  $\varphi_i = \varphi$ ,  $a_i = a$ ,  $i = 1, \dots, N$ , для будь-яких значень параметрів. Цей многовид відпо-

відає повній синхронізації. Динаміка системи на цьому многовиді описується трьох-вимірною системою (7.41) для  $N = 1$ . Ця система має два положення рівноваги  $(0, \omega, c + \gamma)$  та  $(\pi, \omega, c)$ , що відповідають синфазній та антифазній синхронізаціям центрального осцилятора з периферичним. Перша точка є стійкою, якщо  $(c + \gamma)f'(0) > -bg'(0)$ ,  $\alpha(c + \gamma)f'(0) > 0$ . Ці умови можуть бути виконаними як для додатних, так і для від'ємних значень параметру  $b$ . Друга точка є стійкою у двох напрямках, якщо  $b < 0$  та нейтральною у третьому напрямку (один власне значення цієї точки є нулем).

Відповідно до симетрії перестановок  $\mathbf{S}_N$  система (7.41) має також інваріантні многовиди  $\varphi_i = \varphi_j$ ,  $a_i = a_j$ ,  $i \neq j$ , що відповідають режиму, коли два осцилятори ( $i$ -й та  $j$ -й ПО) формують синхронний кластер. Подібним чином система може мати кластер  $k$  синхронних периферичних осциляторів для кожного  $k = 2, \dots, N$ .

**Зауваження.** Відмітимо, що результати Теорема 7.2.1 узгоджуються з попередніми результатами відносно моделі з центральним елементом (7.1), (7.2) зі сталою амплітудою осциляторів  $a_i(t) = a = \text{const}$  (без адаптації). Як було показано раніше, вказана модель має різні стійкі режими  $\Phi_k$ , що співіснують для різних  $k = 1, \dots, N$ . Додаткова умова  $f'(\pi) = 0$  забезпечує те, що стійкими серед вказаних є лише три режими: глобальна синхронізація  $\Phi_N$ , ПОВ-режим  $\Phi_1$  та режим без переможців  $\Phi_0$  (всі інші точки  $\Phi_k$  є сідлами для даної системи).

#### 7.2.4. Неідентичні периферичні осцилятори та стаціонарні розв'язки

У попередньому підрозділі ми описали динаміку редукованої системи (7.37)–(7.39) у випадку ідентичних периферичних осциляторів, показавши типівість для цієї моделі режимів *переможець отримує все*. Нашою подальшою метою є описання даної моделі у випадку, коли осцилятори не є ідентичними, тобто коли рівності  $\omega_i = \omega_j$  порушуються. Особливо важливим (з прикладної точки зору) є питання існування та модифікації режимів ПОВ при зміні параметрів  $\omega_i$ , а також біфуркації що призводять переходи від одного якісного стану системи до іншого. Надалі у даному розділі ми завжди припускаємо,

що параметр  $b < 0$ , що є природньою умовою для очікування виникнення ПОВ режимів.

Аналізуючи згадану систему, бачимо, що рівняння для сил зв'язків (7.39) є лінійним неоднорідним рівнянням, яке має розв'язок

$$a_i(t) = c + (a_i(t_0) - c) e^{-\beta(t-t_0)} + \beta\gamma e^{-\beta t} \int_{t_0}^t e^{\beta\tau} h(\varphi_i(\tau)) d\tau.$$

З умов, накладених на функцію  $h(x)$  випливає, що  $0 \leq h(x) \leq 1$ . Використовуючи останнє переконуємося, що

$$c + (a_i(t_0) - c) e^{-\beta(t-t_0)} \leq a_i(t) \leq c + \gamma + (a_i(t_0) - c - \gamma) e^{-\beta(t-t_0)}.$$

Дана нерівність дає можливість оцінити межі амплітуд зв'язків для великих значень часу.

**Лема 7.2.2.** *Для будь-яких  $\varepsilon > 0$  існує достатньо великий момент часу  $t_1$  такий, що для будь-яких  $t > t_1$  виконується*

$$c - \varepsilon \leq a_i(t) \leq c + \gamma + \varepsilon, \quad i = 1, \dots, N. \quad (7.45)$$

*Ця нерівність справджується для будь-яких початкових умов та значень параметрів.*

Отже бачимо, що верхня і нижня межі амплітуд  $a_i(t)$  системи неідентичних осциляторів співпадають з амплітудами переможця та переможеного системи ідентичних осциляторів. Оскільки при збуренні частот система природньо ускладнюється внаслідок руйнування симетрії, то у загальному випадку не можна очікувати стаціонарні режими на нескінченності. Але вказані обмеження полегшують подальше вивчення динаміки в системі в цілому.

Додаткову потрібну інформацію про систему можна отримати, застосовуючи теорію обмежених розв'язків диференціальних систем, наведену, зокрема у [5, 13, 67, 81]. Також відмітимо, що система (7.37)–(7.39) задана просторі  $\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^{N-1}$ , має частину фазвих змінних, а частину прямих. Крім того останні  $N$  рівнянь є лінійними. Ця система має подібну (з застережен-

нями) структуру до так званих *лінійних розширень динамічних систем на торої*, що широко досліджується київською школою диференціальних рівнянь [11, 13, 7, 12]. Враховуючи те, що у системі можна доволі точно описати тороїдальний інваріантний многовид розмірності  $N$ , використовуючи додаткові припущення до функцій адаптації, то в околі цього інваріантного многовиду можна ввести локальні координати, використовуючи, зокрема, результати робіт [11, 7, 83, 84]. Як буде показано далі, важливим для розуміння біфуркацій нестационарних станів *переможець отримує все*, є також виділення сім'ї однотипних  $(N - 1)$ -вимірних інваріантних тороїдальних многовидів та подальше дослідження динаміки як на самих многовидах, так і у їх околах.

Подальше дослідження почнемо з симетричного випадку усіх рівних частот  $\omega_i = \omega$ . У цьому випадку система має  $N$  різних симетричних положень рівноваги  $P_1$ , що є стійкими для деяких значень параметрів (Теорема 7.2.1). Щоб розрізнити ці точки, введемо наступне позначення

$$P_{1,l} = (\varphi_1, \dots, \varphi_N, \omega_0, a_1, \dots, a_N)$$

$$= (\pi, \dots, \pi, \underbrace{0}_l, \pi, \dots, \pi, \omega, c, \dots, c, \underbrace{c + \gamma}_{N+1+l}, c, \dots, c), \quad l = 1, \dots, N.$$

Збурення власних частот призводить до зміщення точок  $P_{1,l}$  у фазовому просторі. Таке збурення також руйнує  $\mathbf{S}_n$  симетрію цих точок (координати точок є не симетричні у загальному випадку), але воно не змінює стійкість вказаних точок, оскільки вони є гіперболічними. Позичимо через  $Q_l$  збурену точку  $P_{1,l}$  (збурене місце розташування точки  $P_{1,l}$ ), коли частота  $\omega_l = \omega + \Delta_l, l = 1, \dots, N$ , а  $\Delta_l$  є відносно малою:  $|\Delta_l| \leq |b|$ . Точка  $Q_l$  також описує режим *переможець отримує все*, коли  $l$ -тий периферичний осцилятор є переможцем.

У наступному твердженні описано стійкість різних несиметричних стаціонарних ПОВ режимів  $Q_l$  у випадку, коли функції  $f, g, h$  мають вигляд (7.30), (7.31), (7.32) з великим  $\nu$  та  $\mu < \pi/2$ , а також показано вплив ПО-переможця

на ЦО.

**Теорема 7.2.2.** Система у різницях (7.37)–(7.39) з функціями зв'язку (7.30)–(7.32) при достатньо великих значення параметру  $\nu$  функції  $f$  та малих збурення власних частот  $\omega_i = \omega + \Delta_i$ ,  $|\Delta_i| < |b|$ , має  $N$  положень рівноваги  $Q_l$ , що відповідають синхронізації  $l$ -того периферичного осцилятора з центральним осцилятором. У цьому випадку  $\omega_0 \approx \omega_l$ , тобто центральний осцилятор отримує частоту близьку до власної частоти периферичного осцилятора–переможця. Крім того, осцилятори переможець є когерентним з центральним осцилятором, у той час, як інші периферичні осцилятори є радикально некогерентними з ним.

Координати  $Q_l$  апроксимуються координатами точки

$$(\bar{\varphi}_1, \dots, \bar{\varphi}_{l-1}, \underbrace{0}_l, \bar{\varphi}_{l+1}, \dots, \bar{\varphi}_N, \omega_l, c, \dots, c, \underbrace{c + \gamma}_{N+1+l}, c, \dots, c), \quad (7.46)$$

де

$$\bar{\varphi}_i \approx \pi - \arcsin \left( \frac{\omega_i - \omega_l}{b} \right), \quad i \neq l.$$

Точка  $Q_l$  є стійкою, якщо

$$b < 0, \quad (c + \gamma)\nu + Nb > 0.$$

**Доведення** цієї теореми наведено у Додатку В.13 (див. стор. 409).

Наступною природньою та важливою є проблема дослідження властивостей системи (7.26)–(7.29) у випадку розширення власних частот осциляторів на більш широкий діапазон значень. Постає питання: чи збережуться режими динаміки *переможець отримує все* у випадку, коли стаціонарні ПОВ особливі точки редукованої системи зникнуть у результаті біфуркацій і якого вигляду набудуть ці режими у разі їх збурення? Природньо припустити, що у результаті біфуркацій появляться нові ПОВ режими, що будуть відповідати періодичним чи більш складним розв'язкам. Результати наступного підрозділу допоможуть описати певні глобальні біфуркації системи (7.37)–(7.39) на більш локальних інваріантних многовидах цієї системи.

### 7.2.5. SNIT біфуркація (сідло–вузол на інваріантному торі)

Ми розглянули два типи ПОВ режимів, кожен з яких є положенням рівноваги системи. У подальшому ми покажемо, що при збільшенні різниці  $|\omega_i - \omega_j|$  між фазовими частотами різних осциляторів будуть виникати якісні переходи до нових ПОВ режимів, які вже не будуть стаціонарними точками системи в різницях, а будуть описуватись періодичними чи квазі–періодичними траєкторіями. Як буде показано нижче для описання біфуркацій між ПОВ режимами, нам буде достатньо розглядати не усю систему, а деякий її підмноговид меншої розмірності. У даному підрозділі ми окремо викладемо біфуркаційну теорію, за допомогою якої у подальшому будемо описувати якісні переходи між осциляторними режимами у системі (7.37)–(7.39).

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{d\phi_i}{dt} = \mu_i + F_i(\phi_i), \quad i = 1, \dots, n, \quad (7.47)$$

де  $\phi_i \in \mathbb{S}^1$  — фазова змінна,  $\mu_i$  — параметри,  $F_i(\phi_i) \in C^1(\mathbb{S}^1)$  такі, що

$$\max_{\phi_i \in \mathbb{S}^1} F_i(\phi_i) > 0, \quad \min_{\phi_i \in \mathbb{S}^1} F_i(\phi_i) < 0, \quad F_i(\bar{\phi}) = 0 \implies F_i'(\bar{\phi}) \neq 0. \quad (7.48)$$

Система (7.47) задана на торі, тобто  $(\phi_1, \dots, \phi_n) \in \mathbb{T}^n$ , та складається з незалежних одне від одного рівнянь. Дана проста система є у певному розумінні аналогом нормальної форми для певної біфуркації, яку ми називаємо SNIT, та яка буде описана в подальшому. SNIT біфуркація є багато–вимірним узагальненням відомої одновимірної SNIC біфуркації, описання якої ми і почнемо.

*Біфуркація SNIC.* Розглянемо випадок  $n = 1$  системи (7.47), перепозначимо для простоти  $\phi_1 =: \phi$ ,  $F_1 =: F$  і отримаємо рівняння

$$\frac{d\phi}{dt} = \mu + F(\phi), \quad \phi \in \mathbb{S}^1. \quad (7.49)$$

Останнє рівняння можна вважати нормальною формою для SNIC біфуркації,

де SNIC є абрєвіатурою англійського словосполучення *saddle-node on invariant cycle*, що означає *сідло-вузол на інваріантному циклі*. Назву даної біфуркації запропонували Б. Ерментраут та Н. Копел [122], але відомою дана біфуркація була значно раніше ще у роботах О. Андронова та його учнів. Ідея її полягає у наступному. Рівняння задане на колі має праву частину таку, що існують дві особливі точки: притягуюча та відштовхуюча. Тобто система має чотири види траєкторій: дві згадані особливі точки та траєкторії що виходять з відштовхуючої точки і йдуть до притягуючої. Саме таку ситуацію описує рівняння (7.49) при  $\mu = 0$ . Враховуючи властивості функції  $F(\phi)$ , очевидно бачимо, що це рівняння має два положення рівноваги: стійке  $\check{\phi} \in (\phi_{\max}, \phi_{\min})$  (з  $F(\check{\phi}) = 0$ ,  $F'(\check{\phi}) < 0$ ) та нестійке  $\hat{\phi} \in (\phi_{\min}, \phi_{\max})$  (з  $F(\hat{\phi}) = 0$ ,  $F(\hat{\phi}) > 0$ ). Відбувається локально сідло-вузлова біфуркація. Зі зміною параметру стійка та нестійка точки наближаються одна до одної та зливаються у сідло-вузлову точку. Для рівняння (7.49) це може трапитись у двох випадках: коли  $\mu = \min_{\phi \in S^1} F(\phi)$  або  $\mu = \max_{\phi \in S^1} F(\phi)$ . Вимоги (7.48) накладені на функцію  $F$  задовольняють умовам існування сідло-вузлової біфуркації ( $d\phi/dt = \mu + \phi^2 + \mathcal{O}(\phi^3)$  в точках  $\phi_{\min}$  та  $\phi_{\max}$ ). Після злиття обидві точки  $\check{\phi}$ ,  $\hat{\phi}$  пропадають надаючи можливість фазовій точці вільно рухатись по колу в одному чи у іншому напрямку. Отже, локальна сідло-вузлова біфуркація є частиною глобальної SNIC біфуркації на колі. Така біфуркація може відбутись на замкнутому одно-вимірному контурі (многовиді) у просторі будь-якої розмірності при виконанні описаних вище умов. Для спрощення опису SNIC біфуркації можна використовувати будь-яку просту функцію, що задовольняє (7.48), наприклад  $F(\phi) = \sin \phi$ .

*Дво-вимірна SNIT біфуркація.* Далі опишемо узагальнення SNIC біфуркації на дво-вимірному торі  $\mathbb{T}^2$  для системи (7.47) при  $n = 2$ , тобто для системи

$$\frac{d\phi_1}{dt} = \mu_1 + F_1(\phi_1), \quad (7.50)$$

$$\frac{d\phi_2}{dt} = \mu_2 + F_2(\phi_2). \quad (7.51)$$



Будемо розглядати систему спочатку при  $\mu_1 = \mu_2 = 0$  і змінювати спочатку  $\mu_1$  потім  $\mu_2$ . Оскільки для описання біфуркації не важливо збільшувати чи зменшувати параметри, тому обидва будемо збільшувати. Фазові портрети для різних якісних ситуацій зображено на рис. 8.42. Відмітимо, що даний малюнок зображає ситуацію для дещо складнішої збуреної системи, де прямі замінені кривими (як у загальній ситуації), а позначення та описання малюнку адаптовані для пояснення біфуркаційних переходів на інваріантному многовиді у системі (7.37)–(7.39), де дво-вимірний тор є інваріантною множиною у фазовому просторі більшої розмірності (що буде розглядатись у наступному підрозділі). На рис. 8.41 показано біфуркаційну діаграму для системи (7.50), (7.51), де на структурно стійких областях цієї діаграми також поміщені схематичні фазові портрети на торі  $\mathbb{T}^2$ . У випадку  $\mu_1 = \mu_2 = 0$  система має лише чотири положення рівноваги: стійкий вузол  $N_s(\check{\phi}_1, \check{\phi}_2)$ , нестійкий вузол  $N_u(\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2)$  та дві сідлові точки  $S_1(\check{\phi}_1, \hat{\phi}_2)$ ,  $S_2(\hat{\phi}_1, \check{\phi}_2)$ , де  $F_i(\check{\phi}_i) = 0$ ,  $F_i(\hat{\phi}_i) = 0$ ,  $\check{\lambda}_i = F'_i(\check{\phi}_i) < 0$ ,  $\hat{\lambda}_i = F'_i(\hat{\phi}_i) > 0$ ,  $\check{\lambda}_i$ ,  $\hat{\lambda}_i$  — власні значення Якобіану системи,  $i = 1, 2$ . Тор  $\mathbb{T}^2$  розділяється на чотири частини одно-вимірними многовидами (сепаратрисами) системи  $W_s(S_i)$  та  $W_u(S_i)$ ,  $i = 1, 2$ . В силу розділеності системи дані інваріантні многовиди мають дуже просту структуру, а саме вони є прямими (якщо вважати фазовий простір площиною)  $W_s(S_1) : \phi_1 = \check{\phi}_1$ ,  $W_s(S_2) : \phi_2 = \check{\phi}_2$ ,  $W_u(S_1) : \phi_1 = \hat{\phi}_1$ ,  $W_u(S_2) : \phi_2 = \hat{\phi}_2$  (рис.8.42(a)). Оскільки фазовий простір є тором  $\mathbb{T}^2$ , то кожна описана пряма-інваріантний многовид є замкнутою траєкторією на цьому торі і вона є не гомологічною нулю. Кожне сідло  $S_i$  стоїть на перетині двох таких замкнених орбіт (інваріантних многовидів), дві траєкторії-напівмноговиди  $W_u(S_i)$  прямують до стійкого вузла  $N_s$  у двох протилежних напрямках, а два інші траєкторії-напівмноговиди  $W_s(S_i)$  прямують до сідла у протилежних напрямках від нестійкого вузла  $N_u$ . Збільшуючи або зменшуючи параметр  $\mu_1$  (при фіксованому  $\mu_2 = 0$ ) ми рухаємо одночасно сідло  $S_1$  та вузол  $N_s$  одне до одного вздовж многовиду  $W_u(S_1)$  і одночасно з такою ж швидкістю рухаємо нестійкий вузол  $N_u$  та сідло  $S_2$  вздовж  $W_s(S_2)$ . У момент коли  $\mu_1 = \min_{\phi_1} F_1(\phi_1) =: \bar{\mu}_1$  або  $\mu_1 = \max_{\phi_1} F_1(\phi_1) =: \bar{\bar{\mu}}_1$  відбудуться одночасно дві SNIC біфуркації: 1) точок  $S_1$  та  $N_s$  на інваріантному многовиді (колі)  $W_u(S_1)$  і 2) точок  $N_u$  та  $S_2$  на інваріантному многовиді  $W_s(S_2)$

(рис.8.42(b)). Точки  $\mu_1 = \bar{\mu}_1$  та  $\mu_1 = \bar{\bar{\mu}}_1$  є точками SNIC біфуркації. При подальшому зменшенні параметру  $\mu_1 < \bar{\mu}_1$  чи збільшенні  $\mu_1 > \bar{\bar{\mu}}_1$  ми отримуємо два граничних цикли. Граничний цикл  $LC_s$ , утворений на базі інваріантного многовиду  $W_u(S_1)$  є стійким, оскільки утворений після зникнення  $S_1$  та  $N_s$ , стійких у трансверсальному до  $W_u(S_1)$  напрямку (вздовж змінної  $\phi_2$ ). Граничний цикл  $LC_u$ , утворений на базі інваріантного многовиду  $W_s(S_2)$  є нестійким, оскільки утворений після зникнення  $N_u$  та  $S_2$ , нестійких у трансверсальному до  $W_s(S_2)$  напрямку (рис.8.42(c)). Отже, після біфуркації на торі  $\mathbb{T}^2$  утворились стійкий  $LC_s$  та нестійкий  $LC_u$  не гомологічні нулю граничні цикли, які розділяють тор на дві частини. Тепер зафіксуємо параметр  $\mu_2$  у для будь-якого значення після одночасних SNIC біфуркацій ( $\mu_1 < \bar{\mu}_1$  чи  $\mu_1 > \bar{\bar{\mu}}_1$ ) і будемо змінювати параметр  $\mu_2$ . При зміні останнього параметру два цикли будуть рухатись один до одного у тому чи іншому напрямку. При зменшенні параметру  $\mu_2$  і досягненні ним значення  $\mu_2 = \min_{\phi_2} F_2(\phi_2) =: \bar{\mu}_2$  або при його збільшенні і досягненні значення  $\mu_2 = \max_{\phi_2} F_2(\phi_2) =: \bar{\bar{\mu}}_2$  відбувається сідло-вузлова біфуркація двох циклів в результаті якої утворюється сідло-вузловий цикл  $LC_{sn}$ . Відмітимо, що даний цикл є напівстійким: всі траєкторії відштовхуються від однієї його сторони і прямують до іншої при збільшенні часу (рис.8.42(d)). Дво-вимірна динаміка в системі (7.50), (7.51) вздовж напрямку змінної  $\phi_2$  цілком аналогічна одновимірній динаміці підчас SNIC біфуркації в рівнянні (7.49). Після подальшого зменшення параметру  $\mu_2$  так, щоб  $\mu_2 < \bar{\mu}_2$  або його збільшення  $\mu_2 > \bar{\bar{\mu}}_2$ , відбудеться зникнення сідло-вузлового циклу  $SNC$  (рис.8.42(e)). Після зникнення граничного циклу ніщо не перешкоджає руху фазової точки у напрямку змінної  $\phi_2$ . Тобто, локальна відносно усього тору сідло-вузлова біфуркація циклів є глобальною для цього тору біфуркацію у тому розумінні, що вплив цієї біфуркації відчувається на усьому фазовому просторі. Ми називаємо цю біфуркацію **SNIT** як англійську аббревіатуру від *saddle-node on invariant torus*, тобто **сідло-вузол (циклів) на інваріантному торі**. Згідно теорії динаміки на дво-вимірному торі без особливостей можливі два варіанти 1) сім'я періодичних траєкторій, 2) весь тор замітається квазі-періодичною траєкторією [197, 11, 47]. Виконання першої чи другої ситуації залежить від співвідно-

шення середніх частот траєкторій (числа обертання), яка може бути раціональною чи іраціональною. При подальшій зміні параметрів після біфуркація можливе чергування ситуацій і утворення так званих *язиків Арнольда* [154, 47, 184].

Слід відзначити, що описана SNIT біфуркація має спільні риси з класичною сідловузловою біфуркацією циклів (fold bifurcation), яка може відбуватися на будь-якому дво-вимірному многовиді, в тому числі і на торі. Спільною рисою двох названих біфуркацій є наближення та зникнення стійкого та нестійкого циклів. Суттєвою відмінністю є те, що у випадку SNIT біфуркації обидва цикли є *гомотопічно нетривіальними* і ця біфуркація неможлива на площині  $\mathbb{R}^2$ . Також відмітимо, що SNIT біфуркація можлива на циліндрі  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ , коли цикли  $LC_s$ ,  $LC_u$  огортають циліндр вздовж кутової змінної.

Ми описали сценарій двох біфуркаційних переходів при зміні спочатку параметру Аналогічним чином отримуємо ту ж послідовність таких же біфуркацій при зміні спочатку параметру  $\mu_2$ , а потім  $\mu_1$ . Відмінність у останньому сценарії буде полягати у орієнтації граничних циклів у просторі (у першому сценарії обертання вздовж змінної  $\phi_1$ , у другому вздовж  $\phi_2$ ). Враховуючи просту форму системи (7.50), (7.51) та вище описану процедуру, можна повністю описати біфуркаційну діаграму для даної системи у площині параметрів. Вона буде складатись з чотирьох ліній SNIT біфуркацій:  $\mu_1 = \bar{\mu}_1$ ,  $\mu_1 = \bar{\bar{\mu}}_1$ ,  $\mu_2 = \bar{\mu}_2$  та  $\mu_2 = \bar{\bar{\mu}}_2$ , які перетинаються у чотирьох точках корозмірності два. На рис. 8.41 показано всі описані біфуркаційні лінії у просторі параметрів  $(\mu_1, \mu_2)$ . У трьох випадках структурної стійкості системи (між біфуркаціями) схематично зображені і фазові портрети на дво-вимірному торі. Інші шість фазових портретів можна легко зобразити, використовуючи існуючі малюнки та дзеркальну симетрії  $\phi_i \mapsto -\phi_i$ ,  $\phi_1 \mapsto \phi_2$  для відповідних випадків заміни параметрів  $\mu_i \rightarrow -\mu_i$ ,  $\mu_1 \rightarrow \mu_2$  (коли напрями/стрілки замінюються на протилежні у першому випадку, а горизонтальні (і близькі до них) траєкторіях замінюються вертикальними).

Оскільки рівняння (7.50) та (7.51) не зв'язані, то динаміку такої системи було описати досить просто та повністю. Виникає природне питання про динаміку зв'язаних, або, принаймні, слабо зв'язаних подібних систем. Така

динаміка є суттєво складнішою та вона описана у роботах К. Баесенс, Дж. Гукенхеймера, С. Кіма, Р. МакКі [47, 48, 49]. Для наших досліджень найбільш важливим є універсальність SNIT біфуркації двох циклів у дво-вимірному тороїдальному просторі, тобто можливість існування такої біфуркації для досить загального векторного поля на торі, коли параметри системи впливають на це поле не лише лінійним чином. Наведемо деякі загальні міркування. Припустимо, що на торі  $\mathbb{T}^2$  система має лише два гомологічно нетривіальних граничних цикли: стійкий  $LC_s$  та нестійкий  $LC_u$ . Припускаємо також, що система немає жодних положень рівноваги і та кі не будуть з'являтися при зміні параметру від поточного значення. Тоді можна відмітити кілька особливостей такої системи: 1) цикли  $LC_s$ ,  $LC_u$  топологічно еквівалентні циклам системи (7.50), (7.51), тобто циклам описаним прямими на умовній площині, 2) цикли  $LC_s$ ,  $LC_u$  не можуть існувати один без одного, оскільки існування атратора на торі (на відміну від площини) спричиняє існування репелера і навпаки, 3) збурення системи може розірвати один з циклів (подібно сідлово-зв'язній біфуркації) і призвести до квазі-періодичного обертання, але тоді, згідно попередньому пункту, таке збурення повинне розірвати і другий з існуючих циклів. Отже, SNIT біфуркація є одним з самих природних способів зникнення гомотопічно нетривіального циклу, що також показано у згаданих вище роботах. Також слід відмітити ситуацію, коли при зміні параметру зберігається лише один цикл, наприклад,  $LC_u$ , а на іншому ( $LC_s$ ) відбувається SNIC біфуркації, яка його розриває. Описана вище ситуація відповідає динаміці потоку Черрі [97, 252].

*Три-вимірна SNIT біфуркація.* Перейдемо до описання подібної біфуркації на три-вимірному торі. Розглянемо систему (7.47) для  $n = 3$ . Біфуркаційні переходи у даній системі зображено на рис. 8.43. У випадку коли  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$  система має вісім положень рівноваги: стійкий вузол  $N_s(\check{\phi}_1, \check{\phi}_2, \check{\phi}_3)$ , нестійкий вузол  $N_u(\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2, \hat{\phi}_3)$  та шість сідлових точок  $S_1(\check{\phi}_1, \check{\phi}_2, \hat{\phi}_3)$ ,  $S_2(\check{\phi}_1, \hat{\phi}_2, \check{\phi}_3)$ ,  $S_3(\hat{\phi}_1, \check{\phi}_2, \check{\phi}_3)$ ,  $S_4(\check{\phi}_1, \hat{\phi}_2, \hat{\phi}_3)$ ,  $S_5(\hat{\phi}_1, \check{\phi}_2, \hat{\phi}_3)$ ,  $S_6(\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2, \check{\phi}_3)$ , де  $F_i(\check{\phi}_i) = 0$ ,  $F_i(\hat{\phi}_i) = 0$ ,  $F'_i(\check{\phi}_i) < 0$ ,  $F'_i(\hat{\phi}_i) > 0$  (рис. 8.43(a)). Фіксуємо спочатку параметри  $\mu_2$ ,  $\mu_3$  та змінюючи  $\mu_1$  приходимо до біфуркаційної ситуації при  $\mu_1 = \min_{\phi_1} F_1(\phi_1) =: \bar{\mu}_1$  або  $\mu_1 = \max_{\phi_1} F_1(\phi_1) =: \bar{\bar{\mu}}_1$  (рис. 8.43(b)). Відбувається

одночасно чотири SNIC біфуркації на інваріантних многовидах сідел, які проходять уздовж змінної  $\phi_1$ . З подальшим збільшенням параметру  $\mu_1$  вказані інваріантні многовиди перетворюються на чотири гомологічно нетривіальні цикли, один з яких є стійким  $LC_s$ , один нестійкий  $LC_u$  та два сідлових  $LS_1, LS_2$  (рис. 8.43(c)). Цикл  $LC_s$  утворюється після зникнення  $N_s$  та  $S_3$ , цикл  $LC_u$  утворюється після зникнення  $N_u$  та  $S_4$ , цикли  $LS_1, LS_2$  утворюються після зникнення пар сідел (з різними розмірностями інваріантних многовидів)  $S_1, S_5$  та  $S_2, S_6$ , відповідно. Далі фіксуємо параметри  $\mu_1 < \bar{\mu}_1$  (чи  $\mu_1 > \bar{\mu}_1$ ),  $\mu_3 = 0$  та змінюємо  $\mu_2$ . При зміні цього параметру і досягненні значення  $\mu_2 = \min_{\phi_2} F_2(\phi_2) =: \bar{\mu}_2$  або  $\mu_2 = \max_{\phi_2} F_2(\phi_2) =: \bar{\bar{\mu}}_2$  відбувається одночасно дві SNIT біфуркації пари циклів  $LC_s, LS_1$  та іншої пари  $LC_u, LS_2$  (рис. 8.43(d)). При подальшій зміні параметру  $\mu_2 < \bar{\mu}_2$  (або  $\mu_2 > \bar{\bar{\mu}}_2$ ) утворюються дві інваріантні поверхні  $\phi_3 = \check{\phi}_3$  та  $\phi_3 = \hat{\phi}_3$ , які є повністю прохідними для траєкторій (рис. 8.43(e)). Вказані поверхні є очевидно площинами у три-вимірному кубі, що описує тривимірний тор  $\mathbb{T}^3$ , а у самому  $\mathbb{T}^3$  дані поверхні є дво-вимірними торами: стійким  $LT_s^2$  та нестійким  $LT_u^2$ . Стійкість торів  $LT_s^2$  та  $LT_u^2$  розуміється у трансверсальному до них напрямку вздовж змінної  $\phi_3$ . траєкторії всередині кожного з торів можуть бути періодичними чи квазі-періодичними в залежності від співвідношення між собою параметрів  $\mu_1, \mu_2$ . при подальшій фіксації параметрів  $\mu_1, \mu_2$  у положенні після останньої біфуркації, зміні останнього параметру та досягнення ним значень  $\mu_3 = \min_{\phi_3} F_3(\phi_3) =: \bar{\mu}_3$  або  $\mu_3 = \max_{\phi_3} F_3(\phi_3) =: \bar{\bar{\mu}}_3$  відбудеться біфуркація стійкого та нестійкого дво-вимірних торів  $LT_s^2$  та  $LT_u^2$  у фазовому просторі  $\mathbb{T}^3$  та утворення сідло-вузлового тору  $SNT^2$  (рис. 8.43(f)). Відмітимо, що тор  $SNT^2$  є напівстійким та він є перепорою для проходу траєкторій у напрямку  $\phi_3$ . При подальшій зміні параметру  $\mu_3 < \bar{\mu}_3$  (або  $\mu_3 > \bar{\bar{\mu}}_3$ ) сідло-вузловий тор пропаде роблячи весь фазовий простір  $\mathbb{T}^3$  прохідним для траєкторій. Після останньої біфуркації тор  $\mathbb{T}^3$  заповнений або дво-параметричною сім'єю періодичних траєкторій, або одно-параметричною сім'єю квазі-періодичних траєкторій, або сумішшю першого та другого в залежності від співвідношення середніх частот або номерів обертання (згідно теорії В. Арнольда). Біфуркація дво-вимірних торів у три-вимірному є цілком аналогічною SNIT

біфуркації двох циклів на дво-вимірному торі та є її природнім узагальненням.

Отже, був продемонстрований ланцюжок біфуркацій від існування положень рівноваги до граничних циклів, граничних торів і відсутності атракторів за схемою зміни  $\mu_1$ , потім  $\mu_2$ , потім  $\mu_3$ . Легко бачити, що та ж сама схема працює при будь-якій перестановці послідовностей зміни параметрів. Також, аналогічно випадку  $n = 2$ , можна описати біфуркаційний простір  $(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ . Даний простір розділяється шістьма площинами біфуркацій корозмірності один:  $\mu_1 = \bar{\mu}_1$ ,  $\mu_1 = \bar{\bar{\mu}}_1$ ,  $\mu_2 = \bar{\mu}_2$ ,  $\mu_2 = \bar{\bar{\mu}}_2$ ,  $\mu_3 = \bar{\mu}_3$ ,  $\mu_3 = \bar{\bar{\mu}}_3$ , які перетинаючись утворюють біфуркаційні прямі корозмірності два та біфуркаційні точки корозмірності три.

*Загальна SNIT біфуркація.* Ми описали конструктивно біфуркаційні переходи для системи (7.47) для випадків  $n = 1, 2$  та 3. Описання має індуктивний характер, при послідовній зміні параметрів від нуля відбуваються спочатку біфуркації з об'єктами менших розмірностей, потім біфуркації подібного типу з об'єктами на розмірності на одиницю більшими і так далі. Переходячи до систем (7.47) більшої розмірності можна побудувати такі ж ланцюжки біфуркацій і аналогічно повністю описати повну біфуркаційну поведінку для  $n$ -вимірної біфуркаційної системи. Проходячи аналогічно всі етапи послідовної зміни параметрів, у загальному випадку можемо сформулювати наступне твердження.

**Теорема 7.2.3.** *У системі диференціальних рівнянь (7.47) з параметрами  $\mu_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , та функціями  $F_i(\phi_i) \in C^1(\mathbb{S}^1)$ , що задовольняють умовами (7.48), відбувається сідло-вузлова біфуркація стійкого  $LT_s^{m-1}$  та нестійкого  $LT_u^{m-1}$   $(m - 1)$ -вимірних торів на  $m$ -вимірному торі  $LT^m$  для всіх  $m = 1, \dots, n$ , якщо параметри системи розподілені наступним чином:*

(i)  $m - 1$  параметрів задовольняють одній з умов

$$\mu_i < \min_{\phi_i \in \mathbb{S}^1} F_i(\phi_i) \quad \text{або} \quad \mu_i > \max_{\phi_i \in \mathbb{S}^1} F_i(\phi_i);$$

(ii)  $n - m$  параметрів такі, що

$$\min_{\phi_i \in \mathbb{S}^1} F_i(\phi_i) < \mu_i < \max_{\phi_i \in \mathbb{S}^1} F_i(\phi_i);$$

(iii) для останнього параметру одна з умов

$$\mu_i = \min_{\phi_i \in \mathbb{S}^1} F_i(\phi_i) \quad \text{abo} \quad \mu_i = \max_{\phi_i \in \mathbb{S}^1} F_i(\phi_i).$$

Відмітимо, що у формулюванні теореми ми вважаємо одно-вимірним тором коло, а нуль-вимірним тором точку. У випадку  $n = 1$  теорема описує SNIC біфуркацію на колі. У випадку  $n \geq 2$ ,  $m = 1$  теорема описує SNIC біфуркацію на одно-вимірному інваріантному замкнутому контурі у просторі більшої розмірності. У випадку  $m = n$  відбувається SNIT біфуркація максимальної розмірності, що робить прохідним для траєкторій увесь фазовий простір  $\mathbb{T}^n$ .

Наступним важливим питанням є універсальність SNIT біфуркації, тобто: яким чином, за яких умов і чи взагалі вона можлива для загальних систем

$$\frac{d\phi_i}{dt} = F_i(\phi_1, \dots, \phi_n, \mu), \quad i = 1, \dots, n,$$

при зміні параметру чи декількох параметрів? Іншими словами: чи виникає SNIT біфуркація у випадку, коли система не є розщепленою, як (7.47) і які умови для правих частин системи повинні виконуватись, щоб подібна біфуркація була можливою. Відповідь на ці питання є у роботах К. Баєсенс, Р. Мак-Кі [48, 49] для  $n = 2$ . Відповіді на подібні питання є у роботах А. Шенсіне [94, 95, 96] для три-вимірного випадку, але для систем без глобального самоз'єднання траєкторій на торі. У загальному випадку дане питання є доволі складним. У загальному випадку SNIT біфуркації відбуваються і системах загального порядку (і це буде продемонстровано далі). Але описання таких біфуркацій у загальному для довільних багато-вимірних систем є досить непростю проблемою, яка на даний момент досліджена не повністю. Відмітимо, що для можливості існування SNIT біфуркації повинні виконуватися принаймні наступні умови. Існування траєкторії, поверхні, гіперповерхні (за-

лежить від розмірностей системи та біфуркації) негомологічної нулю на торі. Це еквівалентно поняттю, що має сталу назву *global reinjection* (глобальне замикання на себе) у англійській літературі. Дана умова потрібна для існування тороїдального многовиду, меншого за фазовий тор. Другою необхідною умовою є існування стійкого та нестійкого циклів або торів однакової розмірності, що знаходились би на згаданій вище гіперповерхні. Також повинні виконуватись параметричні умови, що змусять зблизитись вказані тори (цикли) на поверхні більшої розмірності. Всі вказані вище умови є глобальними для системи, що робить відшукування та описання даної біфуркації складною у загальному випадку.

### 7.2.6. Нестационарні розв'язки у моделі з адаптацією

У підрозділах 7.2.3, 7.2.4 було розглянуто ситуації, коли ПОВ режими відповідають стаціонарним станам редукованої системи (7.37)–(7.39), коли значення власних частот є близькими між собою. Якщо ж власні частоти периферичних осциляторів розподілені в широкому діапазоні (коли принаймні деякі різниці частот перевищують певне граничне значення), то центральний осцилятор не має достатньої сили для фазового блокування всіх периферичних. Існування стаціонарних розв'язків, що мають динаміку ПОВ типу, у цьому випадку, стають неможливими. Тим не менше, головна властивість ПОВ режиму, коли лише один ПО працює у режимі близькому до синфазного з ЦО, у той час, як інші ПО знаходяться у антифазі, може зберігатись і у цьому випадку. Розглянемо розв'язки, змінні яких  $\varphi_l, \omega_0, a_1, \dots, a_N$  є близькими до констант: змінна  $\varphi_l$  є близькою до нуля, змінна  $\omega_0$  близька до  $\omega_l$ , змінна  $a_l$  варіюється трохи нижче рівня  $c + \gamma$ , а змінні  $a_i, i \neq l$ , варіюються трохи вище рівня  $c$ . Ці припущення разом з (7.33), (7.35) призводять до наступних наближень рівнянь для фаз  $\varphi_i$ :

$$\frac{d\varphi_i}{dt} = \Omega_i - bg(\varphi_i), \quad i \neq l, \quad (7.52)$$

де  $\Omega_i = \omega_i - \omega_l$ . Для кожного заданого  $l$  система (7.52) задає систему на торі  $\mathbb{T}_l^{N-1}$ . Відмітимо, що тор  $\mathbb{T}_l^{N-1}$  не є інваріантною множиною системи



(7.37)–(7.39), але він міститься дуже близько до  $(N - 1)$ -вимірному інваріантного тору  $\mathcal{M}_l^{N-1}$  цієї системи (який має більш складну структуру) у  $\mathbb{T}^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ . Враховуючи особливості системи при наведених обмеженнях, застосовуючи теорію усереднення можна "випрямити"  $\mathcal{M}_l^{N-1}$ , зводячи його до більш простого вигляду. Для детального дослідження системи у околі даного тороїдального многовиду зручним інструментом є також введення локальних координат у його околі та приведення системи до вигляду лінійних розширень динамічної системи на торі [11, 7, 83, 84]. Многовид  $\mathcal{M}_l^{N-1}$  є стійким у трансверсальних  $N + 2$  напрямках (що можна перевірити методами, які використовуються при доведенні Теорема 7.2.2), а локальна динаміка всередині цього многовиду є еквівалентною динаміці системи (7.52) на  $\mathbb{T}^{N-1}$ .

Згідно Теоремі 7.2.2 система має  $N$  різних ПОВ режимів, що задаються положеннями рівноваги з  $Q_l \in \mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^{N+1}$ ,  $l = 1, \dots, N$ . Було показано, що стійкість цих точок у трансверсальних напрямках  $a_1, \dots, a_N$  не залежить від власних частот осциляторів, а стійкість у напрямку  $\omega_0$  залежить лише від  $\omega_l$  (середня частота  $\omega_0(t)$  центрального осцилятора прямує до власної частоти переможця  $\omega_l$ ). Крім того, фазова змінна  $\varphi_l$  є також блокованою, що природним чином описує синхронізацію ПО–переможця з ЦО. Таким чином, природним є припущення, що подальша зміна лише власних частот може впливати на транзитивність траєкторій у частині  $(N - 1)$ -вимірному фазового простору  $\mathbb{T}^N \setminus \{\varphi_l\}$  внаслідок певних біфуркацій, не руйнуючи глобальної структури у трансверсальних напрямках. Без обмеження загальності упорядкуємо власні частоти периферичних осциляторів наступним чином:

$$\omega_1 \geq \omega_2 \geq \dots \geq \omega_N. \quad (7.53)$$

Послідовно розширюючи діапазон значень власних частот будемо відслідковувати біфуркації зміни, що призводять до розпаду старих та появи нових стаціонарних режимів і наскільки нові режими відповідають концепції *переможець отримує все*. Також важливим є питання мультистабільності різних режимів, оскільки у першопочатковому стані (при рівних власних частотах) система має  $N$  різних ПОВ режимів, кожен з яких може біфуркувати. На-

ступне твердження описує найпростішу з можливих біфуркацій при варіаціях  $\omega_i$ .

**Теорема 7.2.4.** *SNIC (сідло-вузол на інваріантному циклі) біфуркація відбувається у системі (7.37)–(7.39) як злиття стійкої особливої точки  $Q_l$  та сідлової точки  $S_i$ , коли*

$$\omega_l - \omega_N = |b|, \quad \text{але} \quad \omega_1 - \omega_l < |b|$$

чи коли

$$\omega_1 - \omega_l = |b|, \quad \text{але} \quad \omega_l - \omega_n < |b|.$$

Стійкий граничний цикл  $LC_l$  виникає вздовж одно-вимірного інваріантного многовиду сідла  $S_l$  з необмеженою координатою  $\varphi_N$  (чи  $\varphi_1$  у другому випадку) та обмеженими фазовими координатами  $\varphi_i$ ,  $i = 1, \dots, N - 1$  (чи  $\varphi_i$ ,  $i = 2, \dots, N$ , відповідно). Якщо  $\omega_1 - \omega_n = |b|$ , тоді SNIC біфуркації виникають одночасно з точками  $Q_1$  та  $Q_N$ , породжуючи два стійких граничних цикли  $LC_1$  та  $LC_N$ .

**Доведення.** Як було показано у Теоремі 7.2.2, існує  $N$  різних положень рівноваги  $Q_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , системи (7.37)–(7.39) з координатами, що наближено задаються формулою (7.46). Кожна координата  $\bar{\varphi}$ ,  $i \neq l$ , у цій формулі є одним з двох розв'язків системи  $b \sin \varphi_i = \omega_i - \omega_l$  також, що є близькими до  $\pi$ . Необхідною умовою існування відповідних положень рівноваги є умова:  $\max_{i \neq l} |(\omega_l - \omega_i)/b| \leq 1$ . Можна перевірити (у подібний спосіб, який був застосований до особливих точок  $Q_l$ ), що існує  $N - 1$  інших положень рівноваги  $S_{lj}$ ,  $j \neq l$ , що мають ті ж координати, що і  $Q_l$ , за винятком однієї координати  $\varphi_j = \tilde{\varphi}_j = \pi - \bar{\varphi}_j \approx \arcsin((\omega_j - \omega_l)/b)$ . Точка  $S_{lj}$  має той самий якобіан (8.25), що і  $Q_l$ , але з  $\tilde{\varphi}_j$  замість  $\bar{\varphi}_j$ . В умовах стійкості кожна точка  $S_{lj}$  має одне додатне власне значення  $\lambda_j = -b \cos(\tilde{\varphi}_j)$ . Останнє означає, що  $S_{lj}$  є стійкою точкою, що належить одно-вимірному нестійкому інваріантному многовиду  $W^u(S_{lj})$ . Власний вектор відповідного власного значення  $\lambda_j$  належить до координатної лінії  $\varphi_j$ . Це означає, що обидві гілки  $W^u(S_{lj})$  мають ті ж координати, як  $S_{lj}$  (та  $Q_l$ ), за винятком  $\varphi_j$  та ці гілки поширюються вздовж змінної

$\varphi_j$  (принаймні локально, як показано на рис. 8.42(a)). Дивергенція у трансверсальному напрямку до  $W^u(S_{l,j})$  вздовж  $\varphi_j$  є негативною (Якобіан показує, що  $W^u(S_{l,j})$  є стійким у трансверсальному напрямку), звідки випливає, що обидві гілки  $W^u(S_{l,j})$  досягають стійкої точки  $Q_l$  з двох протилежних сторін вздовж  $\varphi_j$ , формуючи замкнутий цикл. Локальна сідло–вузлова біфуркація точок  $Q_l$  та  $S_{l,j}$  (рис. 8.42(b)) є одночасно глобальною сідло–вузловою біфуркацією на інваріантному циклі (SNIC біфуркацією), яка призводить до виникнення стійкого граничного циклу (рис. 8.42(c)). Ця біфуркація відбувається лише за умови  $|(\omega_l - \omega_j)/b| = 1$  у точці  $\varphi_j = \pm\pi/2$ . Згідно упорядкування частот (7.53) SNIC біфуркація та зникнення  $Q_l$  може трапитись лише при умові  $j = 1$  або  $j = N$ . Перша (у сенсі неперервного руху значень власної частоти  $\omega_i$  від фіксованого значення  $\omega_l$ ) така біфуркація виникне при  $\omega_1 - \omega_N = |b|$  та  $l = 1$  чи  $l = N$ . Ця біфуркація відбувається одночасно з двома периферичними осциляторами, що пронумеровані першим та останнім у (7.53). Отже, маємо дві одночасні SNIC біфуркації з точками  $Q_l$  та  $S_{1,N}$  та  $Q_N$ ,  $S_{N,1}$ , де  $Q_1$  є периферичним осцилятором–переможцем з найбільшою власною частотою  $\omega_1$  та  $S_1 := S_{1,N}$  є відповідним сідлом з нестійким многовидом  $W^u(S_1)$  вздовж фазової змінної  $\varphi_N$  (те ж саме відносно  $Q_N$  та  $W^u(S_N)$ , де  $S_N := S_{N,1}$ ). У результаті біфуркацій утворюються стійкі цикли  $LC_1$ ,  $LC_N$ , де кожен цикл має необмежену (на торі) фазову змінну  $\varphi_N$  та  $\varphi_1$ , відповідно. Підсумовуючи вищезазначені міркування, отримує результати Теореми.  $\square$

Цикл  $LC_1$  є негомологічною нулю періодичною орбітою на торі  $\mathbb{T}^N$  у фазовому просторі, змінна  $\varphi_N$  циклу є необмеженою, у той час, як інші фазові змінні є обмеженими (те саме виконується для циклу  $LC_N$  та змінної  $\varphi_1$ ). SNIC біфуркації з положеннями рівноваги  $Q_1$ ,  $Q_N$  є не лише єдино можливими. Інші SNIC біфуркації у точці  $Q_l$  виникають, коли відстань  $\omega_l - \omega_N$  (чи коли відстань  $\omega_1 - \omega_l$ ) є рівною  $|b|$ . Такі біфуркації призводять до виникнення нових циклів  $LC_l$ ,  $l = 2, \dots, N-1$ , та вони зазвичай трапляються одночасно з більш складними біфуркаціями існуючих циклів  $LC_1$ ,  $LC_N$ , які згодом зникнуть. Фазові точки періодичної траєкторії  $LC_1$  крутиться у додатному напрямку вздовж  $\varphi_N$  з середньою швидкістю  $\widehat{\omega}_1 \in (\omega_1 - \omega_N - |b|, \omega_1 - \omega_N + |b|)$ . Подібним чином середня швидкість циклу  $LC_N$  є  $\widehat{\omega}_N \in (\omega_N - \omega_1 - |b|, \omega_N - \omega_1 + |b|)$

та обертання здійснюється у негативному напрямку вздовж  $\varphi_1$ . Амплітуди периферичних осциляторів, чії фази пробігають цикл  $LC_1$ , є обмеженими (згідно Лемі 7.2.2),  $a_1 \approx c + \gamma$ ,  $a_N$  коливається у малому околі вище значення  $c$  та всі інші амплітуди є приблизно рівними  $a_i = c$ . Інша SNIC біфуркація у точці  $Q_l$  виникає, коли дистанція  $\omega_l - \omega_l$  (чи  $\omega_1 - \omega_l$ ) є рівною  $|b|$ , у той час, як  $\omega_1 - \omega_l$  (відповідно  $\omega_l - \omega_N$ ) є меншою за  $|b|$ . SNIC біфуркація відбувається зі всіма точками  $Q_s$ ,  $s < l$  (чи з  $Q_s$ ,  $s > l$ , для  $\omega_1 - \omega_l = |b|$ ) перед тим, як вона трапиться з  $Q_l$ , оскільки  $\omega_s - \omega_N \geq \omega_l - \omega_N = |b|$ . Відмітимо, що SNIC біфуркація не змінює кількість ПОВ режимів, перетворюючи два зі стаціонарних у періодичні і залишаючи стаціонарними інші  $N - 2$ .

Крім граничних циклів з однією рухомою змінною  $\varphi_i$  ( $i \neq l$ ), нестаціонарні ПОВ режими можуть бути асоційованими з більш складними розв'язками, коли  $N \geq 3$  та існує декілька периферичних осциляторів (більше одного), чії змінні необмежено рухаються у додатному чи від'ємному напрямку. Опишемо появу таких режимів. Динаміку на багато-вимірному тороїдальному многовиді  $\mathcal{M}_l^{N-1}$ ,  $N \geq 3$ , можна адекватно описати за допомогою системи (7.52). Більш складні ПОВ режими (коли кілька фаз периферичного осцилятора рухаються по відношенню до фази центрального) виникають як у результаті біфуркації, що є природнім узагальненням SNIC біфуркації і яку ми називаємо SNIT — сідло-вузол на інваріантному торі (див попередній підрозділ). Аналогічно до SNIC біфуркації двох точок на одно-вимірному торі (циклі)  $\mathbb{T}^1 = \mathbb{S}^1$ , SNIT біфуркація є сідло-вузловою біфуркацією (складки) одно-вимірних циклів на дво-вимірному торі  $\mathbb{T}^2$  (що веде до повної транзитивності тору), чи біфуркації стійкого та сідлового дво-вимірних торів у фазовому просторі  $\mathbb{T}^3$ , або (у загальному випадку) до біфуркації стійкого та сідлового  $(m - 1)$ -вимірних торів на  $m$ -вимірному фазовому просторі  $\mathbb{T}^m$ . Аналогічно випадку нестаціонарних ПОВ режимів властивості функцій зв'язку  $f(x)$  та  $h(x)$  ((7.33) та (7.35), відповідно), значення яких збігаються з віссю абсцис майже на усьому періоді крім невеликого околу початку координат, спричиняють локалізацію стійких розв'язків редукованої системи на  $N$  різних інваріантних многовидах  $\mathcal{M}_l^{N-1} \in \mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^{N-1}$ ,  $l = 1, \dots, N$ . Трансверсальна стійкість кожного з многовидів  $\mathcal{M}_l^{N-1}$  не залежить від параметрів

власних частот, а лише від інших параметрів  $\alpha, \beta, \gamma, b, c$ . Можна припустити, що подальші варіації  $\omega_i$  не вплинуть на обмеження  $\varphi_l, a_l$ , що відповідають ПОВ концепції. Наступне твердження показує, яким чином змінюється структура ПОВ режимів при подальшому (після SNIC біфуркацій) розширенні розподілу частот.

**Теорема 7.2.5.** *У результаті SNIT (сідло-вузол на інваріантному торі) біфуркації пари стійкого  $LT_l^{m-1}$  та сідлового  $ST_l^{m-1}$   $(m-1)$ -вимірних торів виникає стійкий  $m$ -вимірний тор  $LT_l^m$ . Ця SNIT біфуркація відбувається для будь-якого числа  $m = 2, \dots, N-1$ , коли різні  $m-1$  значень  $|(\omega_l - \omega_i)/b| - 1, i \neq l$ , є додатними, одне таке значення є нульовим та  $N - m - 1$  значень є негативними.*

**Доведення** цієї теореми наведено у Додатку В.14 (див. стор. 412).

Слід відмітити, що як і у випадку SNIC біфуркації, коли фазова точка нововиниклого граничного циклу проводить більшу частину часу білі "привиду" сідло-вузла, так і при SNIT біфуркації відповідна координата буде сильно гальмуватись у околі "привиду" сідло-вузла циклів або торів.

Використовуючи попередні теореми, та певні додаткові міркування та перетворення, можна зробити остаточні висновки про структуру ПОВ режимів.

1. Система (7.26)–(7.29) має  $N$  ПОВ режимів, стійкість та існування яких не залежить від власних частот.
  2. Тип ПОВ режиму та біфуркації переходів від одних режимів до інших суттєво залежить від власних частот.
  3. Існують різні ПОВ режими в залежності від кількості периферичних ПО-невдах, кожен з яких може або стояти у протифазі до ЦО або рухатись по фазовому колу, більшу кількість часу знаходячись у протифазі.
  4. Середня частота центрального осцилятора адаптується до власної частоти осцилятора-переможця  $\omega_0(t) \rightarrow \omega_l, t \rightarrow \infty$ .
  5. Амплітуда ПО-переможця завжди близька до верхньої границі  $c + \gamma$ , у той час, як амплітуди інших ПО-невдах близькі до нижньої границі  $c$ .
- Описані властивості схематично проілюстровані на рис. 8.44.

### 7.2.7. Режим без переможців

Згідно Теореми 7.2.1 система (7.37)–(7.39) ідентичних осциляторів крім положень рівноваги  $P_1$ , що описують ПОВ режими, має також положення рівноваги  $P_0 = (\varphi_1, \dots, \varphi_N, \omega_0, a_1, \dots, a_N) = (\pi, \dots, \pi, \omega, c, \dots, c)$ , які відповідають режимам, коли всі ПО знаходяться у антифазі до ЦО (тобто, коли переможців не існує). На відміну від положень рівноваги  $P_1$  (які можуть бути асимптотично стійкими при  $b < 0$ ) точка  $P_0$  є стійкою у  $2N$  напрямках та є нейтральною вздовж останнього напрямку (згідно згаданої теореми). Нейтральним є напрямок  $P_0$  вздовж прямої лінії, що може бути описаною як одно-параметрична множина початкових значень, власної частоти центрального осцилятора  $\tilde{\omega}_0 = \omega_0(0)$ , як:

$$L(\tilde{\omega}_0) = \{(\varphi_1, \dots, \varphi_N, \omega_0, a_1, \dots, a_N) \in \mathbb{T}^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N : \varphi_i = \tilde{\varphi}, \omega_0 = \tilde{\omega}_0, a_i = c, i =$$

де

$$\tilde{\varphi} = \pi + g^{-1} \left( \frac{\omega - \tilde{\omega}_0}{b} \right), \quad g^{-1} \text{ є оберненою функцією до } g.$$

Відповідно до Лема 7.2.1 положення рівноваги є ізольованим. Однак, розглядаючи цю систему зі спеціальними функціями взаємодії (7.33)–(7.35), переконуємося, що  $d\varphi_i/dt \approx 0, d\omega_0/dt \approx 0, dh/dt = 0, i = 1, \dots, N$ , коли фазова точка належить до  $L(\tilde{\omega}_0)$  у малому околі  $P_0$ . У результаті комп'ютерна симуляція цієї системи "сприймає" точки з  $L(\tilde{\omega}_0)$  як особливі точки, що є нейтральними вздовж  $L$  та стійкими у інших напрямках.

Розглянемо систему з функціями (7.33)–(7.35) та збуреними частотами  $\omega_i = \omega + \Delta_i, i = 1, \dots, N$ . Збурена система тоді має нове положення рівноваги  $P_0(\omega_1, \dots, \omega_N)$ , що гладко рухається зі зміною власних частот у фазовому просторі, стартуючи з незбуреного стану  $P_0(\omega, \dots, \omega) = P_0$ . Збурення не змінюють амплітудні координати  $a_i = c$  у широкій області власних частот завдяки вибору функцій (7.33), (7.35). Комп'ютерна симуляція показує, що збурена точка  $P_0(\omega_1, \dots, \omega_N)$  залишається стійкою у  $2N$  напрямках та нейтральною у одному напрямку. Нейтральна лінія  $L$  точки  $P_0(\omega_1, \dots, \omega_N)$  рухається з цією точкою та повертається у фазовому просторі залежно від

розподілу частот. Координата  $\omega_0$  збуреної особливої точки приблизно рівна  $(\omega_{\max} + \omega_{\min})/2$ , тобто лише найшвидший та найповільніший периферичні осцилятори визначають середню частоту центрального у ситуації "без переможців". Існує декілька сценаріїв зникнення точки  $P_0(\omega_1, \dots, \omega_N)$ , що базуються на сідло-вузловій біфуркації цієї точки з іншою сідловою точкою (чи точками) залежно від розмірності системи та розподілу частот. У будь-якому випадку, область де існує згадане положення рівноваги, належить до області, що обмежується умовою  $\omega_{\max} - \omega_{\min} < 2|b|$ . Відповідно до (8.20) особливої точки  $P_0$  має  $N$  власних значень  $\lambda_2(P_0) = \dots = \lambda_{N+1}(P_0) = b$ . Збурення  $\omega_i$  приводить до (неоднорідного) спадання відповідних власних значень  $|\lambda_i(P_0(\omega_1, \dots, \omega_N))|$ ,  $i = 2, \dots, N+1$ , що також вказує на обмеження басейну притягання  $P_0(\omega_1, \dots, \omega_N)$ .

### 7.2.8. Мультистабільність та біфуркації режимів *переможець отримує все*

Використовуючи отримані вище результати, наведемо приклади характерних динамічних режимів системи (7.37)–(7.39) та їх біфуркацій в залежності від розподілу *власних частот* периферичних осциляторів.

1. *Ідентичні* власні частоти:  $\omega_i = \omega, i = 1, \dots, N$ . Система має  $N$   $\mathbf{S}_N$ -симетричних стійких положень рівноваги  $P_{1,i}$  з координатами (7.42).
2. *Неідентичні* власні частотами ПО, що задовольняють нерівності

$$\left| \frac{\omega_i - \omega_j}{b} \right| < 1, \quad i, j = 1, \dots, N \iff \max_{i \in \{1, \dots, N\}} \omega_i - \min_{i \in \{1, \dots, N\}} \omega_i < |b|.$$

У цьому випадку система має  $N$  стійких несиметричних положень рівноваги  $Q_l, l = 1, \dots, N$ , з координатами

$$\varphi_l \approx 0, \quad a_l \approx c + \gamma, \quad \omega_0 \approx \omega_l, \quad |\varphi_i - \pi| < \frac{\pi}{2}, \quad a_i \approx c, \quad i \neq l.$$

3. Власні частоти ПО задовольняють нерівності

$$\max_{i \in \{1, \dots, N\}} \omega_i - \min_{i \in \{1, \dots, N\}} \omega_i = |b|.$$

У цьому випадку одночасно з'являються дві сідло–вузлові біфуркації двох стійких точок  $Q_{i_{\max}}$ ,  $Q_{i_{\min}}$  з відповідними координатами  $\omega_{\max} = \max_i \omega_i$ ,  $\omega_{\min} = \min_i \omega_i$  та сідел  $S_{i_{\max}}$ ,  $S_{i_{\min}}$ . Сідло–вузлові точки також мають координати  $\varphi_{i_{\max}} = \pi/2$ ,  $\varphi_{i_{\min}} = \pi/2$ , відповідно. Більше ніж дві сідло–вузлові біфуркації можуть відбуватись одночасно, якщо більш ніж одна власна частота досягне того ж мінімального (максимального) значення  $\max_i \omega_i$  ( $\min_i \omega_i$ ). Описаний біфуркаційний перехід схематично зображено на рис. 8.42(а–с), рис. 8.43(а–с).

4. Принаймні одна пара власних частот задовольняє нерівності

$$\left| \frac{\omega_i - \omega_j}{b} \right| > 1 \iff \max_{i \in \{1, \dots, N\}} \omega_i - \min_{i \in \{1, \dots, N\}} \omega_i > |b|.$$

Це спричиняє зникнення точки  $Q_{i_{\max}}$  (чи  $Q_{i_{\min}}$ ) після сідло–вузлової біфуркації та виникнення нового стійкого циклу. Локальна сідло–вузлова біфуркація є частиною глобальної SNIC біфуркації, за допомогою якої граничний цикл виникає з одно–вимірного нестійкого інваріантного многовиду сідла  $S_{i_{\max}}$  (чи  $S_{i_{\min}}$ ). Виникнення граничного циклу є можливим, оскільки згаданий одно–вимірний многовид  $S_{i_{\max}}$  досягає відповідну стійку точку  $Q_{i_{\max}}$  вздовж координати  $\varphi_{i_{\max}}$ , що замикається на торі. Стійкі положення рівноваги  $Q_2, \dots, Q_{N-1}$  та два стійкі граничні цикли  $LC_1$ ,  $LC_N$  співіснують після цієї SNIC біфуркації. Система може мати до  $N - 1$  граничних циклів  $LC_i$ .

5. Перша SNIT біфуркація та поява дво–вимірних граничних торів  $LT_1^2$  (чи  $LT_N^2$ ) відбувається, коли  $|(\omega_1 - \omega_{N-1})/b| = 1$  (або коли  $|(\omega_2 - \omega_N)/b| = 1$ ). У цьому випадку стійкий граничний тор  $LT_1^2$  та стійкий граничний цикл  $LC_{N-1}$  виникають одночасно та існують при  $|(\omega_1 - \omega_{n-1})/b| > 1$  (або одночасно виникають граничний тор  $LT_N^2$  та стійкий граничний цикл



$LC_2$ ).

6. Подальше збільшення частотних різниць веде до появи нових пар SNIC та SNIT біфуркацій відповідно до Теорему 7.2.5 та при збільшенні розмірностей нових атракторів на одиницю ( $Q_i \mapsto LC_i, LC_i \mapsto LT_i^2, LC_i^{m-1} \mapsto LT_i^m, i = 3, \dots, N - 1$ ). Послідовності SNIC та SNIT біфуркацій, що приводять до згаданих переходів ( $Q_i \mapsto LT_i^{n-1}$ ) схематично зображені на дво-вимірному торі на рис. 8.42 та на три-вимірному торі на рис. 8.43.
7. У найбільш загальному випадку система має граничні тори  $LT_i^m, m = 0, \dots, N - 1$ , де  $LT_i^1 = LC_i$  є граничним циклом, а  $LT_i^0$  є положенням рівноваги. Система має мультистабільність  $N$  атракторів різних типів, що відповідають різнім режимам *переможець отримує все*. У кожному випадку частота центрального осцилятора адаптується до частоти обертового периферичного осцилятора.

Відповідно Лемі 7.2.2, амплітуда кожного осцилятора  $a_i(t)$  належить інтервалу  $[c, c + \gamma]$ . Амплітуда периферичного осцилятора-переможця  $a_l$  є близькою до значення  $c + \gamma$  чи осцилює зі зміною часу під вказаним бар'єром, але дуже до нього близько. Якщо  $|(\omega_l - \omega_i)/b| > 1$ , то амплітуди периферичних осциляторів-невдах  $a_i$  осцилюють вище бар'єрного значення  $c$  таким чином, що  $\max_{t > t_1} a_i(t)$  є значно меншим ніж  $c + \gamma$ . Значення  $\max_i a_i$  залежить від параметру  $\beta$  та  $|\omega_i - \omega_l/b|$ . Чисельне моделювання показало, що  $\max_i a_i$  зростає приблизно як  $\beta/(\beta + |\omega_i - \omega_l/b| + \tilde{\omega}_{il})$ , де  $\tilde{\omega}_{il}$  є константою.

Далі опишемо режими взаємодії центрального та трьох периферичних осциляторів (нетривіальний випадок найменшої розмірності). Всі можливі типи осциляторних режимів, залежних від розподілу власних частот периферичних осциляторів зображено на дво-параметричній біфуркаційній діаграмі рис. 8.45. Біфуркаційні лінії на діаграмі відповідають SNIC та SNIT біфуркаціям на інваріантному многовиді  $\mathcal{M}_l^2$  (див. вираз (7.52) та Теорему 7.2.5). Ці біфуркації також схематично зображені на рис. 8.42. Зміна з часом фазових різниць координат  $\varphi_i(t), i = 1, 2, 3$ , для всіх типів ПОВ режимів також зображена на рис. 6 роботи [87, Burylko, Kazanovich, Borisyuk]. Для трьох  $N = 3$  два

ПО–невдахи або знаходяться у точній антифазі до ЦО та ПО–переможця, зі збільшенням різниці частот вони починають спочатку слабо осцилювати навколо антифазного стану, а згодом і швидко оббігати коло, більшість часу залишаючись біля положення антифазі. Релаксаційність останнього нестационарного режиму спричинена сідло–вузловою біфуркацією і довгим стоянням фазової точки біля ”привиду” сідло–вузла. В залежності від різниці частот, ПО–невдахи можуть рухатись як у одному, так і у протилежних напрямках.

У роботах [87, 3, 189] також проведено детальний статистичний аналіз режимів *переможець отримує все* різних типів та режиму *без переможців*, проведений на основі кількох тисяч чисельних експериментів з випадковими розподілами власних частот та початкових змінних. Результати досліджень зображено, зокрема, на гістограмах 8–12 у роботі [87]. Даний аналіз повністю підтвердив аналітичні результати, викладені вище.

### 7.2.9. Інші моделі з керуючим елементом

Результати аналізу систем фазових осциляторів з центральним елементом дозволяють цілеспрямовано вибирати області параметрів при яких периферичні осцилятори конкурують за синхронізацію з центральним. Біфуркаційний аналіз дозволяє виявити у системі не лише стійкі кластери, а і гетероклінічні цикли, коли система довгий час знаходиться у майже стійкому стані біля одного об’єкту, потім швидко переходить до другого об’єкту і там потім довго залишається (траєкторія ”бігає” від одного сідла до іншого). Хаотичний режим важливий для неоднозначного сприйняття. Вибір параметрів моделі біля хаотичного об’єкту призводить до того, що вимагається доволі довгий час, щоб система перейшла у стійкий стан. Цим пояснюється тривалий час, що потрібен для виявлення цільового об’єкту, якщо він погано помітний на фоні інших об’єктів [74, 71, 85, 190, 87].

Виходячи з фізичної та біологічної мотивації розглядаються інші математичні моделі з керуючими та керованими елементами. Зокрема досліджувались колективні режими у зіркоподібних мережах з дискретним часом [248], зіркоподібних системах Стюарта–Ландау [136], рекурентних нейронних мережах [280, 281], різних осциляторних та нейронних мережах з кількома хабами

[195, 347, 134, 287, 233, 326]. Слід відмітити, що не залежно від складності індивідуальних динамік та способу взаємодії між елементами, зірко-подібна мережа має свої інваріантні властивості (залежні лише від графу взаємодії), що завжди впливають на формування кластерів, інваріантних множин та можуть призводити до ієрархічних структур колективної взаємодії.

## Обговорення

У більшій частині роботи було розглянуто мережі фазових осциляторів, що мають ті чи інші симетрії у структурі окремих вузлів мережі, архітектурі мережі та способів взаємодії між елементами. Порушення таких симетрій може миттєво призводити до руйнування певних інваріантних структур та виникнення нових типів колективних режимів (розділи 3, 5 та 7). Способи переходів від синхронізованого до десинхронного режимів через різні біфуркації подрібнення кластерів під час збурення власних частот осциляторів описано, зокрема у роботі [228]. Більш складні системи як, зокрема осциляторна модель з синаптичною пластичністю [226], можуть мати мультистабільність десинхронізації з синхронізацією, а також ієрархічну структуру середніх частот осциляторів. Дослідження біфуркацій систем *неідентичних* зв'язаних осциляторів є у загальному випадку доволі складною та слабо вивченою проблемою.

Відмітимо, що різноманітні моделі фазових осциляторів типу Курамото є найбільш простими динамічними системами, з одно-вимірними вузлами та без додаткових рівнянь, що задають взаємодію між елементами. Незважаючи на це, такі системи мають дуже широкий спектр колективної динаміки, що відповідає більшості важливих режимів у більш складних системах. При цьому системи типу Курамото є одними з найзручніших для аналітичного дослідження режимів колективної поведінки. Близькими до моделі Курамото є модель Вінфрі [337] та різні моделі фазових ротаторів, де система руху індивідуального елемента може мати складний математичний опис. Однією з таких систем є тета-модель Ерментраута-Копелл, що Слід відмітити, що модель Курамото є фазовою частиною комплексно-значної моделі *Стюа-*

*тра–Ландау* [310] та описує значну частину колективної динаміки останньої. Багато нових колективних режимів демонструє модель Курамото з інерцією [118, 313, 225], кожен осцилятор якої задається диференціальним рівнянням другого порядку.

Як було згадано у розділі 1, для дослідження колективної нейронної динаміки часто достатньо досліджувати лише фазову синхронізацію сигналів [277]. Останнє поріднює осциляторні моделі з моделями зв'язаних нейронів *Ходжкіна–Хакслі* [165], *ФіцХью–Нагумо* [133, 242], *Хіндмарш–Роуз* [164], *Моріс–Лекар* [238], *Рінзела* [273], *Іжікевіча* [176], *Цимбалюка–Калабріза* [107], *Термана–Рубіна* [278], *Вілсона–Кована* [336, 234] та іншими. Детально описання такого типу моделей можна знайти у моногорафіях [170, 176, 70, 124]. Зокрема, тата–модель Ерментраута–Копелл можна вважати певним переходом між осциляторними системами та більш складними нейронними. Основним методами дослідження таких моделей є теорія стійкості, теорія біфуркацій та різні чисельні методи.

Здебільшого знайдені та добре описані режими для простих осциляторних моделей виявляються згодом у тій чи іншій (можливо видозміненій) формі у складних фізичних, хімічних чи нейронних системах. Сказане вище найкраще демонструє явище химерних станів, існування яких виявлено у різноманітних, і часто досить складних природничих системах. Дослідження простіших моделей взаємодіючих елементів часто показує напрямок та дає інструменти для дослідження більш складних та загальних систем з подібними особливостями побудови мереж. Різноманітні осциляторні моделі типу Курамото несуть у собі великий потенціал та широкі можливості дослідження та описання явищ колективної взаємодії у багатьох галузях природознавства.

## Висновки

Дисертаційна робота присвячена дослідженню існування, стійкості та біфуркацій різних режимів колективної динаміки у моделях зв'язаних фазових осциляторів, що описуються системами диференціальних рівнянь з параметрами. Основні результати дисертаційної роботи можна сформулювати наступним чином:

- Запропоновано комплексний підхід до дослідження моделей зв'язаних фазових осциляторів, що задаються за допомогою різних мереж та типів взаємодії між індивідуальними динамічними об'єктами. Підхід полягає у виявленні можливих симетрій системи, виявленні та дослідженні інваріантних многовидів та інваріантних областей, дослідженні можливості редукції системи, що враховує симетрії, наявність інваріантних підпросторів, стійких кластерних режимів, ієрархічних структур, тощо. Досліджувався зв'язок між системами різної розмірності та системами, отриманими при термодинамічних граничних переходах. Дослідження ведуться шляхом накопичення інформації від простіших випадків (систем меншої розмірності, мереж з більшою кількістю симетрій, функцій зв'язків з меншою кількістю параметрів) до більш складних, з використанням теорії біфуркацій, теорії коливань, теорії збурень та теорії складності. При вивченні стійкості та біфуркацій колективних режимів застосовувалось поєднання аналітичних досліджень з чисельними експериментами та побудовою схематичних і біфуркаційних діаграм. Математичні моделі впроваджуються та досліджуються з ретельним урахуванням особливостей конкретних природничих явищ, а отримані

теоретичні результати знаходять зворотню природничу інтерпретацію, що узгоджується з експериментальними даними.

- Було описано існування і стійкість всіх режимів колективної динаміки для моделі глобально зв'язаних осциляторів з нелінійним зсувом у функції взаємодії. Було показано, що така система має режим повної синхронізації, дво-кластерні режими, граничні та гетероклінічні цикли, а також режим повної антифази з нульовим параметром порядку. Аналогічні результати отримано у випадках стандартної моделі Курамото та моделі Курамото–Сакагучі. Запропоновані методи доповнюють теорію Ватанабе–Строгатца при дослідженні біфуркацій на кластерних многовидах, де вказана теорії не діє. Проведено детальний біфуркаційний аналіз систем з квадратичним фазовим зсувом у функції взаємодії.
- Вивчалась узагальнена система глобально зв'язаних фазових осциляторів з дво-гармонічною функцією взаємодії. Описано структуру канонічних інваріантних областей та інваріантних многовидів для систем різної розмірності. Показано градієнтність систем з непарними функціями взаємодії та бездивергентність з парними. Знайдено та описано нові типи гетероклінічних біфуркацій для систем різних розмірностей. Проаналізовано стійкість та біфуркації режиму повільного перемикання між кластерами та режиму "змагання без переможців". Досліджувалась екстремальна чутливість до збурень власних частот неідентичних осциляторів. Показано, як ця чутливість пов'язана з існуванням сідло-вузлових/гетероклінічних біфуркацій.
- Досліджувалась модель зв'язаних осциляторів з притягуючими та відштовхуючими елементами, що може застосовуватись у соціології та описувати колективну взаємодію двох груп: конформістів (всі осцилятори прагнуть бути синхронізованими) та нонконформістів (осцилятори прагнуть знаходитись у глобальній антифазі). Для даної моделі доведено існування різних стійких режимів: режим антифазного протистояння двох груп, режим розмитого протистояння, некогерентний ре-

жим перемоги нонконформістів, мандруючі хвилі, ренегатні режими синхронізації одного нонконформіста з конформістами. Для маловимірних систем проведено біфуркаційний аналіз для узагальненої притягуюче-відштовхуючої мережі з фазовим зсувом у функції взаємодії. Показано, що система має фазово незамкнуті, періодичні, квазі-періодичні, гетероклінічні та хаотичні розв'язки.

- Доведено співіснування консервативної та дисипативної динамік у циркулянтних мережах фазових осциляторів з кососиметричною матрицею взаємодії. Показано, що співіснування таких режимів є наслідками часово-оборотної симетрії у системі. Доведено, що консервативні області відділяються від дисипативних за допомогою гетероклінічних циклів або багатовимірних множин таких циклів. Показано співіснування одно та дво-параметричних сімей граничних циклів з багатопараметричними сім'ями квазіперіодичних орбіт у консервативних областях. Показано яким чином відбувається параметричний перехід від консервативної до консервативно-дисипативної та, врешті, до повністю дисипативної системи. Знайдено перші інтеграли для бездивергентних систем з циркулянтним зв'язком. Для систем нескінченної кількості зв'язаних осциляторів на кільцевій мережі з кососиметричним циркулянтним зв'язком було формально виведене амплітудне рівняння в околі синхронного розв'язку, а також показано зв'язок цієї системи з нелінійним рівнянням Шрьодінгера.
- Досліджувалось явище "химерного стану" для систем нерозрізнюваних фазових осциляторів. Було запропоновано поняття "слабкого химерного стану". Було доведено, що система чотирьох осциляторів є найменшою можливою, яка має стійкий слабкий химерний стан. Було наведено побудови модульних осциляторних систем, що мають химерні стани гетероклінічного типу. Описано методи дослідження химерних станів маловимірних систем за допомогою їх редукцій до систем на інваріантних многовидах. Запропоновано метод біфуркаційного аналізу химерних станів за допомогою відшукування інваріантних многовидів, що від-

повідують певним симетріям мережі і взаємодії, і подальшій редукції загальної системи на дані інваріантні многовиди.

- Досліджувалась осциляторна модель з центральним елементом, що використовується для описання нейронних процесів зорового пошуку, уваги та пам'яті. Доведено твердження про стійкість положень рівноваги редукованої системи, що відповідають режимам боротьби периферичних осциляторів за синхронізацію з центральним. Показано наявність гетероклінічних циклів та консервативного хаосу у системах подібного типу. Була запропонована узагальнена система з центральним елементом та адаптацією. Було доведено, що дана система має стійкі режими "переможець отримує все" стаціонарних та нестаціонарних типів. Було показано, що для всіх таких режимів амплітуда осцилятора-переможця є суттєво більшою амплітуд інших периферичних осциляторів, а середня частота центрального осцилятора прямує до власної частоти периферичного осцилятора-переможця. Було знайдено новий тип біфуркацій: сідло-вузол на інваріантному торі, що відбувається на інваріантних тороїдальних многовидах моделі з адаптацією. Виявлено та описано новий вид біфуркації: сідло-вузол на інваріантному торі.



## Список використаних джерел

- [1] А.А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин. *Теория колебаний*. Наука, Москва, 1981.
- [2] О. Бурилко, Я. Казанович, Р. Борисюк. Анализ устойчивости режимов синхронизации в осцилляторной модели внимания. Конкуренция за синхронизацию. *Нейроинформатика, Сборник научных трудов*, 3:163–173, 2012.
- [3] Я. Казанович, О. Бурилко, Р. Борисюк. Победитель получает все в сети фазовых осцилляторов. *Нейроинформатика. Сборник научных трудов*, 2:82–90, 2017.
- [4] Н.Н. Баутин, Е.А. Леонтович. *Методы и приемы качественного исследования систем на плоскости*. Наука, Москва, 1976.
- [5] Ю.Л. Далецкий, М.Г. Крейн. *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве*. Наука, 1970.
- [6] А.А. Бойчук, А.А. Покутний. Теория бифуркаций уравнения Шрёдингера. *Дифференциальные уравнения*, 53(7):855–863, 2017.
- [7] А.М. Самойленко. О некоторых проблемах теории возмущения гладких инвариантных торов динамических систем. *Укр. Мат. Журн.*, 46(12):1665–1699, 1994.
- [8] В.Ю. Слюсарчук. *Нестійкість розв'язків еволюційних рівнянь*. НУВГП, Рівне, 2004.
- [9] В.Д. Кошманенко. *Спектральна теорія динамічних систем конфлікту*. Наукова Думка, 2016.

- [10] Я.Б. Казанович. Осцилляторные нейросетевые модели когнитивных функций мозга. *Диссертация на соискание ученой степени доктора физико–математических наук по специальности Биофизика*, 2018.
- [11] А.М. Самойленко. *Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы*. Наука, Москва, 1987.
- [12] А.М. Самойленко, А. А. Бурилко, И. Н. Грод. Модули непрерывности производных инвариантных торов линейных расширений динамических систем. *Дифференциальные Уравнения*, 36:103–113, 2000.
- [13] Ю.А. Митропольский, А.М.Самойленко, В.Л.Кулик. *Исследование дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова*. Наукова Думка, 1990.
- [14] D.M. Abrams and S.H. Strogatz. Chimera states for coupled oscillators. *Phys. Rev. Lett.*, 93:174102, 2004.
- [15] D.M. Abrams and S.H. Strogatz. Chimera states in a ring of nonlocally coupled oscillators. *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, 16(1):21–37, 2006.
- [16] J. A. Acebrón, L. L. Bonilla, C. J. Pérez Vicente, F. Ritort, and R. Spigler. The Kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena. *Rev. Mod. Phys.*, 77:137–185, 2005.
- [17] Special Issue Editors V. Afraimovich, P. Ashwin, and V. Kirk. Robust heteroclinic and switching dynamics. *Dynamical Systems*, 25(3):285–286, 2010.
- [18] V. Afraimovich, I. Tristan, R. Huerta, and M.I. Rabinovich. Winnerless competition principle and prediction of the transient dynamics in a lotka-volterra model. *Chaos*, 8(4):043103, 2008.
- [19] M.A.D. Aguiar. Is there switching for replicator dynamics and bimatrix games? *Physica D*, 240:1475–1488, 2011.
- [20] M. Akbari. The bifurcation analysis of the Schrödinger equation with power law nonlinearity. *Electronic Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 5(2):260–265, 2017.
- [21] G. E. Alexander, M. R. DeLong, and P. L. Strick. Parallel organization of functionally segregated circuits linking basal ganglia and cortex. *Annu. Rev. Neurosci.*, 9:357–381, 1986.

- [22] A. Andronov and E. Leontovich. Some cases of the dependence of the limit cycles upon parameters. *Uchen. Zap. Gork. Univ.*, 6:3–24, 1939. In Russian.
- [23] V. Anishchenko and G. Strelkova. Chimera structures in the ensembles of nonlocally coupled chaotic oscillators. *Radiophysics and Quantum Electronics*, 61:659–671, 2019.
- [24] A. Arenas, A. Diaz-Guilera, J. Kurths, Y. Moreno, and C. Zhou. Synchronization in complex networks. *Physics Reports*, 469(3):93 – 153, 2008.
- [25] V.I. Arnold. *Sur la topologie des écoulements stationnaires des fluides parfaits*, volume 2, chapter Vladimir I. Arnold – Collected Works, pages 15–18. Springer, 1965.
- [26] V.I. Arnold. Sur la topologie des écoulements stationnaires des fluides parfaits. *Acad C. R. Sci. Paris*, 261:17–20, 1965.
- [27] V.I. Arnold. Reversible systems. *Nonlinear and Turbulent Processes in Physics*, 3:1161–1174, 1984. Nonlinear and turbulent processes in physics; Proceedings of the Second International Workshop, Kiev, Ukrainian SSR, October 10-25, 1983. Volume 3 (A85-28566 12-70). Chur, Switzerland and New York, Harwood Academic Publishers.
- [28] V.I. Arnold, V. S. Afrajmovich, Yu.S. Il'yashenko, and L. P. Shil'nikov. *Bifurcation Theory and Catastrophe Theory*. Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [29] V.I. Arnold and M.B. Sevryuk. Oscillations and bifurcations in reversible systems. *In: Nonlinear Phenomena in Plasma Physics and Hydrodynamics*, ed.R. Z. Sagdeev, Mir, Moscow, pages 31–64, 1986.
- [30] P. Ashwin, C. Bick, and O. Burylko. Identical phase oscillator networks: Bifurcations, symmetry and reversibility for generalized coupling. *Frontiers in Applied Mathematics and Statistics*, 2:7, 2016.
- [31] P. Ashwin and J. Borresen. Encoding via conjugate symmetries of slow oscillations for globally coupled oscillators. *Phys. Rev. E*, 70(2):026203, 2004.
- [32] P. Ashwin and O. Burylko. Weak chimeras in minimal networks of coupled phase oscillators. *Chaos*, 25(1):013106, 2015.
- [33] P. Ashwin, O. Burylko, and Y. Maistrenko. Bifurcation to heteroclinic cycles and sensitivity in three and four coupled phase oscillators. *Physica D*, 237(4):454–466, 2008.

- [34] P. Ashwin, O. Burylko, Y. Maistrenko, and O. Popovych. Extreme sensitivity to detuning for globally coupled phase oscillators. *Phys. Rev. Lett.*, 96:054102, 2006.
- [35] P. Ashwin, S. Coombes, and R. Nicks. Mathematical frameworks for oscillatory network dynamics in neuroscience. *Journal of Mathematical Neuroscience*, 6(2):1–92, 2016.
- [36] P. Ashwin and M. Field. Heteroclinic networks in coupled cell systems. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 148(2):107–143, 1999.
- [37] P. Ashwin, G.P. King, and J. W. Swift. Three identical oscillators with symmetric coupling. *Nonlinearity*, 3(3):585–601, 1990.
- [38] P. Ashwin, G.P. King, and J.W. Swift. Three identical oscillators with symmetric coupling. *Nonlinearity*, 3(3):585, 1990.
- [39] P. Ashwin, G. Orosz, J. Wordsworth, and S. Townley. Dynamics on networks of clustered states for globally coupled phase oscillators. *SIAM J. Appl. Dynamical Systems*, 6(4):728–758, 2007.
- [40] P. Ashwin and O. Podvigina. Hopf bifurcation with cubic symmetry and instability of abc flow. *Proc. Soc. R. Lond. A*, 459:1801–1827, 2003.
- [41] P. Ashwin and C. Postlethwaite. Quantifying noisy attractors: From heteroclinic to excitable networks. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 15(4):1989–2016, 2016.
- [42] P. Ashwin and A. Rodrigues. Hopf normal form with symmetry and reduction to systems of nonlinearly coupled phase oscillators. *Physica D*, 325:14–24, 2016.
- [43] P. Ashwin and J. W. Swift. The dynamics of n weakly coupled identical oscillators. *Journal of Nonlinear Science*, 2:69–108, 1992.
- [44] A. Back, J. Guckenheimer, M. R. Myers, F. A. Wicklin, and P. A. Worfolk. Dstool: Computer assisted exploration of dynamical systems. *Notices Amer. Math. Soc.*, 39:303–309, 1992.
- [45] A. Baddeley. Exploring the central executive. *The Quarterly Journal of Experimental Psychology Section A*, 49(1):5–28, 1996.

- [46] A. Baddeley. *Fractionating the central executive*, chapter Principles of frontal lobe function, pages 246–260. Oxford University Press, New York, 2002.
- [47] C. Baesens, J. Guckenheimer, S. Kim, and R.S. MacKay. Three coupled oscillators: mode-locking, global bifurcations and toroidal chaos. *Physica D*, 49(3):387–475, 1991.
- [48] C. Baesens and R.S. MacKay. Resonances for weak coupling of the unfolding of a saddle-node periodic orbit with an oscillator. *Nonlinearity*, 20:1283–1298, 2007.
- [49] C. Baesens and R.S. MacKay. Interaction of two systems with saddle-node bifurcations on invariant circles: I. foundations and the mutualistic case. *Nonlinearity*, 26(12):3043, 2013.
- [50] A. Balanov, N. Janson, D. Postnov, and O. Sosnovtseva. *Synchronization: From Simple to Complex*. Springer Series in Synergetics. Springer, 2009.
- [51] A. Banerjee and D. Sikder. Transient chaos generates small chimeras. *Phys. Rev. E.*, 98:032220, 2018.
- [52] W. Baoshe. Perturbations of lower dimensional tori in the resonant zone for reversible systems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 253(2):558–577, 2001.
- [53] J. A. Barnden and K. Srinivas. Temporal winner-take-all networks: A time-based mechanism for fast selection in neural networks. *IEEE Trans. Neural Netw.*, 4:844–853, 1993.
- [54] I. Belykh and A. Shilnikov. When weak inhibition synchronizes strongly desynchronizing networks of bursting neurons. *Phys. Rev. Lett.*, 101(7):078102, 2008.
- [55] V. Belykh, M. Bolotov, and G. Osipov. Kuramoto phase model with inertia: bifurcations leading to the loss of synchrony and to the emergence of chaos. *Model. Anal. Inform. Sist.*, 22(5):595–608, 2015.
- [56] B. K. Bera, D. Ghosh, and M. Lakshmanan. Chimera states in bursting neurons. *Phys. Rev. E.*, 93(1):012205, 2016.
- [57] C. Bick. Heteroclinic switching between chimeras. *Phys. Rev. E.*, 97(5):050201, 2018.

- [58] C. Bick and P. Ashwin. Chaotic weak chimeras and their persistence in coupled populations of phase oscillators. *Nonlinearity*, 29(5):1468, 2016.
- [59] C. Bick, P. Ashwin, and A. Rodrigues. Chaos in generically coupled phase oscillator networks with nonpairwise interactions. *Chaos*, 26(9):094814, 2016.
- [60] C. Bick, M. Timme, D. Paulikat, D. Rathlev, and P. Ashwin. Chaos in symmetric phase oscillator networks. *Phys. Rev. Lett.*, 107:244101, 2011.
- [61] J. Binas, U. Rutishauser, G. Indiveri, and M. Pfeifer. Learning and stabilization of winner-take-all dynamics through interacting excitatory and inhibitory plasticity. *Frontiers in Computational Neuroscience*, 8:Article 68, 2014.
- [62] I. I. Blekhman. *Synchronization of Dynamical Systems*. Nauka, Moscow, (in Russian) edition, 1971.
- [63] S. Boccaletti, J. Kurths, G. Osipov, D. L. Valladares, and C. S. Zhou. The synchronization of chaotic systems. *Phys. Rep.*, 366:1–101, 2002.
- [64] S. Boccaletti, V. Latora, Y. Moreno, M. Chavez, and D.-U. Hwang. Complex networks: Structure and dynamics. *Phys. Rep.*, 424:175–308, 2006.
- [65] N. N. Bogoliubov, Yu. A. Mitropolsky, and A. M. Samoilenko. *Methods of Accelerated Convergence in Nonlinear Mechanics*. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976. (translation from Russian version of 1969).
- [66] F. Böhm, A. Zakharova, E. Schöll, and Lüdge K. Amplitude–phase coupling drives chimera states in globally coupled laser networks. *Phys. Rev. E.*, 92:069905, 2015.
- [67] A.A. Boichuk. Solutions of weakly nonlinear differential equations bounded on the whole line. *Nonlinear oscillations*, 2(1):3–10, 1999.
- [68] A.A. Boichuk and A.M. Samoilenko. *Generalized Inverse Operators: And Fredholm Boundary–value Problems*. Walter de Gruyter GmbH & Co KG, 2016.
- [69] M. Bonnin. Waves and patterns in ring lattices with delays. *Physica D*, 238(1):77–87, 2009.
- [70] A. Borisyuk, G.B. Ermentrout, A. Friedman, and D.H. Terman. *Tutorials in Mathematical Biosciences I*. Springer–Verlag Berlin Heidelberg, 2005.

- [71] R. Borisyuk, D. Chik, and Y. Kazanovich. Visual perception of ambiguous figures: synchronization based neural models. *Biological cybernetics*, 100(6):491–504, 2009.
- [72] R. Borisyuk and Y. Kazanovich. Oscillatory model of attention-guided object selection and novelty detection. *Neural Netw.*, 17(7):899–915, September 2004.
- [73] R. Borisyuk and Y. Kazanovich. Oscillations and waves in the models of interactive neural populations. *Biosystems*, 86(1):53–62, 2006.
- [74] R. Borisyuk, Y. Kazanovich, D. Chik, V. Tikhanoff, and A. Cangelosi. A neural model of selective attention and object segmentation in the visual scene: An approach based on partial synchronization and star-like architecture of connections. *Neural Networks*, 22(5-6):707–719, 2009.
- [75] H. Bosetti, H.A. Posch, C. Dellago, and W.G. Hoover. Time-reversal symmetry and covariant lyapunov vectors for simple particle models in and out of thermal equilibrium. *Phys. Rev. E*, 82:046218, 2010.
- [76] S. F. Brandt and R. Wessel. Winner–take–all selection in a neural system with delayed feedback. *Biol. Cybern.*, 97:221–228, 2007.
- [77] H. W. Broer, M.-C. Ciocci, and H. Hanssmann. The quasi-periodic reversible hopf bifurcation. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 17(8):2605–2623, 2007. Relation: <http://www.rug.nl/informatica/organisatie/overorganisatie/iwi> Rights: University of Groningen. Research Institute for Mathematics and Computing Science (IWI).
- [78] H. W. Broer, G. B. Huitema, and M. B. Sevryuk. *Quasi-Periodic Motions in Families of Dynamical Systems*. Springer, 1996.
- [79] H.W. Broer, G.B. Hnitema, and M.B. Sevryuk. Families of quasi-periodic motions in dynamical systems depending on parameters. *Progress in nonlinear differential equations and their applications*, 19:171–211, 1996.
- [80] E. Brown, P. Holmes, and J. Moehlis. Globally coupled oscillator networks. In *Perspectives and Problems in Nonlinear Science: A Celebratory Volume in Honor of Lawrence Sirovich*, pages 183–215. Springer New York, 2003.
- [81] O. Burylko. Green’s functions for weakly regular systems of linear differential equations. *Nonlinear Oscillations*, 3(3):315–322, 2000.

- [82] O. Burylko. Competition and bifurcations in phase oscillator networks with positive and negative couplings. In *Nonlinear Dynamics of Electronic Systems, Proceedings of NDES 2012*, pages 161–164. VDE, 2012.
- [83] O. Burylko and A. Davydenko. A problem connected with the introduction of local coordinates in the neighbourhood of an invariant toroidal set. *Nonlinear Oscillations*, 4(2):171–189, 2001.
- [84] O. Burylko and A. Davydenko. The problem of complementability of a periodic frame to a periodic basis. *Nonlinear Oscillations*, 4(4):458–470, 2001.
- [85] O. Burylko, Y. Kazanovich, and R. Borisyyuk. Bifurcations in phase oscillator networks with a central element. *Physica D*, 241(12):1072–1089, 2012.
- [86] O. Burylko, Y. Kazanovich, and R. Borisyyuk. Bifurcation study of phase oscillator systems with attractive and repulsive interaction. *Phys. Rev. E*, 90:022911, 2014.
- [87] O. Burylko, Y. Kazanovich, and R. Borisyyuk. Winner-take-all in a phase oscillator system with adaptation. *Scientific Reports*, 8(1):416, 2018.
- [88] O. Burylko, A. Mielke, M. Wolfrum, and S. Yanchuk. Coexistence of hamiltonian-like and dissipative dynamics in rings of coupled phase oscillators with skew-symmetric coupling. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 17(3):2076–2105, 2018.
- [89] O. Burylko and A. Pikovsky. Desynchronization transitions in nonlinearly coupled phase oscillators. *Physica D*, 240(17):1352–1361, 2011.
- [90] M. Calamai, A. Politi, and A. Torcini. Stability of splay states in globally coupled rotators. *Phys. Rev. E*, 80(3):036209, 2009.
- [91] A. R. Champneys and Y. A. Kuznetsov. Numerical detection and continuation of codimension-two homoclinic bifurcations. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 4(4):785–822, 1994.
- [92] A.R. Champneys, V. Kirk, E. Knobloch, B.E. Oldeman, and J. Sneyd. When shil’nikov meets hopf in excitable systems. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 6(4):663–693, 2007.
- [93] Y. Chen, J. L. McKinstry, and G. M. Edelman. Versatile networks of simulated spiking neurons displaying winner-take-all behavior. *Front. Comput. Neurosci.*, 7:Article 16, 2013.



- [94] A. Chenciner. Bifurcations de points fixes elliptiques: Ii. orbites périodiques et ensembles de Cantor invariants. *Inventiones Mathematicae*, 80:81–106, 1985.
- [95] A. Chenciner. Bifurcations de points fixes elliptiques: Iii. orbites périodiques de "petites" périodes et élimination résonnante des couples de courbes invariantes. *Publ. Math. IHES*, 66:5–91, 1987.
- [96] A. Chenciner and J. Llibre. A note on the existence of invariant punctured tori in the planar circular restricted three–body problem. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 8:63–72, 1988.
- [97] T. M. Cherry. Analytic quasi–periodic curves of discontinuous type on a torus. *Proc. London Math. Soc.*, 44:175–215, 1938.
- [98] A. Chikrii, R. Petryshyn, I. Cherevko, and Y. Bigun. *Method of resolving functions in the theory of conflict–controlled processes*, volume 203, chapter Studies in Systems, Decision and Control, pages 3–33. Springer, Cham, 2019.
- [99] S. Childress. New solutions of the kinematic dynamo problem. *Math. J. Phys.*, 1111. – P. 3063 – 3076:3063–3076, 1970.
- [100] J. Choi and B. Sheu. A high-precision vlsi winner–take–all circuit for self–organizing neural networks. *IEEE Journal of Solid–State Circuits*, 28:576–583, 1993.
- [101] J.J. Collins and I. Stewart. A group–theoretic approach to rings of coupled biological oscillators. *Biol. Cybern.*, 71(2):95–103, 1994.
- [102] D.P.F. Corraea, C. Wulff, and J.R.C. Piqueira. Symmetric bifurcation analysis of synchronous states of time–delayed coupled phase–locked loop oscillators. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 22(1–3):793–820, 2015.
- [103] R. Coultrip, R. Granger, and G. Lynch. A cortical model of winner–take–all competition via lateral inhibition. *Neural Networks*, 5:47–54, 1992.
- [104] N. Cowan. Evolving conceptions of memory storage, selective attention, and their mutual constraints within the human information-processing system. *Psychological Bulletin*, 104(2):163–191, 1988.

- [105] J.D. Crawford. Introduction to bifurcation theory. *Reviews of Modern Physics*, 63(4):991–1037, 1991.
- [106] J.D. Crawford and K.T.R. Davies. Synchronization of globally coupled phase oscillators: singularities and scaling for general couplings. *Physica D*, 125(1):1–46, 1999.
- [107] G. Cymbalyuk and Calabrese R. Oscillatory behaviors in pharmacologically isolated heart interneurons from the medicinal leech. *Neurocomputing*, 32–33:97–104., 2000.
- [108] H. Daido. Quasientrainment and slow relaxation in a population of oscillators with random and frustrated interactions. *Phys. Rev. Lett.*, 68:1073–1076, 1992.
- [109] H. Daido. Onset of cooperative entrainment in limit-cycle oscillators with uniform all-to-all interactions: bifurcation of the order function. *Physica D*, 91:24–66, 1996.
- [110] H. Daido. Strange waves in coupled-oscillator arrays: Mapping approach. *Phys. Rev. Lett.*, 78(9):1683–1686, 1997.
- [111] H. Daido. Susceptibility of large populations of coupled oscillators. *Phys. Rev. E*, 91:012925, 2015.
- [112] A. Damasio. The brain binds entities and events by multiregional activation from convergent zones. *Neural Comput.*, 1:123–132, 1989.
- [113] R. Delabays, P. Jacquod, and F. Dörfler. The Kuramoto model on oriented and signed graphs. *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.*, 18(1):458–480, 2019.
- [114] R.L. Devaney. Reversible diffeomorphisms and flows. *Trans. Am. Math. Soc.*, 218:89–113, 1976.
- [115] E.J. Doedel. *AUTO-07P: Continuation and bifurcation software for ordinary differential equations*. Montreal, Canada, 2006.
- [116] T. Dombre, U. Frisch, J.M. Greene, M. Hénon, A. Mehr, and A.M. Soward. Chaotic streamlines in the abc flows. *J. Fluid Mech.*, 167:353–391, 1986.
- [117] F. Dörfler and F. Bullo. Synchronization in complex networks of phase oscillators: A survey. *Automatica*, 50(6):1539–1564, 2014.

- [118] B. Ermentrout. An adaptive model for synchrony in the firefly *pteropyx malacca*. *J. Math. Biol.*, 29:571–585, 1991.
- [119] B. Ermentrout. Complex dynamics in winner–take–all neural nets with slow inhibition. *Neural Networks*, 5:415–431, 1992.
- [120] B. Ermentrout and N. Kopell. Multiple pulse interactions and averaging in systems of coupled neural oscillators. *J. Math. Biol.*, 29:195–217, 1991.
- [121] G. B. Ermentrout. *A Guide to XPPAUT for Researchers and Students*. SIAM, Pittsburgh, 2002.
- [122] G. B. Ermentrout and N. Kopell. Parabolic bursting in an excitable system coupled with a slow oscillation. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 46:233–253, 1986.
- [123] G.B. Ermentrout and N. Kopell. Frequencyplateaus in a chain of weakly coupled oscillator. *SIAM J. Math. Anal.*, 15:215–237, 1984.
- [124] G.B. Ermentrout and D.H. Terman. *Mathematical Foundations of Neuroscience*. Springer, New York, 2010.
- [125] Y. Fang, M. Cohen, and T. Kincaid. Dynamic analysis of a general class of winner–take–all competitive neural networks. *IEEE Trans. Neural Networks*, 21:771–783, 2010.
- [126] B. Y. Feng and R. Hu. A survey on homoclinic and heteroclinic orbits. *Appl. Math. E-Notes*, 3:16–37 (electronic), 2003.
- [127] F. Feudel, N. Seehafer, B. Galanti, and S. Rüdiger. Symmetry–breaking bifurcations for the magnetohydrodynamic equations with helical forcing. *Phys. Rev. E*, 54:2589–2596, 1996.
- [128] B. Fiedler, S. Liebscher, and J.C. Alexander. Generic hopf bifurcation from lline of equilibria without parameters: I. theory. *Journal of Differential Equations*, 167:16–35, 2000.
- [129] B Fiedler and D Turaev. Coalescence of reversible homoclinic orbits causes elliptic resonance. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 6:1007–1027, 1996.
- [130] M. J. Field. *Lectures on bifurcations, dynamics and symmetry*, volume 356 of *Pitman Research Notes in Mathematics Series*. Longman, Harlow, 1996.

- [131] M. J. Field. *Dynamics and symmetry*, volume 3 of *ICP Advanced Texts in Mathematics*. Imperial College Press, London, 2007.
- [132] G. Filatrella, N.F. Pedersen, and K. Wiesenfeld. Generalized coupling in the Kuramoto model. *Phys. Rev. E*, 75:017201, 2007.
- [133] R. FitzHugh. Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane. *Biophysical Journal*, 1(6):445–466, 1961.
- [134] S.E. Folias, S. Yu, A. Snyder, D. Nikolić, and J.E. Rubin. Synchronisation hubs in the visual cortex may arise from strong rhythmic inhibition during gamma oscillations. *European J. Neurosci.*, 38(6):2864–2883, 2013.
- [135] J. E. Franke and J. F. Selgrade. Abstract  $\omega$ -limit sets, chain recurrent sets, and basic sets for flows. *Proc. Am. Math. Soc.*, 60:309–316, 1976.
- [136] M. Frasca, A. Bergner, J. Kurths, and L. Fortuna. Bifurcations in star-like network of stuart–landau oscillators. *Int. J. Bifurcation Chaos*, 22:1250173, 2012.
- [137] D. Galloway and U. Frisch. A note on the stability of a family of space-periodic beltrami flows. *Fluid J. Mech.*, 180:557–564, 1987.
- [138] Jean-Jacques Gervais. Bifurcations of subharmonic solutions in reversible systems. *Journal of Differential Equations*, 75(1):28–42, 1988.
- [139] Johannes Giannoulis and Alexander Mielke. The nonlinear Schrödinger equation as a macroscopic limit for an oscillator chain with cubic nonlinearities. *Nonlinearity*, 17:551–565, 2004.
- [140] F. Giannuzzi, D. Marinazzo, G. Nardulli, M. Pellicoro, and S. Stramaglia. Phase diagram of a generalized winfree model. *Phys. Rev. E*, 75:051104, 2007.
- [141] L. Glass and M.C. Mackey. *From Clocks to Chaos: The Rhythms of Life*. Princeton University Press, Princeton, 1988.
- [142] P. Glendinning. *Stability, Instability and Chaos: An Introduction to the Theory of Nonlinear Differential Equations*. Cambridge University Press, 1994.
- [143] M. Golubitsky, M. Krupa, and C. Lim. Time-reversibility and particle sedimentation. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 51(1):49–72, 1991.

- [144] M. Golubitsky and W.F. Langford. Classification and unfoldings of degenerate hopf bifurcations. *Journal of Differential Equations*, 41(3):375–415, 1981.
- [145] M. Golubitsky, M. Pivato, and I. Stewart. Interior symmetry and local bifurcation in coupled cell networks. *Dynamical Systems*, 19(4):389–407, 2004.
- [146] M. Golubitsky and D.G. Schaeffer. *Singularities and Groups in Bifurcation Theory. Volume I*, volume 51 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New-York, 1985.
- [147] M. Golubitsky and I. Stewart. *The Symmetry Perspective*. Birkhäuser Verlag, Basel, 2002.
- [148] M. Golubitsky and I. Stewart. Nonlinear dynamics of networks: the groupoid formalism. *Bulletin of the american mathematical society*, 43(3):305–364, 2006.
- [149] M. Golubitsky and I. Stewart. Rigid patterns of synchrony for equilibria and periodic cycles in network dynamics. *Chaos*, 26:094803, 2016.
- [150] M. Golubitsky, I. Stewart, and D.G. Schaeffer. *Singularities and Groups in Bifurcation Theory*. Springer-Verlag, New York, 1988.
- [151] J. Gómez-Gardeñes, G. Zamora-López, Y. Moreno, and A. Arenas. From modular to centralized organization of synchronization in functional areas of the cat cerebral cortex. *PLoS One*, 5(8):e12313, 2010.
- [152] J.C. González-Avella, M.G. Cosenza, and M. San Miguel. Localized coherence in two interacting populations of social agents. *Phys. A*, 399:24–30, 2014.
- [153] G.G. Gregoriou, S.J. Gotts, H. Zhou, and R. Desimone. High-frequency, long-range coupling between prefrontal and visual cortex during attention. *Science*, 324(5931):1207–1210, 2009.
- [154] J. Guckenheimer and P. Holmes. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Springer, 2002.
- [155] A.M. Hagerstrom, T.E. Murphy, R. Roy, P. Hövel, I. Omelchenko, and E. Schöll. Experimental observation of chimeras in coupled-map lattices. *Nature Physics*, 8:658–661, 2012.

- [156] R.H.R. Hahnloser, R. Sarpeshkar, M.A. Mahowald, R.J. Douglas, and S. Seung. Digital selection and analogue amplification coexist in a cortex-inspired silicon circuit. *Nature*, 405:947–951, 2000.
- [157] H. Haken. *Synergetics, an Introduction: Nonequilibrium Phase Transitions and Self-Organization in Physics, Chemistry, and Biology*. New York: Springer-Verlag, 1983.
- [158] H. Haken. *Advanced Synergetics: Instability Hierarchies of Self-Organizing Systems and Devices*. York: Springer-Verlag, 1993.
- [159] D. Hansel, G. Mato, and C. Meunier. Clustering and slow switching in globally coupled phase oscillators. *Phys. Rev. E*, 48(5):3470–3477, 1993.
- [160] D. Hansel, G. Mato, and C. Meunier. Phase dynamics of weakly coupled Hodgkin-Huxley neurons. *Europhys. Lett.*, 23:367–372, 1993.
- [161] C. Hauptmann, O. Omel'chenko, O.V. Popovych, Y. Maistrenko, and P.A. Tass. Control of spatially patterned synchrony with multisite delayed feedback. *Phys. Rev. E*, 76:066209, 2007.
- [162] S. Haykin. *Neural Network. A Comprehensive Foundation, 2nd ed.* Englewood Cliffs, NJ, Prentice-Hall, 1999.
- [163] H.-P Heinz, T Küpper, and C.A Stuart. Existence and bifurcation of solutions for nonlinear perturbations of the periodic Schrödinger equation. *Journal of Differential Equations*, 100(2):341–354, 1992.
- [164] J.L. Hindmarsh and R.M. Rose. A model of the nerve impulse using two first-order differential equations. *Nature*, 296:162–164, 1982.
- [165] A. Hodgkin and A. F. Huxley. A quantitative description of membrane current and application to conduction and excitation. *J. Physiol.*, 117:500–544, 1952.
- [166] A.B. Holder, M.L. Zuparic, and A.C. Kalloniatis. Gaussian noise and the two-network frustrated Kuramoto model. *Physica D*, 341:10–32, 2017.
- [167] H. Hong and S.H. Strogatz. Conformists and contrarians in a kuramoto model with identical natural frequencies. *Phys. Rev. E*, 84:046202, Oct 2011.

- [168] H. Hong and S.H. Strogatz. Kuramoto model of coupled oscillators with positive and negative coupling parameters: An example of conformist and contrarian oscillators. *Phys. Rev. Lett.*, 106:054102, Feb 2011.
- [169] H. Hong and S.H. Strogatz. Mean-field behavior in coupled oscillators with attractive and repulsive interactions. *Phys. Rev. E*, 85:056210, 2012.
- [170] F. C. Hoppensteadt and E. M. Izhikevich. *Weakly connected neural networks*, volume 126 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1997.
- [171] Ch. Huygens (Hugenii). *Horologium Oscillatorium*. Apud F. Muguet, Paris, France, 1673. English translation: The Pendulum Clock, Iowa State University Press, Ames, 1986.
- [172] G. Indiveri. Winner-take-all networks with lateral excitation. *Analog Integrated Circuits and Signal Processing*, 13:185–193, 1997.
- [173] G. Indiveri, T. Horiuchi, E. Niebur, and R. Douglas. *A competitive network of spiking VLSI neurons*, chapter World Congress on Neuroinformatics, pages 443–455. ARGESIM/ASIM Verlag, Vienna, Austria, 2001.
- [174] L. Itti and C. Koch. Computational modelling of visual attention. *Nature Rev. Neurosci.*, 2:194–203, 2001.
- [175] L. Itti, C. Koch, and E. Niebur. A model of saliency-based visual attention for rapid scene analysis. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 20:1254–1259, 1998.
- [176] Eugene M. Izhikevich. *Dynamical Systems in Neuroscience: The Geometry of Excitability and Bursting*. The MIT Press, 2005.
- [177] P. Ji, T.K.D.M. Peron, F.A. Rodrigues, and J. Kurths. Low-dimensional behavior of Kuramoto model with inertia in complex networks. *Scientific Reports*, 4:4783, 2014.
- [178] D. Z. Jin and H. S Seung. Fast computation with spikes in a recurrent neural network. *Phys. Rev. E*, 65:051922, 2002.
- [179] M. Kantner and S. Yanchuk. Bifurcation analysis of delay-induced patterns in a ring of hodgkinhuxley neurons. *Phil. Trans. Roy. Soc. A*, 371:371 (2013), 20120470, 2013.

- [180] T. Kapitaniak, P. Kuzma, J. Wojewoda, K. Czolczynski, and Y. Maistrenko. Imperfect chimera states for coupled pendula. *Scientific Reports*, 4:6379, 2014.
- [181] D. Kappel, B. Nessler, and W Maass. Stdp installs in winner–take–all circuits an online approximation to hidden markov model learning. *PLoS Comput. Biol.*, 10:e1003511, 2014.
- [182] D. Kasatkin, S. Yanchuk, E. Schöll, and V. Nekorkin. Self–organized emergence of multilayer structure and chimera states in dynamical networks with adaptive couplings. *Phys. Rev. E*, 96:062211, 2017.
- [183] S. Kaski and T. Kohonen. Winner–take–all networks for physiological models of competitive learning. *Neural Networks*, 7:973–984, 1994.
- [184] A. Katok and B. Hasselblatt. *Introduction to the modern theory of dynamical systems*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [185] Y. Kazanovich and R. Borisyuk. Synchronization in a neural network of phase oscillators with the central element. *Biological Cybernetics*, 71(2):177–185, 1994.
- [186] Y. Kazanovich and R. Borisyuk. Dynamics of neural networks with a central element. *Neural Networks*, 12(3):441–454, 1999.
- [187] Y. Kazanovich and R. Borisyuk. Synchronization in oscillator systems with a central element and phase shifts. *Progr. Teor. Phys.*, 110:1047–1057, 2003.
- [188] Y. Kazanovich and R. Borisyuk. An oscillatory neural model of multiple object tracking. *Neural computation*, 18(6):1413–40, Jun 2006.
- [189] Y. Kazanovich and R. Borisyuk. Reaction times in visual search can be explained by a simple model of neural synchronization. *Neural Networks*, 87:1 – 7, 2017.
- [190] Y. Kazanovich, O. Burylko, and R. Borisyuk. Competition for synchronization in a phase oscillator system. *Physica D*, 261(0):114–124, 2013.
- [191] F.P. Kemeth, S.W. Haugland, L. Schmidt, I.G. Kevrekidis, and Krischer K. A classification scheme for chimera states. *Chaos*, 26:094815, 2016.
- [192] P. Kirrmann, G. Schneider, and A. Mielke. The validity of modulation equations for extended systems with cubic nonlinearities. *Proceedings of the Royal Society of Edinburg*, 122A:85–91, 1992.



- [193] Christoph Kirst and Marc Timme. From networks of unstable attractors to heteroclinic switching. *Phys. Rev. E*, 78:065201, Dec 2008.
- [194] I. Z. Kiss, C. G. Rusin, H. Kori, and J. L. Hudson. Engineering complex dynamical structures: sequential patterns and desynchronization. *Science*, 316:1886–1889, 2007.
- [195] H. Kitajima and J. Kurths. Bifurcation in neuronal networks with hub structure. *Physica A*, 388(20):4499–4508, 2009.
- [196] H. Kitajima and T. Yoshihara. Cluster synchronization in coupled systems with hub structure. *Physica D*, 241:1804–1810, 2012.
- [197] H. Kneser. Reguläre kurvenscharen auf ringflächen. *Math. Ann.*, 91:135–154, 1924.
- [198] H. Kori and Y. Kuramoto. Slow switching in globally coupled oscillators: robustness and occurrence through delayed coupling. *Phys. Rev. E*, 63:046214, Mar 2001.
- [199] H. Kori, Y. Kuramoto, S. Jain, I.Z. Kiss, and J Hudson. Clustering in globally coupled oscillators near a hopf bifurcation: Theory and experiments. *Phys. Rev. E*, 89:062906, 2014.
- [200] J.A. Kromer, L. Schimansky-Geier, and A.B. Neiman. Emergence and coherence of oscillations in star networks of stochastic excitable elements. *Phys. Rev. E*, 93:042406, 2016.
- [201] M. Krupa. Robust heteroclinic cycles. *J. Nonlinear Sci.*, 7(2):129–176, 1997.
- [202] M. Krupa and I. Melbourne. Asymptotic stability of heteroclinic cycles in systems with symmetry. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 15:121–147, 1995.
- [203] V.I. Kryukov. *An attention model based on the principle of dominante*, chapter Neurocomputers and Attention I. Neurobiology, Synchronization and Chaos, pages 319–352. Manchester University Press, Manchester, 1991.
- [204] V.I. Kryukov. The role of the hippocampus in long-term memory: is it memory store or comporator? *J. Integr. Neurosci.*, 7:117–184, 2008.
- [205] Y. Kuramoto. Self-entrainment of a population of coupled non-linear oscillators. In H. Araki, editor, *Mathematical Problems in Theoretical Physics*,

- volume 39 of *Lecture Notes in Physics*, Berlin Springer Verlag, pages 420–422, 1975.
- [206] Y. Kuramoto. *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence*. Springer, Berlin, 1984.
- [207] Y. Kuramoto and D. Battogtokh. Coexistence of coherence and incoherence in nonlocally coupled phase oscillators. *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*, 5(4):380–385, 2002.
- [208] A. S. Kuznetsov and J. Kurths. Stable heteroclinic cycles for ensembles of chaotic oscillators. *Phys. Rev. E*, 66(2):026201, 2002.
- [209] Y. Kuznetsov. *Elements of Applied Bifurcation Theory*, volume 112 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer–Verlag, 1995.
- [210] C. R. Laing and C. C. Chow. Stationary bumps in networks of spiking neurons. *Neural Comput.*, 13(7):1473–1494, 2001.
- [211] C.R. Laing. The dynamics of chimera states in heterogeneous Kuramoto networks. *Physica D*, 238(16):1569–1588, 2009.
- [212] C.R. Laing. Chimeras in networks of planar oscillators. *Phys. Rev. E*, 81:066221, Jun 2010.
- [213] J.S.W. Lamb and J.A.G. Roberts. Time–reversal symmetry in dynamical systems: A survey. *Physica D*, 112:1–39, 1998.
- [214] J.S.W. Lamb and M. Roberts. Reversible equivariant linear systems. *Journal of Differential Equations*, 159(1):239–279, 1999.
- [215] J.S.W. Lamb and C. Wulff. Reversible relative periodic orbits. *Journal of Differential Equations*, 178(1):60–100, 2002.
- [216] L. Larger, B. Penkovsky, and Y. Maistrenko. Virtual chimera states for delayed-feedback systems. *Phys. Rev. Lett.*, 111:054103, 2013.
- [217] J. Lazzaro, S. Ryckebusch, M. A. Mahowald, and C. A. Mead. *Winner–take–all networks of  $O(n)$  complexity*, chapter Advances in Neural Information Processing Systems. Morgan Kaufmann, San Mateo, CA, 1989.
- [218] S. Liebscher. Dynamics near manifolds of equilibria of codimension one and bifurcation without parameters. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2011(63):1–12, 2011.

- [219] S.-C. Liu. *A silicon retina with controllable winner-take-all properties*, volume 6, chapter Proc. of the 2003 Int. Simp. on Circuits and Systems, pages 804–807. IEEE, 2003.
- [220] E. Lotfa and M.-R. Akbarzadeh-T. A winner-take-all approach to emotional neural networks with universal approximation property. *Information Sciences*, 346–347:369–388, 2016.
- [221] E. D. Lumer. Effects of spike timing on winner-take-all competition in model cortical circuits. *Neural Comput.*, 12:181–194, 2000.
- [222] W. Maass. *Neural computation with winner-take-all as the only nonlinear operation*, volume 11, chapter Advances in Neural Information Processing Systems, pages 293–299. MIT Press, Cambridge, MA, 1999.
- [223] W. Maass. On the computational power of winner-take-all. *Neural Comput*, 12:2519–2535, 2000.
- [224] V. Maistrenko, A. Vasylenko, Y. Maistrenko, and E. Mosekilde. Phase chaos in the discrete Kuramoto model. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 20(6):1811–1823, 2010.
- [225] Y. Maistrenko, S. Brezetsky, P. Jaros, R. Levchenko, and T. Kapitaniak. Smallest chimera states. *Phys. Rev. E*, 95:010203, 2017.
- [226] Y. Maistrenko, B. Lysyansky, C. Hauptmann, O. Burylko, and P.A. Tass. Multistability in the Kuramoto model with synaptic plasticity. *Phys. Rev. E*, 75(6 Pt 2):066207, 2007.
- [227] Y. Maistrenko, B. Penkovsky, and M. Rosenblum. Solitary state at the edge of synchrony in ensembles with attractive and repulsive interactions. *Phys. Rev. E*, 89:060901, 2014.
- [228] Y. Maistrenko, O. Popovych, O. Burylko, and P.A. Tass. Mechanism of desynchronization in the finite-dimensional Kuramoto model. *Phys. Rev. Lett.*, 93:084102, 2004.
- [229] Z.-H. Mao and S. G. Massaquoi. Dynamics of winner-take-all competition in recurrent neural networks with lateral inhibition. *Neural Networks*, 18:55–69, 2007.
- [230] I. P. Marino, V. Pérez-Munuzuri, V. Pérez-Villar, E. Sánchez, and M. A. Matías. Interaction of chaotic rotating waves in coupled rings of chaotic cells. *Phys. D*, 128(2-4):224–235, 1999.

- [231] E.A. Martens, S Thutupalli, A. Fourrière, and O. Hallatschek. Chimera states in mechanical oscillator networks. *Proc. Natl. Acad. Sci.*, 110(26):10563–10567, 2013.
- [232] Ch.G. Mathews, J.A. Lesku, S.L. Lima, and Ch.J. Amlaner. Asynchronous eye closure as an anti-predator behavior in the western fence lizard (*sceloporus occidentalis*). *Ethology*, 112(3):286–292, 2006.
- [233] C. Meena, K. Murali, and S. Sinha. Chimera states in star networks. *Internat. J. Bifur. Chaos*, 26(9):1630023, 2016.
- [234] R. Merrison-Hort, N. Yousif, F. Njap, U.G. Hofmann, O. Burylko, and R. Borisyuk. An interactive channel model of the basal ganglia: Bifurcation analysis under healthy and parkinsonian conditions. *The Journal of Mathematical Neuroscience*, 3:14–14, 2013.
- [235] E. Montbrió, J. Kurths, and B. Blasius. Synchronization of two interacting populations of oscillators. *Phys. Rev. E*, 70:056125, 2004.
- [236] E. Montbrió and D. Pazó. Shear diversity prevents collective synchronization. *Phys. Rev. Lett.*, 106(25):254101, 2011.
- [237] R. Moran, M. Zehetleitner, H.J. Müller, and M. Usher. Competitive guided search: Meeting the challenge of benchmark rt distributions. *Journal of Vision*, 13(8):1–31, 2013.
- [238] C Morris and H. Lecar. Voltage oscillations in the barnacle giant muscle fiber. *Biophys J.*, 35(1):193–213., 1981.
- [239] J. Moser. *Stable and Random Motions in Dynamical Systems*. Princeton Univ. Press, Princeton, 1973.
- [240] H. Mostafa, L. K. Müller, and G. Indiveri. *Recurrent networks of coupled winner-take-all oscillators for solving constraint satisfaction problems*, chapter Advances in Neural Information Processing Systems, pages 719–727. Curran Associates, Inc., 2013.
- [241] A.E. Motter, S.A. Myers, Anghel M., and T. Nishikawa. Spontaneous synchrony in power-grid networks. *Nat. Phys.*, 9:191–197, 2013.
- [242] J. Nagumo, S. Arimoto, and S. Yoshizawa. An active pulse transmission line simulating nerve axon. *Proc IRE*, 50:2061–2070, 1962.

- [243] Y. Nakamura, F. Tominaga, and T. Munakata. Clustering behavior of time–delayed nearest–neighbor coupled oscillators. *Phys. Rev. E*, 49(6):4849–4856, 1994.
- [244] S. Newhouse, D. Ruelle, and F. Takens. Occurrence of strange axiom *a* attractors near quasi periodic flows on  $\mathbb{T}^m$ ,  $m \geq 3$ . *Commun. Math. Phys.*, 64:35–40, 1978.
- [245] E.C. Nijholt, B.W. Rink, and J.A. Sanders. Center manifolds of coupled cell networks. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 49(5):4117–4148, 2017.
- [246] S. Olmi, A. Navas, S. Boccaletti, and A. Torcini. Hysteretic transitions in the Kuramoto model with inertia. *Phys. Rev. E*, 90:042905, Oct 2014.
- [247] I. Omelchenko, Y. Maistrenko, P. Hövel, and E. Schöll. Loss of coherence in dynamical networks: Spatial chaos and chimera states. *Phys. Rev. Lett.*, 106:234102, Jun 2011.
- [248] I. Omelchenko, Y. Maistrenko, and E. Mosekilde. Synchronization in ensembles of coupled maps with a major element. *Discrete Dyn. Nat. Soc.*, 2005(3):239–255, 2005.
- [249] O. E. Omel’chenko, Y. L. Maistrenko, and P. A. Tass. Chimera states induced by spatially modulated delayed feedback. *Phys. Rev. E*, 82(6):066201, 13, 2010.
- [250] M. Oster, X. Wang, R. Douglas, and S.-C. Liu. Quantification of a spike–based winner–take–all vlsi network. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I*, 55:3160–3169, 2008.
- [251] E. Ott and T.M. Antonsen. Long time evolution of phase oscillator systems. *Chaos*, 19(2):023117, 2009.
- [252] J. Palis and W. de Melo. *Geometric Theory of Dynamical Systems: An Introduction*. Springer–Verlag New York, 1 edition, 1982.
- [253] M. Panaggio and D. Abrams. Chimera states: coexistence of coherence and incoherence in networks of coupled oscillators. *Nonlinearity*, 28(3):R67–R87, 2015.
- [254] I. O. Parasyuk. Conservation of quasiperiodic motions of reversible multi–frequency systems. *Dokl. Akad. Nauk Ukrain. SSR*, A 9:19–22, 1982. In Russian.

- [255] D. Pazó. Thermodynamic limit of the first-order phase transition in the Kuramoto model. *Phys. Rev. E*, 72:046211, 2005.
- [256] L.M. Pecora and T.L. Carroll. Synchronization of chaotic systems. *Chaos*, 25:097611, 2015.
- [257] M. Peil, T. Heil, I. Fischer, and W. Elsässer. Synchronization of chaotic semiconductor laser systems: a vectorial coupling-dependent scenario. *Phys. Rev. Lett.*, 88:174101, 2002.
- [258] P. Perlikowski, S. Yanchuk, O. V. Popovych, and P. A. Tass. Periodic patterns in a ring of delay-coupled oscillators. *Phys. Rev. E*, 82(3):036208, Sep 2010.
- [259] P. Perlikowski, S. Yanchuk, M. Wolfrum, A. Stefanski, P. Mosiolek, and T. Kapitaniak. Routes to complex dynamics in a ring of unidirectionally coupled systems. *Chaos*, 20:013111, 2010.
- [260] J.-P. Pfister and W. Gerstner. Triplets of spikes in a model of spike timing-dependent plasticity. *J. Neurosci.*, 26(38):9673–9682, 2006.
- [261] A. Pikovsky and P. Rosenau. Phase compactons. *Physica D*, 218(1):56–69, 2006.
- [262] A. Pikovsky and M. Rosenblum. Partially integrable dynamics of hierarchical populations of coupled oscillators. *Phys. Rev. Lett.*, 101:264103, Dec 2008.
- [263] A. Pikovsky and M. Rosenblum. Self-organized partially synchronous dynamics in populations of nonlinearly coupled oscillators. *Physica D*, 238(1):27 – 37, 2009.
- [264] A. Pikovsky and M. Rosenblum. Dynamics of heterogeneous oscillator ensembles in terms of collective variables. *Physica D*, 240(9-10):872–881, 2011.
- [265] A. Pikovsky, M. Rosenblum, and J. Kurths. *Synchronization. A Universal Concept in Nonlinear Sciences*. Cambridge University Press, 2001.
- [266] A. Politi, G. L. Oppo, and R. Badii. Coexistence of conservative and dissipative behavior in reversible dynamical systems. *Phys. Rev. A*, 33:4055–4060, Jun 1986.

- [267] O.V. Popovych, S. Yanchuk, and Peter A. Tass. Self-organized noise resistance of oscillatory neural networks with spike timing-dependent plasticity. *Sci. Rep.*, 3:2926, 2013.
- [268] K. Pyragas, O. V. Popovych, and P. A. Tass. Controlling synchrony in oscillatory networks with a separate stimulation–registration setup. *Europhysics Letters*, 80(4):40002, 2007.
- [269] M. Rabinovich, I. Tristan, and P. Varona. Neural dynamics of attentional cross-modality control. *PLoS One*, 8:e64406, 2013.
- [270] L. Ren and B. Ermentrout. Phase locking in chains of multiple-coupled oscillators. *Physica D*, 143(1–4):56–73, 2000.
- [271] J.G. Restrepo, E. Ott, and B.R. Hunt. Onset of synchronization in large networks of coupled oscillators. *Phys. Rev. E*, 71:036151, Mar 2005.
- [272] M. Riesenhuber and T. Poggio. Hierarchical models of object recognition in cortex. *Nature Neurosci.*, 2:1019–1025, 1999.
- [273] J. Rinzel. *Bursting oscillations in an excitable membrane model*, volume 1151 of *LNM*, chapter Ordinary and Partial Differential Equations. Lecture Notes in Mathematics. Springer, Berlin, Heidelberg, 1985.
- [274] J.A.G. Roberts and G.R.W. Quispel. Chaos and time-reversal symmetry: Order and chaos in reversible dynamical systems. *Phys. Rep.*, 216:63–177, 1992.
- [275] F.A. Rodrigues, Thomas K. DM. Peron, P. Ji, and J. Kurths. The Kuramoto model in complex networks. *Physics Reports*, 610:1–98, 2016. The Kuramoto model in complex networks.
- [276] M. Rosenblum and A. Pikovsky. Self-organized quasiperiodicity in oscillator ensembles with global nonlinear coupling. *Phys. Rev. Lett.*, 98:064101, 2007.
- [277] M. Rosenblum, A. Pikovsky, and J. Kurths. Phase synchronization of chaotic oscillators. *Phys. Rev. Lett.*, 76(11):1804–1807, 1996.
- [278] J.E. Rubin and D. Terman. High frequency stimulation of the subthalamic nucleus eliminates pathological thalamic rhythmicity in a computational model. *J Comput Neurosci.*, 16:211–235, 2004.
- [279] D. Ruelle and F. Takens. On the nature of turbulence. *Commun. Math. Phys.*, 20:167–192, 1971.

- [280] U. Rutishauser and R. Douglas. State-dependent computational using coupled recurrent networks. *Prog. Theor. Phys.*, 21:478–509, 2009.
- [281] U. Rutishauser, R. J. Douglas, and J. J. Slotine. Collective stability of networks of winner-take-all circuits. *Neural Comput.*, 23:735–773, 2011.
- [282] H. Sakaguchi and Y. Kuramoto. A soluble active rotator model showing phase transitions via mutual entrainment. *Prog Theor Phys*, 76:576–581, 1986.
- [283] E. Sánchez and M. A. Matías. Experimental observation of a periodic rotating wave in rings of unidirectionally coupled analog lorenz oscillators. *Phys. Rev. E*, 57(5):6184–6186, 1998.
- [284] J.A. Sanders, F. Verhulst, and J. Murdock. *Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems*. Applied Mathematical Sciences. Springer New York, 2007.
- [285] F. Schittler Neves and M. Timme. Computation by switching in complex networks of states. *Phys. Rev. Lett.*, 109:018701, Jul 2012.
- [286] L. Schmidt, K. Schönleber, K. Krischer, and Vladimir Garcia-Morales. Coexistence of synchrony and incoherence in oscillatory media under nonlinear global coupling. *Chaos*, 24(1):013102, 2014.
- [287] R. Schmidt, LaFleur K.J., de Reus M.A., van den Berg L.H., and van den Heuvel M.P. Kuramoto model simulation of neural hubs and dynamic synchrony in the human cerebral connectome. *BMC Neurosci.*, 16:54, 2015.
- [288] H. G. Schuster and P. Wagner. Mutual entrainment of two limit cycle oscillators with time delayed coupling. *Progress of Theoretical Physics*, 81(5):939–945, 1989.
- [289] P. Seliger, S.C. Young, and L.S. Tsimring. Plasticity and learning in a network of coupled phase oscillators. *Phys. Rev. E*, 65:041906, Mar 2002.
- [290] T. Serrano-Gotarredona and B. Linares-Barranco. A modular current-mode high-precision winner-take-all circuit. *EEE Trans. Circuits and Systems II*, 42:132–134, 1995.
- [291] G.C. Sethia and A. Sen. Chimera states: The existence criteria revisited. *Phys. Rev. Lett.*, 112:144101, 2014.



- [292] M.B. Sevryuk. *Reversible Systems*. Springer Lecture Notes in Mathematics. Springer, Berlin, 1986.
- [293] M.B. Sevryuk. On invariant tori of reversible systems in the neighbourhood of an equilibrium position. *Russian Math. Surveys*, 42(4):147–148, 1987.
- [294] M.B. Sevryuk. The reversible context 2 in kam theory: the first steps. *Regular and Chaotic Dynamics*, 16:24–38, 2011.
- [295] M.B. Sevryuk. Quasi-periodic perturbations within the reversible context 2 in kam theory. *Indagationes Mathematicae*, 23(3):137–150, 2012.
- [296] J.H. Sheeba, V.K. Chandrasekar, A. Stefanovska, and P.V.E. McClintock. Asymmetry-induced effects in coupled phase-oscillator ensembles: Routes to synchronization. *Phys. Rev. E*, 79:046210, Apr 2009.
- [297] A. Shilnikov, R. Gordon, and I. Belykh. Polyrhythmic synchronization in bursting networking motifs. *Chaos*, 18(3):037120, 2008.
- [298] L. P. Shilnikov, A. Shilnikov, D. Turaev, and L. Chua. *Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics. Part I and Part II*. World Scientific, 1998, 2001.
- [299] L.P. Shilnikov. A case of the existence of a denumerable set of periodic motions. *Sov. Math. Dokl.*, 6:163–166, 1965.
- [300] J Sieber, O. Omel’chenko, and M. Wolfrum. Controlling unstable chaos: Stabilizing chimera states by feedback. *Phys. Rev. Letts.*, 112:054102, 2014.
- [301] W. Singer and C. M Gray. Visual feature integration and the temporal correlation hypothesis. *Ann. Rev. Neurosci.*, 18:555–586, 1995.
- [302] M.C. Soriano, J. Garcia-Ojalvo, C.R. Mirasso, and I. Fischer. Complex photonics: Dynamics and applications of delay-coupled semiconductor lasers. *Rev. Mod. Phys.*, 85:421–470, 2013.
- [303] J. C. Sprott. Symmetric time-reversible flows with a strange attractor. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 25(05):1550078, 2015.
- [304] D. Standage, T. P. Trappenberg, and R. M Klein. Modelling divided visual attention with a winner-take-all network. *Neural Networks*, 18:620–627, 2005.

- [305] J. Starzyk and X. Fang. Cmos current mode winner–take–all circuit with both excitatory and inhibitory feedback. *electronics letters. Electronics Letters*, 29:908–910, 1993.
- [306] J. C. Stiller and G. Radons. Dynamics of nonlinear oscillators with random interactions. *Phys. Rev. E*, 58:1789–1799, Aug 1998.
- [307] S. Strogatz. *Sync: The Emerging Science of Spontaneous Order*. Hyperion Press, 2003.
- [308] S.H. Strogatz. Exploring complex networks. *Nature*, 410:268 – 276, 2001.
- [309] Steven H. Strogatz. From kuramoto to crawford: exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators. *Physica D*, 143(1-4):1–20, 2000.
- [310] J. Stuart. On the non-linear mechanics of hydrodynamic stability. *Journal of Fluid Mechanics*, 4(1):1–21, 1958.
- [311] M. Tachikawa. Specific locking in populations dynamics: Symmetry analysis for coupled heteroclinic cycles. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 201(2):374–380, 2007.
- [312] A. Takamatsu, R. Tanaka, H. Yamada, T. Nakagaki, T. Fujii, and I. Endo. Spatiotemporal symmetry in rings of coupled biological oscillators of physarum plasmodial slime mold. *Phys. Rev. Lett.*, 87(7):078102, 2001.
- [313] H.A. Tanaka, A. J. Lichtenberg, and S. Oishi. First order phase transition resulting from finite inertia in coupled oscillator systems. *Phys. Rev. Lett.*, 78:2104–2107, 1997.
- [314] M. Thoubaan and P. Ashwin. Existence and stability of chimera states in a minimal system of phase oscillators. *Chaos*, 28:103121, 2018.
- [315] M. Timme. Revealing network connectivity from response dynamics. *Phys. Rev. Lett.*, 98(22):224101, 2007.
- [316] M.R. Tinsley, S. Nkomo, and K. Showalter. Chimera and phase–cluster states in populations of coupled chemical oscillators. *Nat. Phys.*, 8:662–665, 2012.
- [317] R. Töonjes. Synchronization transition in the Kuramoto model with colored noise. *Phys. Rev. E*, 81:055201, 2010.

- [318] D. Topaj and A. Pikovsky. Reversibility vs. synchronization in oscillator lattices. *Physica D*, 170(2):118–130, 2002.
- [319] B.I. Triplet, D.J. Klein, and K.A. Morgansen. *Discrete Time Kuramoto Models with Delay*, pages 9–23. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2006.
- [320] Kwok Yeung Tsang, Renato E. Mirollo, Steven H. Strogatz, and Kurt Wiesenfeld. Dynamics of a globally coupled oscillator array. *Physica D*, 48(1):102–112, 1991.
- [321] K.Y. Tsang, R.E. Mirollo, S.H. Strogatz, and K. Wiesenfeld. Reversibility and noise sensitivity of josephson arrays. *Phys. Rev. Lett.*, 66:1094–1097, Feb 1991.
- [322] L.S. Tsimring, N.F. Rulkov, and M.L. Larsen and M. Gabbay. Repulsive synchronization in an array of phase oscillators. *Phys. Rev. Lett.*, 95:014101, 2005.
- [323] G. Van der Sande, M. Soriano, I. Fischer, and C. R Mirasso. Dynamics, correlation scaling, and synchronization behavior in rings of delay-coupled oscillators. *Phys. Rev. E*, 77(5):055202, 2008.
- [324] A. Vanderbauwhede. *Local Bifurcation and Symmetry*, volume 75 of *Research Notes in Mathematic*. Pitman, London, 1982.
- [325] E.A. Viktorov, T. Habruseva, S.P. Hegarty, G. Huyet, and B. Kelleher. Coherence and incoherence in an optical comb. *Phys. Rev. Lett.*, 112:224101, 2014.
- [326] V. Vlasov and A. Bifone. Hub-driven remote synchronization in brain networks. *Scientific Reports*, 7(1):10403, 2017.
- [327] V. Vlasov, A. Pikovsky, and E.E.N. Macau. Star-type oscillatory networks with generic Kuramoto-type coupling: A model for "Japanese drums synchrony". *Chaos*, 25(12):123120, 2015.
- [328] D. Wang. Object selection based on oscillatory correlation. *Neural Networks*, 12:579–592, 1999.
- [329] W. Wang and J.-J. E. Slotine. Fast computation with neural oscillators. *Neurocomputing*, 69:2320–2326, 2005.

- [330] S. Watanabe and S.H. Strogatz. Integrability of a globally coupled oscillator array. *Phys. Rev. Lett.*, 70(16):2391–2394, 1993.
- [331] S. Watanabe and S.H. Strogatz. Constants of motion for superconducting josephson arrays. *Physica D*, 74(3 - 4):197–253, 1994.
- [332] M. Wickramasinghe and I.Z. Kiss. Spatially organized dynamical states in chemical oscillator networks: Synchronization, dynamical differentiation, and chimera patterns. *PLoS One*, 8:e80586, 2013.
- [333] K. Wiesenfeld and J.W. Swift. Averaged equations for Josephson junction series arrays. *Phys. Rev. E*, 51(2):1020–1025, 1995.
- [334] S. Wiggins. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. (Texts in Applied Mathematics). Springer, 2nd edition, 2003.
- [335] D.A. Wiley, S.H. Strogatz, and M. Girvan. The size of the sync basin. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 16(1):015103, 2006.
- [336] H.R. Wilson and J.D. Cowan. Excitatory and inhibitory interactions in localized populations of model neurons. *Biophys. J.*, 12:1–24, 1972.
- [337] A.T. Winfree. Biological rhythms and the behavior of populations of coupled oscillators. *Journal of Theoretical Biology*, 16(1):15–42, 1967.
- [338] A.T. Winfree. *The geometry of biological time*. Springer, 2001.
- [339] J. Wojcik, J. Schwabedal, R. Clewley, and A.L. Shilnikov. Key bifurcations of bursting polyrhythms in 3-cell central pattern generators. *PLoS ONE*, 9(4):e92918, 2014.
- [340] M. Wolfrum, O. E. Omel’chenko, S. Yanchuk, and Y. L. Maistrenko. Spectral properties of chimera states. *Chaos*, 21(1):013112, 8, 2011.
- [341] M. Wolfrum and O.E. Omel’chenko. Chimera states are chaotic transients. *Phys. Rev. E*, 84:015201, 2011.
- [342] S. Yanchuk, P. Perlikowski, M. Wolfrum, A. Stefanski, and T. Kapitaniak. Amplitude equations for collective spatio-temporal dynamics in arrays of coupled systems. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 25(3):033113, 2015.
- [343] S. Yanchuk and M. Wolfrum. Destabilization patterns in chains of coupled oscillators. *Phys. Rev. E*, 77(2):026212, 2008.

- [344] A. Yeldesbay, A. Pikovsky, and M. Rosenblum. Chimera-like states in an ensemble of globally coupled oscillators. *Phys. Rev. Lett.*, 112:144103, 2014.
- [345] A. Yuille and D. Geiger. *Winner-take-all networks*, chapter The Handbook of Brain Theory and Neural Networks, pages 1228–1231. MIT Press, 2003.
- [346] A. L. Yuille and N. M. Grzywacz. A winner-take-all mechanism based on presynaptic inhibition feedback. *Neural Comput.*, 1:334–347, 1989.
- [347] G. Zamora-López, C. Zhou, and J. Kurths. Cortical hubs form a module for multisensory integration on top of the hierarchy of cortical networks. *Front. Neuroinform.*, 4(1), 2010.
- [348] Y. Zhang, G. Hu, and H.A. Cerdeira. How does a periodic rotating wave emerge from high-dimensional chaos in a ring of coupled chaotic oscillators? *Phys. Rev. E*, 64(3):037203, 2001.
- [349] Z. Zhang. Reducibility of reversible system with small perturbation. *Ann. Differ. Equations*, 21(4):629–638, 2005.
- [350] S. Zhao, Q. Xie, Q. Lu, X. Jiang, and W. Chen. Coherence and incoherence collective behavior in financial market. *EPL (Europhysics Letters)*, 112(2):28002, 2015.
- [351] C. Zhou, L. Zemanova, G. Zamora, C.C. Hilgetag, and J. Kurths. Hierarchical organization unveiled by functional connectivity in complex brain networks. *Phys. Rev. Lett.*, 97:238103, 2006.
- [352] R. Zillmer, R. Livi, A. Politi, and A. Torcini. Stability of the splay state in pulse-coupled networks. *Phys. Rev. E*, 76(4):046102, 2007.
- [353] W. Zou and M. Zhan. Splay states in a ring of coupled oscillators: From local to global coupling. *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.*, 8:1324–1340, 2009.

## Додаток А

### Список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації

#### Список публікацій здобувача:

1. О. Бурилко, Колективна динаміка та біфуркації у симетричних мережах фазових осциляторів. II, *Нелінійні коливання*, **22(3)**, 312–340 (2019).
2. О. Бурилко, Колективна динаміка та біфуркації у симетричних мережах фазових осциляторів. I, *Нелінійні коливання*, **22(2)**, 165–195 (2019).
3. O. Burylko, A. Mielke, M. Wolfrum, S. Yanchuk, Coexistence of Hamiltonian-like and dissipative dynamics in rings of coupled phase oscillators with skew-symmetric coupling, *SIAM Journal of Applied Dynamical Systems*, **17(3)**, 2076–2105 (2018).
4. O. Burylko, Y. Kazanovich, R. Borisyuk, Winner-take-all in a phase oscillator system with adaptation, *Scientific Reports*, **8**, 416 (2018).
5. P. Ashwin, C. Bick, O. Burylko, Identical phase oscillator networks: bifurcations, symmetry and reversibility for generalized coupling, *Frontiers in Applied Mathematics and Statistics*, **2(7)**, (2016).

6. P. Ashwin, O. Burylko, Weak chimeras in minimal networks of coupled phase oscillators, *Chaos*, **25(1)**, 013106 (2015).
7. O. Burylko, Y. Kazanovich, R. Borisyuk, Bifurcation study of phase oscillator systems with attractive and repulsive interaction, *Physical Review E*, **90**, 022911 (2014).
8. R. Merrison-Hort, N. Yousif, F. Njap, U.G. Hofmann, O. Burylko, R. Borisyuk, An interactive channel model of the basal ganglia: Bifurcation analysis under healthy and parkinsonian conditions, *The Journal of Mathematical Neuroscience*, **3(14)**, 1–40 (2013).
9. Y. Kazanovich, O. Burylko, R. Borisyuk, Competition for synchronization in a phase oscillator system, *Physica D*, **261**, 114–124 (2013).
10. O. Burylko, Y. Kazanovich, R. Borisyuk. Bifurcations in phase oscillator networks with a central element, *Physica D*, **241**, 1072–1089 (2012).; Doi: 10.1016/j.physd.2012.02.020.
11. O. Burylko, Competition and bifurcations in phase oscillator networks with positive and negative couplings. *Proceedings of International Workshop on Nonlinear Dynamics of Electronic Systems*, **20**, 161–164, (2012).
12. O. Burylko, A. Pikovsky, Desynchronization transitions in nonlinearly coupled phase oscillators, *Physica D*, **240**, 1352–1361 (2011).
13. P. Ashwin, O. Burylko, Y. Maistrenko, Bifurcation to heteroclinic cycles and sensitivity in three and four coupled phase oscillators, *Physica D*, **237**, 454–466 (2008).
14. Y. Maistrenko, B. Lysyansky, C. Hauptmann, O. Burylko, P.A. Tass, Multistability in the Kuramoto model with synaptic plasticity, *Physical Review E*, **75**, 066207 (2007).
15. P. Ashwin, O. Burylko, Y. Maistrenko, O. Popovych, Extreme sensitivity to detuning for globally coupled phase oscillators. *Physical Review Letters*, **96**, 054102 (2006).

16. Y. Maistrenko, O. Popovych, O. Burylko, P.A. Tass, Mechanism of desynchronization in the finite-dimensional Kuramoto model. *Physical Review Letters*, **93**, 084102 (2004).
17. O. Burylko, A. Davydenko, To the problem of complementability of periodic frame to a periodic basis, *Nonlinear Oscillations*, **4**, 458–470 (2001).
18. O. Burylko, A. Davydenko, To the problem of introduction of local coordinates in the neighbourhood of an invariant toroidal set, *Nonlinear Oscillations*, **4**, 171–190 (2001).
19. О. Бурилко, Функції Гріна слабкорегулярних систем лінійних диференціальних рівнянь. *Нелінійні Коливання*, **3**(3), 315–322 (2000).
20. A.M. Samoilenko, A.A. Burilko, I.N. Grod, Moduli of continuity of the derivatives of invariant tori for linear extensions of dynamical systems, *Differential Equations*, **36**, 120–131 (2000).
21. O. Burylko: What are chimeras in dynamical systems?, 11<sup>th</sup> *Nonlinear Economics Dynamics Conference* (Kyiv, Ukraine, 4–6 September, 2019) P. 11.
22. O. Burylko, Y. Kazanovich, R. Borisyuk, Winner–take–all in a phase oscillator system with adaptation, *Modern Stochastics: Theory and Applications. IV* (Kyiv, Ukraine, May 24–26, 2018) P. 24.
23. О. Бурилко, Я. Казанович, Р. Борисюк, Переможець отримує все в системі фазових осциляторів з адаптацією, *Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях* (Чернівці, Україна, 17–19 вересня, 2018), С. 50.
24. O. Burylko, Winner–take–all in a phase oscillator system with adaptation, WIAS Workshop "Dynamics of Coupled Oscillator Systems" (Berlin, Germany, 19–21 November, 2018) P. 12.



25. R. Borisyuk, O. Burylko, Y. Kazanovich, Multiple Winner–Take–All solutions in the star–like system of phase oscillators with parameter adaptation, *SIAM Conference on Applications of Dynamical Systems* (Snowbird, USA, May 21–25, 2017) P. 84.
26. O. Burylko, Coexistence of Hamiltonian–like and dissipative dynamics in chains of coupled phase oscillators with skew–symmetric coupling, *Workshop on synchronization and oscillators with generalized coupling* (Exeter, UK, 20–22 April, 2016), P. 3.
27. O. Burylko, Y. Kazanovich, R. Borisyuk, Analysis of bifurcations and the study of competition in phase oscillator networks with positive and negative coupling, *SIAM Conference on Applications of Dynamical Systems* (Snowbird, USA, May 19–23, 2013), P. 71.
28. О. Бурилко, Я. Казанович, Р. Борисюк, Біфуркації в моделі фазових осциляторів з притягуючими та відштовхуючими зв'язками, *Боголюбовські читання DIF-2013* (Севастополь, Україна, 23–30 Червня, 2013), С. 74.
29. O. Burylko, Heteroclinic cycles in coupled phase oscillators systems with asymmetric coupling functions, *International workshop "Nonlinear Dynamics on Networks"* (Kyiv, Ukraine, 5–9 July, 2010), P. 26.
30. T. Malashchenko, W. Barnett, O. Burylko, G. Cymbalyuk, Control of bursting activity by modulation of ionic currents, *Eighteenth Annual Computational Neuroscience Meeting* (Berlin, Germany, 13 July, 2009) P. 27.
31. O. Burylko, A. Pikovsky, M. Rosenblum, Bifurcations in generalization of Kuramoto–Sakaguchi model of coupled phase oscillators, *International Workshop on Nonlinear Dynamics of Electronic Systems* (Rapperswil, Switzerland, 21–24 June, 2009) p. 211–214.
32. O. Burylko, Bifurcation to heteroclinic cycles and sensitivity in coupled phase oscillators, *International workshop "Mathematical modeling in neuroscience"* (Kyiv, Ukraine, 16–18 July 2008) P. 8.

33. O. Burylko, Bifurcation to heteroclinic cycles in phase coupled oscillators, *Workshop "Complex dynamics and delay effects in complex systems"* (Berlin, Germany, 11–13 September, 2006), P. 18.
34. O. Burylko, P. Ashwin, Y. Maistrenko, Bifurcation of heteroclinic cycles in Kuramoto model of globally coupled oscillators, *International workshop "Theory and applications of coupled cell networks"* (Cambridge, UK, 26–30 September, 2005) P. 21.
35. Ю. Майстренко, О. Бурилко, Синхронізація в моделі Курамото глобально зв'язаних осциляторів, *Міжнародна наукова конференція "Шості боголобівські читання"* (Чернівці, Україна, 26–30 серпня, 2003) С. 135.
36. О. Бурилко, А. Давиденко, Проблеми введення локальних координат в околі інваріантної тороїдальної множини, *Український Математичний Конгрес* (Київ, Україна, 27–29 серпня, 2001), С. 26.
37. О. Бурилко, Функції Гріна експоненціально трихотомічних систем диференціальних рівнянь, *Міжнародна конференція "Диференціальні та інтегральні рівняння"* (Одеса, Україна, 12–14 вересня, 2000), С. 43.

## Відомості про апробацію результатів дисертації:

Результати дисертаційної роботи доповідалися та обговорювалися на багатьох наукових семінарах та міжнародних наукових конференціях, зокрема на:

- семінарах відділу диференціальних рівнянь та теорії коливань Інституту математики НАН України (2001, 2018, 2019; керівник: академік А.М. Самойленко),
- засіданнях Вченої Ради Інституту математики НАН України (2007, 2011, 2012, 2015, 2018);
- семінарі відділу випадкових процесів Інституту математики НАН України (2007; керівник проф. А.А. Дороговцев);

- семінарах "Теорія конфліктів" Інституту математики НАН України (2018, 2019; керівник: проф. В.Д. Кошманенко);
- семінарі Лабораторії складних систем КПУ Драгоманова (2019; керівник: проф. Ю.Г. Кондратьєв);
- семінарі кафедри математичного аналізу та диференціальних рівнянь КПУ Драгоманова (2019; керівник: проф. Г.М. Торбін);
- семінарі "Математика та науки про життя" Інституту математики НАН України (2011; керівник: д.ф.-м.н. О.В. Антонюк);
- засіданнях об'єднаного Берлінського семінару з динамічних систем (2008, 2009, 2011, 2015; керівники: проф. Б. Фідлер, проф. М. Вольфрум);
- семінарі Інституту медицини наукового центру м. Юліх, Німеччина (2002, 2006; керівник проф. П. Тасс);
- семінарах факультету фізики та астрономії Університету м. Потсдам, Німеччина (2007, 2008, 2017; керівники: проф. А. Піковський, проф. М. Розенблюм);
- семінарах математичного факультету м. Екзетер, Великобританія (2005, 2010, 2012, 2016; керівник: проф. П. Ешвін);
- семінарах математичного факультету Державного Університету Джорджії, США (2007, 2014; керівники: проф. А. Шильніков, проф. І. Бєлих);
- Міжнародній конференції *Диференціальні та інтегральні рівняння* (Одеса, Україна, 2000);
- *Український Математичний Конгрес* (Київ, Україна, 2001);
- Міжнародна наукова конференція *Шості боголюбівські читання* (Чернівці, Україна, 2003);

- International workshop *Theory and applications of coupled cell networks* (Кембрідж, Великобританія, 2005);
- International workshop *Nonlinear Dynamics in Engineering and Nanotechnologies* (Ялта, Україна, 2006);
- Workshop *Complex dynamics and delay effects in complex systems* (Берлін, Німеччина, 2006);
- Конференції присвяченій 80-річчю проф. Г. Хакена (Бад Хоннеф, Німеччина, 2007);
- International workshop *Mathematical modeling in neuroscience* (Київ, Україна, 2008);
- Minisymposium *Dynamics of coupled phase oscillators* (Берлін, Німеччина, 2009);
- International workshop *Nonlinear dynamics on networks* (Київ, Україна, 2010);
- Conference *Nonlinear dynamics of electronic systems* (Вольфенбютель, Німеччина, 2011);
- Workshop on *Synchronization and oscillators with generalized coupling* (Ексетер, Великобританія, 2016);
- Міжнародній конференції *Сучасна стохастика: Теорія та застосування IV* (Київ, 2018);
- Міжнародній конференції *Сучасні проблеми математики* (Чернівці, Україна, 2018);
- WIAS workshop *Dynamics of coupled phase oscillators* (Берлін, Німеччина, 2018);
- 11<sup>th</sup> *Nonlinear Economics Dynamics Conference* (Київ, Україна, 2019).

## Додаток Б

### Деякі поняття з теорії біфуркацій

Основними методами дослідження у роботі є якісна та аналітична теорія динамічних систем, а також теорія біфуркацій. Детально ці теорії викладено у багатьох монографіях, зокрема, у роботах [1, 4, 105, 142, 209, 184, 28, 154, 298, 334, 11, 68]. Далі наводиться список основних понять, що широко використовуються на протязі усієї дисертації зі вказівкою на сторінки їх означень та описань у класичних монографіях Дж. Гукенхеймера, П. Холмса [154] та Ю. Кузнєцова [209] (також зі вказівкою на інші монографії у деяких випадках). Отже, на протязі даної роботи крім іншого будуть використовуватись такі поняття:

- Інваріантний многовид [154, стор. 33], [209, стор. 11], [11, стор. 56];
- Стійкість інваріантної множини [154, стор. 33], [209, стор. 59], [11, стор. 19];
- Біфуркація [154, стор. 117, 119], [209, стор. 57];
- Біфуркаційна діаграма [154, стор. 119], [209, стор. 61];
- Локальна біфуркація [154, стор. 117], [209, стор. 79];
- Глобальна біфуркація [154, стор. 289], [209, стор. 195];
- Структурна стійкість [154, стор. 39], [209, стор. 68];
- Нормальна форма біфуркації [154, стор. 138], [209, стор. 65], [43, стор. 73];
- Гіперболічна особлива точка [154, стор. 13], [209, стор. 50];
- Гіперболічний граничний цикл [154, стор. 60], [209, стор. 54];
- Квазі-періодична траєкторія [154, стор. 349], [209, стор. 271], [11, стор. 19];
- Тороїдальний многовид [154, стор. 3, 181], [209, стор. 267], [11, стор. 91];
- Центральний многовид [154, стор. 123, 127], [209, стор. 151, 165];

- Граничний цикл [154, стор. 15], [209, стор. 10];
- Гомоклінічна орбіта [154, стор. 45], [209, стор. 195];
- Гетероклінічна траєкторія [154, стор. 22], [209, стор. 195];
- Гетероклінічний цикл [154, стор. 15, 45], [209, стор. 195], [36, Стор. 111];
- Сідло–вузлова біфуркація [154, стор. 146], [209, стор. 159];
- Транскритична біфуркація [154, стор. 145, 149], [209, стор. 75];
- Біфуркація вилки [154, стор. 145, 150], [209, стор. 62];
- Біфуркація Андронова–Хопфа [154, стор. 150], [209, стор. 86];
- Корозмірність біфуркації [154, стор. 120], [209, стор. 2];
- Біфуркація Богданова–Такенса [154, стор. 367], [209, стор. 314];
- Гомоклінічна біфуркація [154, стор. 183, 325], [209, стор. 198];
- Трансверсальний напрямок [154, стор. 120], [209, стор. 197];
- Відображення (переріз) Пуанкаре [154, стор. 22], [209, стор. 23];
- Гамільтонова система [154, стор. 46], [209, стор. 19];
- SNIC біфуркація (сідло–вузол на інваріантному циклі) [154, стор. 149], [209, стор. 59];
- Біфуркація народження тору (Неймарка–Сакера) [209, стор. 114, 125], [298, том 2, стор. 220];
- Сідло–зв’язна (гетероклінічна) біфуркація [154, стор. 290], [209, стор. 59, 200];
- Корозмірність біфуркації [154, стор. 120], [209, стор. 63];
- Сідло–фокус [154, стор. 318], [209, стор. 47, 196];
- Сідловий цикл [154, стор. 30], [209, стор. 55];
- Детермінований хаос [154, стор. 66], [334, стор. 420, 436];
- Вироджена біфуркація [154, стор. 73], [209, стор. 90];
- Сідло–вузлова біфуркація циклів (біфуркація складки) [154, стор. 2], [209, стор. 114, 163];
- Біфуркація подвоєння періоду [154, стор. 157, 346], [209, стор. 114, 123];
- Катастрофа блакитного неба [209, стор. 265], [298, том 2, стор. 275];
- Числа обертання [154, стор. 295], [209, стор. 269].

## Додаток В

### Доведення окремих тверджень

#### В.1 Доведення Леми 2.3.1

Безпосередньою підстановкою переконуємось, що множина (i) задовольняє рівняння (2.13) для будь-яких  $\alpha$ . Також пересвідчуємось, що множина (iii) задовольняє це рівняння при певних

$$\alpha = \arctan \left( \frac{N \sin \varphi_k}{(2p - N)(\cos \varphi_k - 1)} \right), \quad p \neq N/2,$$

залежних від відстані між двома кластерами  $\varphi_k = \theta_1 - \theta_{k+1} \neq 0$  (значення параметру  $\alpha$  задовольняє рівнянню (2.15)). Відмітимо, що у випадку парної розмірності  $N = 2p$  виникає неперервна сім'я (одно-вимірний многовид) дво-кластерних станів (iii), яка буде описана детально нижче. З умови (ii) випливає, що  $\sum_{j=1}^N e^{-i\theta_j} = 0$ . Отже,

$$\begin{aligned} g_1(\theta_1, \dots, \theta_n, \alpha) - g_i(\theta_1, \dots, \theta_n, \alpha) &= \text{Im} \left[ - \sum_{j=1}^N e^{-i(\theta_1 - \theta_j - \alpha)} + e^{-i(\theta_1 - \theta_j - \alpha)} \right] \\ &= \text{Im} \left[ -e^{-i\alpha} \sum_{j=1}^N e^{-i\theta_j} (e^{i\theta_1} - e^{i\theta_j}) \right] = 0. \end{aligned}$$

Далі покажемо, що кожен корінь системи (2.13) задовольняє одну з умов (i)–(iii). Ми можемо переписати (2.13) наступним чином:

$$\begin{aligned}
& (\sin(\theta_1 - \alpha) - \sin(\theta_i - \alpha)) \sum_{j=1}^N \cos \theta_j - \\
& - (\cos(\theta_1 - \alpha) - \cos(\theta_i - \alpha)) \sum_{j=1}^N \sin \theta_j = 0, \quad (8.1)
\end{aligned}$$

де  $i = 2, \dots, N$ . Далі розглянемо чотири можливих випадки.

**А.** Якщо  $\sum_{j=1}^N \sin \theta_j = 0$  і  $\sum_{j=1}^N \cos \theta_j = 0$  одночасно, то виконується умова (ii).

**В.** Можливим випадком є такий, що  $\sum_{j=1}^N \sin \theta_j = 0$ , але  $\sum_{j=1}^N \cos \theta_j \neq 0$ . У цьому випадку з умови (8.1) випливає:

$$\sin(\theta_1 - \alpha) = \sin(\theta_i - \alpha), \quad i = 2, \dots, N.$$

Коренями останньої системи можуть бути лише множини значень, що відповідають дво-кластерним станам:

$$\theta_i = \begin{cases} \theta_1, & \text{якщо } i = 2, \dots, p, \\ -\theta_1 + 2\alpha + \pi, & \text{якщо } i = p + 1, \dots, N, \end{cases}$$

які мусять задовольняти рівняння:

$$p \sin \theta_1 - (N - p) \sin(\theta_1 - 2\alpha) = 0, \quad p = 1, \dots, N.$$

Останні рівняння виникають з умови  $\sum_{j=1}^N \sin \theta_j = 0$  і вони показують, що дво-кластерні стани можливі лише для певних значень параметра  $\alpha$ . Відмітимо, що випадок  $p = N$ , коли умова (iii) спрощується до умови (i), відповідає одно-кластерному розв'язку.

**С.** Розглянемо випадок, коли  $\sum_{j=1}^N \cos \theta_j = 0$ , але  $\sum_{j=1}^N \sin \theta_j \neq 0$ . Як і в попередньому випадку, можливими розв'язками є лише дво-кластерні (одно-кластерні при  $p = N$ ) стани:

$$\theta_i = \begin{cases} \theta_1, & \text{якщо } i = 2, \dots, p, \\ -\theta_1 + 2\alpha, & \text{якщо } i = p + 1, \dots, N, \end{cases}$$

що задовольняють умову

$$p \cos \theta_1 - (N - p) \cos(\theta_1 - 2\alpha) = 0, \quad p = 1, \dots, N.$$

**Д.** Розглянемо множину змінних  $(\theta_1, \dots, \theta_N)$  таких, що  $\sum_{j=1}^N \sin \theta_j \neq 0$  та  $\sum_{j=1}^N \cos \theta_j \neq 0$ . Позначимо  $S := \sum_{j=1}^N \sin \theta_j$ ,  $C := \sum_{j=1}^N \cos \theta_j$ ,  $s_j^\alpha := \sin(\theta_j - \alpha)$ ,



$c_j^\alpha := \cos(\theta_j - \alpha)$ . Тоді система (8.1) приймає наступний вигляд:

$$(s_1^\alpha - s_i^\alpha) C - (c_1^\alpha - c_i^\alpha) S = 0, \quad i = 2, \dots, N. \quad (8.2)$$

**D1.** Припустимо що  $s_1^\alpha - s_i^\alpha = 0$  для всіх  $i = 2, \dots, N$ . Тоді, використовуючи нерівність  $S \neq 0$ , ми отримуємо  $c_1^\alpha - c_i^\alpha = 0$  для  $i = 2, \dots, N$ . З одночасного виконання рівностей для  $s_i^\alpha$  та  $c_i^\alpha$  випливає

$e^{i(\theta_1 - \alpha)} = e^{i(\theta_j - \alpha)}$ ,  $j = 2, \dots, N$ . Останні рівності можливі лише за умови, коли всі значення  $\theta_j, j = 1, \dots, N$ , є однаковими (повна синхронізація).

**D2.** Тепер розглянемо інший випадок, припускаючи, що існує фіксоване число  $i_0$  таке, що  $s_1^\alpha - s_{i_0}^\alpha \neq 0$ . Без обмеження загальності та зручності викладу, будемо вважати, що  $i_0 = 2$ . Тоді з першого з рівнянь (8.2) ми отримуємо:

$$C = (c_1^\alpha - c_2^\alpha) S / (s_1^\alpha - s_2^\alpha).$$

Підставляючи  $C$  в друге з рівнянь (8.2) ми маємо:

$$S (s_1^\alpha - s_3^\alpha) (c_1^\alpha - c_2^\alpha) / (s_1^\alpha - s_2^\alpha) - S (c_1^\alpha - c_3^\alpha) = 0.$$

Використовуючи умови  $S \neq 0$  та  $s_1^\alpha - s_2^\alpha \neq 0$ , ми отримуємо:

$$(s_1^\alpha - s_3^\alpha) (c_1^\alpha - c_2^\alpha) - (s_1^\alpha - s_2^\alpha) (c_1^\alpha - c_3^\alpha) = 0$$

і, отже,

$$(s_1^\alpha c_3^\alpha - c_1^\alpha s_3^\alpha) + (s_2^\alpha c_1^\alpha - c_2^\alpha s_1^\alpha) + (s_2^\alpha c_2^\alpha - c_3^\alpha s_2^\alpha) = 0.$$

Повертаючись до старих позначень та виконуючи певні перетворення, ми отримуємо наступну рівність

$$\sin(\theta_1 - \theta_3) + \sin(\theta_2 - \theta_1) + \sin(\theta_3 - \theta_2) = 0,$$

яка вже не містить параметра  $\alpha$ . Наступну частину доведення ми проведемо методом від супротивного. Очевидно, що припущення випадку **D** виключають виконання умови (ii). Також припустимо, що умови (i) та (iii) також не виконуються. Це означає, що існує розв'язок  $(\theta_1, \dots, \theta_N)$  рівняння (8.2) такий, що принаймні три змінні  $\theta_{i_1}, \theta_{i_2}, \theta_{i_3}$  цього рівняння не є рівними одна одній. Без обмеження загальності ми можемо вважати, що  $i_1 = 1, i_2 = 2, i_3 = 3$ , оскільки ми можемо перейменувати змінні, використовуючи симетрію перестановки (мережа зв'язку має  $\mathbf{S}_N$  симетрію). З нерівностей  $\theta_1 \neq \theta_2, \theta_1 \neq \theta_3$ ,

$\theta_2 \neq \theta_3$  впливає наступне:

$$\begin{aligned} & \sin(\theta_1 - \theta_3) + \sin(\theta_3 - \theta_2) + \sin(\theta_2 - \theta_1) \\ &= -4 \sin\left(\frac{\theta_1 - \theta_3}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_3 - \theta_2}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\right) \neq 0. \end{aligned}$$

Це протиріччя доводить виконання (i) або (iii).

**D3.** Далі розглянемо (останню з можливих) ситуацію, коли  $c_i^\alpha - c_{i_0}^\alpha \neq 0$  для де-якого індексу  $i_0$ . Тоді тим же самим способом, як і у випадку **D2**, доведемо, що розв'язки системи (8.2) мусять задовольняти одну з умов (i) або (iii). Лема доведена.  $\square$

## В.2 Доведення Теорема 2.3.5

**Доведення.** Коротко опишемо основні моменти в доведення прив'язуючи їх до наведених вище ідей, формул та тверджень. Існування положень рівноваги, описаних у пунктах 1–4 Теорема 2.3.1, впливає з Лема 2.3.1. Згідно результатам леми система (2.12) має лише положення повної синхронізації  $\Phi_{sync}$  (пункт 1), інваріантний антифазний многовид  $\mathcal{M}^{(N-1)}$  (пункт 2) та дво-кластерні стани з ізотропією  $\mathbf{S}_p \times \mathbf{S}_{N-p}$  (пункт 3).

Пункт 4 описує частковий випадок дво-кластерних розв'язків пункту 3 для  $p = N/2$ , які мають додаткові важливі особливості завдяки додатковій симетрії. Згідно лемі, система (2.12) не має жодних  $k$ -кластерних станів (2.7) для  $k \geq 3$ , що також означає відсутності будь-яких положень рівноваги усередині  $\bar{\mathcal{C}} \setminus \bar{\mathcal{M}}^{(N)}$ . Згідно результатів Лема 2.3.1, множина  $\bar{\mathcal{M}}^{(N)}$  не лише є інваріантною відносно потоку системи, а вона цілком складається з особливих точок у  $\mathbb{T}^N$ . Також Лема 2.3.1 дозволяє локалізувати усі біфуркації особливих точок. Тобто можуть бути лише біфуркації уздовж одно-вимірних інваріантних многовидів, що відповідають дво-кластерним станам, або біфуркації точок многовиду  $\bar{\mathcal{M}}^{(N)}$ , які можуть бути лише біфуркаціями Андронова–Хопфа. Аналіз біфуркацій на кластерних многовидах (підрозділ 2.3.2) показує, що можливою локальною біфуркацією на  $\partial\bar{\mathcal{C}}$  є транскритична біфуркація початку координат і сідла на дво-кластерному многовиді (2.3.2),

а положення даного сідла на цьому многовиді описується формулою (2.16). Симетрія перестановок  $\mathbf{S}_N$  вказує на те, що одночасно відбувається  $N$  таких симетричних біфуркація на різних симетричних многовидах  $\mathcal{P}_2$ . Аналіз проведений у підрозділі 2.3.3 показує, що єдиною біфуркацією всередині  $\bar{\mathcal{C}}$  є вироджена біфуркація Андронова–Хопфа, що відбувається одночасно у кожній точці многовиду  $\overline{\mathcal{M}}^{(N)}$ , яка не призводить до появи граничних циклів після біфуркації. Виродженість біфуркації пов'язана з симетричністю системи (внаслідок симетрії функції зв'язку) відносно параметру  $\alpha$  у точці  $\alpha_0 = \pi/2$  (або  $\pi/2$ ). Поява граничного циклу після АН біфуркації у  $\alpha = \alpha_0$  означала б існування симетричного граничного циклу до біфуркації. Під час самої біфуркації при  $\alpha = \pm\pi/2$  кожна з інваріантних областей  $\bar{\mathcal{C}}$  заповнена  $N - 2$  параметричною множиною періодичних орбіт. Такий висновок можна також зробити з ВС теорії, яка описує дані періодичні орбіти у редукованому фазовому просторі (як це було описано у Додатку Б). У граничних біфуркаційних випадках  $\alpha = \pm\pi/2$  сім'я періодичних розв'язків описується аналітично, оскільки система має  $(N - 2)$  функціонально незалежних перших інтегралів (8.35).

Поява гетероклінічних циклів (пункт б) є результатом глобальних гетероклінічних біфуркацій, що базуються на локальних біфуркаціях синхронного режиму  $\Phi_{sync}$  та сідлових точок на многовидах з ізотропією  $\mathbf{S}_{N/2} \times \mathbf{S}_{N/2}$  (як описано у підрозділі 2.3.2). У момент біфуркації при  $\alpha = \pm\pi/2$  точка  $\Phi_{sync}$  є виродженим сідлом, кожен одно-вимірний інваріантний многовид якого співпадає з прямою лінією (2.14). Будь-яких інших положень рівноваги на кожній дво-кластерній лінії у біфуркаційний момент нема (згідно формули (2.16)) і, отже  $\Phi_{sync}$  утворює симетричні гомоклінічні петлі у просторі  $\mathbb{T}^{N-1}$  у кожному з напрямків (2.14) (многовид замикається, виходячи з точки і повертаючись до неї з іншого боку). Підкреслимо, що траєкторії є *гомоклінічними* завдяки тому, що фазовий простір  $\mathbb{T}^{N-1}$  є тороїдальним. У випадку, коли розглядається не факторизований фазовий простір  $\mathbb{R}^{N-1}$ , кожен з інваріантних многовидів з'єднує дві різні точки, принаймні одна координата яких відрізняються (у одній 0, у іншій  $2\pi$ ). Тому у  $\mathbb{R}^{N-1}$  різні гомоклінічні траєкторії утворюють  $N$ -компонентні *гетероклінічні* цикли. Для фазового простору  $\mathbb{T}^{N-1}$  та-

кож зручніше вважати цикли гетероклінічними, оскільки таким чином можна зрозуміти глобальні гетероклінічні біфуркації і яким чином вони приводять до появи граничних циклів усередині інваріантних областей  $\bar{\mathcal{C}}$ . Наявність таких гетероклінічних циклів є наслідком симетрії  $\mathbb{Z}_N$ , що, у свою чергу є наслідком глобальної взаємодії осциляторів. Другий тип гетероклінічних циклів утворюється підчас біфуркацій при  $\alpha = \pm\pi/2$  для непарно-вимірних систем у  $\mathbb{T}^{N-1}$ , тобто коли оригінальна система мала парну кількість осциляторів. Як було описано у підрозділі 2.3.2, у такому випадку інваріантні многовиди з ізотропією  $\mathbf{S}_{N/2} \times \mathbf{S}_{N/2}$  цілком заповнюються особливими точками внаслідок виродженої біфуркації. Кожна з таких особливих точок є нейтральною уздовж даного многовиду та є сідловою у трансверсальних напрямках з однаковою розмірністю  $N/2 - 1$  стійкого та нестійкого многовидів. Гетероклінічні цикли у цьому випадку складаються з двох симетричних сідел  $S_1, S_2$  цього многовиду (з координатами  $\pi \pm \bar{\varphi}$ , де  $\bar{\varphi}$  — координата на многовиді) та їх одно-вимірних інваріантних многовидів  $W^u(S_1) = W^s(S_2), W^u(S_2) = W^s(S_1)$ . Обидва многовиди є також симетричними та лежать на різних гранях границі  $\partial\bar{\mathcal{C}}$ , зв'язаних згаданим многовидом. Описані замикання у гетероклінічний цикл є наслідком симетрій системи. Оскільки сідлові положення рівноваги утворюють одно-параметричну неперервну сім'ю, то породжені ними гетероклінічні цикли також утворюють одно-параметричну сім'ю і є нейтральними по відношенню один до одного. Результати про нейтральну гетероклінічну структуру розв'язків на границі  $\partial\bar{\mathcal{C}}$  доповнюють результати ВС теорії, оскільки ВС-теорія "не бачить" динамку на  $\partial\bar{\mathcal{C}}$ .

Отже, використання Лема 2.3.1 для описання усіх положень рівноваги системи (2.3), описання інваріантних дво-кластерних та антифазних многовидів системи та біфуркацій на цих інваріантних, застосування ВС теорії для описання динаміки у середині інваріантних областей  $\bar{\mathcal{C}}$ , узгодження результатів двох теорій для описання глобальних гетероклінічних біфуркацій та біфуркацій утворення періодичних орбіт призводить до повного опису особливих режимів та їх біфуркацій, як це наведено у теоремі.  $\square$

### В.3 Доведення Леми 2.4.2

Безпосередніми обчисленнями переконуємось, що матриця  $J$  має наступні елементи:

$$J_{kk} = \frac{\partial g_k}{\partial \varphi_k} = - \left[ \cos(\varphi_k - \alpha) - \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi_k} \sum_{j=1}^{N-1} \cos(\varphi_j - \alpha) + \left( 1 + \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi_k} \right) \left( \cos(\varphi_k + \alpha) - \sum_{j=1, j \neq k}^{N-1} \cos(\varphi_k - \varphi_j + \alpha) \right) \right],$$

$$J_{ki} = \frac{\partial g_k}{\partial \varphi_i} = - \left[ \cos(\varphi_i - \alpha) - \cos(\varphi_k - \varphi_i + \alpha) - \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi_i} \sum_{j=1}^{N-1} \cos(\varphi_j - \alpha) + \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi_i} \left( \cos(\varphi_k + \alpha) - \sum_{j=1, j \neq k}^{N-1} \cos(\varphi_k - \varphi_j + \alpha) \right) \right].$$

Оскільки ми розглядаємо Якобіан на многовиді  $\overline{\mathcal{M}}^{(N)}$ , то  $R = 0$ . Крім того, використовуючи дійсну частину виразу (2.6) та заміну (2.3), отримуємо

$$\cos \alpha + \sum_{j=1}^{N-1} \cos(\varphi_j - \alpha) = 0.$$

Також

$$\begin{aligned} 0 &= \operatorname{Re} \left( e^{i(\theta_{k+1} - \alpha)} \sum_{j=1}^N e^{-i\theta_j} \right) = \sum_{j=1}^N \cos(\theta_{k+1} - \theta_j - \alpha) = \sum_{j=1}^N \cos(-\varphi_k + \varphi_{j-1} - \alpha) \\ &= \cos(\varphi_k + \alpha) + \cos \alpha + \sum_{j=1, j \neq k}^{N-1} \cos(\varphi_k - \varphi_j + \alpha) \end{aligned}$$

Використовуючи останні вирази, переконуємось у тому, що всі елементи матриці Якобіану на многовиді  $\mathcal{M}^{(N)}$  можна переписати у вигляді:

$$\left. \frac{\partial g_k}{\partial \varphi_j} \right|_{\mathcal{M}^{(N)}} = \cos(\varphi_j - \varphi_k - \alpha(0, \beta)) - \cos(\varphi_j - \alpha(0, \beta)), \quad j, k = 1, \dots, N - 1.$$

Позначимо кожен стовпчик матриці  $J$  через  $\bar{J}_k$ ,  $k = 1, \dots, N - 1$ . Для того, щоб довести, що ранг матриці є не більшим за два, нам потрібно показати, що існує лінійна залежність між будь-якими трьома стовпчиками  $\bar{J}_j$ ,  $\bar{J}_k$ ,  $\bar{J}_l$  матриці  $J$ , тобто існують дві скалярні функції  $\nu_j$  та  $\nu_k$  такі, що

$$\nu_j \bar{J}_j + \nu_k \bar{J}_k = \bar{J}_l.$$

Безпосередньо можна переконатися, що остання рівність виконується для функцій

$$\nu_j = \frac{\sin(\varphi_l - \varphi_k)}{\sin(\varphi_j - \varphi_k)}, \quad \nu_k = \frac{\sin(\varphi_l - \varphi_j)}{\sin(\varphi_k - \varphi_j)},$$

де  $\varphi_j \neq \varphi_k$ . Отже,  $\text{rank}(J) \leq 2$ .

Рівняння для стовпчиків можна переписати у вигляді:

$$\sin(\varphi_k - \varphi_l) \bar{J}_j + \sin(\varphi_l - \varphi_j) \bar{J}_k + \sin(\varphi_j - \varphi_k) \bar{J}_l = 0.$$

Всі коефіцієнти цього виразу не рівні нулю, якщо  $\varphi_j \neq \varphi_k \neq \varphi_l$ . Тоді  $\text{rank}(J)$  є не меншим двох, коли система має принаймні три-кластерний режим. Отже,  $\text{rank}(J) = 2$  для три-чи-більше кластерних режимів.

У випадку парного числа осциляторів  $N = 2p$ , система має дво-кластерні положення рівноваги з симетрією  $\mathbf{S}_{N/2} \times \mathbf{S}_{N/2}$ , які належать многовиду  $\bar{\mathcal{M}}^{(N)}$ . Це означає, що в останньому рівнянні один з коефіцієнтів рівний нулю і, отже,  $\text{rank}(J) = 1$ . Лема доведена.  $\square$

## В.4 Доведення Теорема 2.4.1

Твердження теореми охоплює колективну динаміку системи, що описувалась у протязі усієї попередньої частини цього розділу. Доведення проводиться подібно до доведення Теорема 2.3.1, але з урахуванням особливостей,

що з'являються з непостійними фазовим зсувом  $\alpha = \alpha(R, \beta)$ . Далі ми дамо посилання на відповідні формули та частини доведень, що були наведені вище.

Твердження про існування особливих точок пунктів 1–3 випливає з Лема 2.4.1 та попередньої Лема 2.3.1. Лема 2.4.1 вказує на те, що всі положення рівноваги знаходяться або на інваріантних дво–кластерних многовидах  $\mathcal{P}_2$ , або на інваріантному антифазному многовиді  $\mathcal{M}^{(N)}$ , що суттєво спрощує стійкісний та біфуркаційний аналіз цих режимів. Локалізація положень рівноваги на кластерних лініях залежить від нулів функції  $\alpha(R, \beta)$  та описується рівнянням (2.21).

Стійкість режиму повної синхронізації (пункт 1) задається виразом (2.23). Описання біфуркацій цього розв'язку наведено у підрозділі 2.4.1, де також приводяться відповідні біфуркаційні значення.

Інваріантний многовид (пункт 2) описується виразом 2.6 у координатах  $\theta_i$  та виражається за допомогою формул (2.27), (2.28) для фазових різниць  $\varphi_i$ . Стійкість та біфуркації точок інваріантного многовиду  $\mathcal{M}^{(N)}$  описується Лемою 2.4.2 та наступними за нею міркуваннями у підрозділі 2.4.4, де також виводяться біфуркаційні значення (зазначені у пункті 2 теореми). Зокрема, критичні значення біфуркації Андронова–Хопфа описуються виразами (2.30), (2.31) для рівномірно–розподіленого стану та для довільних точок многовиду.

Положення рівноваги на дво–кластерних станах (пункт 3 теореми) локалізуються за допомогою формул (2.14)–(2.16) та (2.21). Для системи у фазових різницях (2.4) усі дво–кластерні стани відповідають одно–вимірним інваріантним многовидам. Таким чином, дослідження біфуркацій особливих точок зводиться до дослідження біфуркацій на відповідних прямих. Описання стійкості дво–кластерних станів та їх біфуркацій наводиться у підрозділі 2.4.2.

Відмітимо, що Теорема 2.4.1 не містить аналогу пункту 4 з Теореми 2.3.1. Причиною цього є те, що на відміну від моделі Курамото–Сакагучі, система з нелінійним фазовим зсувом має невироджені біфуркації при  $\alpha(R, \beta) = \pi/2$ , які також відбуваються не одночасно, оскільки  $\alpha$  є функцією просторових змінних та параметрів:  $\alpha = \alpha(R(\varphi_1, \dots, \varphi_N), \beta)$ .

Існування граничних циклів (відповідно до пункту 4 Теорема 2.4.1) ви-

пливає з теорії Ватанабе–Строгатца [331] (див. Додаток Б). Такі граничні цикли є лініями рівня зведеної системи, представлені у цій теорії. Особливості існування граничних циклів у системі з фазовим зсувом наводяться у теорії Піковського–Розенблюма [276, 263], що є розширенням ВС теорії для відповідного випадку. Особливості біфуркацій появи цих циклів описуються у підрозділі 2.4.5. Біфуркації граничних циклів (Андропова–Хопфа, сідло–вузлова та вилкова) цілком описуються біфуркаціями точок у відображенні Пуанкаре  $\Pi_N$  (2.32) усередині інваріантних областей  $\bar{\mathcal{C}}$ . Після народження точки з  $\mathcal{M}^{(N)}$  період циклу є близьким до нуля і він збільшується до нескінченності при наближенні циклу до границі області  $\partial\bar{\mathcal{C}}$ .

Існування та структуру гетероклінічних циклів (пункт 5) описано у підрозділі 2.4.3. Згідно результатам цього підрозділу, гетероклінічні цикли повністю належать границям інваріантних областей  $\partial\bar{\mathcal{C}}$ . Вони складаються з сідел  $S_k$  (регулярних чи вироджених) та сідло–вузлів  $SN_m$  (ми не визначаємо тут інтервал зміни індексів, оскільки число сідел та сідло–вузлів залежить від багатьох чинників, таких, як розмірність системи та параметри функції зв'язку  $\alpha(R, \beta)$ ), що знаходяться на інваріантних дво–кластерних многовидах  $\mathcal{P}_2$ , та одно–вимірних інваріантних многовидів  $W^u(S_k)$ ,  $W^s(S_k)$ , що цілком належать гіперплощинам вигляду  $\varphi_i = 0$ ,  $\varphi_i = \varphi_j$  (які утворюють  $\partial\bar{\mathcal{C}}$ ). Гетероклінічні цикли з'являються внаслідок глобальних гетероклінічних біфуркацій, побудованих на локальних сідло–вузлових, транскритичних та вилкових біфуркаціях положень рівноваги на  $\mathcal{P}_2$ . Інваріантні многовиди  $W^u(S_k)$ ,  $W^s(S_k)$  одного сідла  $S_k$  гетероклінічного циклу  $HC$  належать різним гіперплощинам границі  $\partial\bar{\mathcal{C}}$ , що перетинаються по  $\mathcal{P}_2 \ni S_k$ . Саме гетероклінічні біфуркації є причиною появи/зникнення великих граничних циклів на межі  $\partial\bar{\mathcal{C}}$ . Перетворення граничного циклу у гетероклінічний цикл на границі  $\partial\bar{\mathcal{C}}$  у момент відповідної біфуркації узгоджується зі збільшенням його періоду до нескінченності (згідно аналогам теореми Андропова–Леонтович [22, 209]).

Отже, використання Лема 2.4.1 та Лема 2.4.2 для описання положень рівноваги системи (2.3), їх стійкостей, описання інваріантних дво–кластерних та антифазних многовидів системи та біфуркацій на цих інваріантних, застосування ВС теорій та Піковського–Розенблюма для описання динаміки



у середині інваріантних областей  $\bar{C}$ , узгодження результатів цих теорій для описання глобальних гетероклінічних біфуркацій та біфуркацій утворення періодичних орбіт призводить до повного опису особливих режимів та їх біфуркацій, як це наведено у теоремі.  $\square$

### В.5 Доведення Лема 3.3.3

Для  $N = 2$

$$\mathcal{M}^{(2)} = \{(\theta_1, \theta_2) : e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2} = 0\} = (\theta_1, \theta_1 + \pi).$$

Для  $N = 3$

$$\mathcal{M}^{(3)} = \{(\theta_1, \theta_2, \theta_3) : e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2} + e^{i\theta_3} = 0\} = \left(\theta_1, \theta_1 + \frac{2\pi}{3}, \theta_1 - \frac{2\pi}{3}\right).$$

У обох випадках описані множини відповідають станам рівномірно розподілених фаз, тобто  $\mathcal{M}^{(2)} = \Theta_{splay}^{(2)}$ ,  $\mathcal{M}^{(3)} = \Theta_{splay}^{(3)}$ , які мають нуль-вимірні підпростори особливих точок для фазових різниць і, отже, є динамічно інваріантними.

Для  $N = 4$  можна безпосередньо переконатись, що

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{(4)} &= \left\{(\theta_1, \dots, \theta_4) : \sum_{j=1}^4 e^{i\theta_j} = 0\right\} \\ &= \{(\theta_1, \theta_2, \theta_1 + \pi, \theta_2 + \pi), (\theta_1, \theta_1 + \pi, \theta_3, \theta_3 + \pi), (\theta_1, \theta_2, \theta_2 + \pi, \theta_1 + \pi)\}. \end{aligned}$$

На відміну від попередніх випадків, множина  $\mathcal{M}^{(4)}$  не складається цілком з *положень рівноваги* фазових різниць, коли функція зв'язку має старші гармоніки ( $r \neq 0$ ), за винятком динамічно інваріантних розв'язків  $\Theta_{splay}^{(4)} \in \mathcal{M}^{(4)}$ . Тим не менше, покажемо, що  $\mathcal{M}^{(4)}$  повністю складається з динамічно інваріантних траєкторій. Дійсно, для розв'язку  $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_1 + \pi, \theta_2 + \pi)$ , використовуючи тотожність  $g(\varphi - \pi) = g(\varphi + \pi)$ , маємо:

$$\begin{aligned}
4 \frac{d}{dt} \left( \sum_{j=1}^4 e^{i\theta_j} \right) &= 4 \sum_{j=1}^4 i e^{i\theta_j} \frac{d\theta_j}{dt} = i \sum_{j=1}^4 e^{i\theta_j} \sum_{k=1}^4 g(\theta_j - \theta_k) \\
&= e^{i\theta_1} (g(0) + g(\theta_1 - \theta_2) + g(-\pi) + g(\theta_1 - \theta_2 - \pi)) \\
&\quad + e^{i\theta_2} (g(\theta_2 - \theta_1) + g(0) + g(\theta_2 - \theta_1 - \pi) + g(-\pi)) \\
&\quad + e^{i(\theta_1 + \pi)} (g(\pi) + g(\theta_1 - \theta_2 + \pi) + g(0) + g(\theta_1 - \theta_2)) \\
&\quad + e^{i(\theta_2 + \pi)} (g(\theta_2 - \theta_1 + \pi) + g(\pi) + g(\theta_2 - \theta_1) + g(0)) \\
&= (e^{i\theta_1} - e^{i\theta_1}) (g(0) + g(\theta_1 - \theta_2) + g(\pi) + g(\theta_1 - \theta_2 + \pi)) \\
&\quad + (e^{i\theta_2} - e^{i\theta_2}) (g(0) + g(\theta_2 - \theta_1) + g(\pi) + g(\theta_2 - \theta_1 + \pi)) = 0.
\end{aligned}$$

Для інших двох розв'язків з множини  $\mathcal{M}^{(4)}$  остання рівність виконується внаслідок симетрії. Відмітимо, що інваріантність множини  $\mathcal{M}^{(4)}$  також впливає з того, що вона складається з розв'язків які відповідають підпросторам фіксованих точок  $(\mathbf{S}_1 \times \mathbf{S}_1)^2 = \times_s \mathbb{Z}_2$  (див. рис. 8.11), які є також інваріантними.

Для систем вищих розмірностей  $N \geq 5$  множини  $\mathcal{M}^{(N)}$  також (як і при  $N = 4$ ) на відміну від випадків  $N = 2$ ,  $N = 3$  не є об'єднанням підпросторів особливих точок для фазових різниць. Але, крім того, на відміну від  $N = 4$ , множина  $\mathcal{M}^{(N)}$ ,  $N \geq 5$ , не є динамічно інваріантною. Останнє означає те, що траєкторії, які стартують з  $\mathcal{M}^{(N)}$ ,  $N \geq 5$ , покидають цю множину під дією векторного поля системи (за винятком  $\Theta_{splay}^{(N)} \in \mathcal{M}^{(N)}$ ,  $N \geq 5$ ). Переконаємось у цьому для  $N = 5$ . Зокрема, три-вимірний многовид  $\mathcal{M}^{(5)}$  містить точки вигляду

$$\Theta = \left( \theta_1, \theta_1 + \frac{2\pi}{3}, \theta_1 + \frac{4\pi}{3}, \theta_4, \theta_5 + \pi \right),$$

які складають двовимірний підпростір (підмноговид)

$$\mathcal{M}^{(3,2)} = \{(\theta_1, \dots, \theta_N) : R = e^{i\theta_1} (1 + e^{2i\pi/3} + e^{4i\pi/3}) + e^{i\theta_4} (1 + e^{i\pi}) = 0\} \in \mathcal{M}^5.$$

Однак, найменший підпростір особливих точок, який містить всі точки цього

вигляду, є тривіальним підпростором  $\mathbb{T}^5$ . Останнє означає, що симетрія не спричиняє інваріантності  $\mathcal{M}^{(5)}$ .

Для довільних парних та непарних  $N \geq 6$  існують відповідні підмноговиди  $\mathcal{M}^{(2,2,\dots,2)} \in \mathcal{M}^{(2k)} = M^{(N)}$ ,  $N = 2+2+\dots+2$ , та  $\mathcal{M}^{(3,2,\dots,2)} \in \mathcal{M}^{(2k+1)} = M^{(N)}$ ,  $N = 3+2+\dots+2$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , що мають відповідно вигляд:

$$\mathcal{M}^{(2,2,\dots,2)} = \left\{ (\theta_1, \dots, \theta_N) : \sum_{k=1}^{N/2} e^{i\theta_{2k-1}} (1 + e^{i\pi}) = 0 \right\} \in \mathcal{M}^{(N)}$$

та відповідно:

$$\mathcal{M}^{(3,2,\dots,2)} = \left\{ (\theta_1, \dots, \theta_N) : e^{i\theta_1} (1 + e^{2i\pi/3} + e^{4i\pi/3}) + \sum_{k=1}^{(N-1)/2} e^{i\theta_{2k+1}} (1 + e^{i\pi}) = 0 \right\} \in \mathcal{M}^{(N)}.$$

Розмірності цих підпросторів:  $\dim(\mathcal{M}^{(2,2,\dots,2)}) = N/2$  та  $\dim(\mathcal{M}^{(3,2,\dots,2)}) = (N-1)/2$ . Аналогічно випадку  $N=5$  дані конструкції демонструють, що симетрії системи не спричиняють інваріантності  $\mathcal{M}^{(N)}$ .  $\square$

## В.6 Доведення Лема 3.8.4

**Доведення.** Дійсно, враховуючи парність функції  $g(x)$  і вважаючи, що індекс  $i$  змінюється за модулем 3, отримуємо:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^3 F_i(\Theta) \frac{\partial I(\Theta)}{\partial \theta_i} &= \sum_{i=1}^3 \left( \frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 g(\theta_i - \theta_j) \right) (g(\theta_i - \theta_{i+1}) - g(\theta_{i-1} - \theta_i)) = \\
&= \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 (g(0) + g(\theta_i - \theta_{i+1}) + g(\theta_i - \theta_{i-1})) \times \\
&\quad \times (g(\theta_i - \theta_{i+1}) - g(\theta_i - \theta_{i-1})) = \\
&= \frac{g(0)}{3} \sum_{i=1}^3 (g(\theta_i - \theta_{i+1}) - g(\theta_i - \theta_{i-1})) + \\
&\quad + \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 (g^2(\theta_i - \theta_{i+1}) - g^2(\theta_i - \theta_{i-1})) = \\
&= \frac{g(0)}{3} \sum_{i,j=1}^3 (g(\theta_i - \theta_j) - g(\theta_i - \theta_j)) + 0 = 0.
\end{aligned}$$

Для системи у фазових різницях (3.33), у випадку непарності функції  $g$  отримуємо:

$$\begin{aligned}
G_1(\Phi) \frac{\partial \tilde{I}(\Phi)}{\partial \varphi_1} + G_2(\Phi) \frac{\partial \tilde{I}(\Phi)}{\partial \varphi_2} &= \\
&= \frac{1}{3} (g(\varphi_1) + g(\varphi_2) - g(-\varphi_1) - g(\varphi_2 - \varphi_1)) (g(\varphi_1) - g(\varphi_2 - \varphi_1)) = \\
&+ \frac{1}{3} (g(\varphi_1) + g(\varphi_2) - g(-\varphi_2) - g(\varphi_1 - \varphi_2)) (g(\varphi_2 - \varphi_1) - g(\varphi_2)) = \\
&= \frac{1}{3} (g(\varphi_2) - g(\varphi_2 - \varphi_1)) (g(\varphi_1) - g(\varphi_2 - \varphi_1)) = \\
&- \frac{1}{3} (g(\varphi_1) - g(\varphi_2 - \varphi_1)) (g(\varphi_2) - g(\varphi_2 - \varphi_1)) = 0.
\end{aligned}$$

Що і завершує доведення.  $\square$

## В.7 Доведення Лема 4.4.1

Легко перевірити, що при виконанні умов (i), (ii) точка  $(\theta_1, \dots, \theta_N)$  буде задовольняти систему (4.9). Покажемо, що корені системи (4.9) задовольняють одну з умов (i), (ii). Перепишемо (4.9) у наступному вигляді:

$$(\sin \theta_1 - \sin \theta_i) \sum_{j=1}^N \cos \theta_j - (\cos \theta_1 - \cos \theta_i) \sum_{j=1}^N \sin \theta_j = 0, \quad i = 2, \dots, N_1, \quad (8.3)$$

$$(\sin \theta_1 - k \sin \theta_i) \sum_{j=1}^N \cos \theta_j - (\cos \theta_1 - k \cos \theta_i) \sum_{j=1}^N \sin \theta_j = 0, \quad i = N_1 + 1, \dots, N. \quad (8.4)$$

Далі розглянемо чотири випадки.

**А.** Якщо одночасно виконуються обидві умови  $\sum_{j=1}^N \sin \theta_j = 0$  і  $\sum_{j=1}^N \cos \theta_j = 0$ , тоді умова (i) Лема буде виконуватись.

**В.** Наступним можливим випадком є такий, що  $\sum_{j=1}^N \sin \theta_j = 0$ , але  $\sum_{j=1}^N \cos \theta_j \neq 0$ . У цьому випадку з рівностей (8.3), (8.4) випливає:

$$\begin{aligned} \sin \theta_1 - \sin \theta_i &= 0, \quad i = 2, \dots, N_1, \\ \sin \theta_1 - k \sin \theta_i &= 0, \quad i = N_1 + 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Остання система може бути переписана наступним чином:

$$\sin \theta_1 = \dots = \sin \theta_{N_1} = \frac{1}{k} \sin \theta_{N_1+1} = \dots = \frac{1}{k} \sin \theta_N.$$

Використовуючи ці рівняння ми отримуємо:

$$\sum_{j=1}^N \sin \theta_j = N_1 \sin \theta_1 + (N - N_1) \sin \theta_1 = \left( N_1 + \frac{N_2}{k} \right) \sin \theta_1 = 0.$$

Останнє рівняння має два розв'язки  $\theta_1 = 0$  та  $\theta_1 = \pi$ , оскільки, згідно припущень Лема, виконується умова  $k \neq -N_2/N_1$ . Таким чином, єдиними розв'язками системи (4.9) є  $\theta_i = 0$ ,  $i = 1, \dots, N$ , та  $\theta_i = \pi$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Такі розв'язки задовольняють умову (ii).

**С.** Розглянемо випадок, коли  $\sum_{j=1}^N \cos \theta_j = 0$ , але  $\sum_{j=1}^N \sin \theta_j \neq 0$ . Використовуючи ці умови, систему (8.3), (8.4) можна переписати у вигляді:

$$\begin{aligned} \cos \theta_1 - \cos \theta_i &= 0, & i = 2, \dots, N_1, \\ \cos \theta_1 - k \cos \theta_i &= 0, & i = N_1 + 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Ця система має розв'язки  $\theta_i = \pm\pi/2$ . Таким чином умова (ii) леми задовольняється.

**Д.** Розглянемо множину змінних  $(\theta_1, \dots, \theta_N)$  таких, що  $\sum_{j=1}^N \sin \theta_j \neq 0$  та  $\sum_{j=1}^N \cos \theta_j \neq 0$ . Позначимо  $\bar{S} := \sum_{j=1}^N \sin \theta_j$ ,  $\bar{C} := \sum_{j=1}^N \cos \theta_j$ ,  $s_j := \sin \theta_j$ ,  $c_j := \cos \theta_j$ . Тоді система (8.3), (8.4) приймає наступний вигляд:

$$\begin{aligned} (s_1 - s_j) \bar{C} - (c_1 - c_j) \bar{S} &= 0, & j = 2, \dots, N_1, \\ (s_1 - ks_j) \bar{C} - (c_1 - kc_j) \bar{S} &= 0, & j = N_1 + 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (8.5)$$

Для даної системи знову ж можливо декілька ситуацій.

**D1.** З одночасного виконання умов  $s_1 - s_j = 0$  для  $i = 2, \dots, N_1$  та  $s_1 - ks_j = 0$  для  $i = N_1 + 1, \dots, N$ , негайно випливає, що  $c_1 - c_j = 0$  для  $i = 2, \dots, N_1$  та  $c_1 - kc_j = 0$  для  $i = N_1 + 1, \dots, N$ . Використовуючи наші позначення ми також отримуємо:

$$e^{i\theta_1} = \dots = e^{i\theta_{N_1}} = \frac{1}{k} e^{i\theta_{N_1+1}} = \dots = e^{i\theta_N}.$$

Ці рівняння означають що  $\theta_1 = \dots = \theta_{N_1}$  та

$$\theta_{N_1+1} = \dots = \theta_N = \theta_1 + \frac{\pi}{2} (1 + \text{sign}(k)).$$

Таким чином, умова (ii) виконується.

**D2.** Тепер розглянемо випадок, коли принаймні одна з умов **D1** не виконується. Це означає, що існує індекс  $j_0$  такий, що

(a)  $s_1 - s_{j_0} \neq 0$ , якщо  $j_0 = 1, \dots, N_1$ , або

(b)  $s_1 - ks_{j_0} \neq 0$ , якщо  $j_0 = N_1 + 1, \dots, N$ .

У випадку (a), згідно відповідному рівнянню системи (8.5), множник  $\bar{C}$  мо-

жна представити у вигляді:

$$\bar{C} = (c_1 - c_{j_0}) \bar{S} / (s_1 - s_{j_0}).$$

Підставляючи  $\bar{C}$  у кожне з рівнянь (8.5) ми отримуємо:

$$\bar{S} (s_1 - s_j) (c_1 - c_{j_0}) / (s_1 - s_{j_0}) - \bar{S} (c_1 - c_j) = 0, \quad j = 2, \dots, N_1,$$

$$\bar{S} (s_1 - ks_j) (c_1 - c_{j_0}) / (s_1 - s_{j_0}) - \bar{S} (c_1 - kc_j) = 0, \quad j = N_1 + 1, \dots, N.$$

Використовуючи умови  $\bar{S} \neq 0$  та  $s_1 - s_{j_0} \neq 0$ , ми отримуємо:

$$(s_1 - s_j) (c_1 - c_{j_0}) - (s_1 - s_{j_0}) (c_1 - c_j) = 0, \quad j = 2, \dots, N_1,$$

$$(s_1 - ks_j) (c_1 - c_{j_0}) - (s_1 - s_{j_0}) (c_1 - kc_j) = 0, \quad j = N_1 + 1, \dots, N,$$

і, отже,

$$(s_1 c_{j_0} - c_1 s_{j_0}) + (s_{j_0} c_j - c_{j_0} s_j) + (s_{j_0} c_1 - c_{j_0} s_1) = 0, \quad j = 2, \dots, N_1,$$

$$(s_1 c_{j_0} - c_1 s_{j_0}) + k (s_{j_0} c_j - c_{j_0} s_j) + k (s_{j_0} c_1 - c_{j_0} s_1) = 0, \quad j = N_1 + 1, \dots, N.$$

Після повернення до старих позначень і деяких перетворень, ми отримуємо вирази:

$$\sin(\theta_1 - \theta_j) - \sin(\theta_{j_0} - \theta_j) = \sin(\theta_1 - \theta_{j_0}), \quad j = 2, \dots, N_1, \quad (8.6)$$

$$\sin(\theta_1 - \theta_j) - \sin(\theta_{j_0} - \theta_j) = \frac{1}{k} \sin(\theta_1 - \theta_{j_0}), \quad j = N_1 + 1, \dots, N. \quad (8.7)$$

Далі перепишемо  $j_0$ -те рівняння системи (4.9), використовуючи останні формули. Отримуємо:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^N \sin(\theta_1 - \theta_j) - \sum_{j=1}^N \sin(\theta_1 - \theta_{j_0}) = 2 \sin(\theta_1 - \theta_{j_0}) \\
& + \sum_{j=2, j \neq j_0}^N (\sin(\theta_1 - \theta_j) - \sin(\theta_{j_0} - \theta_j)) = 2 \sin(\theta_1 - \theta_{j_0}) \\
& + (N_1 + 2) \sin(\theta_1 - \theta_{j_0}) + N_2 \frac{1}{k} \sin(\theta_1 - \theta_{j_0}) = \left( N_1 + \frac{N_2}{k} \right) \sin(\theta_1 - \theta_{j_0}) = 0.
\end{aligned}$$

З останнього рівняння випливає, що  $\theta_1 - \theta_{j_0}$  приймає значення 0 або  $\pi$ , оскільки  $k = -N_2/N_1$  згідно умовам Леми.

Тепер розглянемо випадок **(b)**. Використовуючи умови цього випадку, можемо записати:

$$\bar{C} = (c_1 - kc_{j_0}) \bar{S} / (s_1 - ks_{j_0}).$$

Та ж сама процедура, як і у попередньому випадку з використання припущення Леми  $k \neq 0$  дає нам формули, подібні до (8.6), (8.7) наступного вигляду:

$$\sin(\theta_1 - \theta_j) - k \sin(\theta_{j_0} - \theta_j) = k \sin(\theta_1 - \theta_{j_0}), \quad j = 2, \dots, N_1, \quad (8.8)$$

$$\sin(\theta_1 - \theta_j) - k \sin(\theta_{j_0} - \theta_j) = \sin(\theta_1 - \theta_{j_0}), \quad j = N_1 + 1, \dots, N. \quad (8.9)$$

Підставляючи (8.8), (8.9) у відповідне рівняння системи (4.9), ми отримуємо:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^N \sin(\theta_1 - \theta_j) - k \sum_{j=1}^N \sin(\theta_1 - \theta_{j_0}) = (k + 1) \sin(\theta_1 - \theta_{j_0}) \\
& + \sum_{j=2, j \neq j_0}^N (\sin(\theta_1 - \theta_j) - k \sin(\theta_{j_0} - \theta_j)) = (k + 1) \sin(\theta_1 - \theta_{j_0}) \\
& + (N_1 + 1)k \sin(\theta_1 - \theta_{j_0}) + (N_2 - 1) \sin(\theta_1 - \theta_{j_0}) = (N_1 k + N_2) \sin(\theta_1 - \theta_{j_0}) = 0.
\end{aligned}$$

Оскільки  $N_1 k + N_2 \neq 0$ , то  $\theta_1 - \theta_{j_0} \in \{0, \pi\}$ .

Таким чином, ми показали, що припущення **D1** призводять до виконання умови (ii) у цілому, але невиконання припущень **D1** для однієї пари змінних (ситуація **D2**) також призводить до часткового виконання умови (ii) саме



для цієї пари. Використовуючи процедуру, описану у пункті **D1**, аналогічно доводиться, що кілька різниць  $\theta_1 - \theta_i$  приймають виключно значення 0 або  $\pi$ , у випадку, коли умова **D2** для них не виконується. Остаточно  $\theta_i - \theta_j \in \{0, \pi\}$  для будь-яких осциляторів, що задовольняють обидві нерівності  $\sum_{j=1}^N \sin \theta_j \neq 0$ ,  $\sum_{j=1}^N \cos \theta_j \neq 0$  з пункту **D**, оскільки  $\theta_i - \theta_j = \theta_i - \theta_1 + \theta_1 - \theta_j$ .

Лема доведена.  $\square$

У роботі [86, Burylko, Kazanovich, Borisyuk] наведено альтернативне доведення Лема 4.4.1, яке було запропоноване Я. Казановичем.

## В.8 Доведення Лема 5.3.2

Перепишемо рівняння (5.2) та (5.5) у векторній формі:

$$\frac{d\Theta}{dt} = F(\Theta), \quad \theta = (\theta, \dots, \theta_N), \quad (8.10)$$

та

$$\frac{d\Phi}{dt} = G(\Phi), \quad \Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_{N-1}). \quad (8.11)$$

Додавши перше рівняння

$$\frac{d\theta_1}{dt} = F_1(\theta_1, \dots, \theta_N) = \bar{F}_1(\theta_1 - \theta_2, \dots, \theta_1 - \theta_N) = \bar{F}_1(\varphi_1, \dots, \varphi_{N-1})$$

системи (8.10) до системи (8.11), одержимо розширену  $N$ -вимірну систему:

$$\frac{d\bar{\Phi}}{dt} = \bar{G}(\bar{\Phi}), \quad \bar{\Phi} = (\theta_1, \varphi_1, \dots, \varphi_{N-1}), \quad (8.12)$$

де

$$\bar{\Phi}^T = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \Phi^T \end{pmatrix} = S_N \Theta^T, \quad S_N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \vdots & \ddots & -1 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (8.13)$$

Легко переконатись, що  $\det(S_N) = (-1)^{N-1}$  та  $S_N^{-1} = S_N$ . Якобіани матриць вказаних систем у відповідних точках  $\Theta_0$ ,  $\Phi_0$  та  $\bar{\Phi}_0^T = S_N \Theta_0^T$  є

$$A = A(\Theta_0) = \left. \frac{\partial F(\Theta)}{\partial \Theta} \right|_{\Theta=\Theta_0}, \quad B = B(\Phi_0) = \left. \frac{\partial G(\Phi)}{\partial \Phi} \right|_{\Phi=\Phi_0}, \quad \bar{B} = \bar{B}(\bar{\Phi}_0) = \left. \frac{\partial \bar{G}(\bar{\Phi})}{\partial \bar{\Phi}} \right|_{\bar{\Phi}=\bar{\Phi}_0}$$

Елементи матриці Якобіану  $A = A(\Theta) = (A_{ij})_{i,j=1}^N$ , записані у обох наборах змінних, є наступними

$$A_{ii} = \sum_{j=1}^N K_{ij} g'(\theta_i - \theta_j) = \sum_{j=1}^N K_{ij} g'(\varphi_{j-1} - \varphi_{i-1}), \quad i = 1, \dots, N,$$

$$A_{ij} = -K_{ij} g'(\theta_i - \theta_j) = -K_{ij} g'(\varphi_{j-1} - \varphi_{i-1}), \quad i, j = 1, \dots, N, \quad j \neq i.$$

Використовуючи перетворення (8.13), отримуємо  $\bar{B} = S_N A S_N^{-1}$ . З останнього бачимо, що

$$\bar{B} = \begin{pmatrix} \bar{B}_{11} & \bar{b} \\ \bar{b}^T & B \end{pmatrix},$$

$$\bar{B}_{11} = \sum_{j=1}^N A_{1j}, \quad \bar{b} = (-A_{12}, \dots, -A_{1N}), \quad \bar{b} = \left( \sum_{j=1}^N (A_{1j} - A_{2j}), \dots, \sum_{j=1}^N (A_{1j} - A_{Nj}) \right),$$

$$B_{ij} = \bar{B}_{i+1,j+1} = A_{i+1,j+1} - A_{1,j+1}, \quad i, j = 1, \dots, N-1.$$

Праві частини останніх  $N-1$  рівнянь системи (8.12) співпадає з правими частинами рівняння (8.11):  $\bar{G}_{i+1}(\bar{\varphi}) = G_i(\varphi)$ ,  $i = 1, N-1$ , та є незалежними від змінної  $\theta_1$ . З останнього випливає, що

$$B_{j+1}(\bar{\varphi}) = \frac{\partial \bar{G}_{i+1}(\bar{\varphi})}{\partial \theta_1} = \frac{G_i(\varphi)}{\partial \theta_1} = 0, \quad i = 1, N-1,$$

і, отже, вектор  $\bar{b} = (0, \dots, 0)$ . Також права частина першого рівняння системи (8.12) має вигляд  $\bar{G}_1(\bar{\Phi}) = F_1(\Theta) = \sum_{j=1}^N K_j g(\theta_1 - \theta_{i+1}) = \sum_{j=1}^N K_j g(\varphi_j)$  і, отже, вона також є незалежною від змінної  $\theta_1$ . З останнього випливає, що  $\bar{B}_{11} = \partial \bar{G}_1 / \partial \theta_1 = 0$ . Використовуючи наведені вище властивості матриць, отримуємо наступний результат:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I_N) &= \det(S_N^{-1}(\bar{B} - \lambda I_N)S_N) = \det(\bar{B} - \lambda I_N) \\ &= \det \begin{pmatrix} -\lambda & \bar{b} \\ 0 & B - \lambda I_{N-1} \end{pmatrix} = -\lambda \det(B - \lambda I_{N-1}). \end{aligned}$$

Лема доведена.  $\square$

## В.9 Доведення Лема 5.3.3

Обчислимо Якобіан системи (5.2) в точках  $\mathcal{M}_k$ , отримуємо:

$$A_{ii}(\mathcal{M}_k) = \sum_{j=1}^N K_{j-i} g'(\mathcal{M}_{k,j-1} - \mathcal{M}_{k,i-1}) = \sum_{j=1}^N K_{j-i} \eta_{k(j-i)} = \sum_{j=1}^N K_j \eta_{kj},$$

$$A_{ij}(\mathcal{M}_k) = -K_{j-i} g'(\mathcal{M}_{k,j-1} - \mathcal{M}_{k,i-1}) = -K_{j-i} \eta_{k(j-i)}, \quad i, j = 1, \dots, N, \quad j \neq i,$$

де  $\mathcal{M}_{i,j} = \frac{2\pi i}{N} j$  означає  $j$ -й компонент вектора  $\mathcal{M}_i$ . Матриця  $A(\mathcal{M}_k)$  є *циркулянтною*, оскільки для довільного цілого  $m$  виконуються умови:

$$A_{i+m,i+m}(\mathcal{M}_k) = \sum_{j=1}^N K_{(j+m)-(i+m)} \eta_{k((j+m)-(i+m))} = \sum_{j=1}^N K_{j-i} \eta_{k(j-i)} = A_{i,i}(\mathcal{M}_k),$$

$$A_{i+m,j+m}(\mathcal{M}_k) = -K_{(j+m)-(i+m)} \eta_{k((j+m)-(i+m))} = -K_{j-i} \eta_{k(j-i)} = A_{i,j}(\mathcal{M}_k).$$

З властивості циркулянтності матриці  $A(\mathcal{M}_k)$  випливає, що вона може бути представленою у вигляді поліному циклічних матриць перестановок

$$P_N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

у наступному вигляді:

$$A(\mathcal{M}_k) = \sum_{j=1}^N K_{j-i} \eta_{k(j-i)} I_N - \sum_{j=1}^N K_{j-i} \eta_{k(j-i)} P_N^{j-i} = \sum_{j=1}^N K_j \eta_{kj} (I_N - P_N^j),$$

де  $\eta_{kj} = g' \left( \frac{2\pi k}{N} j \right)$ ,  $k = 0, \dots, N-1$ . Тоді власні значення цієї циркулянтної матриці можуть бути записані у вигляді

$$\lambda_m(\mathcal{M}_k) = \sum_{j=1}^N K_j \eta_{kj} (1 - \nu_m^j), \quad m = 1, \dots, N, \quad (8.14)$$

де  $\nu_m = \exp \left( \frac{2\pi i}{N} m \right)$  є власними значеннями матриці  $P_N$ . З рівності  $\nu_N^j = \exp \left( \frac{2\pi i}{N} j N \right) = 1$  випливає  $\lambda_N(\mathcal{M}_k) = 0$ , що узгоджується з доведеним у попередній лемі. Крім того, з  $\nu_N^j = 1$  випливає, що останній доданок у рівності (8.14) зникає і тоді вона переписується у вигляді

$$\lambda_m(\mathcal{M}_k) = \sum_{j=1}^{N-1} K_j \eta_{kj} (1 - \nu_m^j) = \sum_{j=1}^{N-1} K_j g' \left( \frac{2\pi k}{N} j \right) \left( 1 - e^{i \frac{2m j \pi}{N}} \right), \quad m = 1, \dots, N,$$

Лемі доведено.  $\square$

## В.10 Доведення Теорема 5.6.3

Скористаємось міркуваннями, наведеними у попередній теоремі і замість доведення того, що  $E_2(\varphi_1, \dots, \varphi_{N-1})$  є першим інтегралом зведеної системи

(5.24), доведемо, що

$$E_2(\varphi_1, \dots, \varphi_{N-1}) = E_2(\theta_1 - \theta_2, \dots, \theta_1 - \theta_N) = \sum_{i=1}^N (-1)^{i-1} \theta_i$$

є першим інтегралом оригінальної системи (5.23). Згідно умовам теореми, індекси сумування  $j$  в правих частинах системи (5.23) належать множині  $\mathcal{N}_{odd} = \{1, 3, 5, \dots, N/2 - 1\}$ .

$$\begin{aligned} L_F E_2 &= \sum_{i=1}^N F_i \frac{dE_2}{d\theta_i} = \sum_{i=1}^N \left( \sum_{j \in \mathcal{N}_{odd}} K_j (g(\theta_i - \theta_{i+j}) - g(\theta_i - \theta_{i-j})) \right) (-1)^{i-1} = \\ &= \sum_{j \in \mathcal{N}_{odd}} K_j (g(\theta_1 - \theta_{1+j}) - g(\theta_1 - \theta_{1-j})) - \\ &- \sum_{j \in \mathcal{N}_{odd}} K_j (g(\theta_2 - \theta_{2+j}) - g(\theta_2 - \theta_{2-j})) + \dots + \\ &+ \sum_{j \in \mathcal{N}_{odd}} K_j (g(\theta_{N-1} - \theta_{N-1+j}) - g(\theta_{N-1} - \theta_{N-1-j})) - \\ &- \sum_{j \in \mathcal{N}_{odd}} K_j (g(\theta_N - \theta_{N+j}) - g(\theta_N - \theta_{N-j})) = \\ &= \sum_{j \in \mathcal{N}_{odd}} K_j \left( g(\theta_1 - \theta_{1+j}) - g(\theta_1 - \theta_{1-j}) - g(\theta_2 - \theta_{2+j}) + g(\theta_2 - \theta_{2-j}) + \dots + \right. \\ &+ \left. g(\theta_{N-1} - \theta_{N-1+j}) - g(\theta_{N-1} - \theta_{N-1-j}) - g(\theta_N - \theta_{N+j}) + g(\theta_N - \theta_{N-j}) \right) + \\ &= \sum_{j \in \mathcal{N}_{odd}} K_j \left( g(\theta_1 - \theta_{1+j}) + g(\theta_{1-j} - \theta_1) - g(\theta_2 - \theta_{2+j}) - g(\theta_{2-j} - \theta_2) + \dots + \right. \\ &+ \left. g(\theta_{N-1} - \theta_{N-1+j}) + g(\theta_{N-1-j} - \theta_{N-1}) - g(\theta_N - \theta_{N+j}) - g(\theta_{N-j} - \theta_N) \right) = \\ &= K_1 \left( g(\theta_1 - \theta_2) + g(\theta_N - \theta_1) - g(\theta_2 - \theta_3) - g(\theta_1 - \theta_2) + \dots + \right. \\ &+ \left. g(\theta_{N-1} - \theta_N) + g(\theta_{N-2} - \theta_{N-1}) - g(\theta_N - \theta_1) - g(\theta_{N-1} - \theta_N) \right) + \dots + \\ &+ K_{N/2-1} \left( g(\theta_1 - \theta_{N/2}) + g(\theta_{2-N/2} - \theta_1) - g(\theta_2 - \theta_{1+N/2}) - g(\theta_{3-N/2} - \theta_2) + \dots + \right. \\ &+ \left. g(\theta_{N-1} - \theta_{N/2-2}) + g(\theta_{N/2} - \theta_{N-1}) - g(\theta_N - \theta_{N/2-1}) - g(\theta_{N/2+1} - \theta_N) \right). \end{aligned}$$

Можна переконатись, що в кожних дужках, які стоять біля множника  $K_j$ , є  $2N$  пар однакових доданків з протилежними знаками (для  $j = 1$  ці доданки знаходяться у сусідніх рядках, для  $j = 3$  вони знаходяться через два рядки і т.д.). Отже,  $L_F E_2 = 0$ .  $\square$

## В.11 Доведення Теорема 5.7.1

Введемо деякі позначення, які ми будемо використовувати в подальшому. Позначимо

$$L_s(\phi) = \sum_{j=1}^l j^s Q_j e^{ij\phi}, \quad s = 0, 1, 2.$$

У косо-симетричному випадку  $Q_j = -Q_{-j}$  (умова (і) теореми) для кожного значення  $s$  даний вираз перетворюється на наступні:

$$L_0(\phi) = 2i \sum_{j=1}^l Q_j \sin(j\phi) = i\tilde{\omega}(\phi),$$

$$L_1(\phi) = 2 \sum_{j=1}^l j Q_j \cos(j\phi) = \tilde{\omega}'(\phi),$$

$$L_2(\phi) = 2i \sum_{j=1}^l j^2 Q_j \sin(j\phi) = -i\tilde{\omega}''(\phi).$$

Розкладемо у ряд Тейлора анзац (5.41) по просторовій змінній  $x_i + \varepsilon j$  і спростимо позначення використовуючи залежність лише від цієї змінної. Маємо:

$$\mathcal{A}(T_1, x_i + \varepsilon j, T_2) =: \mathcal{A}(x_i + \varepsilon j) = \mathcal{A}(x_i) + \varepsilon j \partial_{x_i} \mathcal{A}(x_i) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 j^2 \partial_{x_i}^2 \mathcal{A}(x_i) + \mathcal{O}(\varepsilon^3).$$

Далі використовуючи позначення  $\mathcal{A} := \mathcal{A}(x_i)$ ,  $\bar{\mathcal{A}}$  – комплексно-спряжена величина до  $\mathcal{A}$  та попередній розклад, перепишемо змінні системи (5.39) та основні вирази з ними. Отримуємо:

$$\begin{aligned}
\psi_{i+j} &= \varepsilon \mathcal{A}(x_{i+j}) e^{i(\omega_0 t + \phi_0(i+j))} + \varepsilon^3 \mathcal{A}^3(x_{i+j}) e^{3i(\omega_0 t + \phi_0(i+j))} v_3 + c.c. = \\
&= \varepsilon \left( \mathcal{A} + \varepsilon j \partial_{x_i} \mathcal{A} + \frac{1}{2} \varepsilon^2 j^2 \partial_{x_i}^2 \mathcal{A} \right) e^{i(\omega_0 t + \phi_0 i)} e^{ij\varphi_0} + \varepsilon^3 \mathcal{A}^3 e^{3i(\omega_0 t + \phi_0 i)} e^{3ij\varphi_0} v_3 + \\
&+ c.c. + \mathcal{O}(\varepsilon^4) = \varepsilon \mathcal{A} e^{i(\omega_0 t + \phi_0 i)} e^{ij\varphi_0} + \varepsilon \bar{\mathcal{A}} e^{-i(\omega_0 t + \phi_0 i)} e^{-ij\varphi_0} + \mathcal{O}(\varepsilon^2),
\end{aligned}$$

$$\psi_i - \psi_{i+j} = \varepsilon \mathcal{A} e^{i(\omega_0 t + \phi_0 i)} (1 - e^{ij\varphi_0}) + \varepsilon \bar{\mathcal{A}} e^{-i(\omega_0 t + \phi_0 i)} (1 - e^{-ij\varphi_0}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

Тa

$$\begin{aligned}
(\psi_i - \psi_{i+j})^3 &= (\varepsilon \mathcal{A} e^{i(\omega_0 t + \phi_0 i)} (1 - e^{ij\varphi_0}) + \varepsilon \bar{\mathcal{A}} e^{-i(\omega_0 t + \phi_0 i)} (1 - e^{-ij\varphi_0}))^3 + \mathcal{O}(\varepsilon^4) = \\
&= \varepsilon^3 \left( \mathcal{A}^3 e^{3i(\omega_0 t + \phi_0 i)} (1 - e^{ij\varphi_0})^3 + 3\mathcal{A} |\mathcal{A}|^2 e^{i(\omega_0 t + \phi_0 i)} (1 - e^{ij\varphi_0})^2 (1 - e^{-ij\varphi_0}) + \right. \\
&+ 3\bar{\mathcal{A}} |\mathcal{A}|^2 e^{-i(\omega_0 t + \phi_0 i)} (1 - e^{ij\varphi_0}) (1 - e^{-ij\varphi_0})^2 + \bar{\mathcal{A}}^3 e^{-3i(\omega_0 t + \phi_0 i)} (1 - e^{-ij\varphi_0})^3 \left. \right) + \\
&+ \mathcal{O}(\varepsilon^4) = \varepsilon^3 \left( \mathcal{A}^3 e^{3i(\omega_0 t + \phi_0 i)} (1 - 3e^{ij\varphi_0} + 3e^{2ij\varphi_0} - e^{3ij\varphi_0}) + \right.
\end{aligned}$$

$$+3\mathcal{A}|\mathcal{A}|^2 e^{i(\omega_0 t + \phi_0 i)} (3 - 3e^{ij\phi_0} + e^{2ij\phi_0} - e^{-ij\phi_0}) \Big) + c.c. + \mathcal{O}(\varepsilon^4).$$

Позначивши  $\sum_{j=-l}^l$  через  $\sum_j$ ,  $f'(0)$ ,  $f'''(0)$  через  $f'$ ,  $f'''$ , підставимо анзац (5.41) у рівняння (5.39). Також використавши умову (iii) теореми:  $f''(0) = 0$  та попередні перетворення, отримуємо:

$$\begin{aligned} & \varepsilon e^{i(\omega_0 t + \phi_0 i)} (i\omega_0 \mathcal{A} + \varepsilon \partial_{T_1} \mathcal{A} + \varepsilon^2 \partial_{T_2} \mathcal{A}) + \varepsilon^3 e^{3i(\omega_0 t + \phi_0 i)} \mathcal{A}^3 3i\omega_0 v_3 + \\ & + \varepsilon e^{-i(\omega_0 t + \phi_0 i)} (-i\omega_0 \bar{\mathcal{A}} + \varepsilon \partial_{T_1} \bar{\mathcal{A}} + \varepsilon^2 \partial_{T_2} \bar{\mathcal{A}}) - \varepsilon^3 e^{-3i(\omega_0 t + \phi_0 i)} \bar{\mathcal{A}}^3 3i\omega_0 v_3 + \mathcal{O}(\varepsilon^4) = \\ & = \varepsilon e^{i(\omega_0 t + \phi_0 i)} \left( A \sum_j Q_j e^{ij\phi_0} + \varepsilon \partial_{x_j} A \sum_j j Q_j e^{ij\phi_0} + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \partial_{x_j}^2 A \sum_j j^2 Q_j e^{ij\phi_0} \right) + \\ & + \varepsilon e^{-i(\omega_0 t + \phi_0 i)} \left( \bar{A} \sum_j Q_j e^{-ij\phi_0} + \varepsilon \partial_{x_j} \bar{A} \sum_j j Q_j e^{-ij\phi_0} + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \partial_{x_j}^2 \bar{A} \sum_j j^2 Q_j e^{-ij\phi_0} \right) + \\ & + \varepsilon^3 e^{3i(\omega_0 t + \phi_0 i)} \mathcal{A}^3 \sum_j Q_j e^{3ij\phi_0} v_3 + \varepsilon^3 e^{-3i(\omega_0 t + \phi_0 i)} \bar{\mathcal{A}}^3 \sum_j Q_j e^{-3ij\phi_0} v_3 - \\ & - \varepsilon^3 \mathcal{A}^3 e^{3i(\omega_0 t + \phi_0 i)} \frac{f'''}{6f'} \sum_j Q_j (1 - 3e^{ij\phi_0} + 3e^{2ij\phi_0} - e^{3ij\phi_0}) - \\ & - \varepsilon^3 \bar{\mathcal{A}}^3 e^{-3i(\omega_0 t + \phi_0 i)} \frac{f'''}{6f'} \sum_j Q_j (1 - 3e^{-ij\phi_0} + 3e^{-2ij\phi_0} - e^{-3ij\phi_0}) - \\ & - 3\varepsilon^3 \mathcal{A}|\mathcal{A}|^2 e^{i(\omega_0 t + \phi_0 i)} \frac{f'''}{6f'} \sum_j Q_j (3 - 3e^{ij\phi_0} + e^{2ij\phi_0} - e^{-ij\phi_0}) - \end{aligned}$$



$$-3\varepsilon^3 \overline{\mathcal{A}} |\mathcal{A}|^2 e^{-i(\omega_0 t + \phi_0 i)} \frac{f'''}{6f'} \sum_j Q_j (3 - 3e^{-ij\phi_0} + e^{-2ij\phi_0} - e^{ij\phi_0}) + \mathcal{O}(\varepsilon^4). \quad (8.15)$$

Порівняємо ліві та праві частини рівнянь для всіх ступенів  $\varepsilon$  у (8.15), використовуючи також введені позначення  $L_s(\phi)$ . Для  $\varepsilon^1$  отримуємо:

$$i\omega_0 = L_0(\phi_0), \quad -i\omega_0 = L_0(-\phi_0),$$

що завжди виконується умов з (i) та (ii) теореми. Остання властивість описує симетрію спектру системи.

Для  $\varepsilon^2$  після відповідних перетворень отримуємо рівняння:

$$\partial_{T_1} \mathcal{A} = L_1(\phi_0) \partial_{x_j} \mathcal{A}.$$

Останнє пояснюється введення нової амплітуди  $u$  наступним чином:

$$u(\xi, T_2) = u(L_1(\phi_0)T_1 + x_i, T_2) = \mathcal{A}(T_1, x_i, T_2) \quad (8.16)$$

у відповідних обертальних координатах  $\xi = L_1(\phi_0)T_1 + x_i = \tilde{\omega}'(\phi_0)T_1 + x_i \in [0, 1]$ .

Для  $\varepsilon^3$  потрібно розглянути два випадки, в залежності від ступеню експоненти. Для  $\varepsilon^3 e^{i(\omega_0 t + \phi_0 i)}$  після відповідних перетворень отримуємо рівняння:

$$\begin{aligned} \partial_{T_2} \mathcal{A} = & \frac{1}{2} \partial_{x_i}^2 \mathcal{A} \sum_j j^2 Q_j e^{ij\phi_0} - \\ & - \mathcal{A} |\mathcal{A}|^2 \frac{f'''(0)}{2f'(0)} \sum_j Q_j (3 - 3e^{ij\phi_0} + e^{2ij\phi_0} - e^{-ij\phi_0}), \quad \phi_0 \neq 0. \end{aligned} \quad (8.17)$$

Використовуючи косо-симетричність матриці  $Q$ , можемо записати:

$$\sum_{j=-l}^l Q_j (3 - 3e^{ij\phi_0} + e^{2ij\phi_0} - e^{-ij\phi_0})$$

$$\begin{aligned}
&= 2\imath \sum_{j=1}^l Q_j (-3 \sin(j\phi_0) + \sin(2j\phi_0) - \sin(-\imath j\phi_0)) \\
&= 4\imath \sum_{j=1}^l Q_j \sin(j\phi_0) (\cos(j\phi_0) - 1).
\end{aligned}$$

Беручи до уваги позначення  $L_2(\phi)$  у косо-симетричному випадку та вище отриманий вираз, рівняння (8.17) можна переписати у наступному вигляді:

$$\partial_{T_2} \mathcal{A} = -\imath \frac{1}{2} \partial_{x_j}^2 \mathcal{A} \tilde{\omega}''(\phi) - 2\imath \mathcal{A} |\mathcal{A}|^2 \frac{f'''(0)}{f'(0)} \sum_{j=-l}^l Q_j \sin(j\phi_0) (\cos(j\phi_0) - 1).$$

Використовуючи позначення (5.44) та (8.16) та домножуючи обидві частини останнього рівняння на  $\imath$ , ми отримуємо *нелінійне рівняння Шрьодінгера* (5.42), коли  $\phi_0 \neq 0$  та  $\tilde{\omega}''(\phi_0) \neq 0$ . Остання нерівність є частиною вимог (ii) теореми.

Перевіримо тепер які обмеження накладають рівняння при  $\varepsilon^3 e^{3\imath(\omega_0 t + \varphi_0 i)} \mathcal{A}^3$  (другий випадок для  $\varepsilon^3$ ). Після прирівняння правих та лівих частин (8.15), та відповідних перетворень отримуємо вираз:

$$3\imath\omega_0 v_3 = \sum_j Q_j e^{3\imath j\phi_0} v_3 - \frac{f'''(0)}{6f'(0)} \sum_j Q_j (1 - 3e^{\imath j\phi_0} + 3e^{2\imath j\phi_0} - e^{3\imath j\phi_0}).$$

Для того, щоб останнє рівняння було розв'язним відносно  $v_3$ , необхідно вимагати, щоб

$$3\imath\omega_0 \neq \sum_{j=-l}^l Q_j e^{3\imath j\phi_0}.$$

Ця нерівність у косо-симетричному випадку має вигляд:

$$3\tilde{\omega}(\phi_0) \neq 2 \sum_{j=1}^l Q_j \sin(3j\phi_0) \quad \text{або} \quad 3\tilde{\omega}(\phi_0) \neq \tilde{\omega}(3\phi_0)$$

Остання нерівність визначає нерезонансну умову (iv) для існування розв'язків системи. Виконання останньої умови також дає можливість безпосередньо записати значення константи  $v_3$  анзацу (5.41) у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} v_3 = & \left[ 3\omega_0 - 2 \sum_{j=1}^l Q_j \sin(3j\phi_0) \right]^{-1} \frac{2f'''}{3f'} \sum_{j=1}^l Q_j \sin(j\phi_0) (1 - 3\cos(j\phi_0) + \\ & + 2\cos^2(j\phi_0)) = \left[ \sum_{j=1}^l Q_j(j\phi_0) \sin^3(j\phi_0) \right]^{-1} \times \\ & \times \frac{2f'''(0)}{3f'(0)} \sum_{j=1}^l Q_j \sin(j\phi_0) (1 - 3\cos(j\phi_0) + 2\cos^2(j\phi_0)) \quad (8.18) \end{aligned}$$

Таким чином, розклад (8.15) системи (5.39) за допомогою анзацу (5.41) по степенях  $\varepsilon$  призводить до виникнення рівняння в частинних похідних (5.42) при коефіцієнті  $\varepsilon^3 e^{i(\omega_0 t + \varphi_0 i)}$ . Вирази, що отримуються при  $\varepsilon^1$ ,  $\varepsilon^2$  та  $\varepsilon^3 e^{3i(\omega_0 t + \varphi_0 i)}$   $\mathcal{A}^3$  забезпечують додаткові умови, виконання яких гарантує одночасну розв'язність великої осциляторної системи (5.7.1) та нелінійного рівняння Шрьодінгера (5.42).  $\square$

## В.12 Доведення Теорема 7.2.1

Обчислимо Якобін  $(2N+1)$ -вимірної системи (7.41), враховуючи, що функції  $f(x)$ ,  $g(x)$ ,  $h(x)$  задовільняють умови (7.30)–(7.32). Маємо:

$$\bar{J}_{2N+1} = \begin{pmatrix} -bg'(\varphi_1) - \frac{a_1}{N}f'(\varphi_1) & \cdots & -\frac{a_N}{N}f'(\varphi_N) & -1 & -\frac{1}{N}f(\varphi_1) & \cdots & -\frac{1}{N}f(\varphi_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ -\frac{a_1}{N}f'(\varphi_1) & \cdots & -bg'(\varphi_N) - \frac{a_N}{N}f'(\varphi_N) & -1 & -\frac{1}{N}f(\varphi_1) & \cdots & -\frac{1}{N}f(\varphi_N) \\ \frac{\alpha a_1}{N}f'(\varphi_1) & \cdots & \frac{\alpha a_N}{n}f'(\varphi_N) & 0 & \frac{\alpha}{N}f(\varphi_1) & \cdots & \frac{\alpha}{N}f(\varphi_N) \\ \beta\gamma h'(\varphi_1) & \cdots & 0 & 0 & -\beta & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \beta\gamma h'(\varphi_2) & 0 & 0 & \cdots & -\beta \end{pmatrix}.$$

Перепишемо цю матрицю у блочній формі у вигляді:

$$\bar{J}_{2N+1} = \begin{pmatrix} A_N + B_N & -E_{k,1} & C_N \\ D_N & 0 & F_N \\ G_N & 0_{k,1} & -\beta I_N \end{pmatrix},$$

де

$$A_N = \begin{pmatrix} -\frac{a_1}{N}f'(\varphi_1) & \cdots & -\frac{a_N}{N}f'(\varphi_N) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ -\frac{a_1}{N}f'(\varphi_1) & \cdots & -\frac{\alpha a_N}{N}f'(\varphi_N) \end{pmatrix},$$

$$B_N = \text{diag} \{-bg'(\varphi_1), \dots, -bg'(\varphi_N)\},$$

$$C_N = \begin{pmatrix} -\frac{1}{N}f(\varphi_1) & \cdots & -\frac{1}{N}f(\varphi_N) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ -\frac{1}{N}f(\varphi_1) & \cdots & -\frac{1}{N}f(\varphi_N) \end{pmatrix},$$

$$D_N = \left( \frac{\alpha a_1}{N}f'(\varphi_1), \dots, \frac{\alpha a_N}{N}f'(\varphi_N) \right),$$

$$F_N = \left( -\frac{\alpha}{N}f(\varphi_1), \dots, -\frac{\alpha}{N}f(\varphi_N) \right),$$

$$G_N = \text{diag} \{ \beta \gamma h'(\varphi_1), \dots, \beta \gamma h'(\varphi_N) \},$$

де  $I_N = \text{diag} \{ 1, \dots, 1 \}$  –  $N \times N$ -вимірний одиничний матриця,  $E_{N,m}$  –  $N \times m$ -вимірний матриця, кожен елемент якої є 1,  $0_{N,m}$  –  $N \times m$ -вимірний матриця, кожен елемент якої є 0.

Відмітимо, що стійкість положень рівноваги не залежить від загальної частоти  $\omega$ . Позначимо

$$p \stackrel{df}{=} f'(0), \quad q_0 \stackrel{df}{=} g'(0), \quad q_\pi \stackrel{df}{=} g'(\pi).$$

Тоді для особливих точок  $P_k$  маємо:

$$A_N(\Phi_k) = \begin{pmatrix} -\frac{a_1}{N}p & \cdots & -\frac{a_k}{N}p & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\frac{a_1}{N}p & \cdots & -\frac{\alpha a_k}{N}p & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_N(\Phi_k) = \text{diag} \{ -b, \dots, -b, \underbrace{b, \dots, b}_{N-k} \},$$

$$C(\Phi_k) = 0_{N,N},$$

$$D_N(\Phi_k) = \left( \frac{\alpha a_1}{N}p, \dots, \frac{\alpha a_k}{N}p, 0, \dots, 0 \right),$$

$$F(\Phi_k) = 0_{1,N}, \quad G_N(\Phi_k) = 0_{N,N}.$$

Матриця Якобіану тоді приймає вигляд:

$$\bar{J}_{2N+1} = \begin{pmatrix} J_{N+1}(\Phi_k) & 0 \\ 0 & -\beta I_N \end{pmatrix},$$

де

$$J_{N+1}(\Phi_k) = \begin{pmatrix} -bq_0 - \frac{a_1}{N}p & \cdots & -\frac{a_k}{N}p & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ -\frac{a_1}{N}p & \cdots & -bq_0 - \frac{a_k}{N}p & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ -\frac{a_1}{N}p & \cdots & -\frac{a_k}{N}p & -bq_\pi & \cdots & 0 & -1 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ -\frac{a_1}{N}p & \cdots & -\frac{a_k}{N}p & 0 & \cdots & -bq_\pi & -1 \\ -\frac{\alpha a_1}{N}p & \cdots & -\frac{\alpha a_k}{N}p & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Блокова структура Якобіану дає можливість знайти частину власних значень. Так матриця  $\bar{J}_{2N+1}(\Phi_k)$  має  $N$  однакових власних значень

$$\lambda_{N+2}(\Phi_k) = \dots = \lambda_{2N+1}(\Phi_k) = -\beta.$$

Інші власні значення можуть бути знайдені як власні значення  $(n+1) \times (n+1)$ -вимірному блоку, який після підстановки координат точки  $P_k$  має вигляд:

$$J_{N+1}(\Phi_k, \omega, \Psi_k) = \begin{pmatrix} -bq_0 - \frac{(c+\gamma)}{N}p & \cdots & -\frac{(c+\gamma)}{N}p & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ -\frac{(c+\gamma)}{N}p & \cdots & -bq_0 - \frac{(c+\gamma)}{N}p & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ -\frac{(c+\gamma)}{N}p & \cdots & -\frac{(c+\gamma)}{N}p & -bq_\pi & \cdots & 0 & -1 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -\frac{(c+\gamma)}{N}p & \cdots & -\frac{(c+\gamma)}{N}p & 0 & \cdots & -bq_\pi & -1 \\ \frac{\alpha(c+\gamma)}{N}p & \cdots & \frac{\alpha(c+\gamma)}{N}p & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -bq_0 I_k - \frac{(c+\gamma)}{N}p E_{k,k} & 0_{k,N-k} & -E_{k,1} \\ -\frac{(c+\gamma)}{N}p E_{N-k,k} & -bq_\pi I_{N-k} & -E_{N-k,1} \\ \frac{\alpha(c+\gamma)}{N}p E_{1,k} & 0_{1,N-k} & 0 \end{pmatrix}.$$

Після значної кількості перетворень та перепозначень остання матриця може бути представлена у трикутному вигляді (ми не наводимо цю матрицю, оскільки вона є занадто громіздкою), після чого можна знайти характери-

стичний поліном та власні значення цієї матриці. Власні значення Якобіану суттєво відрізняються для двох випадків і мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned}\lambda_1(\Phi_k) &= \dots = \lambda_{k-1}(\Phi_k) = -bg'(0), \\ \lambda_{k+2}(\Phi_k) &= \dots = \lambda_{N+1}(\Phi_k) = -bg'(\pi), \\ \lambda_{k,k+1}(\Phi_k) &= -\frac{1}{2N} \left( \sigma_k + Nbg'(0) \pm \sqrt{(\sigma_k + Nbg'(0))^2 - 4N\alpha\sigma_k} \right), \\ & k = 1, \dots, N, \quad (8.19)\end{aligned}$$

де  $\sigma_k = f'(0) \sum_{j=1}^k a_j$  та

$$\lambda_1(\Phi_0) = 0, \quad \lambda_2(\Phi_0) = \dots = \lambda_{N+1}(\Phi_0) = -bg'(\pi). \quad (8.20)$$

Оскільки  $a_j = c + \gamma$  для  $j = 1, \dots, k$ , то ми маємо:

$$\begin{aligned}\lambda_{k,k+1}(\Phi_k, \omega, \Psi_k) &= -\frac{1}{2N} \left( k(c + \gamma)f'(0) + Nbg'(0) \pm \right. \\ & \left. \pm \sqrt{(k(c + \gamma)f'(0) + Nbg'(0))^2 - 4Nk\alpha(c + \gamma)f'(0)} \right).\end{aligned}$$

Використовуючи представлення для власних значень, нижче ми сформулюємо чотири типи умов **(i)**–**(iv)** для чотирьох різних типів положень рівноваги системи (7.41).

**(i)** Положення рівноваги повної синхронізації  $P_N$  системи (7.41) є стійким, якщо  $N \geq 2$  та виконується нерівність  $b > 0$ .

Стійкість особливої точки  $P_N$  впливає з формули (8.19) при  $k = N$ . У цьому випадку маємо:  $\lambda_1(\Phi_N) = \dots = \lambda_{N-1}(\Phi_N) = -bg'(0) < 0$ . З умов (7.30), (7.31), додатності інших параметрів системи та нерівності  $b > 0$  впливають нерівності

$$(c + \gamma)f'(0) + bg'(0) > 0 \quad \text{та} \quad \alpha(c + \gamma)f'(0) > 0.$$

Останні дві нерівності гарантують, що  $\lambda_N(\Phi_N)$  та  $\lambda_{N+1}(\Phi_N)$  є від'ємними. Отже, синхронне положення рівноваги є завжди стійким при від'ємних значення параметру  $b$ .

У випадку  $N = 1$  точка  $P_N = P_1$  (на відміну від  $N \geq 2$ ) буде стійкою і при додатніх і при від'ємних значеннях параметру  $b$ , якщо при цьому  $b > -(c + \gamma)f'(0)$  (як це показано нижче). З фізичної точки зору природньо, що єдиний периферичний осцилятор завжди синхронізується з центральним осцилятором при відсутності конкурентів.

**(ii)** Положення рівноваги  $P_0$  системи (7.41) є стійким вздовж  $2N$  напрямків та нейтральною вздовж одного напрямку, якщо  $b < 0$ .

Особлива точка  $P_0$  відповідає антифазовому режиму всіх периферичних осциляторів по відношенню до центрального. Відповідно до формули (8.20) та останньої з умов (7.31) ця точка є притягуючою вздовж  $N$  симетричних фазових та  $N$  симетричних амплітудних напрямків. Останній напрямок згідно (8.20) є нейтральним та потребує додаткових досліджень. Нейтральність даного напрямку є природньою, оскільки описує вплив частот ПО на частоту ЦО в умовах відсутності ПО–переможця. Дана ситуація також є біфуркаційною, та буде описана нижче.

**(iii)** Положення рівноваги  $P_1$  системи (7.41) є стійким при виконанні умов (8.19).

Записуючи вирази (8.19) для особливої точки  $P_1$ , ми маємо:

$$\lambda_{1,2}(\Phi_1) = -\frac{1}{2N} \left( \sigma_1 + Nbg'(0) \pm \sqrt{(\sigma_1 + Nbg'(0))^2 - 4N\alpha\sigma_1} \right),$$

$$\lambda_3(\Phi_1) = \dots = \lambda_{N+1}(\Phi_1) = -bg'(\pi).$$

Дана особлива точки є стійкою коли  $bg'(\pi) > 0$  та  $\text{Re}(\lambda_{1,2}(\Phi_1)) < 0$ . Останнє виконується, якщо

$$\sigma_1 + Nbg'(0) = (c + \gamma)f'(0) + Nbg'(0) > 0 \quad \text{та} \quad N\alpha\sigma_1 = N\alpha(c + \gamma)f'(0) > 0.$$

Використовуючи умови (7.30), (7.31), переконуємось, що для стійкості даної



точки достатньо виконання (8.19).

(iv) Положення рівноваги  $P_2, \dots, P_{N-1}$  системи (7.41) є сідлами для будь-яких значень параметрів.

Для доведення даного твердження досить показати, що принаймні два власних значення кожної з особливих точок  $P_k, k = 2, \dots, N-1$ , мають протилежні знаки. Дійсно, використовуючи (8.19) для даних точок, переконуємось, що

$$\lambda_1(\Phi_k) = -bg'(0) = \frac{g'(0)}{g'(\pi)} \lambda_{N+1}(\Phi_k), \quad k = 2, \dots, N-1.$$

Оскільки згідно (7.31)  $g'(0) > 0$  та  $g'(\pi) < 0$ , то принаймні  $\lambda_1(\Phi_k)$  та  $\lambda_{N+1}(\Phi_k)$  мають різні знаки і точка  $\Phi_k$  є сідлом. З (8.19) також бачимо, таке сідло майже завжди є регулярним, крім випадків коли  $\lambda_k(\Phi_k) = 0$  чи  $\lambda_{k+1}(\Phi_k) = 0$  (тобто виродженим воно може бути лише у двох напрямках).

Таким чином, Лема 7.2.1 разом з твердженнями (i)–(iv) доводять Теорему 7.2.1.  $\square$

### В.13 Доведення Теорема 7.2.2

Для доведення теореми нам потрібно встановити оцінки координат  $Q_l$  та отримати умови їх стійкості у випадку, коли функції зв'язку системи (7.37)–(7.39) мають спеціальний вигляд (7.30)–(7.32). Згідно умов теореми параметр  $\mu$  функції  $h(x)$  задовольняє умові  $\mu < \pi/2$ . Отже,  $h(x)$  не є нульовою у відносно малому проміжку  $(-\mu, \mu)$ . Координати точки  $Q_l$  визначаються з системи алгебраїчних рівнянь

$$\omega_i - \omega_0 - b \sin(\varphi_i) - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^n a_j f(\varphi_j) = 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad (8.21)$$

$$\sum_{j=1}^n a_j f(\varphi_j) = 0, \quad (8.22)$$

$$-a_i + c + \gamma h(\varphi_i) = 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (8.23)$$

з додатковими умовами  $\varphi_l \in D_1 = (-\pi/2, \pi/2)$  та  $\varphi_i \in D_2 = (\pi/2, 3\pi/2)$  для  $i \neq l$ . З рівняння (8.23) ми маємо  $a_i = c, i \neq l$ . Рівняння (8.22) може бути

переписано у наступному вигляді:

$$(c + \gamma h(\varphi_l))f(\varphi_l) + c \sum_{i \neq l} f(\varphi_i) = 0.$$

Беручи до уваги, що

$$\max_{\mathcal{D}_2} \|f(\varphi_i)\| = f(\pi/2) = \sin(2^{-\nu}\pi), \quad i \neq l,$$

ми можемо оцінити абсолютне значення  $f(\varphi_l)$  наступним чином:

$$|f(\varphi_l)| \leq (N - 1)c \frac{\sin(2^{-\nu}\pi)}{(c + \gamma h(\varphi_l))} \leq (N - 1) \sin(2^{-\nu}\pi).$$

З останньої нерівності випливає, що

$$|\varphi_l| \leq f^{-1}((N - 1) \sin(2^{-\nu}\pi)) \stackrel{df}{=} \varphi^*, \quad \varphi^* \in (x_{\min}, x_{\max}). \quad (8.24)$$

У виразі (8.24) рівність можлива лише у випадку, якщо  $\varphi_i = \pm\pi/2$ ,  $i \neq l$ , тобто, коли  $\omega_i = \omega_l \pm b$ ,  $i \neq l$ . Якщо значення параметрів  $N$  та  $\nu$  є достатньо великими, то  $\varphi_l$  є дуже малим. Наприклад, якщо система має параметри  $N = 100$ ,  $\nu = 20$ , то  $|\varphi_l| < 10^{-5}$ . У регулярних випадках, тобто коли змінні  $\varphi_i$  розподілені більш-менш рівномірно навколо  $\pi/2$ , змінна  $\varphi_l$  є набагато (кілька порядків) ближче до нуля ніж у граничному випадку, який ми оцінювали.

Використовуючи (8.24), отримуємо грубу оцінку для  $\omega_0$ , як

$$|\omega_0 - \omega_l| \leq |b| \sin |\varphi^*| \leq |b| |\varphi^*|.$$

Амплітуда осцилятора-переможця оцінюється як

$$c + \gamma h(\varphi^*) = c + \gamma \left( \frac{\mu^2 - (\varphi^*)^2}{\mu^2} \right)^\sigma \leq a_l \leq c + \gamma.$$

Нарешті, використовуючи вираз  $\omega_i - \omega_l - b \sin \varphi_i \approx 0$  та беручи до уваги, що  $\varphi_i$  є близьким до  $\pi$ , ми можемо апроксимувати координати фазових положень

рівноваги:

$$\bar{\varphi}_i \approx \pi - \arcsin\left(\frac{\omega_i - \omega_l}{b}\right), \quad \text{де} \quad \left|\frac{\omega_i - \omega_l}{b}\right| \leq 1 \quad \text{для всіх} \quad i \neq l.$$

Таким чином, положення рівноваги  $Q_l$  може бути приблизно представлено у вигляді (7.46) з відповідними оцінками точності, наведеними вище в доведенні.

Далі виведемо умови стійкості положення рівноваги  $Q_l$  у випадку, коли параметр  $\nu$  є достатньо великим. У цьому випадку  $\varphi_l \approx 0$  і, отже,  $f(\varphi_l) \approx 0$ ,  $f'(\varphi_l) \approx \nu$ . Значення  $f(\varphi_i)$  та  $f'(\varphi_i)$ ,  $i \neq l$ , є дуже близькі до нуля у деякому діапазоні  $\varphi_i$  навколо  $\pi$ . Наприклад, обидва  $\max_{D_2} |f(\varphi_i)| = f(\pi/2)$  та  $\max_{D_2} |f'(\varphi_i)| = -f'(\pi/2)$  є меншим за  $10^{-5}$ . Без обмеження загальності вважаємо  $l = 1$ . Тоді Якобіан системи в точці  $Q_l$  може бути апроксимований, як

$$\bar{J}_{2N+1}(Q_1) \approx \text{diag} \{J_{N+1}(Q_1), -\beta I_N\}, \quad (8.25)$$

де  $J_{n+1}(Q_1)$  має вигляд

$$J_{N+1}(Q_1) = \begin{pmatrix} -b - \frac{c+\gamma}{N}\nu & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ -\frac{c+\gamma}{N}\nu & -b \cos \bar{\varphi}_2 & \cdots & 0 & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -\frac{c+\gamma}{N}\nu & 0 & \cdots & -b \cos \bar{\varphi}_N & -1 \\ \frac{\alpha(c+\gamma)}{N}\nu & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Якобіан має схожу структуру для будь-якого  $l$  з лише однією різницею, що його  $l$ -тий рядок заповнений, як перший у (8.25). Тепер ми можемо обчислити власні значення положення рівноваги з високою точністю:

$$\lambda_{l,n+1} = -\frac{1}{2n} \left( (c + \gamma)\nu + Nb \pm \sqrt{((c + \gamma)\nu + Nb)^2 - 4N\alpha(c + \gamma)} \right),$$

$$\lambda_i = -b \cos(\bar{\varphi}_i), \quad i = 1, \dots, N, \quad i \neq l,$$

$$\lambda_i = -\beta, \quad i = N + 2, \dots, 2N + 1.$$

Отже, отримуємо умови стійкості  $Q_l$ :

$$(c + \gamma)\nu + Nb > 0, \quad N\alpha(c + \gamma)\nu > 0, \quad b \cos(\varphi_i) > 0, \quad i \neq l.$$

Оскільки ми припускали, що  $b < 0$ , то остання нерівність є дійсною, коли  $\bar{\varphi}_i$  знаходиться в середині інтервалу  $\mathcal{D}_2$ . Центральна нерівність також завжди виконується у, оскільки всі компоненти додатні. Таким чином, точка  $Q_l$  є стійкою при виконанні умов теореми.

Отже, ми показали, що фазова координата  $\varphi_l$  (різниця між фазами ПО–переможця та ЦО) положення рівноваги  $Q_l$  є дуже близькою до нуля, коли фазові різниці ПО–переможених  $\varphi_i$ ,  $i \neq l$ , знаходяться в околі  $\pi$ . У той же час, амплітуда ПО–переможця є приблизно рівною  $c + \gamma$ , а амплітуди ПО–переможених є близькими до  $c$ . Ми також показали, що поточна частота  $\omega_0(t)$  центрального осцилятора прямує до власної частоти  $\omega_l$  осцилятора–переможця. Останні міркування завершують доведення теореми.  $\square$

## В.14 Доведення Теореми 7.2.5

Розглянемо дво–вимірну гіперплощину з вільними змінними  $\varphi_j$ ,  $\varphi_m$  та коли всі інші змінні є постійними координатами положення рівноваги  $Q_l$  (рис. 8.42(a)). У цій гіперплощині точка  $Q_l$  має координати  $(\bar{\varphi}_j, \bar{\varphi}_m)$ , а сідло  $S_{l,j}$  має координати  $(\pi - \bar{\varphi}_j, \bar{\varphi}_m)$ . SNIC біфуркація особливих точок  $Q_l$  та  $S_{l,j}$  призводить до виникнення сідло–вузлової точки  $SN_{l,j}$  (рис. 8.42(b)) і після цього до виникнення сідлового циклу  $LC_l$  (рис. 8.42(c)). Відповідно до  $m$ -того рівняння (7.52) система має також два додаткових положення рівноваги  $S_{l,m}$ , що належить до одно–вимірного многовиду  $W^u(S_{l,m})$ , та  $S_{l,j,m}$ , що належить дво–вимірному нестійкому многовиду  $W^{uu}(S_{l,j,m})$  ( $S_{l,j,m}$  є нестійким вузлом дво–вимірної площини  $(\varphi_j, \varphi_m) \in \mathbb{T}_l^2$ ). Точки  $S_{l,m}$  та  $S_{l,j,m}$  мають спільний одно–вимірний інваріантний многовид, який є стійким для першої

точки та нестійким для другої. Іншими словами, точки лежать на циклі, що сформований двома гілками многовиду. SNIC біфуркація точок  $S_{l,m}$  та  $S_{l,j,m}$  призводить до виникнення сідло–вузлової точки  $SN_{l,i,m}$  (рис. 8.42(b)), а потім до виникнення сідлового граничного циклу  $SC_l$  (рис. 8.42(c)), чий один нестійкий інваріантний многовид розташований вздовж змінної  $\varphi_m$ . Дві SNIC біфуркації, а також виникнення  $LC_l$  та  $SC_l$  відбуваються майже одночасно (рис. 8.42(a)–(c)). У цьому випадку ми маємо стійкий та нестійкий граничні цикли на торі  $\mathbb{T}_l^2$ . У випадку неодноразових SNIC біфуркація будуть утворюватись два варіанти потоків Черрі [97, 252] на торі  $\mathbb{T}_l^2$ : 1) стійкий цикл  $LC_l$  та два положення рівноваги  $S_{l,m}$ ,  $S_{l,j,m}$  чи 2) сідловий (нестійкий на  $\mathbb{T}_l^2$ ) граничний цикл  $SC_l$  та два положення рівноваги  $Q_l$ ,  $S_{l,m}$ . Відмітимо, що многовид  $\mathcal{M}_l^2$  системи (7.37)–(7.39) (що є топологічно еквівалентний тору  $\mathbb{T}_l^2$ ) є дво–вимірним інваріантним многовидом сідлового циклу  $SC_l$ , який є стійким  $2N - 1$  трансверсальних напрямках глобального  $(2N + 1)$ -вимірного фазового простору  $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  (коли  $SC_l$  існує).

Сідло–вузлова біфуркація  $LC_l$  та  $SC_l$  на інваріантному торі  $\mathbb{T}_l^2$  (SNIT) є подібною до SNIC біфуркації, що була розглянута вище. Локально, це є сідло–вузлова біфуркація (складки) стійкого циклу  $LC_l$  та сідлового циклу  $SC_l$  (яка відбувається вздовж змінної  $\varphi_m$ ) що призводить до транзитивності траєкторій через тор. У результаті SNIT біфуркації отримуємо перший сідло–вузловий цикл  $SNC_l$  (рис. 8.42(d)) та після цього стійкий (у трансверсальному напрямку) граничний тор, який позначимо  $LT_l^2$  (рис. 8.42(e)). Описана SNIT біфуркація є глобальною біфуркацією на торі  $\mathbb{T}_l^2$  (як SNIC є глобальною біфуркацією на циклі) та вона призводить до транзитивності траєкторій на всьому дво–вимірному торі. Ця біфуркація виникає, коли фазові різниці  $|\omega_l - \omega_m|$  досягають значення  $|b|$ , але  $|\omega_l - \omega_j| \geq |b|$  та  $|\omega_l - \omega_i| < |b|$  для  $i \neq l$ ,  $i \neq j$ ,  $i \neq m$ . Раніше було зауважено, що якщо діапазон власних частот периферичних осциляторів збільшується, то парші SNIC біфуркації виникають одночасно коли 1–й та  $N$ -й ПО стають переможцями. Останнє призводить до виникнення граничних циклів  $LC_1$  та  $LC_N$ . Аналогічно можна переконатись, що подальше збільшення діапазону власних частот призводить до виникнення SNIT біфуркації одночасно зі SNIC біфуркацією. У результаті

таких одночасних біфуркацій виникає пара  $LT_1^2$  та  $LC_{N-1}$ . Поява інших граничних торів асоціюється з більш складними біфуркаціями подібного типу.

У той самий спосіб можливо показати виникнення сідлового тору  $ST_l^2$  у результаті SNIT біфуркації двох сідлових циклів з одно та дво-вимірними нестійкими многовидами. Дві одночасні біфуркації виникнення стійкого та сідлового інваріантних торів  $LT_l^2$  та  $ST_l^2$  показано на рис. 8.43(c)–(e). Тори  $LT_l^2$  та  $ST_l^2$  належать до три-вимірного тору  $\mathbb{T}^3$ , який, у свою чергу, є інваріантним многовидом сідлового тору  $ST_l^2$ . Як і у випадку менших розмірностей, біфуркація складки двох торів  $LT_l^2$  та  $ST_l^2$  призводить до виникнення сідло-вузлового тору  $SNT_l^2$  (рис. 8.43(f)) і тоді до його зникнення а можливості прохідності траєкторій через весь три-вимірний многовид. Отже, глобально відбулась нова SNIT біфуркація наступного рівня, яка призводить до виникнення нового стійкого тору  $LT_l^3$  у глобальному фазовому просторі, що є транзитивним для траєкторій системи. Цей тор виникає, коли дві фазові різниці  $|\omega_l - \omega_i|$  є більшими за  $|b|$ , одна така різниця є рівною  $|b|$ , а інші  $N - 3$  різниць є меншими за  $|b|$ . Цей тор існує, коли нерівність  $|\omega_l - \omega_i| > |b|$  виконується для трьох значень індексів  $i$ , у той час, як для інших індексів виконується нерівність  $|\omega_l - \omega_i| < |b|$ .

Використовуючи подібні аргументи, можна описати SNIT біфуркацію для  $LT_l^{m-1}$  та  $ST_l^{m-1}$ , що призводить до виникнення стійкого тору  $LT_l^m$  для довільних  $m = 1, \dots, N - 1$ . Тут позначено  $LT_l^1 = LC_l$ ,  $ST_l^1 = SC_l$ ,  $LT_l^0 = Q$ ,  $ST_l^0 = S_l$ . Стійкість кожного з інваріантних многовидів  $\mathcal{M}_l^{N-1}$  (топологічно еквівалентного  $\mathbb{T}_l^{N-1}$ ) у трансверсальних напрямках не залежить від власних частот системи, а визначається іншими параметрами. Всі біфуркаційні перетворення всередині кожного з таких многовидів при зміні різниць  $\Omega_i = \omega_i - \omega_l$  відбуваються згідно Теоремі 7.2.3. Проводячи процедуру від біфуркацій менших до більших розмірностей і перевіряючи всі умови аналогічним чином, бачимо що тор  $LT_l^m$  існує, коли  $|(\omega_l - \omega_i)/b| > 1$  для  $m$  різних індексів  $i \neq l$  та  $|(\omega_l - \omega_i)/b| < 1$  для залишку  $N - m - 1$  індексів  $i$ . Формулювання теореми підсумовує ці міркування.  $\square$

## Додаток Г

### Теорія Ватанабе–Строгатца

У роботах С. Ватанабе та С. Строгатца [330, 331] було показано яким чином динаміка надпровідникових масивів Джозефсона може бути описано за допомогою системи Курамото–Сакагучі ідентичних елементів та сформульовано теорію (ВС), яка дозволяє суттєво редукувати цю систему для подальшого вивчення. Дана теорія дозволяє вивчати нетривіальну колективну динаміку як для скінченно–вимірної системи, так і для нескінченного її аналога (утвореного при термодинамічному переході), зводячи дану систему до нової три–вимірної системи та  $N - 3$  констант руху, залежних від початкових умов оригінальної. Дана теорія була узагальнена А. Піковським та М. Розенблюмом [276] для розширеної моделі з нелінійним фазовим зсувом. Нижче ми коротко викладемо основні моменти даної теорії.

Розглянемо систему Курамото–Сакагучі ідентичних осциляторів. Дана система є частковим випадком більш загальної системи (2.2) при  $\alpha(R, \beta)$  та  $\omega_i = \omega$ . Заміною змінних  $\theta_i \rightarrow \theta_i - \omega t$  можна прибрати параметр  $\omega$  і записати дану систему у вигляді:

$$\frac{d\theta_i}{dt} = -\frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_i - \theta_j - \alpha). \quad (8.26)$$

Основний результат теорії Ватанабе та Строгатца полягає у тому, що  $N$ -вимірна система (2.10) може бути зведеною до три–вимірної системи

$$\begin{aligned}
\frac{d\tilde{\rho}}{dt} &= K \sin \alpha \frac{(1 - \tilde{\rho}^2)^{3/2}}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\sin(\psi_i - \tilde{\Psi})}{1 - \tilde{\rho} \cos(\psi_i - \tilde{\Psi})} + K \cos \alpha \frac{1 - \tilde{\rho}^2}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\tilde{\rho} - \cos(\psi_i - \tilde{\Psi})}{1 - \tilde{\rho} \cos(\psi_i - \tilde{\Psi})}, \\
\tilde{\rho} \frac{d\tilde{\Psi}}{dt} &= K \sin \alpha \frac{(1 - \tilde{\rho}^2)^{1/2}}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\tilde{\rho} - \cos(\psi_i - \tilde{\Psi})}{1 - \tilde{\rho} \cos(\psi_i - \tilde{\Psi})} - K \cos \alpha \frac{1 - \tilde{\rho}^2}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\sin(\psi_i - \tilde{\Psi})}{1 - \tilde{\rho} \cos(\psi_i - \tilde{\Psi})}, \\
\tilde{\rho} \frac{d\tilde{\Phi}}{dt} &= K \sin \alpha \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\tilde{\rho} - \cos(\psi_i - \tilde{\Psi})}{1 - \tilde{\rho} \cos(\psi_i - \tilde{\Psi})} - K \cos \alpha \frac{(1 - \tilde{\rho}^2)^{1/2}}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\sin(\psi_i - \tilde{\Psi})}{1 - \tilde{\rho} \cos(\psi_i - \tilde{\Psi})}, \quad (8.27)
\end{aligned}$$

де  $\tilde{\Psi}$ ,  $\tilde{\Phi} \in [0, 2\pi)$  є "глобальними фазами", а  $\tilde{\rho} \in [0, 1]$  є "амплітудою". Дана редукція виконується за допомогою наступної заміни змінних:

$$\theta_i(t) = \tilde{\Phi}(t) + 2 \arctan \left[ \sqrt{\frac{1 + \tilde{\rho}(t)}{1 - \tilde{\rho}(t)}} \tan \left( \frac{1}{2} \psi_i - \tilde{\Psi}(t) \right) \right], \quad i = 1, \dots, N, \quad (8.28)$$

де  $\psi_i \in [0, 2\pi)$  є константами. Теорія стверджує, що множина констант  $\psi_i$  разом з розв'язками системи (8.27) описують розв'язки системи (8.26) за допомогою перетворення (8.28). У роботах [330, 331] показано, яким чином співвідносяться початкові умови  $\tilde{\rho}(0)$ ,  $\tilde{\Psi}(0)$ ,  $\tilde{\Phi}(0)$  та константи  $\psi_i$  нової системи з початковими умовами  $\theta_i(0)$  оригінальної. Важливо відмітити, що згідно ВС теорії на константи  $\psi_i$  нової системи накладаються обмеження (умови некогерентності):

$$\sum_{i=1}^N \cos \psi_i = \sum_{i=1}^N \sin \psi_i = 0. \quad (8.29)$$

Для редукованої системи (8.28) її амплітудна змінна  $\tilde{\rho}$  відіграє роль параметру порядку  $R$  для оригінальної системи (8.26). Зокрема  $\tilde{\rho} = R = 1$  при глобальній синхронізації та  $\tilde{\rho} = R = 0$  для стану глобальної антифази. У випадку  $R \in (0, 1)$  цей параметр виражається через дві з нових змінних:  $R = R(\tilde{\Psi}, \tilde{\rho})$ . У роботах Ватанабе та Строгатца вводяться функції:

$$\mathcal{H}(\tilde{\rho}, \tilde{\Psi}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln \left( \frac{1 - \tilde{\rho} \cos(\psi_i - \tilde{\Psi})}{\sqrt{1 - \tilde{\rho}^2}} \right) \quad (8.30)$$



та

$$S(\tilde{\rho}, \tilde{\Psi}) = -\frac{\sqrt{1-\tilde{\rho}^2}}{\tilde{\rho}} \frac{\partial H}{\partial \tilde{\Psi}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sin(\theta_i - \tilde{\Phi}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\sqrt{1-\tilde{\rho}^2} \sin(\psi_i - \tilde{\Psi})}{1 - \tilde{\rho} \cos(\psi_i - \tilde{\Psi})},$$

$$T(\tilde{\rho}, \tilde{\Psi}) = (1 - \tilde{\rho}^2) \frac{\partial H}{\partial \tilde{\rho}} = -\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \cos(\theta_i - \tilde{\Phi}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\tilde{\rho} - \cos(\psi_i - \tilde{\Psi})}{1 - \tilde{\rho} \cos(\psi_i - \tilde{\Psi})}.$$

Використовуючи ці функції параметр порядку  $R$  оригінальні системи переписуються у термінах редукованої у вигляді:

$$R^2 = S^2 + T^2.$$

Функція  $\mathcal{H}$ , що розглядається у полярних координатах  $\tilde{\rho}$  та  $\tilde{\Psi}$ , має мінімум при  $H = 0$  у початку цих координат та прямує до нескінченності на одиничному колі  $\tilde{\rho}=1$ . Також виконується важливе співвідношення цієї функції з параметрами оригінальної системи:

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = KR^2 \cos \alpha. \quad (8.31)$$

Використовуючи функції  $S(\tilde{\rho}, \tilde{\Psi})$  та  $T(\tilde{\rho}, \tilde{\Psi})$  систему (8.27) можна переписати у вигляді:

$$\frac{d\tilde{\rho}}{dt} = (1 - \tilde{\rho}^2)K(T \cos \alpha + S \sin \alpha), \quad (8.32)$$

$$\tilde{\rho} \frac{d\tilde{\Psi}}{dt} = \sqrt{1 - \tilde{\rho}^2}K(T \sin \alpha - S \cos \alpha), \quad (8.33)$$

$$\tilde{\rho} \frac{d\tilde{\Phi}}{dt} = K(T \sin \alpha - S \cos \alpha). \quad (8.34)$$

Як можна бачити, два перших рівняння цієї системи описують дво-вимірну систему змінних  $\tilde{\rho}$  та  $\tilde{\Psi}$ . Ця дво-вимірна система доповнюється третім рівнянням, права частина якого не залежить від власної змінної  $\tilde{\Phi}$ . Та-

кож є очевидним співвідношення між двома останніми змінними:  $d\tilde{\Psi}/dt = \sqrt{1 - \tilde{\rho}^2} d\tilde{\Phi}/dt$ . Зі сказаного можна, зокрема, зробити висновок, що система Курамото–Сакагучі редукується до три-вимірної системи, яка має незалежну дво-вимірну частину, і залежне третє рівняння. Тому і оригінальна система не може мати хаотичних розв'язків.

Відмітимо, що для рівняння (8.31) функція  $\mathcal{H}(\tilde{\rho}, \tilde{\Psi})$  є функцією Ляпунова. Згідно останньому рівнянню, глобальне притягання чи відштовхування у системі описується знаком виразу  $K \cos \alpha$ . При  $K \cos \alpha > 0$  функція  $H$  монотонно зростає, а система має лише один синхронний аттрактор з  $\tilde{\rho} = 1$ . При  $K \cos \alpha < 0$  функція  $H$  монотонно спадає і  $\tilde{\rho} \rightarrow 0$ , а система має глобальним аттрактором інкогерентну множину з параметром порядку  $R = 0$ . Система між притягуючими та відштовхуючими має свій граничний нейтральний варіант при  $\cos \alpha = 0$ , коли система (8.32), (8.32) має константи руху, а точніше може бути записана у вигляді Гамільтонової системи. Повертаючись до оригінальної системи (2.10) у вказаному критичному випадку  $\alpha = \pm\pi/2$  (або  $g(x) = \pm \cos x$ ) можна записати перший інтеграл, що має вигляд:

$$I_{WS} = \sin\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_2 - \theta_3}{2}\right) \times \cdots \times \sin\left(\frac{\theta_{N-1} - \theta_N}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_N - \theta_1}{2}\right). \quad (8.35)$$

Використовуючи усі перестановки індексів, переконуємось, що констант руху такого типу є всього  $N!$ , а функціонально незалежних серед них є  $N - 2$ . Очевидно, що дані перші інтеграли охоплюють майже увесь фазовий простір за винятком множини міри нуль, що відповідає кластерним многовидам  $\theta_i = \theta_j$ . Але саме ця множина є проблемою ВС теорії при вивченні біфуркаційних властивостей системи, оскільки (як буде показано далі) положення рівноваги системи у фазових різницях знаходяться, рухаються та біфуркують (при зміні параметрів) саме на кластерних інваріантних многовидах. Для подолання цієї проблеми та повного описання біфуркаційних перетворень у системі ми будемо застосовувати інші методи, що доповнять описану тут теорію.

Як відмічалось вище, у роботах А. Піковського та М. Розенблюма [276, 263] ВС теорія була розповсюджена на більш загальну систему (2.2)

з нелінійним зсувом  $\alpha(R, \beta)$  у функції взаємодії  $g(x)$ . Виявляється, що, до певної міри, залежність функції  $\alpha$  від параметру порядку та вектору параметрів  $\beta$  не псує можливості редукції до три-вимірної системи, описаної вище. Проте, звичайно, зведена система стає складнішою, а певні її розв'язки вже не можуть бути записані подібними аналітичними формулами. Піковський і Розенблум тонко враховують нюанси пов'язані з ускладненням системи та особливостями нелінійності фазового зсуву. Зокрема, автори розширеної теорії показують існування квазі-періодичних розв'язків у системі (8.32)–(8.34) при  $\alpha = \alpha(R, \beta)$ . Так дво-вимірна система (8.32), (8.33) має положеннями рівноваги точки з  $\tilde{\rho} = 0$  та  $\tilde{\rho} = 1$ . Однак, обидві вказані точки є нестійкими і, отже, початок координат має принаймні один граничний цикл періоду  $T$  такий, що  $\tilde{\rho}(t) = \tilde{\rho}(t + T)$ ,  $\tilde{\Psi}(t) + 2\pi = \tilde{\Psi}(t + T)$ . Варіація змінної  $\tilde{\Phi}$  вздовж періоду задається виразом:

$$\tilde{\Phi}(T) - \tilde{\Phi}(0) = \int_0^{2\pi} \frac{d\tilde{\Psi}}{\sqrt{1 - \tilde{\rho}^2}}.$$

З останнього виразу випливає, що

$$\frac{\omega}{\Omega} = 1 - \frac{2\pi}{\int_0^{2\pi} \frac{d\tilde{\Psi}}{\sqrt{1 - \tilde{\rho}^2}}},$$

де  $\Omega$  є середньою частотою:  $\Omega = \left( d\tilde{\Phi}/dt \right)$ . Останнє співвідношення є у загальному випадку ірраціональним. Отже, для три-вимірної системи (8.32)–(8.34) даний аттрактор є дво-вимірним тором, що характеризується однією негативною та двома нульовими Ляпуновськими експонентами. Вище наведений результат доводить неможливість існування хаотичної динаміки у оригінальній моделі (2.2) у випадку, коли всі фази осциляторів є ідентичними. Природно, що наявність квазі-періодичних торів та їх стійкість суттєво впливає кількість нулів функції  $\alpha(R, \beta)$  та значення похідних у цих точках. Зокрема, система (8.32), (8.33) може мати послідовність концентричних стійких та нестійких періодичних орбіт, що чергуються у відповідності з нулями функції  $\alpha(R, \beta)$ . Також звичайно при дослідженні біфуркаційних властивостей оригі-

нальної та редукованої системи важливу роль відіграють екстремуми функції  $\alpha(R, \beta)$ . Відмітимо також, що теорія Піковського–Розенблюма як і ВС теорія розповсюджується на випадок термодинамічної границі  $N \rightarrow \infty$ . Повне викладення обох згаданих вище теорій є досить громіздким та містить довгі ланцюжки перетворень виразів. Більш повно з даними результатами можна ознайомитись у роботах [330, 331, 276, 263, 264]. Відмітимо також, що дана теорія тісно пов'язана з іншими теоріями зв'язаних систем, зокрема, з теорією Отта–Антонсена та теорією Хонг–Строгатца.

На зважаючи на всю красу та ефективність ВС теорії та її узагальнення, її застосування може бути проблематичним для повного описання біфуркаційної поведінки системи. Пов'язано це з тим, що перетворення (8.28) мають певні сингулярності, а умова некогерентності (8.29) може не виконуватись, у зв'язку з чим теорія не може бути ефективно застосована на інваріантних многовидах, що відповідають кластерним режимам системи. Проблеми застосування ВС теорії в усьому фазовому просторі системи (8.26) обговорюються самими авторами у розділі 4.2 роботи [331], а також зазначені у формулюванні Лемми на стор. 217 цієї роботи. Тобто можна вважати, що дана теорія працює лише всередині інваріантних областей, які є обмеженими цими інваріантними многовидами розмірності  $N - 1$  у  $\mathbb{T}^N$ . Як було показано, більшість локальних біфуркацій відбуваються саме дво-кластерних многовидах  $\mathcal{P}_2$  (описаних формулою (2.8)), які не попадають у поле зору ВС теорії. Глобальні ж біфуркації (в основному гетероклінічні), частиною яких згадані локальні, відбуваються також на множинах, що описуються певними кластерами  $k$ -кластерами,  $k \geq 3$ .

## Додаток Д Рисунок

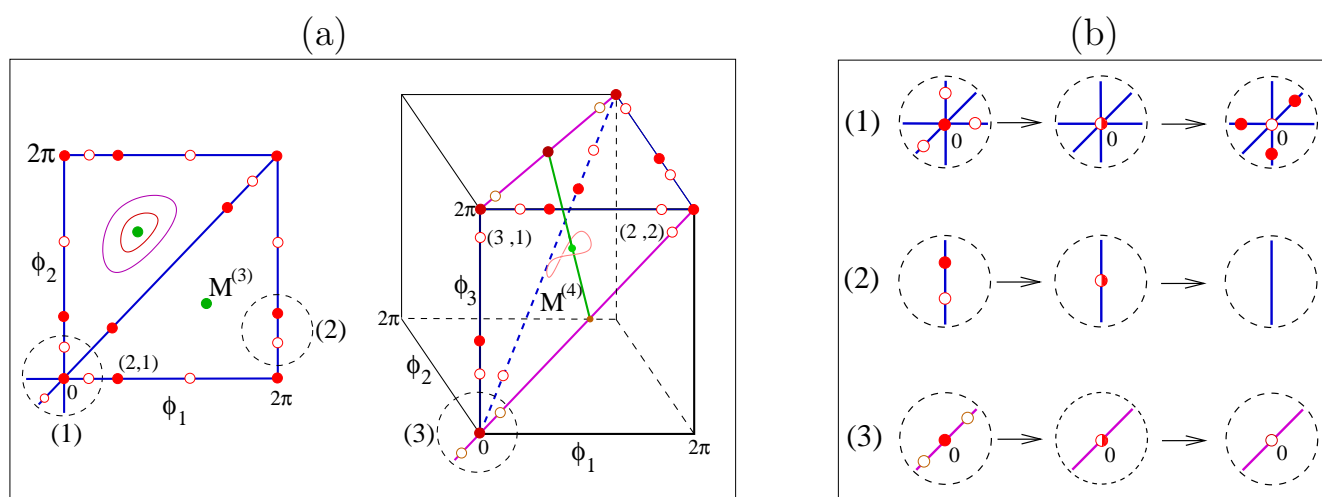


Рис. 8.1: **(а)** Схематична ілюстрація біфуркацій положень рівноваги для  $N = 3$  (ліворуч) та  $N = 4$  (праворуч) для систем у фазових різницях. В правій панелі (а) зображена схема однієї з шести *тетрадральних* інваріантних областей в  $\mathbb{T}^3$ . Заповнені точки позначають *стійкі* вздовж інваріантних ліній положення рівноваги (трансверсальний напрямок не враховується), пусті точки – *нестійкі*, напівзаповнені – *біфуркаційні*. Індеси  $(i, j)$  вказують на те, що точка лежить на лінії ізотропії  $\mathbf{S}_i \times \mathbf{S}_j$ . Зелені точки та лінія відповідають інваріантним многовидам  $\mathcal{M}^{(3)}$  та  $\mathcal{M}^{(4)}$ , відповідно. Схематично зображено розташування кількох періодичних траєкторій навколо многовидів  $\mathcal{M}^{(3)}$  та  $\mathcal{M}^{(4)}$  (такі траєкторії неперервно заповнюють весь фазовий простір крім інваріантних многовидів).

**(б)** Ілюстрація біфуркаційних переходів у вибраних областях фазового простору, окреслених штрихованими колами у (а).

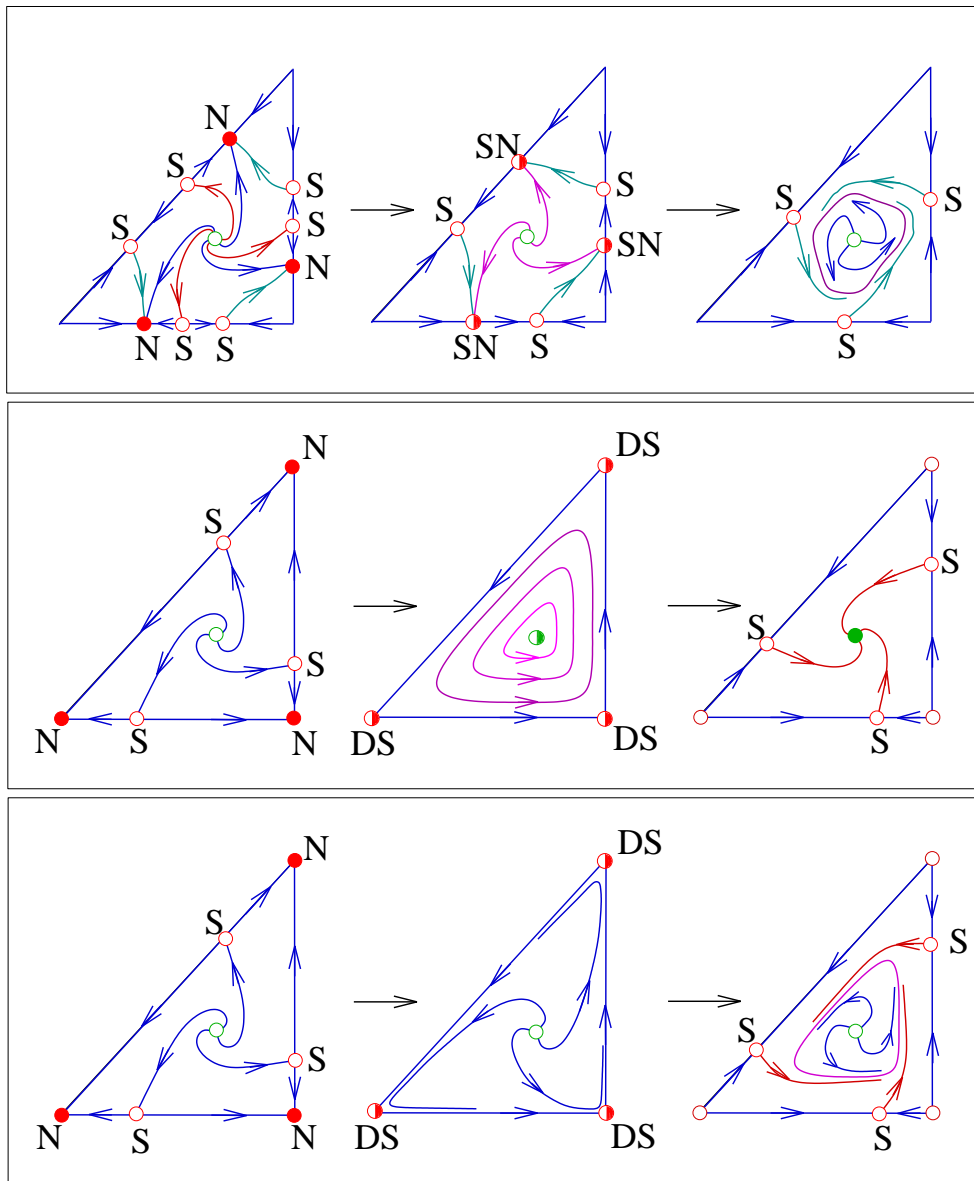


Рис. 8.2: Схематичні ілюстрації появи граничних циклів через гетероклінічні біфуркації. Верхня панель: Гетероклінічний цикл з'являється внаслідок симетричних сідло–вузлових біфуркацій. Середня панель: Випадок Курамото–Сакагучі, тут в момент біфуркації існує сім'я нейтральних циклів. До і після біфуркації стійкими є або повністю синхронний, або повністю асинхронний стани. Нижня панель: Гетероклінічний цикл з'являється внаслідок транскритичної біфуркації і призводить до появи стійкого граничного циклу. Позначення:  $N$  – стійкий вузол,  $S$  – сідло,  $SN$  – сідло–вузол,  $DS$  – вироджене сідло.

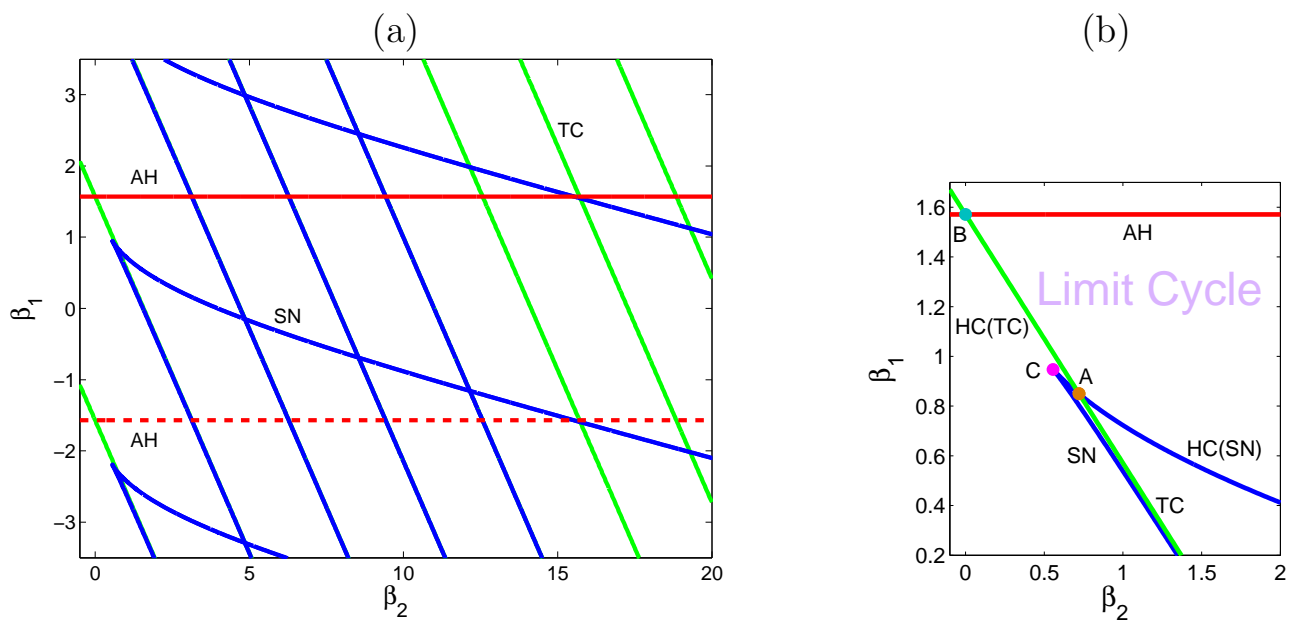


Рис. 8.3: Біфуркаційна діаграма для  $N = 3$  осциляторів у  $(\beta_1, \beta_2)$  параметричній площині (див. рис. 8.1(a)). Права панель малюнку є розширенням елементу центральної частини лівої панелі. Позначення: TC – транскритична біфуркація (див. рис. 8.1(b)(1)), SN – сідло–вузлова біфуркація (див. рис. 8.1(b)(2)), AH – біфуркація Андронова–Хопфа, HC(SN), HC(TC) – сідло–вузлова/гетероклінічна та транскритична/гетероклінічна біфуркації (див. рис. 8.2). Точки А, В та С відповідають біфуркаціям корозмірності–два. Область існування граничного циклу (права панель) обмежена суперкритичною AH біфуркаційною лінією та двома лініями гетероклінічних біфуркацій різних типів.

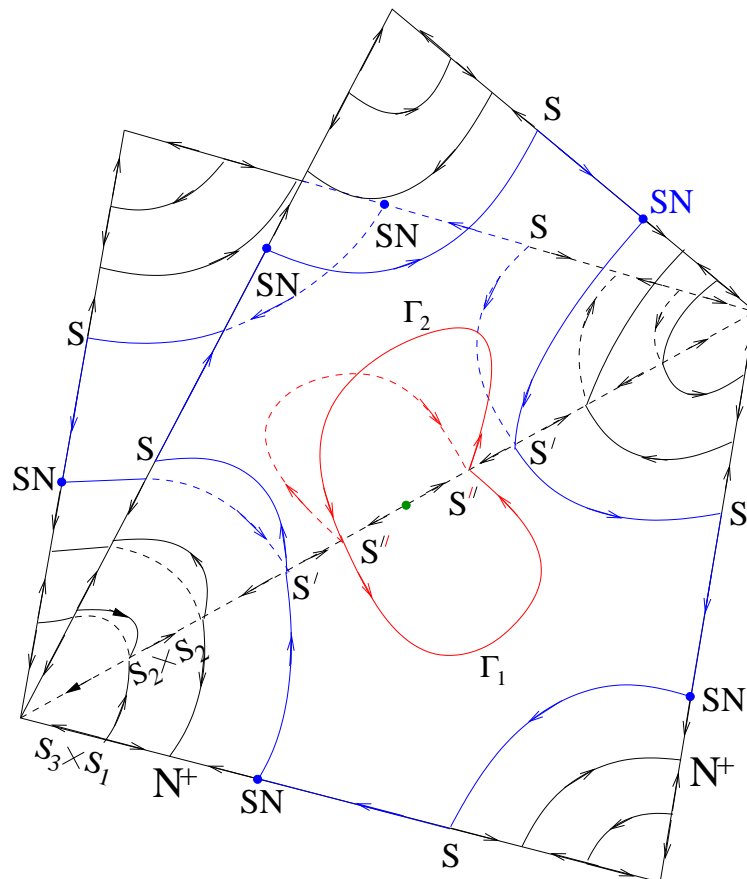


Рис. 8.4: Схематичний фазовий портрет для  $N = 4$  фазових осциляторів, на якому зображені лише інваріантні лінії кластерів  $1 + 3$  та  $2 + 2$ , а також площини, що їх з'єднують. Проілюстровано співіснування двох типів гетероклінічних циклів. Один нестійкий гетероклінічний цикл (синій) зображено у момент біфуркації, інший стійкий гетероклінічний цикл (червоний) — після біфуркації.



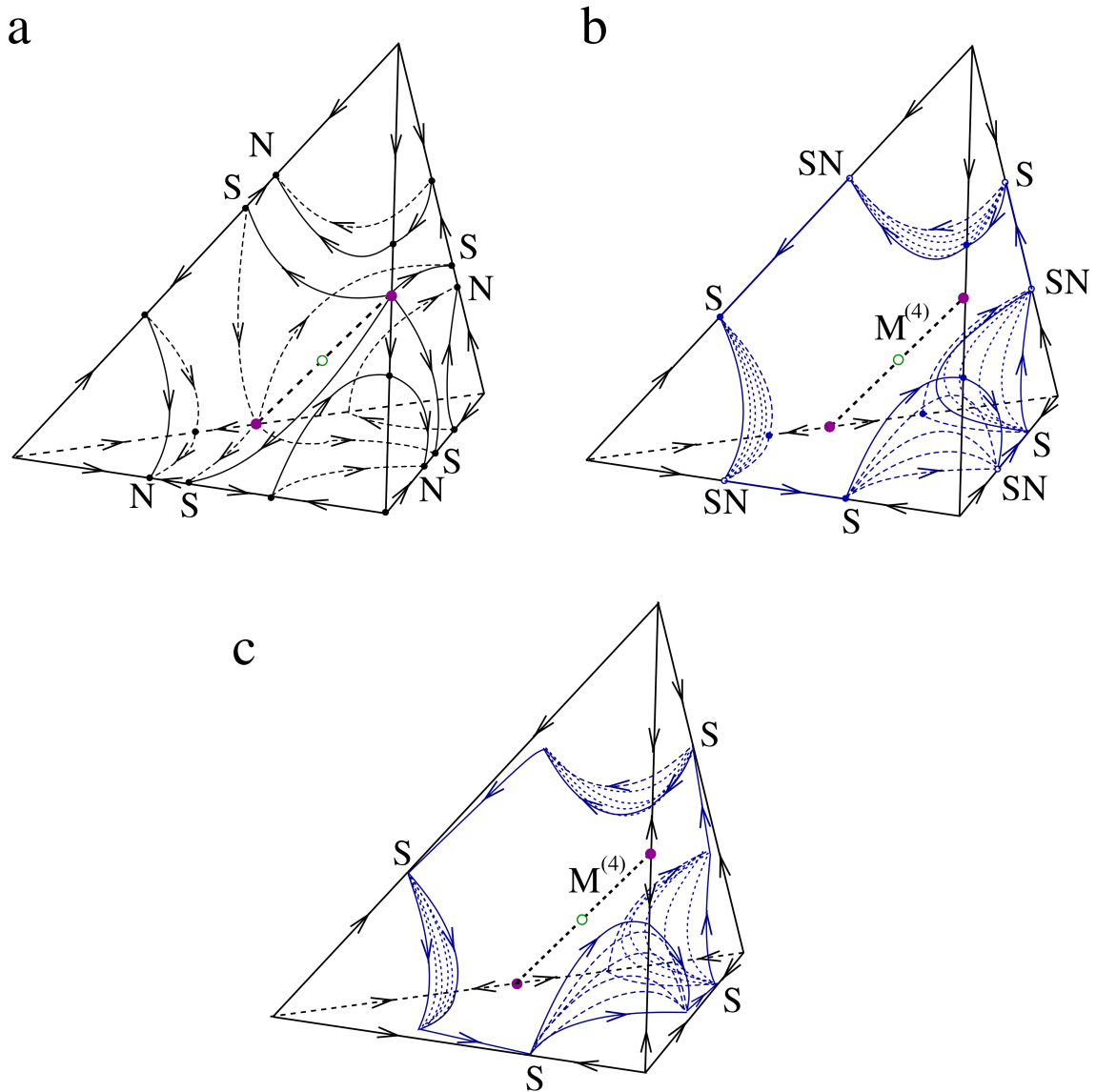


Рис. 8.5: Схематичні діаграми сідло-вузлової/гетероклінічної біфуркації для чотирьох глобально зв'язаних осциляторів. На кожному малюнку представлено фазовий портрет у середині та на границях однієї з шести інваріантної області  $\bar{C} \cup \partial\bar{C} \in \mathbb{T}^3$ . (a) — перед біфуркацією, (b) у біфуркаційний момент, (c) — після біфуркації. Синім кольором на (b) та (c) показано відповідно множини стійких гетероклінічних та граничних циклів.

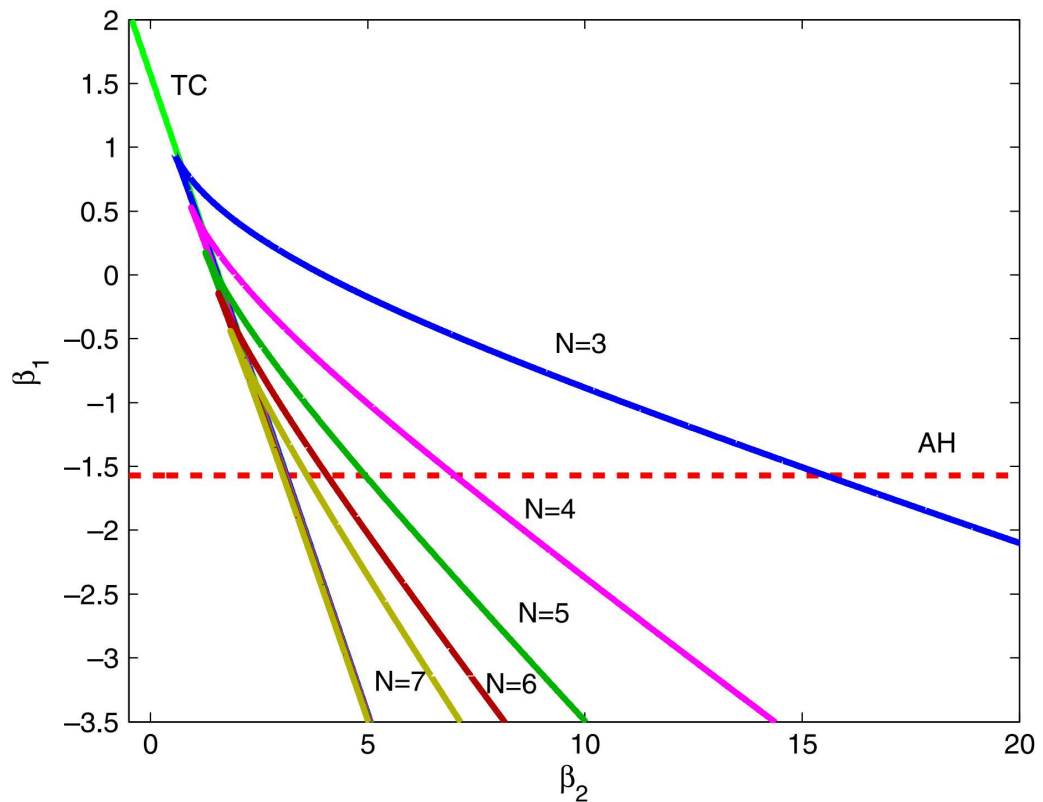


Рис. 8.6: Порівняльна діаграма ліній сідло–вузлових біфуркацій у  $(\beta_2, \beta_1)$  параметричній площині для випадків 3, 4, 5, 6 та 7 осциляторів. Кінчик ”язика” зміщуються вниз по мірі зростання  $N$ , а при  $N \leq 9$  він попадає під лінію біфуркації Андронова–Хопфа  $\beta_1 = -\pi/2$ .

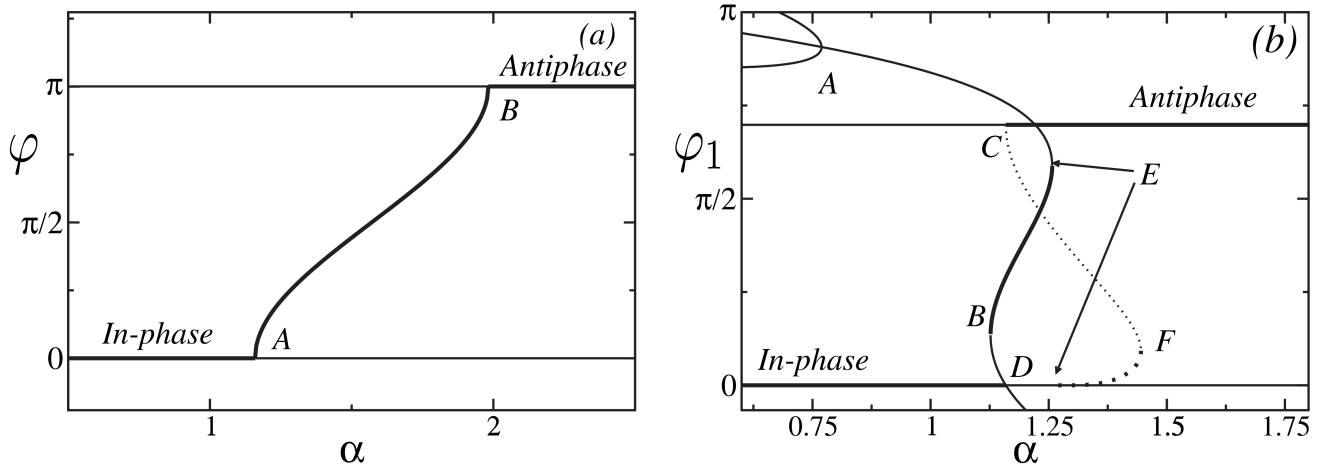


Рис. 8.7: **(а)** Біфуркаційна діаграма у  $(\alpha, \varphi)$ -площині для рівняння (3.37) двох зв'язаних осциляторів. Вилкова біфуркація трапляється у точках  $A$  та  $B$ , що відбуваються при  $\alpha = \arccos(\pm 2r)$ . Жирною лінією показано стійкі положення рівноваги, тонкою — нестійкі. **(б)** Біфуркаційна діаграма для  $N = 3$  у площині  $(\alpha, \varphi_1)$  одного параметру та однієї змінної для  $r = 0.2$ . Антифазний стан ( $R = 0$ ) біфуркує в точці  $C$  породжуючи гілку нестійких періодичних орбіт (точкова лінія). Нестійкі орбіти беруть участь у сідло-вузловій біфуркації з стійкими циклами у точці  $F$  (лінія жирних точок), які, у свою чергу, зникають при глобальній сідло-вузловій/гетероклінічній біфуркації у точці  $E$ . Точками на малюнку показане мінімальне значення змінної  $\varphi_1$  для циклів. Суцільними жирними лініями показано стійкі положення рівноваги, тонкими — нестійкі. Дана біфуркаційна діаграма показана для  $r = 0.2$ ,  $\beta = 0$ . На малюнку розгалуження наступних біфуркацій:  $A$  ( $\alpha \approx 0.7691$ ) — вилкової,  $B$  ( $\alpha \approx 1.1269$ ) — сідло-вузла точок,  $C$  ( $\alpha \approx 1.1593$ ) — Андронова-Хопфа антифазного стану,  $D$  ( $\alpha \approx 1.1593$ ) —  $\mathbf{S}_3$ -транскритичної біфуркації,  $E$  ( $\alpha \approx 1.2574$ ) — глобальної сідло-вузлової/гетероклінічної,  $F$  ( $\alpha \approx 1.4452$ ) — сідло-вузла граничних циклів. Гілка  $AEBD$  лежить всередині  $\varphi_2 = 0$ . Відповідні симетричні гілки є і для  $\varphi_1 = 0$  та  $\varphi_1 = \varphi_2$ .

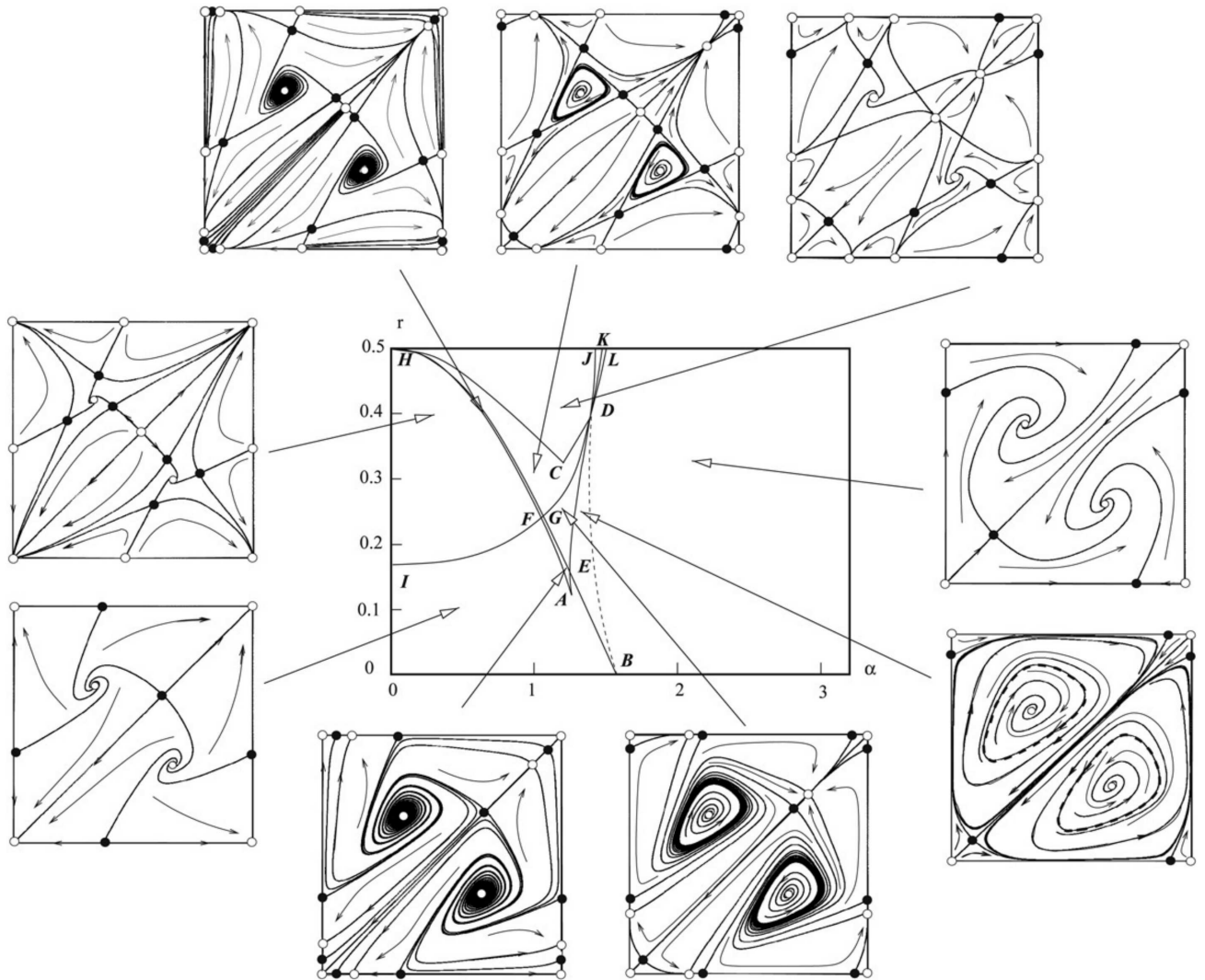


Рис. 8.8: Параметрична  $(\alpha, r)$ -площина для системи (3.1), (3.3) при  $N = 3$ . На малюнку показано фазові портрети для  $(\varphi_1, \varphi_2) \in [0, 2\pi)^2$ , які оточують параметричну площину. Білі кола на фазових портретах вказують на джерела та стоки, чорні диски позначають на сідла. Зображені на діаграмі лінії корозмірності – один описуються у Таблиці 8.1. Система має наступні біфуркації корозмірності–два:  $A$  — точка звороту,  $E$  — взаємодія  $S_3$ -транскритичної гомоклінічної та сідло–вузлової/гетероклінічної біфуркацій,  $D$  — взаємодія сідло–вузлової/гетероклінічної та  $Z_3$ -гетероклінічної,  $H$  — вироджена біфуркація Андронова–Хопфа антифазного розв’язку.

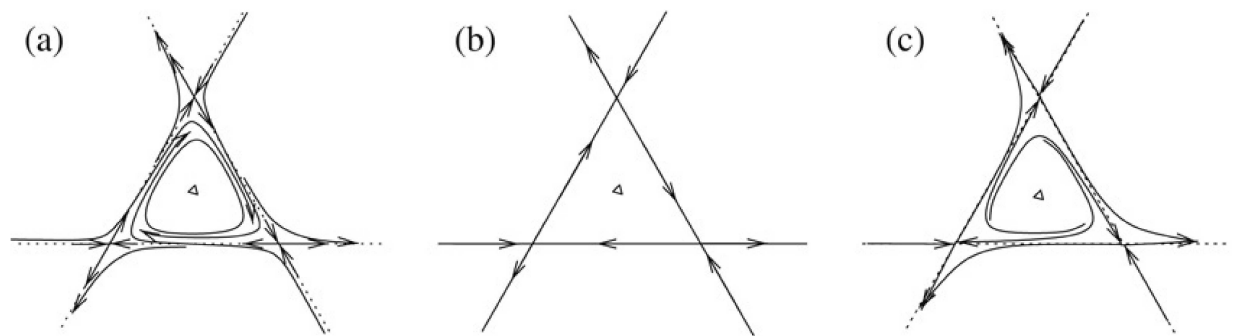


Рис. 8.9: Схематична діаграма, що відображає деталі  $\mathbb{Z}_3$ -гетероклінічної біфуркації, яка відбувається на лінії  $CD$  у параметричному просторі для  $N = 3$  осциляторів. Глобальна біфуркація відбувається всередині інваріантного трикутника у околі антифазного стану, позначеного тут малим трикутником (деталі у тексті).

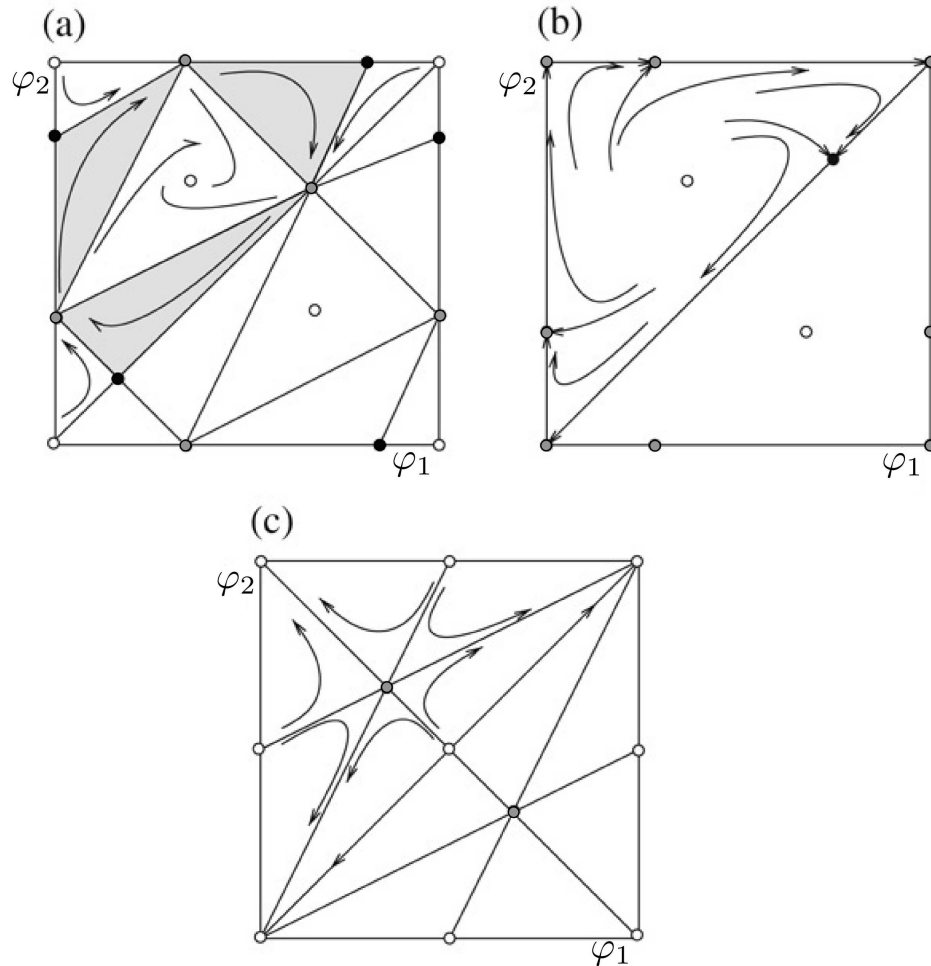


Рис. 8.10: Фазові портрети для  $\varphi_i \in [0, 2\pi)$  системи (3.1), (3.3) при  $N = 3$  у точках корозмірності—два  $D$ ,  $E$  та  $H$ . Деталі руху фазових траєкторій показані лише у лівому верхньому трикутнику; для правого нижнього трикутника ці деталі відтворюються під дією симетрії. Білі круги вказують на джерела та стоки, сірі позначають негіперболічні точки, чорні диски позначають сідла. **(a)** Фазова діаграма у точці  $D$ . Затінені трикутники заповнені гетероклінічними траєкторіями, які разом утворюють дво-вимірну множину гетероклінічних циклів. Зовнішній гетероклінічний цикл складається з шести точок та траєкторій, всі інші з трьох. **(b)** Фазовий портрет у  $E$ . Існують з'єднання від вироджених синфазних розв'язків (кути) до та з сідло-вузлових точок. **(c)** Діаграма у точці  $H$ . Існує вироджена біфуркація Андронова–Хопфа для антифазового режиму. Стрілки вказують на напрямки потоків.

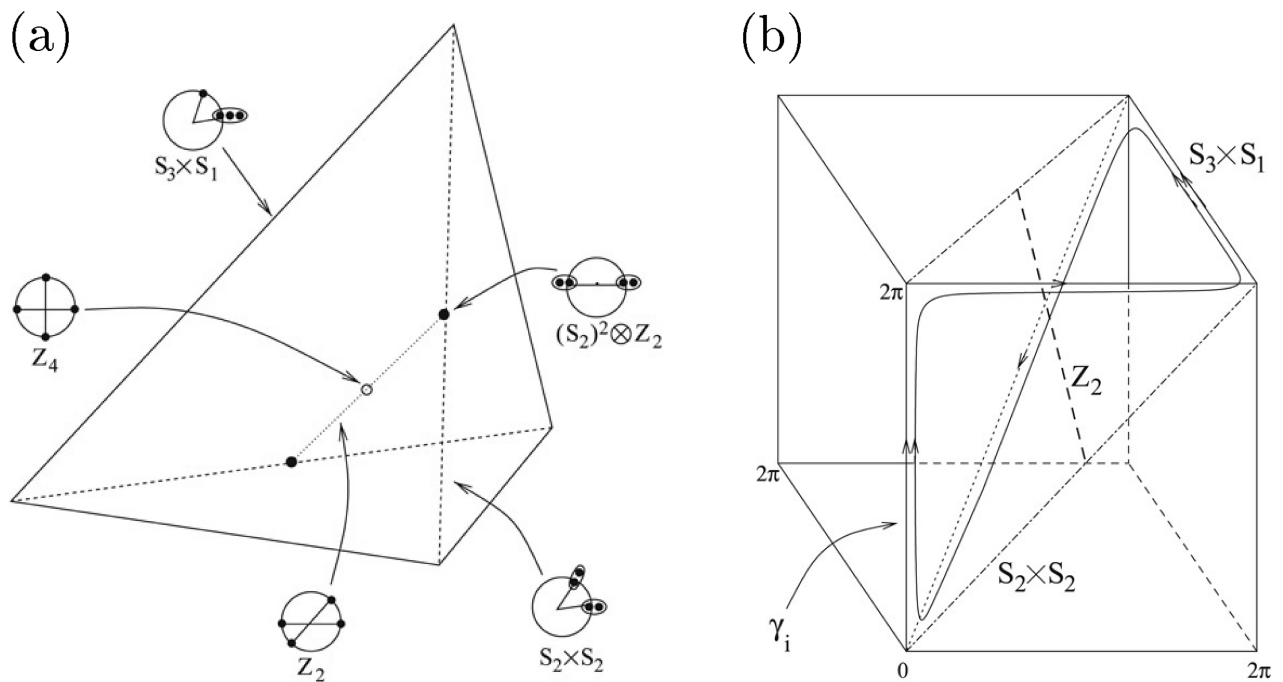


Рис. 8.11: **(а)** Схематична діаграма однієї *інваріантної області* — *тетраедра*, яка є частиною фазового простору системи (3.3.5) чотирьох ідентичних осциляторів. Діаграма показує взаємне розташування інваріантних многовидів з різною симетрією. На малюнку вказано ізотропію кожної інваріантної лінії і точки, а також показано відповідні розподіли чотирьох осциляторів на фазовому колі (описання в тексті). **(б)** Схематична діаграма гетероклінічного циклу у системі (3.3.5). На малюнку показано гетероклінічний цикл та близький до нього граничний цикл транскритичної–вилкової гетероклінічної біфуркації (лінія  $BE$  на рис. 8.12). На малюнку **(б)** окреслено один з шести інваріантних многовидів, який окремо зображено на малюнку **(а)**.

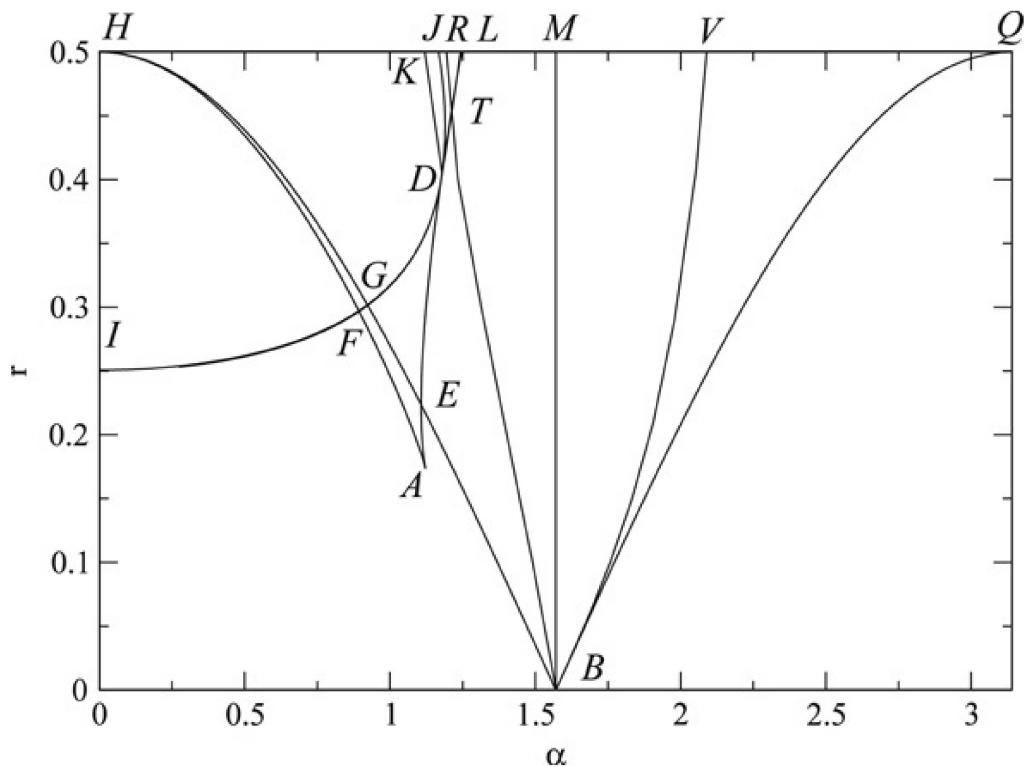


Рис. 8.12: Біфуркаційна діаграма для  $N = 4$  осциляторів на  $(\alpha, r)$ -площині. Описання біфуркаційних ліній знаходиться у Таблиці 8.2. Область існування грубих гетероклінічних циклів між дво-кластерними станами обмежена лінією  $BEDTLV$ . Гетероклінічні цикли є стійкими у вказаній області зліва від біфуркаційної лінії  $BM$ . Система має складну послідовність швидко змінних біфуркацій в околі точки  $D$ , деталі якої на діаграмі не показані, але описані у тексті.



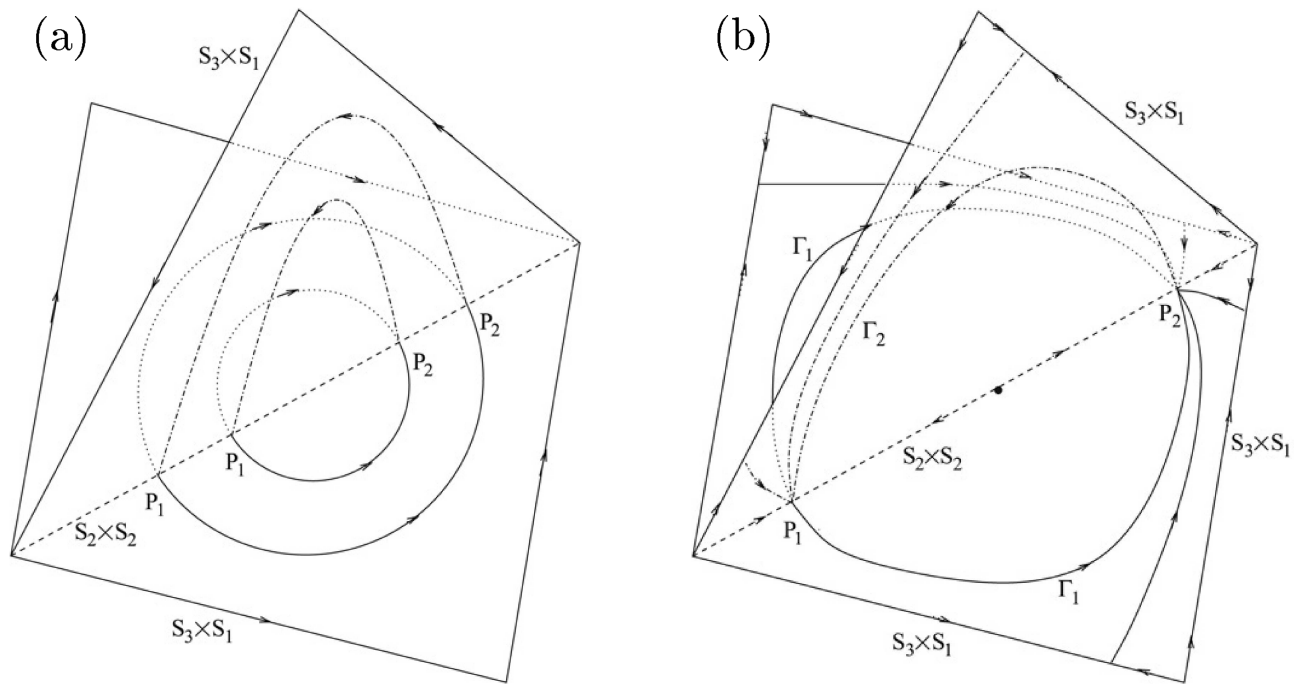


Рис. 8.13: **(а)** Схематичний фазовий портрет неперервної множини гетероклінічних циклів для  $N = 4$  та  $(\alpha, r) = (\pi/2, 0)$  (точка  $B$  на рис. 8.12). Кожен гетероклінічний цикл складається з двох вироджених сідел  $P_1, P_2$ , що належать інваріантній лінії  $\mathbf{S}_2 \times \mathbf{S}_2$ , та одно-вимірних інваріантних многовидів  $W^u(P_1) = W^s(P_2)$ ,  $W^u(P_2) = W^s(P_1)$  цих сідел. Кожен гетероклінічний цикл є нейтральним по відношенню до сусідніх. **(б)** Схематичне зображення грубих гетероклінічних циклів всередині області  $BEDTLV$  на біфуркаційній діаграмі рис. 8.12 для  $N = 4$ , що є притягуючими зліва та відштовхуючими справа від лінії  $BM$  для параметрів на біфуркаційній діаграмі. На відміну від випадку (б), у випадку (а) вся площина ізотропії  $\mathbf{S}_2$  неперервно заповнена гетероклінічними траєкторіями  $\Gamma_1$  або  $\Gamma_2$ .

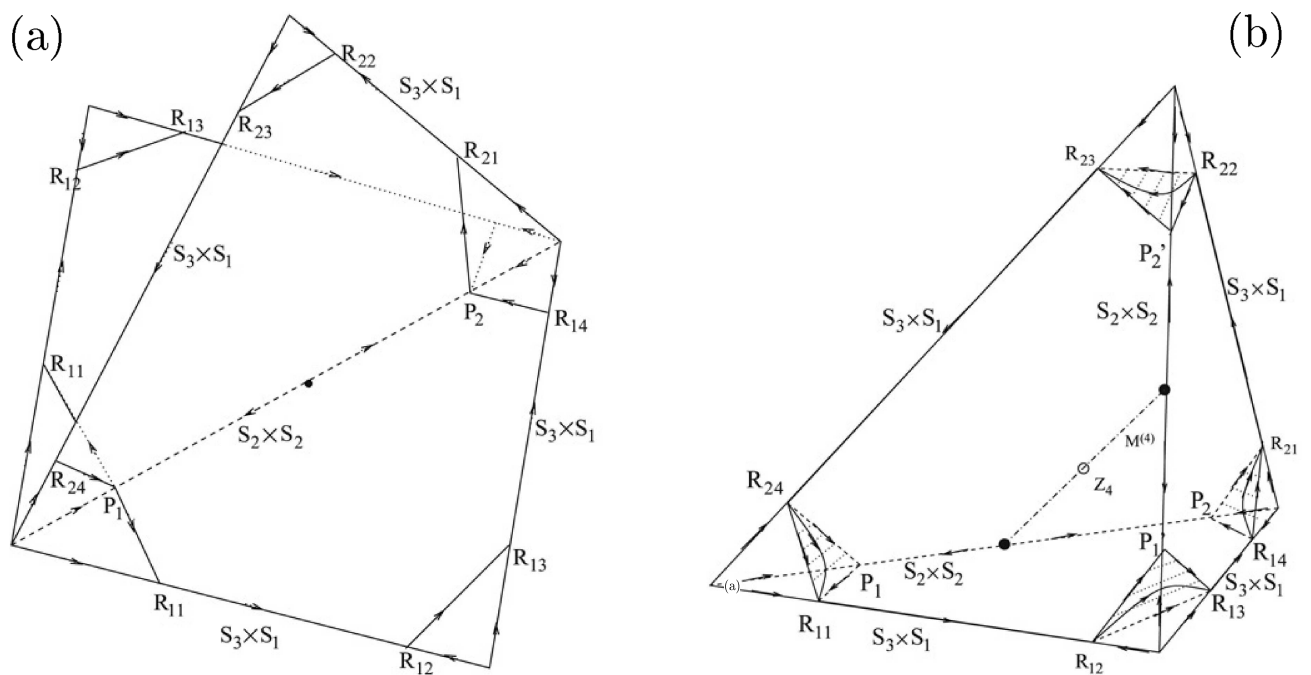


Рис. 8.14: **(а)** Схематична структура гетероклінічного циклу у момент його появи на лінії  $ED$  та на біфуркаційній діаграмі рис. 8.12 для  $N = 4$ . На малюнку показана лише та частина гетероклінічного циклу, що належить інваріантним площинам з ізотропією  $S_2$ . **(б)** Подробиці структури гетероклінічного циклу всередині інваріантного тетраедра  $C$ . На малюнку показано, що гетероклінічний цикл складається з послідовності одно-вимірних гетероклінічних траєкторій (як  $R_{11} \rightarrow R_{12}$ ) та дво-вимірних трикутних множин траєкторій (як траєкторії  $R_{12} \rightarrow R_{13}$  з трикутника  $R_{12}P_1R_{13}$ ), які з'єднують сідло-вузли  $R_{ij}$  та сідла  $P_k$ .

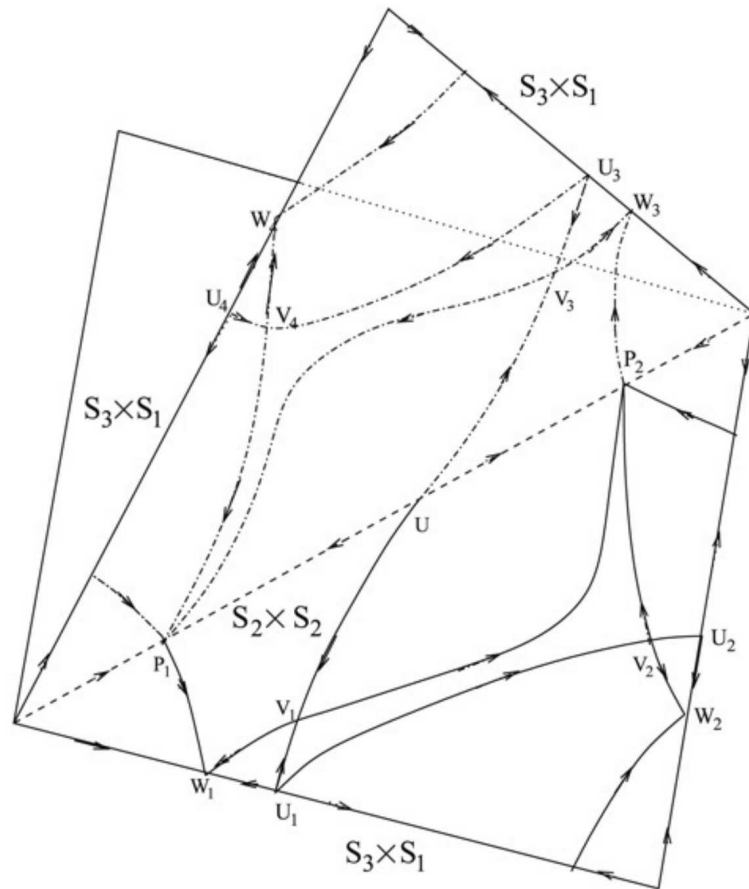


Рис. 8.15: Схема глобальних зв'язків інваріантних многовидів при  $(\alpha, r) \in KDJ$  на біфуркаційній площині (рис. 8.12) для  $N = 4$ .

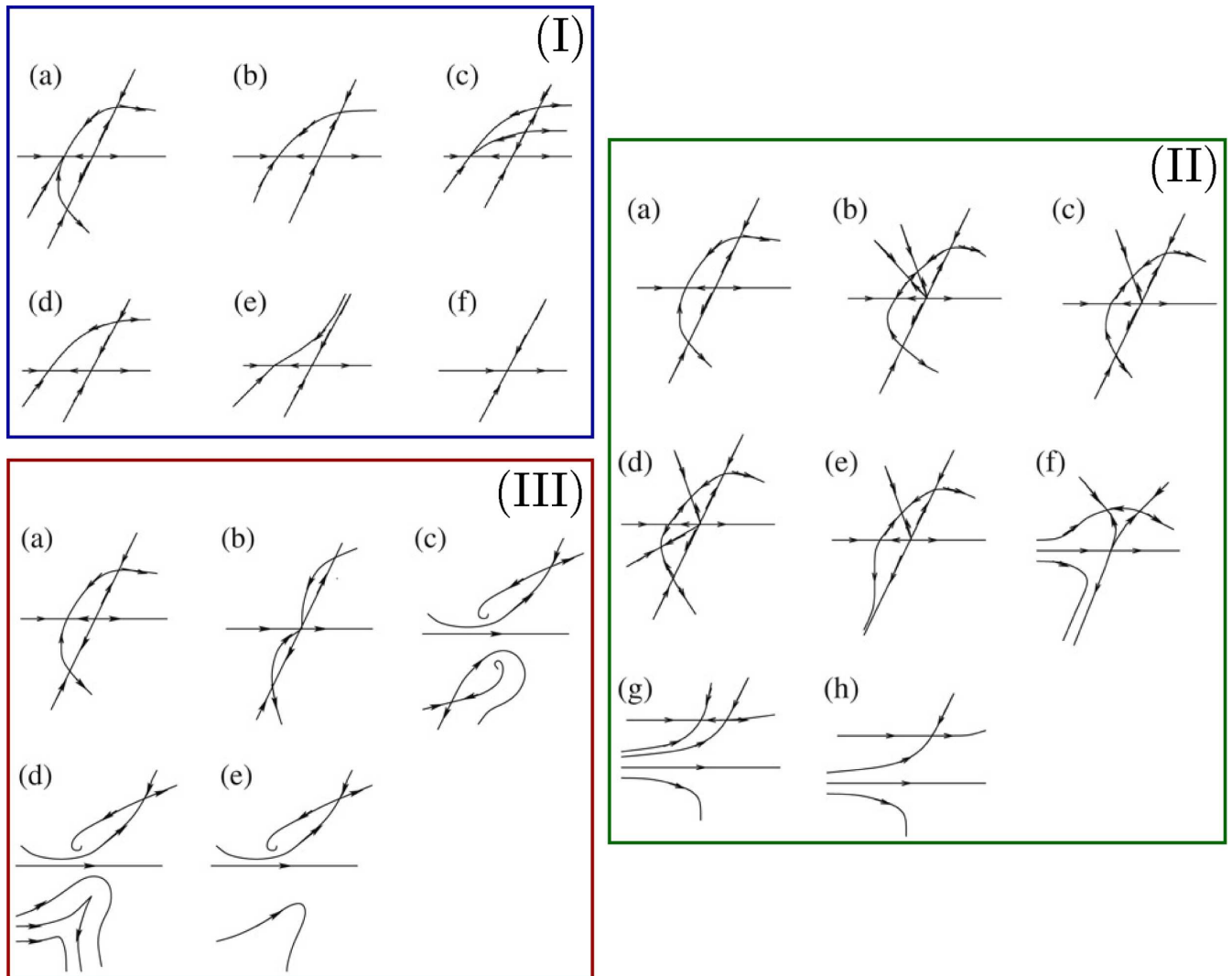


Рис. 8.16: Послідовність біфуркацій при збільшенні параметру  $\alpha$  для зв'язків, показаних на рис. 8.15, для **(I)**  $r \in (0.302, 0404)$  (ситуація на малюнку (f) відповідає перетину параметрами лінії  $DL$  на рис. 8.12), **(II)**  $r > 04045$  (ситуація на малюнку (f) відповідає перетину  $DL$ ), **(III)**  $r$  близьких до 0.404 (ситуація на малюнку (b) відповідає перетину лінії  $DL$ ).

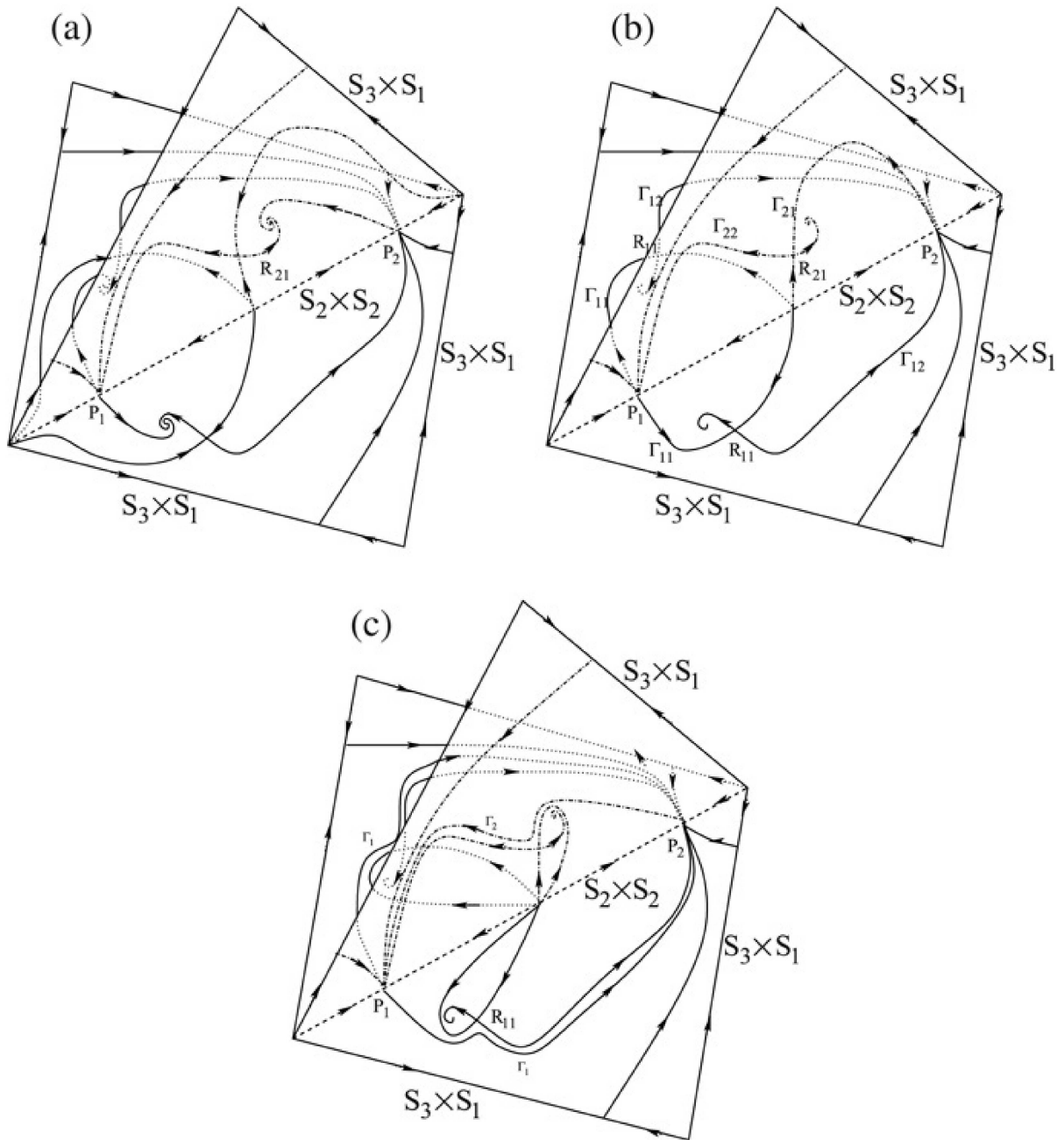


Рис. 8.17: Схема перебудови розв'язків (а) до, (б) у момент та (с) після гетероклінічної біфуркації біля точки  $T$  на біфуркаційній площині (рис. 8.12) для  $N = 4$ . Локальною частиною даної біфуркації є сідлово-зв'язна перебудова інваріантних многовидів пар сідел (зокрема  $W^u(P_1)$  та  $W^s(R_{11})$ ). Відмітимо, що у моменті біфуркації гетероклінічний цикл складається з чотирьох з'єднаних орбіт, а після біфуркації з двох.

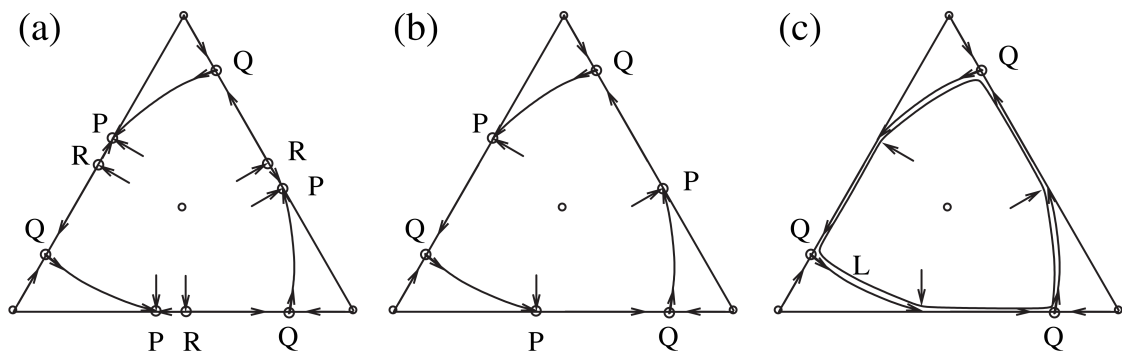


Рис. 8.18: Схематична діаграма фазового потоку біля глобальної сідло–вузлової/гетероклінічної біфуркації системи (3.1), (3.55) для  $N = 3$ , показана схематично на фазовій площині  $\xi = \theta_1 + e^{2\pi i/3}\theta_2 + e^{4\pi i/3}\theta_2$ . Фазовий портрет показано (а) до моменту, (b) у момент та (c) після моменту біфуркації. Точки  $P$  позначають стійкі вузли, точки  $R$  позначають сідла на малюнку (а). На малюнку (b) точки  $P$  позначають сідло–вузли, утворені у момент біфуркації при злитті  $P$  та  $R$  з малюнку (а). Точки  $Q$  – сідла на всіх малюнках. Через  $L$  позначено стійкий граничний цикл, який утворюється після гетероклінічної біфуркації. Цей граничний цикл розміщений дуже близько до інваріантних підпросторів, тобто мале збурення призводить до утворення атрактора з необмеженими фазовими різницями. Біфуркація виникає, зокрема, у точці  $r = 0.2$ ,  $\alpha \approx 1.2574$ , що належить біфуркаційній лінії  $ED$  на рис 8.8.

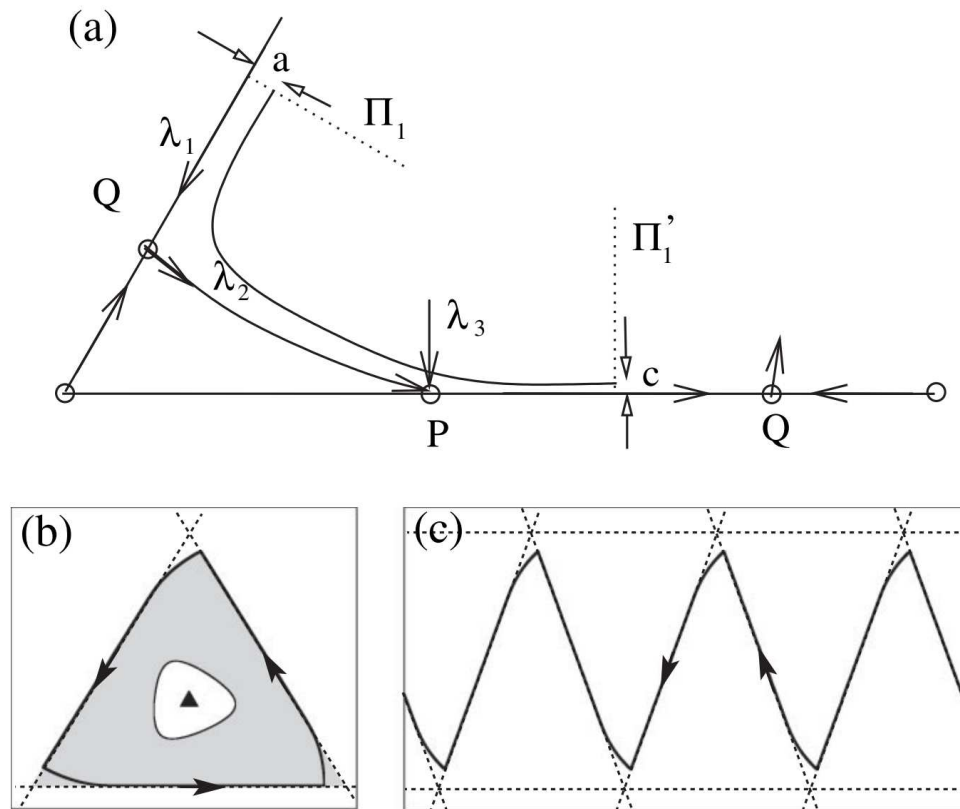


Рис. 8.19: **(а)** Конструкція відображення Пуанкаре з  $\Pi_1$  на  $\Pi'_1$ . Це відображення визначене лише коли сідло-вузлова точка  $P$  руйнується при малих збуреннях (рис. 8.18(b)). **(b)** Фазовий портрет системи (3.53) для  $N = 3$  у комплексній площині  $(\text{Re}(\xi), \text{Im}(\xi))$  для параметрів  $r = 0.2$ ,  $\alpha = 1.28$  та  $\Delta_1 = \Delta_1 = \Delta = 4.1 \times 10^{-7}$ . Жирна лінія позначає стійкий граничний цикл, що має басейн притягання позначений сірим кольором. З стійким граничним циклом співіснує стійкий антифазний стан, що відділений від нього нестійким граничним циклом. **(c)** При дуже невеликому збільшенні збурення  $\Delta = 4.2 \times 10^{-7}$  утворюється притягуюча періодична орбіта, що вже є незамкнутою у  $\xi$ . Підпростори  $\varphi_1 = 0$ ,  $\varphi_2 = 0$ ,  $\varphi_1 = \varphi_2$ , котрі були інваріантними при  $\Delta = 0$ , зображено точковими лініями.

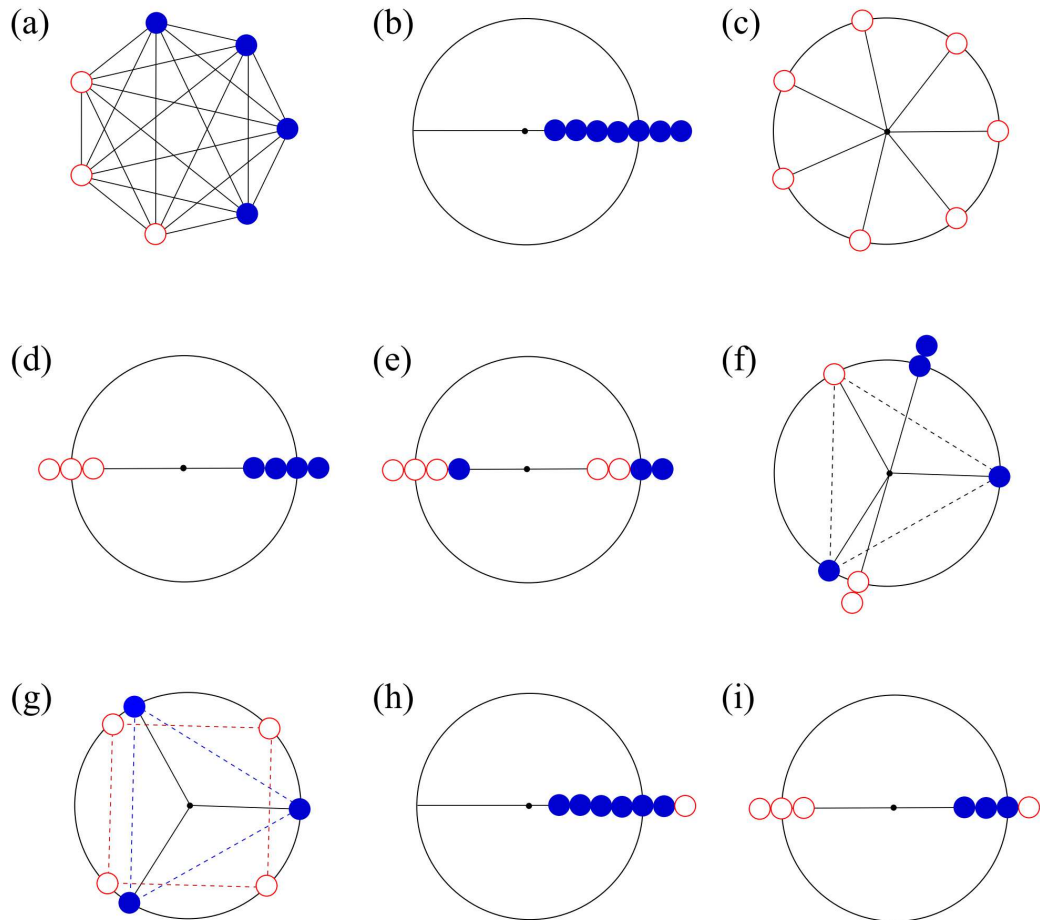


Рис. 8.20: **(a)** Взаємодія між двома групами зв'язаних осциляторів (повні сині кружечки позначають конформістів, відкриті червоні — нонконформістів), **(b)–(i)** Розподіл конформістів та нонконформістів на колі для різних стійких режимів: **(b)** всі осцилятори є конформістами ( $R = r_1 = 1$ ); **(c)** всі осцилятори є нонконформістами ( $R = r_2 = 0$ ); **(d)**  $\pi$ -стан ( $r_1 = r_2 = 1, \delta = \pi$ ); **(e)**  $\pi S_M$ -стан,  $\pi$ -подібний стан з  $R = 0$ , коли  $N/2$  різних осциляторів розміщені у  $0$  та  $\pi$ ; **(f)** розмитий  $\pi$ -стан ( $N_1 r_1 = N_2 r_2, \delta = \pi$ ); **(g)** некогерентний стан IS ( $r_1 = r_2 = 0$ ); **(h)**  $S_1$ -стан, синхронізація одного з нонконформістів з конформістами ( $R = r_1 = 1$ ); **(i)**  $\pi S_1$ -стан,  $\pi$ -подібний стан з одним нонконформістом-ренегатом ( $r_1 = 1, r_2 = (N_2 - 2)/N_2, \delta = \pi$ ).



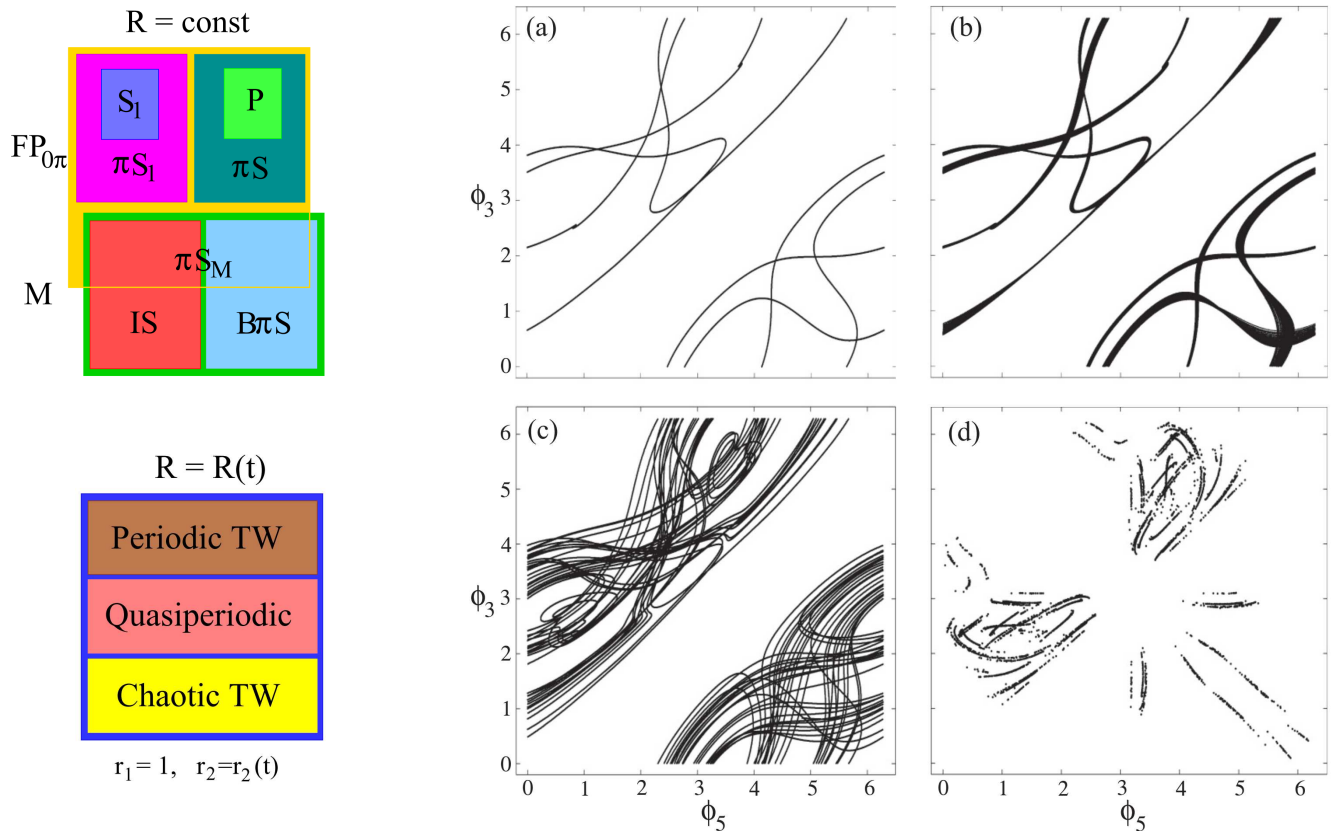


Рис. 8.21: **(Ліва панель)** Схематична діаграма співвідношень між множинами стійких розв'язків. Позначення:  $FP_{0\pi}$  — положення рівноваги системи (4.5) з координатами 0 та  $\pi$ ;  $M$  — інваріантний многовид з  $R = 0$ ;  $P$  — паритетний стан з  $N_1 = N_2$ ;  $S_1$  — синхронізація одного нонконформіста з конформістами;  $\pi S$  —  $\pi$ -стан;  $\pi S_1$  —  $\pi$ -подібний стан з одним ренегатним нонконформістом;  $\pi S_M = FP_{0\pi} \cap M$ ;  $IS$  — некогерентний стан;  $B\pi S$  — розмитий  $\pi$ -стан;  $TW$  — біжучі хвилі.

**(Права панель)** Проекції на площину  $(\varphi_3, \varphi_5)$  (4.5) для  $N_1 = N_2 = 3$  траєкторій різних типів: **(а)** періодичної траєкторії ( $k = -0.21$ ); **(б)** квазі-періодичної траєкторії ( $k = -0.216$ ); **(с)** хаотичної траєкторії ( $k = -0.3$ ); **(д)** переріз Пуанкаре  $\varphi_4 = \pi$  останньої хаотичної траєкторії.

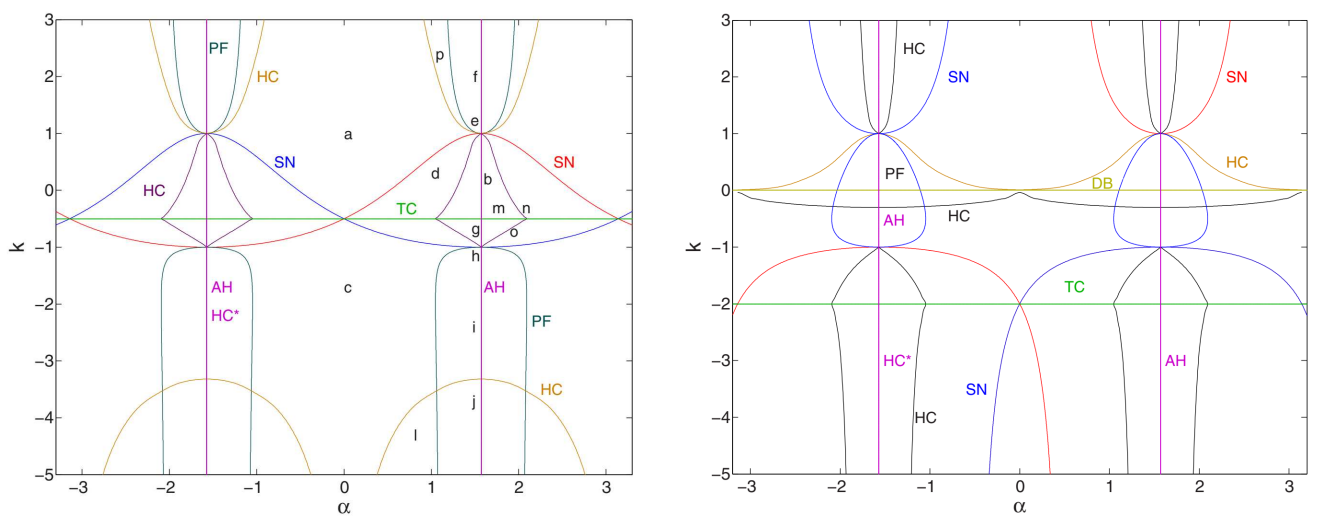


Рис. 8.22: Біфуркаційні діаграми на  $(\alpha, k)$  біфуркаційній площині для трьох осциляторів: (ліва панель)  $N_1 = 2, N_2 = 1$ ; (права панель)  $N_1 = 1, N_2 = 2$ . Позначення біфуркаційних ліній:  $AH$  — Андронова–Хопфа;  $PF$  — вилкова;  $SN$  — сідло–вузлова;  $TC$  — транскритична;  $HC$  та  $HC^*$  — гетероклінічні (сідло–зв’язні);  $DB$  — вироджена. Біфуркаційні лінії  $AH$  та  $HC^*$  співпадають на біфуркаційній діаграмі, але ці дві біфуркації виникають у різних частинах фазового простору у біфуркаційний момент.

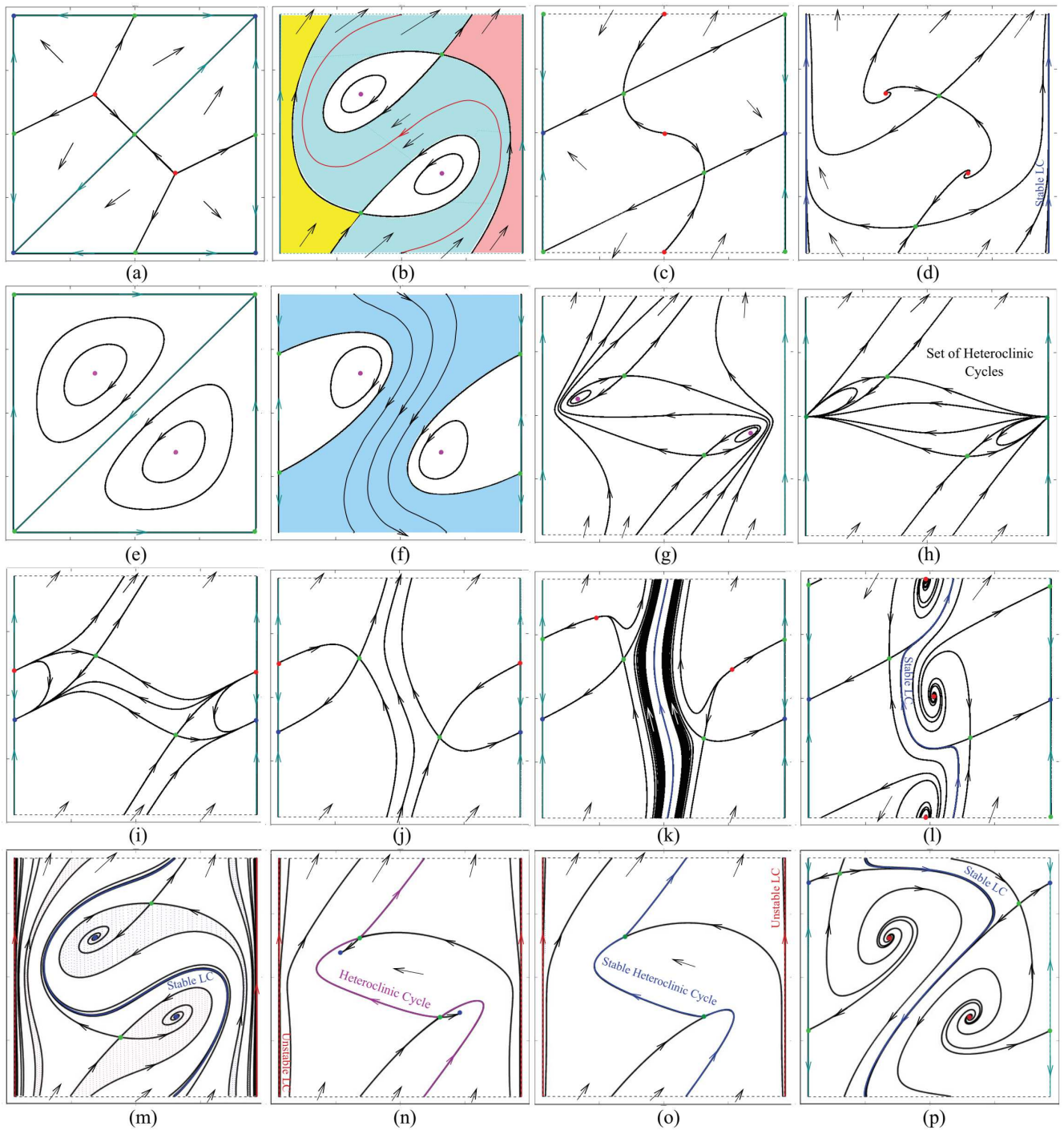


Рис. 8.23: Фазові портрети на дво-вимірному торі для  $\varphi_1, \varphi_2 \in [0, 2\pi)$  для двох конформістів та одного нонконформіста. Фазові портрети (a), ..., (p) зображені для різних значень параметрів  $\alpha, k$  та відповідають областям біфуркаційної діаграми рис. 8.22 (ліва панель). Джерела на малюнку позначені червоним кольором, стоки — синім, сідла — зеленим, центри — фіолетовим, сідло-вузли — темно зеленим. Стійкі граничні цикли позначено синім кольором, нестійкі — червоним. Гетероклінічні цикли показано фіолетовим. Дво-вимірні кольорові області вказують на множини неізолюваних періодичних орбіт.

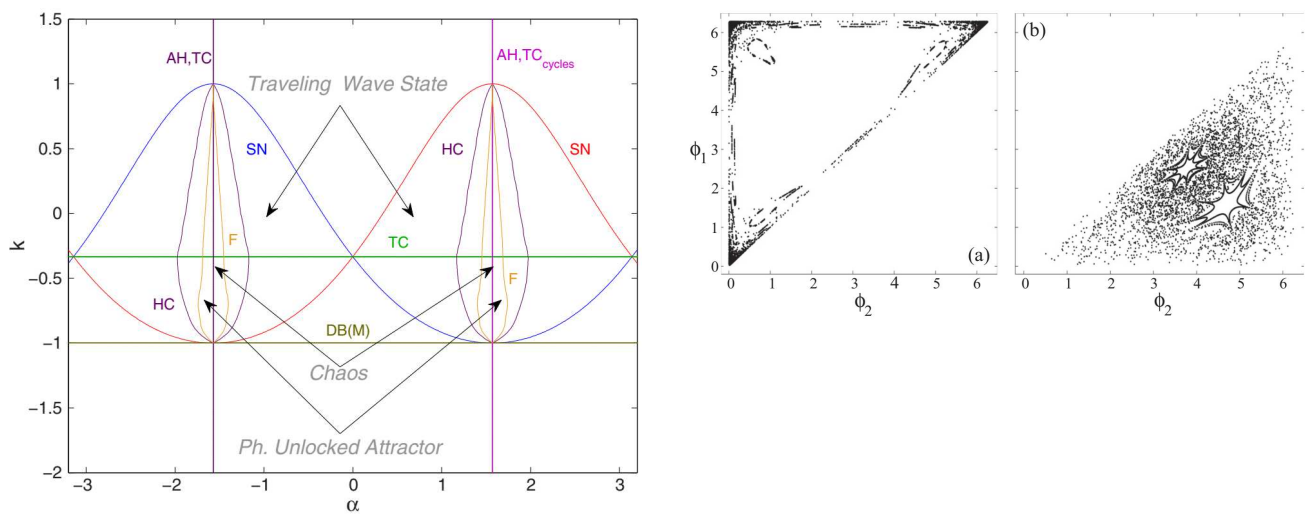


Рис. 8.24: **(Ліва панель)** Біфуркаційна діаграма для системи (4.5) чотирьох зв'язаних осциляторів з  $N_1 = 3$ ,  $N_2 = 1$  на  $(\alpha, k)$  біфуркаційній площині. Позначення біфуркаційних ліній:  $AH$  — Андронова–Хопфа;  $SN$  — сідло–вузлова;  $PF$  — вилкова;  $TC$  — транскритична;  $F$  — складка циклів;  $HC$  — гомоклінічна;  $DB$  — вироджена біфуркація. Також відмічені області хаосу. **(Права панель)** Переріз Пуанкаре  $\varphi_3 = \pi$  для хаотичних розв'язків цієї ж системи для **(a)**  $k = -0.1$ ,  $\alpha = -1.58$  та **(b)**  $k = 2$ ,  $\alpha = \pi/2$ .

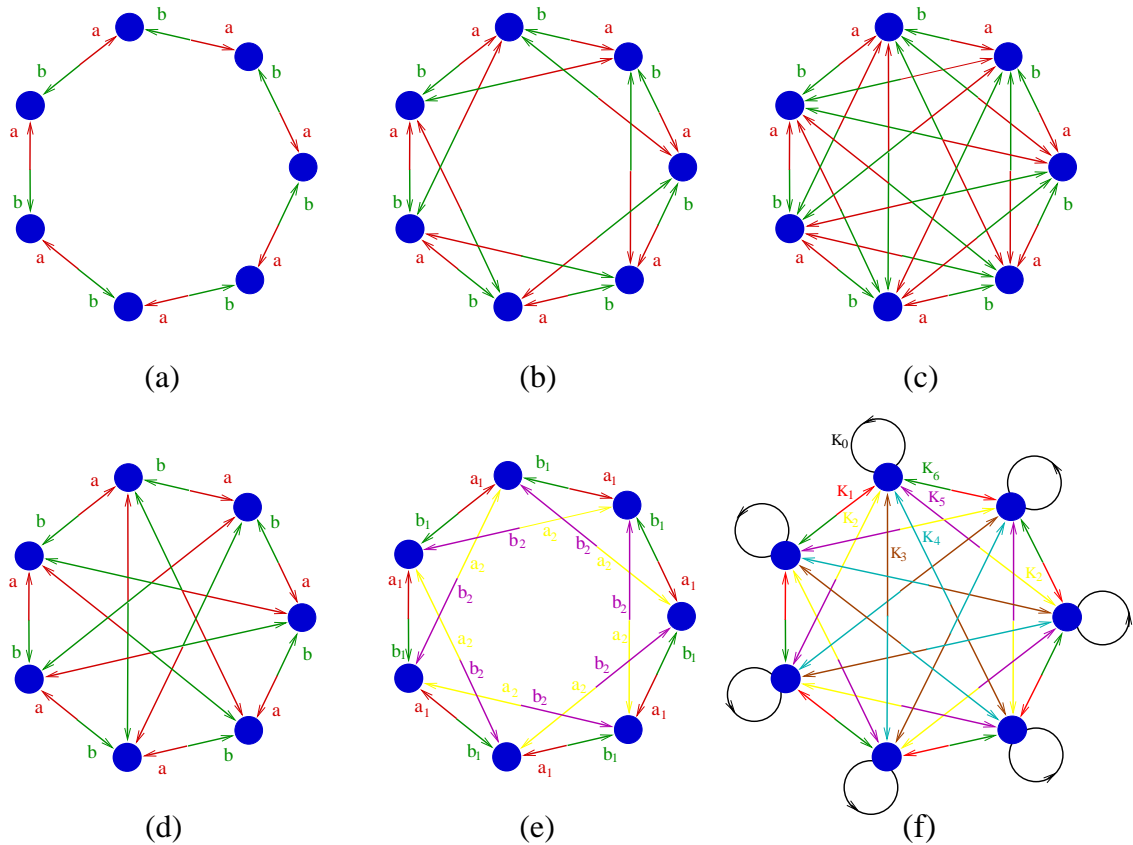


Рис. 8.25: Мережі семи асиметрично з'єднаних осциляторів: (а) кожен осцилятор зв'язаний лише з одним найближчим сусідом з кожного боку, де  $l = 1$  у рівнянні (5.6); з першим та другим найближчими сусідами,  $l = 2$ ; (с) з трьома сусідами,  $l = 3$ . Мережі (d)–(f) описуються системою (5.2), де (d):  $K_1 = K_3 = a$ ,  $K_{-1} = K_{-3} = b$  та  $K_2 = K_{-2} = 0$ , (e):  $K_1 = a_1 \neq K_2 = a_2$  та  $K_{-1} = b_1 \neq K_{-2} = b_2$ ; (f): з довільними  $K_j$ ,  $j = 0, \dots, 6$ . Різні кольори стрілок означають різні сили зв'язків.

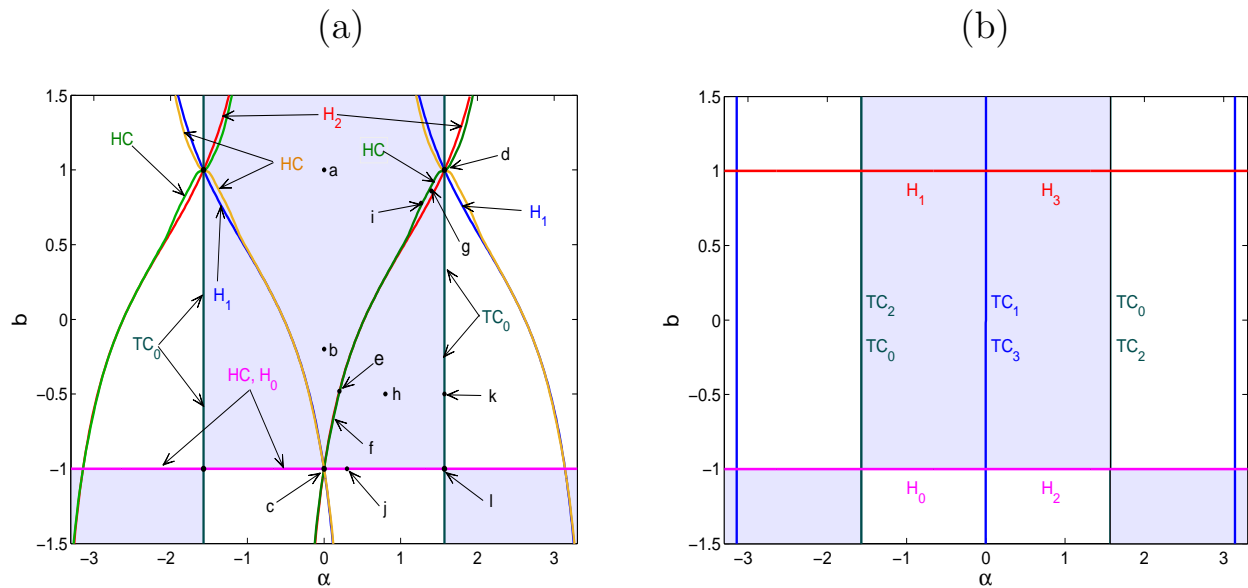


Рис. 8.26: Біфуркаційні діаграми у  $(\alpha, b)$  біфуркаційній площині для трьох (а) та чотирьох (б) зв'язаних осциляторів.  $H_k$ : криві біфуркацій Андронова–Хопфа відповідних особливих точки  $\mathcal{M}_k$ ;  $TC_k$ : лінії транскритичних біфуркацій у  $\mathcal{M}_k$ ;  $HC$  криві гетероклінічних (сідлово–зв'язних) біфуркацій. Лінії  $HC$  та  $H_2$  ( $H_1$ ) проходять дуже близько одна до одної, перетинаються коли  $b \approx -0.4$  та майже зливаються на малюку (а). Точки  $a$ – $l$  на біфуркаційній площині вказують на відповідні якісно відмінні фазові портрети, зображені на рис. 8.27.  $g$  та  $f$  вказують на верхню та нижню частини тієї ж біфуркаційної лінії  $HC$ ;  $j$  та  $e$  вказують на верхню та нижню області між  $H_2$  та  $HC$ ;  $c(0, 1)$ ,  $d(\pi/2, 1)$ ,  $l(\pi/2, -1)$  є точками біфуркацій корозмірності–два;  $j$  належить до лінії  $H_0$  між  $c$  та  $l$ ;  $k$  належить до  $TC_0$  між  $d$  та  $l$ . Затемнені регіони вказують на стійкість параметричних областей синхронного розв'язку.

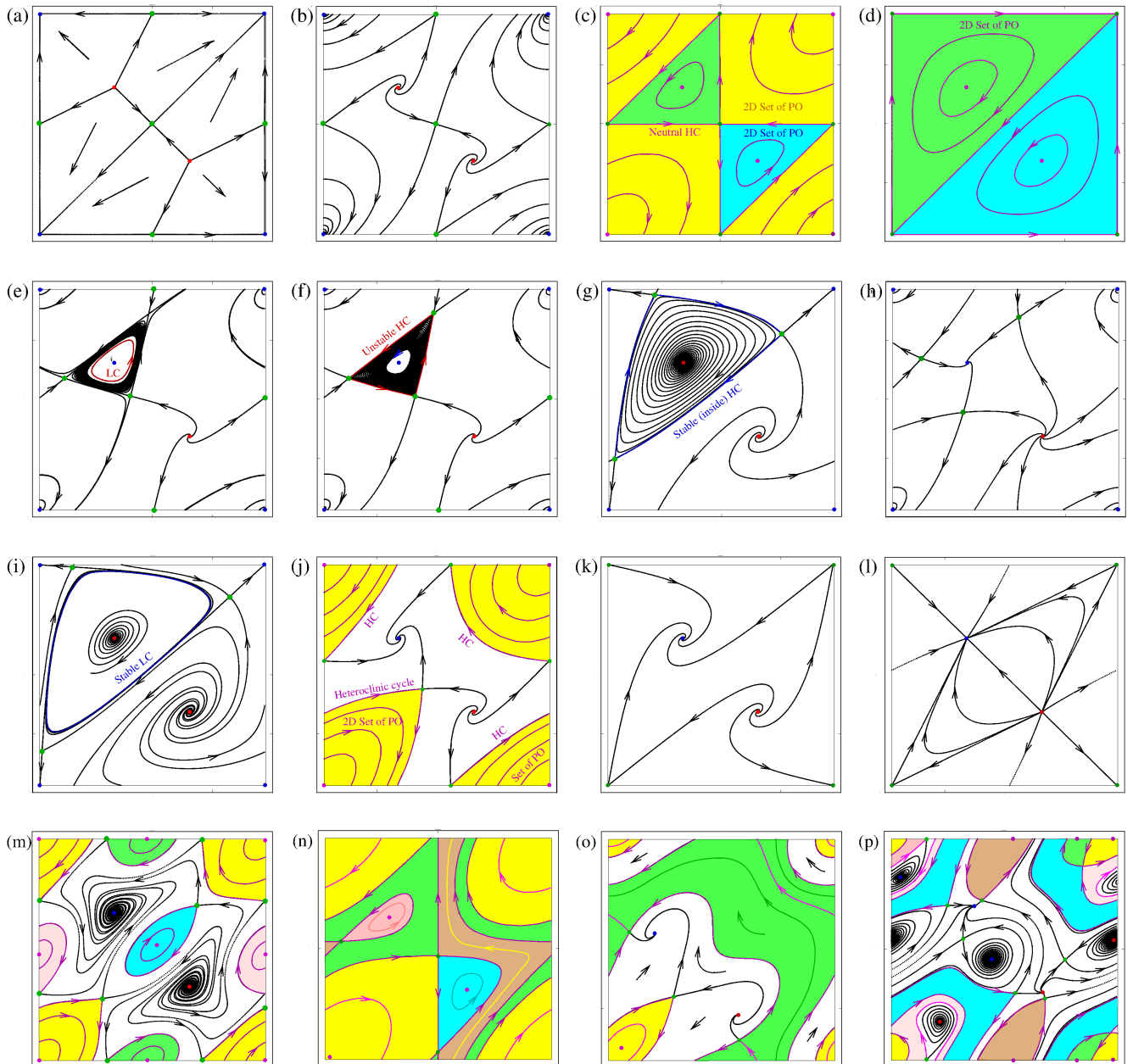


Рис. 8.27: Фазові портрети для різних значень параметрів для трьох зв'язаних осциляторів. Фазові портрети (a)–(l) відповідають системі (5.30) та параметрами точок від  $a$  до  $l$  біфуркаційної діаграми на рис. 8.26(a). Фазові портрети (m)–(p) описують динаміку для різних власних частот осциляторів та загальнішої функції зв'язку (5.36). Кольорові регіони виділяють Гамільтоново-подібні області у фазовому просторі, які є заповненими нейтрально стійкими періодичними орбітами. Кольори для особливих точок наступні: червоний – джерело, синій – стік, зелений – сідло, фіолетовий – центр, темно зелений – вироджене сідло. Стійкі граничні цикли зображені синім, нестійкі – червоним.

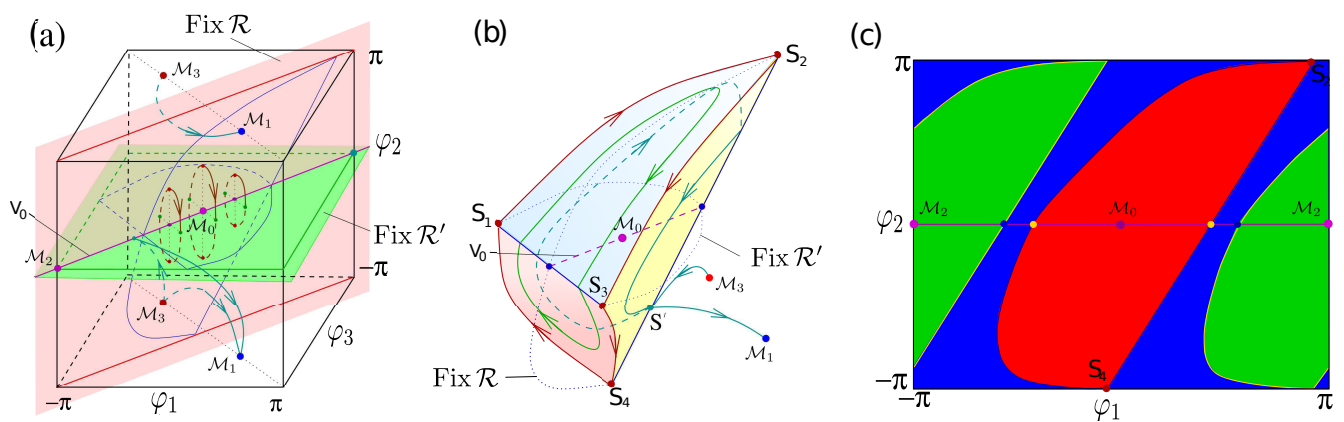


Рис. 8.28: (а) Структура фазового простору системи чотирьох зв'язаних осциляторів (5.31) для  $b = -a = -1$  та  $\alpha \in (0, \pi/2)$ . (б) Гамільтоново подібна область  $\mathcal{D}_0$ , заповнена дво-параметричною сім'єю періодичних орбіт та обмежена поверхнею гетероклінічних циклів. (с) Фіксований підпростір для часо-оборотної трансформації  $\text{Fix } \mathcal{R}$ , знайдений чисельно як перетин Пуанкаре для системи (5.31) при  $\alpha = 0.2$ . Синя область вказує на перетин  $\text{Fix } \mathcal{R}$  з басейном притягання хвилі обертання  $M_1$  (гетероклінічні траєкторії стартують в  $M_3$ , перетинають  $\text{Fix } \mathcal{R}$  та збігаються до  $M_1$ ). Червона та зелена області вказують на трансверсальний перетин сім'ї незольованих періодичних орбіт з фіксованим підпростором  $\text{Fix } \mathcal{R}$  у околах точок  $M_0$  та  $M_2$ , відповідно.



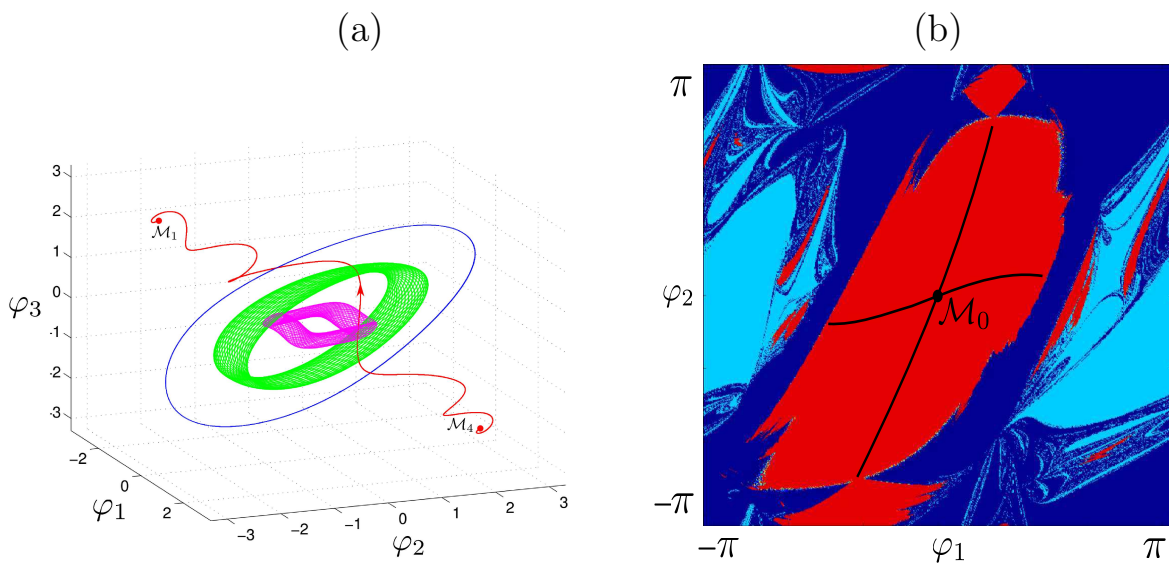


Рис. 8.29: (а) траєкторії системи (5.7) для  $N = 5$ ,  $l = 1$  та  $\alpha = 0.2$ . Синя траєкторія є періодичною, зелена та фіолетова траєкторії є квазі-періодичними з різними амплітудами, червона траєкторія є гетероклінічною та вона з'єднує відштовхуючу точку  $\mathcal{M}_4$  з притягуючою  $\mathcal{M}_1$ . Перші три траєкторії належать до консервативної частини системи, в той час як остання належить до дисипативної частини. (б) Перетин басейнів притягання різних атракторів з фіксованим підпростором інволюції  $\mathcal{R}$ . Червоним кольором показана Гамільтоново-подібна область, де всі Ляпуновські експоненти є близькими до нуля; блакитним та синім кольором показані басейни притягання однієї з асимптотично стійких хвиль обертання. Чорні лінії вказують на перетин одно-параметричних сімей періодичних орбіт з підпростором  $\text{Fix}\mathcal{R}$ .

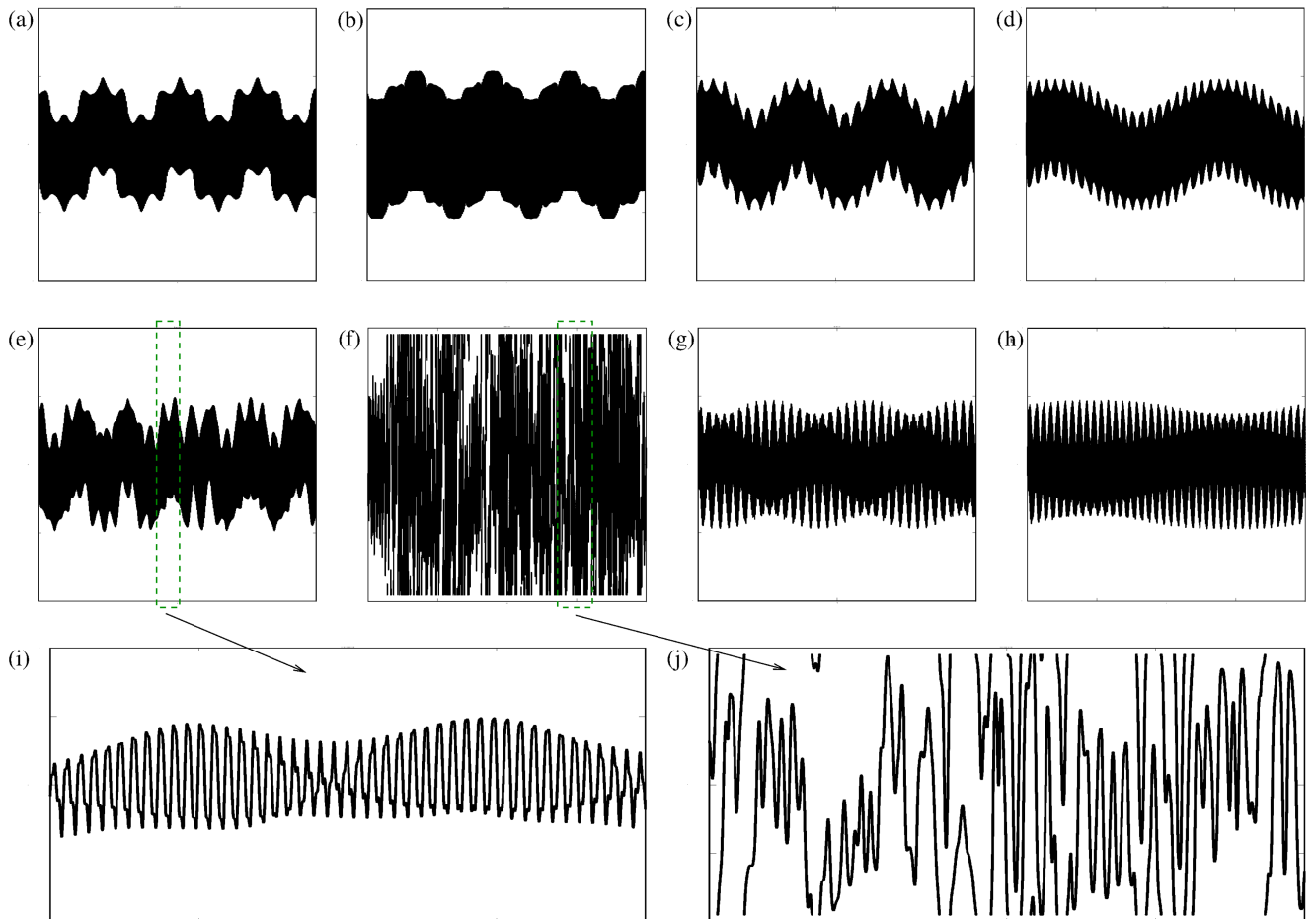


Рис. 8.30: Співіснування періодичних, квазі-періодичних та хаотичних розв'язків у бездивергентній системі семи фазових осциляторів з графом зв'язків, зображеним на рис. 8.25(b). Часові проекції  $(t, \varphi_1(t))$ ,  $t \in [0, 2000]$ ,  $\varphi_1 \in [-\pi, \pi]$ , для  $N = 7$ ,  $l = 2$ ,  $a = -b = -1$ ,  $g(x) = -\sin x$ . Початкові умови є різними для різних розв'язків.

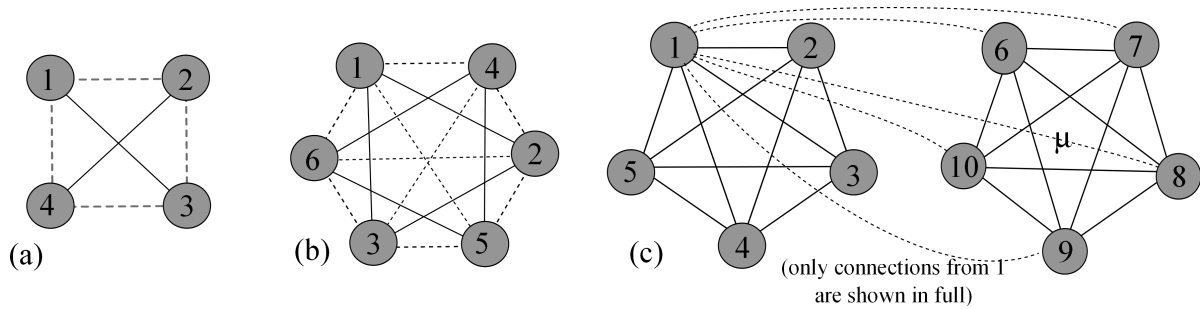


Рис. 8.31: Приклади мереж (а) чотирьох, (б) шести та (с) десяти нерозрізняваних осциляторів, які можуть мати слабкі химерні стани. Неперервна лінія вказує на двосторонній зв'язок з силою 1, пунктирна лінії вказує на двосторонній зв'язок з силою  $\varepsilon$  (для випадку (с) зображено слабкі зв'язки лише для одного осцилятора). Кожна мережа має модульну структуру, тобто вона розщеплюється на певну кількість менших мереж при  $\varepsilon = 0$ .

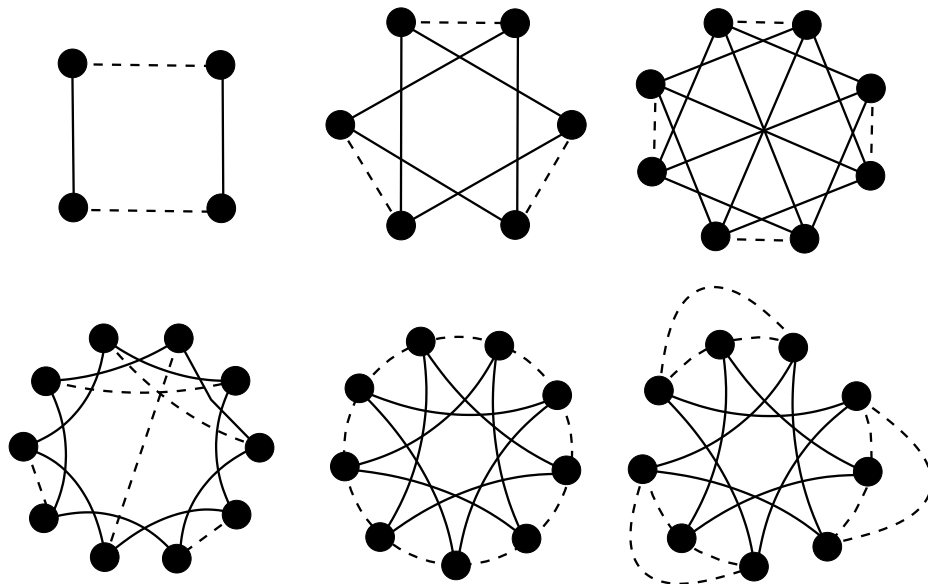


Рис. 8.32: Приклади нерозрізняваних мереж з модульною структурою. Кожна мережа розщеплюється на кілька менших ідентичних мереж у випадку коли зв'язок вздовж пунктирних ліній стає рівним нулю.

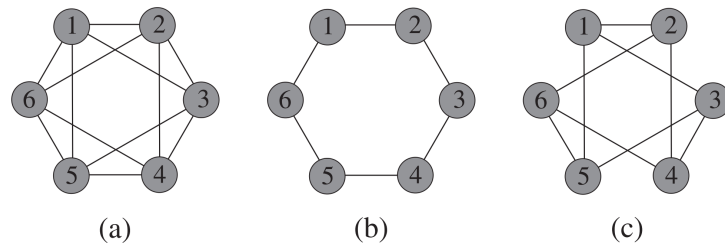


Рис. 8.33: **(а)** Мережа шести осциляторів, кожен з яких зв'язаний з двома найближчими сусідами з кожного боку. **(б)** Мережа шести осциляторів зв'язаних лише з найближчими сусідами. **(с)** Мережа шести осциляторів, кожен з яких зв'язаний з трьома іншими. Кожна з мереж складається з шести *нерозрізнуваних* осциляторів і у кожній з мереж можливі *слабкі химерні стани* (деталі у тексті).

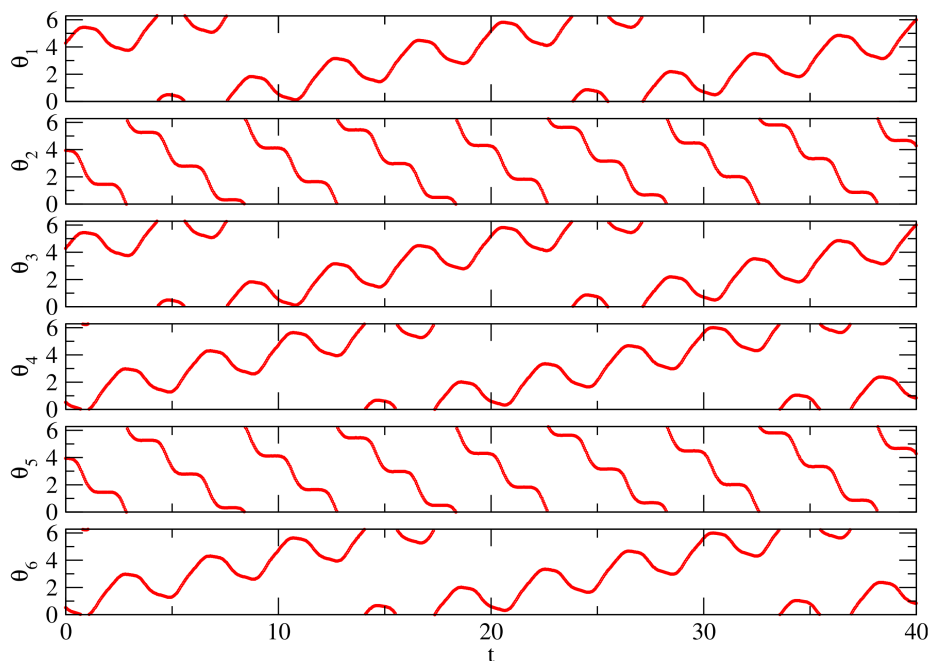


Рис. 8.34: Стійкий слабкий химерний стан у кільці шести фазових осциляторів (6.13) показаний у вигляді часових рядів кожної змінної  $\theta_i(t)$  для параметрів  $\alpha = 1.56$ ,  $r = -0.1$ . Відмітимо, що частота другого та п'ятого осциляторів суттєво відрізняється від частоти інших осциляторів. Цей аттрактор співіснує з повною синхронізацією.

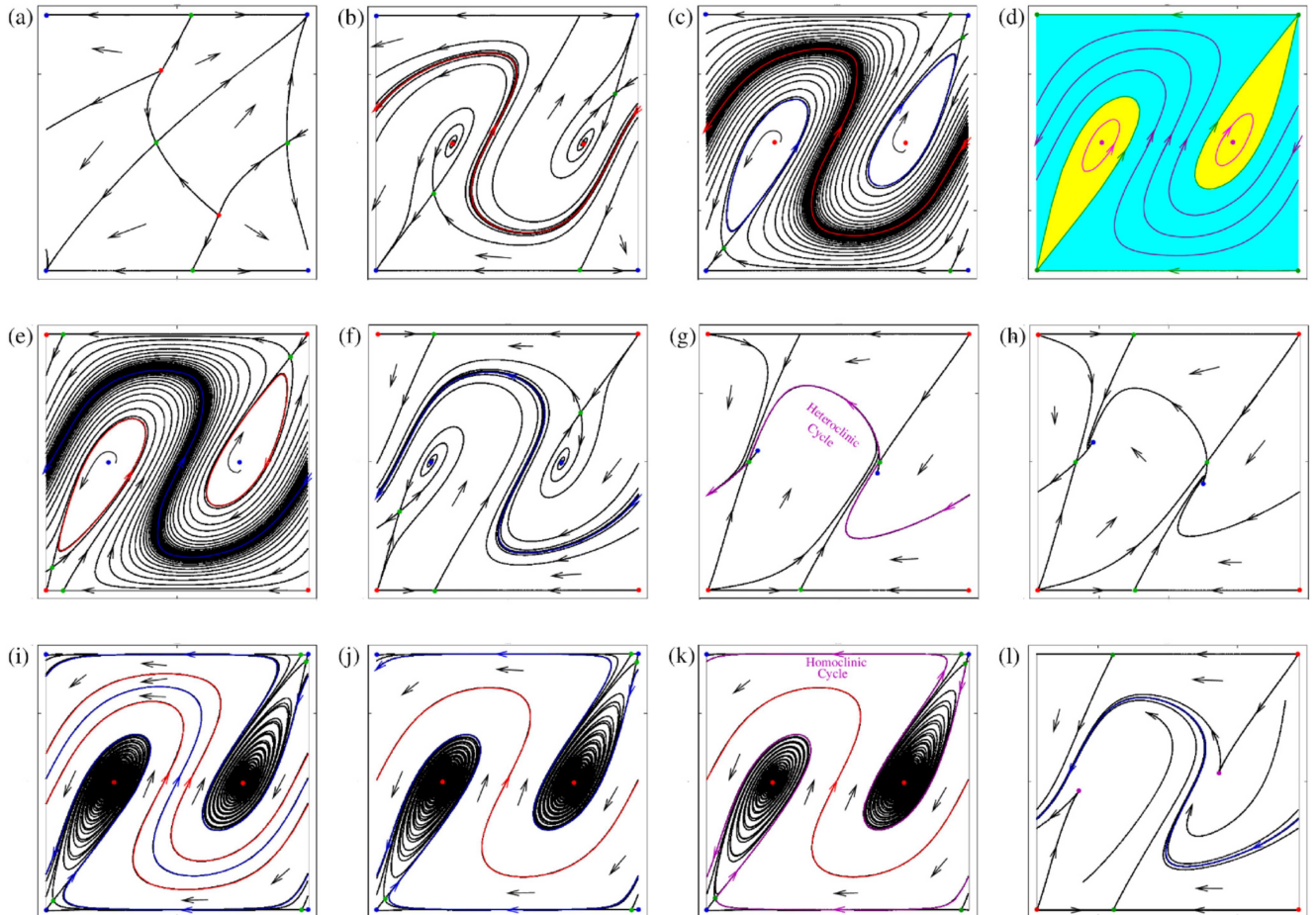


Рис. 8.35: Фазові портрети для редукованої системи (6.15) на інваріантному многовиді у площині  $(\xi, \eta) \in \mathbb{T}^2$ . Фазові портрети зображено для наступних значень параметрів: **(a)**  $r = 0, \alpha = 0.5$ ; **(b)**  $r = 0, \alpha = 1.3$ ; **(c)**  $r = 0, \alpha = 1.5$ ; **(d)**  $r = 0, \alpha = \pi/2$ ; **(e)**  $r = 0, \alpha = 1.64$ ; **(f)**  $r = 0, \alpha = 1.84$ ; **(g)**  $r = 0, \alpha = 2.16205$ ; **(h)**  $r = 0, \alpha = 2.22$ ; **(i)**  $r = -0.01, \alpha = 1.561$ ; **(j)**  $r = -0.01, \alpha = 1.558$ ; **(k)**  $r = -0.01, \alpha = 1.5517$ ; **(l)**  $r = -0.01, \alpha = 1.97794$ . Позначення точок та ліній: синій колір — атрактор; червоний — репелер; зелений — сідло; фіолетовий — нейтральний, гомо/гетероклінічний цикл. Періодичні орбіти, що обертаються навколо напрямку  $\xi$  тору, є слабкими химерними станами, у той час, як інші періодичні орбіти не є слабкими химерами (деталі у тексті). На малюнку (d) вся блакитна область заповнена нейтральними химерами.

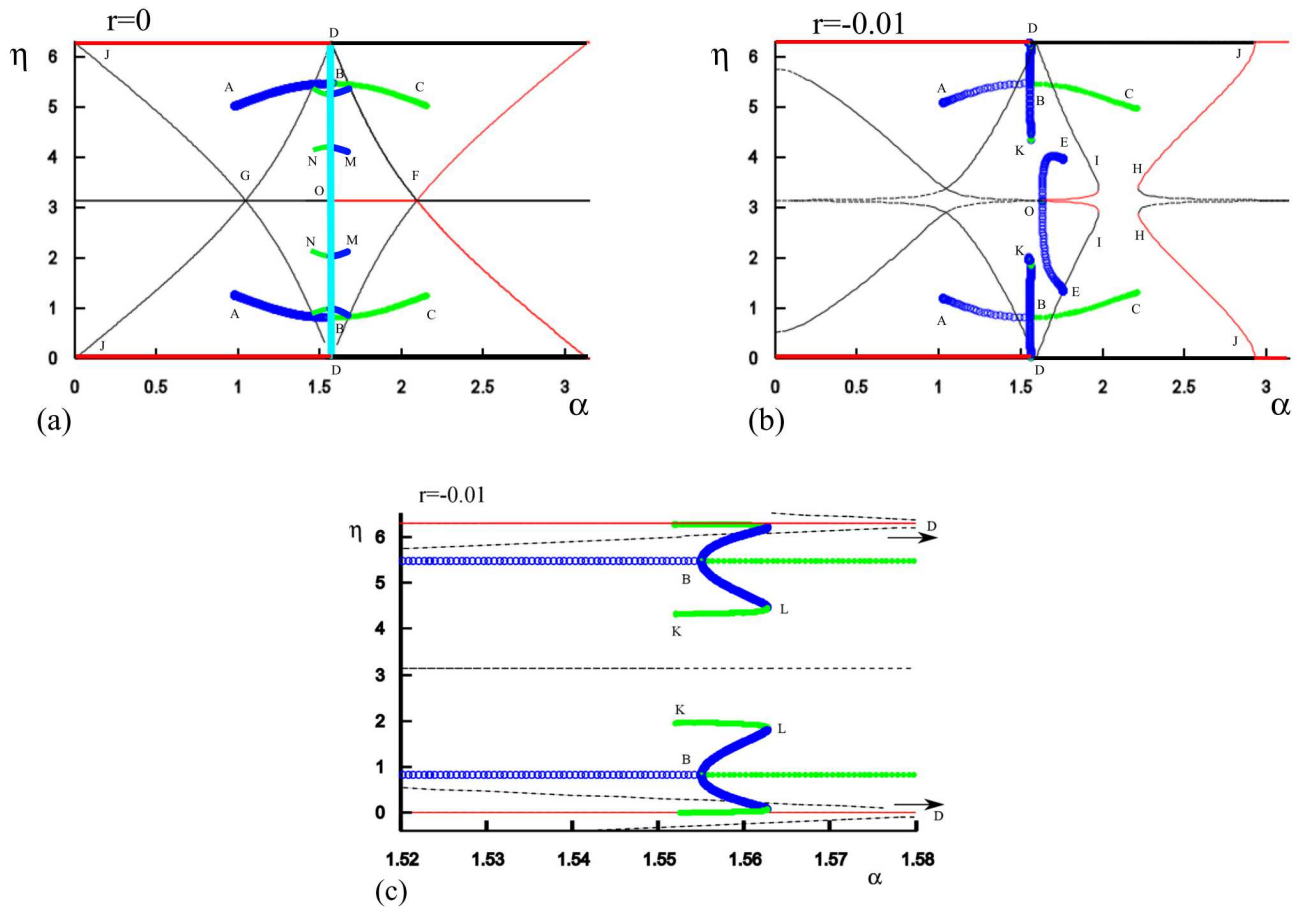


Рис. 8.36: Біфуркаційна діаграма на параметрично–координатній  $(\alpha, \eta)$  площині для редукованої системи (6.15), (6.3) для випадків (а) зв'язку Курамото–Сакагучі  $r = 0$  та (б) при  $r = -0.01$ . Червоні лінії відповідають стійким положенням рівноваги, чорні — нестійким. Зелені/сині/блакитні лінії вказують на нестійкі/стійкі/нейтральні періодичні орбіти. Можна спостерігати біфуркації та незагальні "вертикальні гілки" періодичних орбіт при  $\alpha = \pi/2$ , які розбиваються на кілька загальних гілок періодичних орбіт для  $r \neq 0$ , у той час як  $BC$  та  $KL$  є гілками стійких слабких химер. (с) Розширення діаграми (б) в околі  $\alpha = \pi/2$ , для демонстрації деталей деяких гілок біфуркацій.

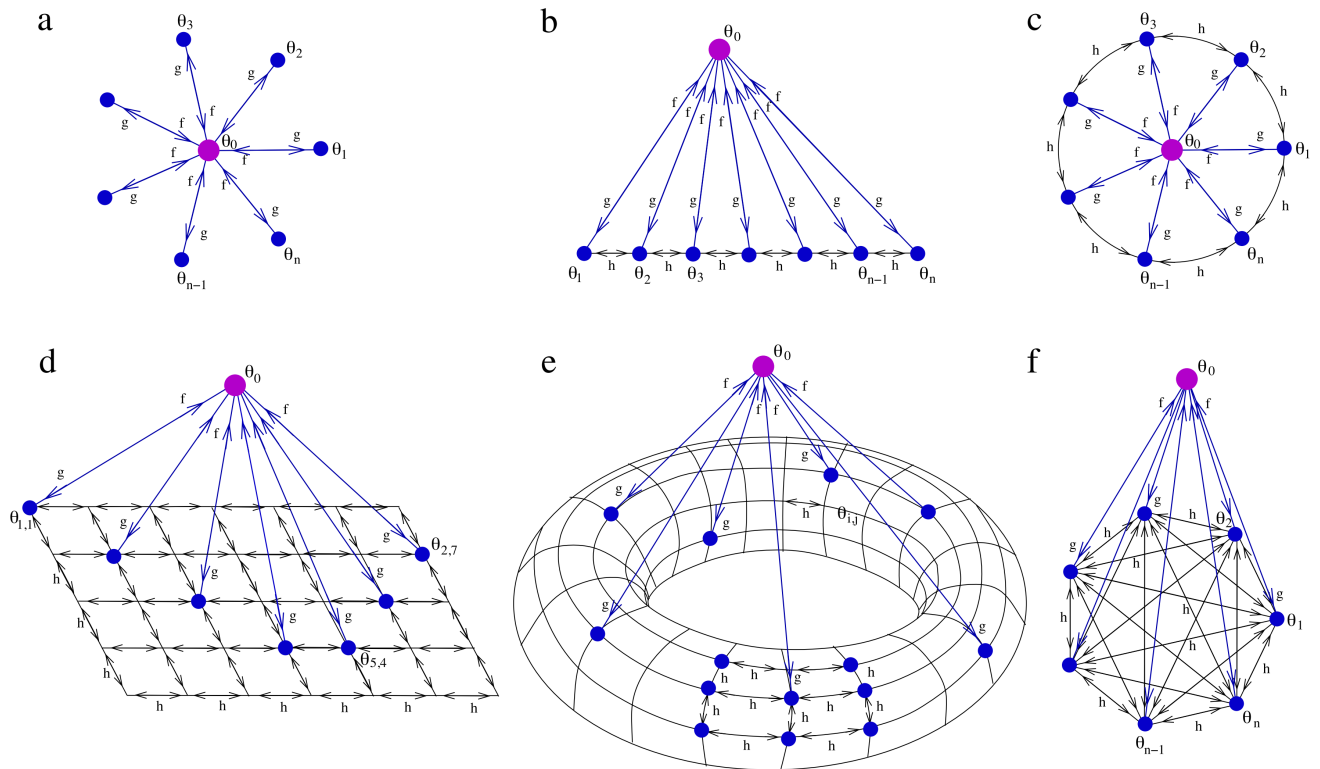


Рис. 8.37: Різні типи зв'язків між центральним осцилятором та периферичними: (а) зірко-подібний зв'язок (без взаємодії ПО між собою), (б) ПО з'єднані у лінію (кожен ПО зв'язаний лише з найближчими лівим і правим сусідами), (с) ПО зв'язані по між собою по колу, (д) ПО знаходяться у вузлах дво-вимірної квадратної решітки (кожен ПО зв'язаних зі своїми найближчими сусідами зліва, справа, зверху та знизу), (е) ПО знаходяться на поверхні тору, (ф) глобальний зв'язок між периферичними осциляторами. У даних мережах:  $f$  — функція впливу ПО  $\theta_0$  на ЦО  $\theta_j$ ,  $g$  — функція впливу ЦО на ПО,  $h$  — функція впливу ПО одного на іншого.

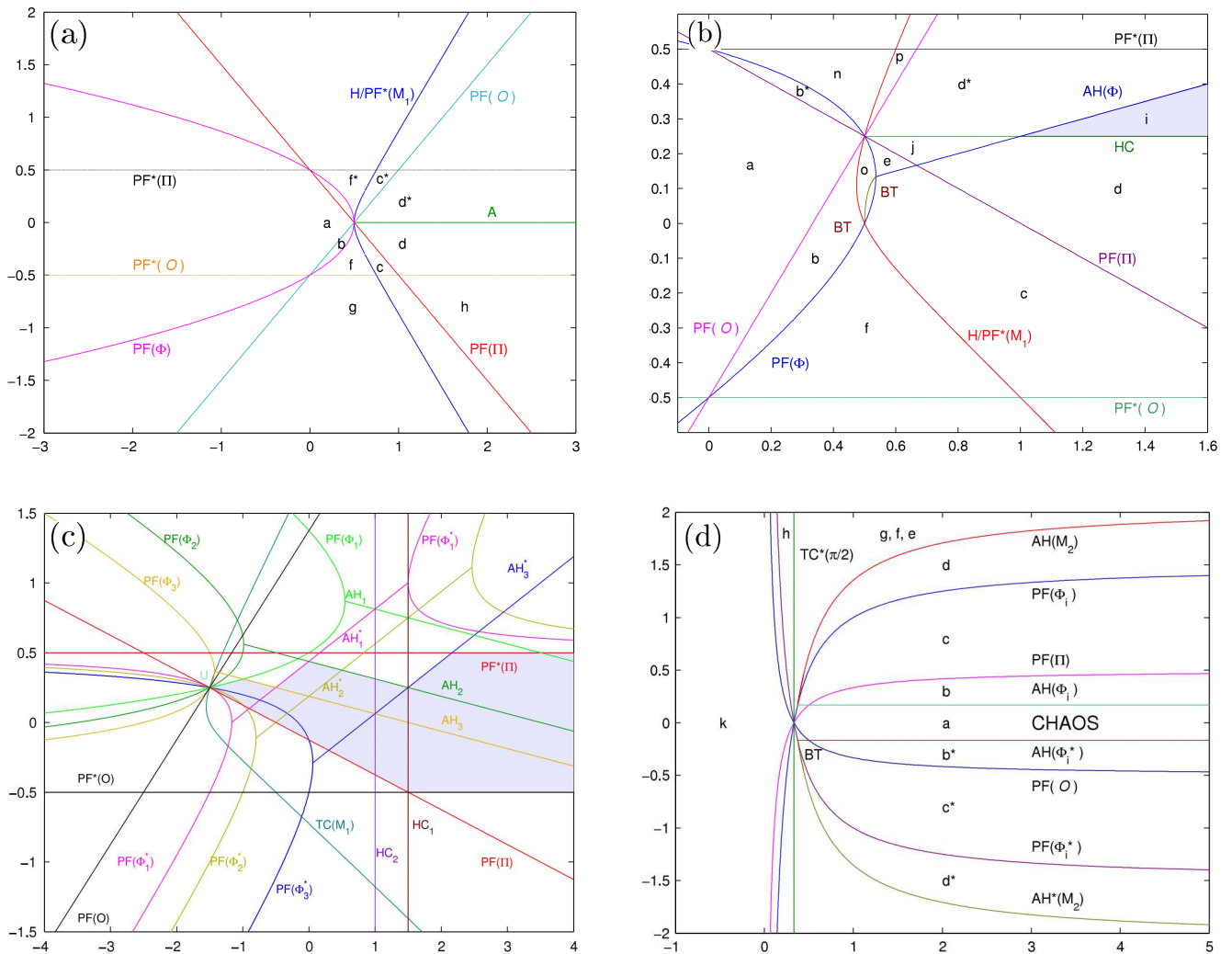


Рис. 8.38: Біфуркаційні діаграми системи трьох та чотирьох зв'язаних осциляторів: **(а)** на площині параметрів  $(a, p)$  для  $N = 2$ ,  $b = -1$ ,  $r = 0$  системи (7.23); **(б)** на  $(a, p)$ -площині для  $N = 2$ ,  $b = -1$ ,  $r = 1/4$  системи (7.23); **(с)** на  $(\bar{a}_3, p)$ -площині для  $N = 3$ ,  $b = -1$ ,  $r = 1/4$ ,  $\bar{a}_1 = 1$ ,  $\bar{a}_2 = 3/2$  системи (7.24) з функціями зв'язку  $f_j(x) = \bar{a}_j(\sin x + r \sin(2x))$ ,  $j = 1, 2, 3$ ; **(д)** на  $(a, r)$ -площині для  $N = 3$ ,  $b = -1$ ,  $p = 0$  системи (7.23). Позначення:  $PF$  — вилкова біфуркація,  $AH$  — біфуркація Андронова–Хопфа,  $TC$  — транскритична біфуркація,  $HC$  — гомоклінічна (гетероклінічна) біфуркація,  $BT$  — біфуркація Богданова–Такенса. Аргументами у дужках показано у якій точці або на якому многовиді відбувається дана біфуркація (більш детально у роботі [85]). Сірим позначено області стійкості антифазних станів.



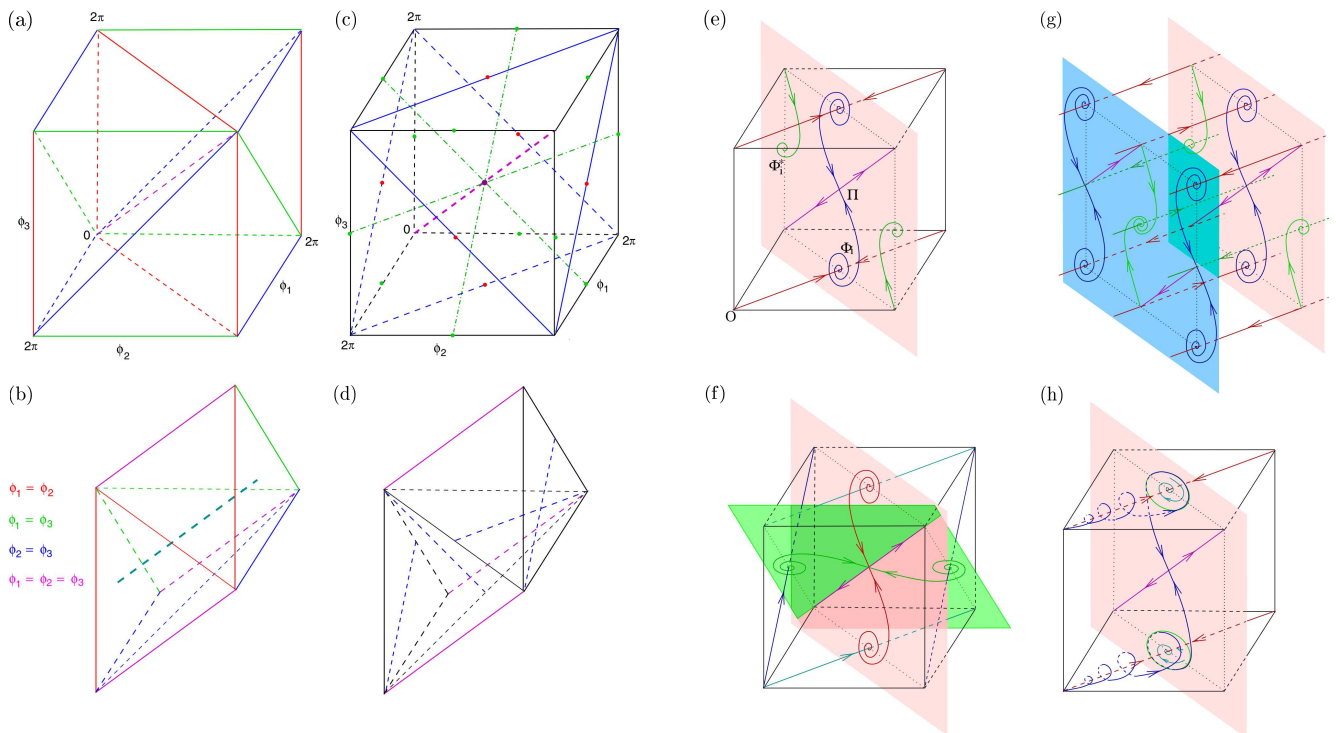


Рис. 8.39: Схематичні діаграми фазового простору  $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in \mathbb{T}^3$ : **(a)** куб (тор) з інваріантними площинами  $\mathcal{M}_2^{(i)}$ ; **(b)** інваріантна область, обмежена інваріантними площинами навколо лінії симетрії  $\mathcal{L}_i$ ; **(c)** інваріантні лінії  $\mathcal{Q}_1^{(i)}$  всередині кубу (тору); **(d)** інваріантні лінії  $\mathcal{M}_1^{(i)}$  та  $\mathcal{Q}_1^{(i)}$  всередині інваріантної області; **(e)** гетероклінічні з'єднання всередині кубу, що відповідають гетероклінічному циклу в  $\mathbb{T}^3$  (інваріантна площина та трансверсальні інваріантні лінії); **(f)** перетин двох інваріантних площин на інваріантній лінії всередині кубу; **(g)** інваріантна гетероклінічна мережа у сусідніх кубах; **(h)** гетероклінічний цикл з двох сідлових точок та сідлового циклу.

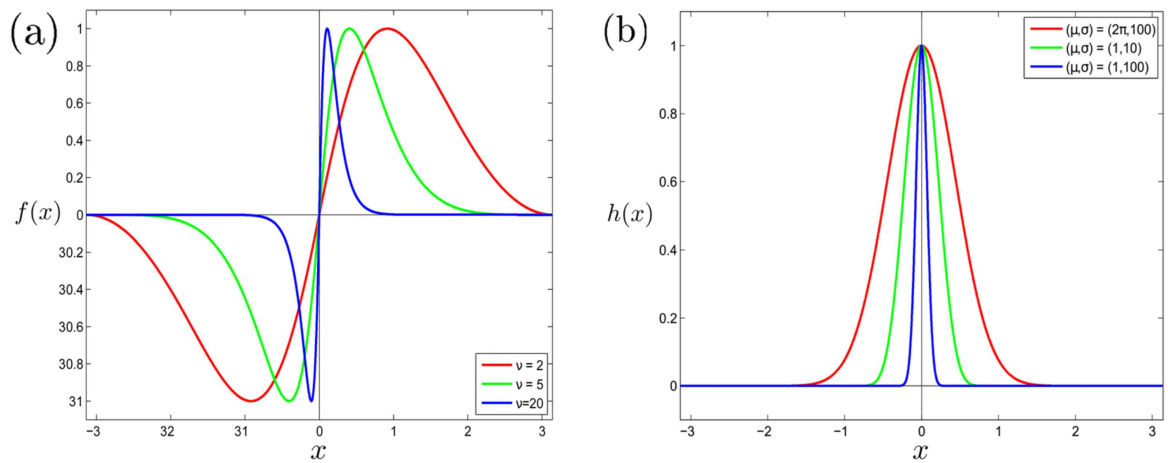


Рис. 8.40: (а) Приклади функцій зв'язку  $f(x)$  (7.33) для різних значень параметру  $\nu$ . (б) Резонансна функція зв'язку  $h(x)$  (7.35) для різних значень  $\mu$  та  $\sigma$ .

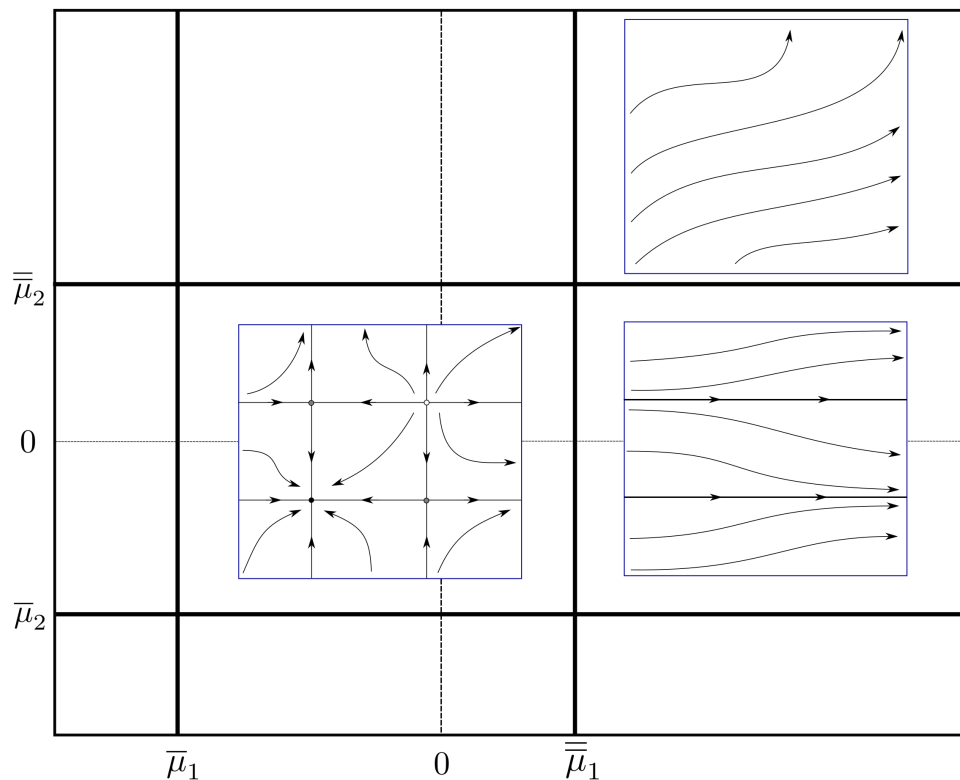


Рис. 8.41: Біфуркаційна діаграма для системи (7.50), (7.51) у площині параметрів  $(\mu_1, \mu_2)$ . Прямі лінії відповідають лініям SNIT біфуркацій. Схематичні фазові портрети на фазовому торі  $\mathbb{T}^2$  зображені у відповідних місцях параметричної площини у випадках структурної стійкості системи.

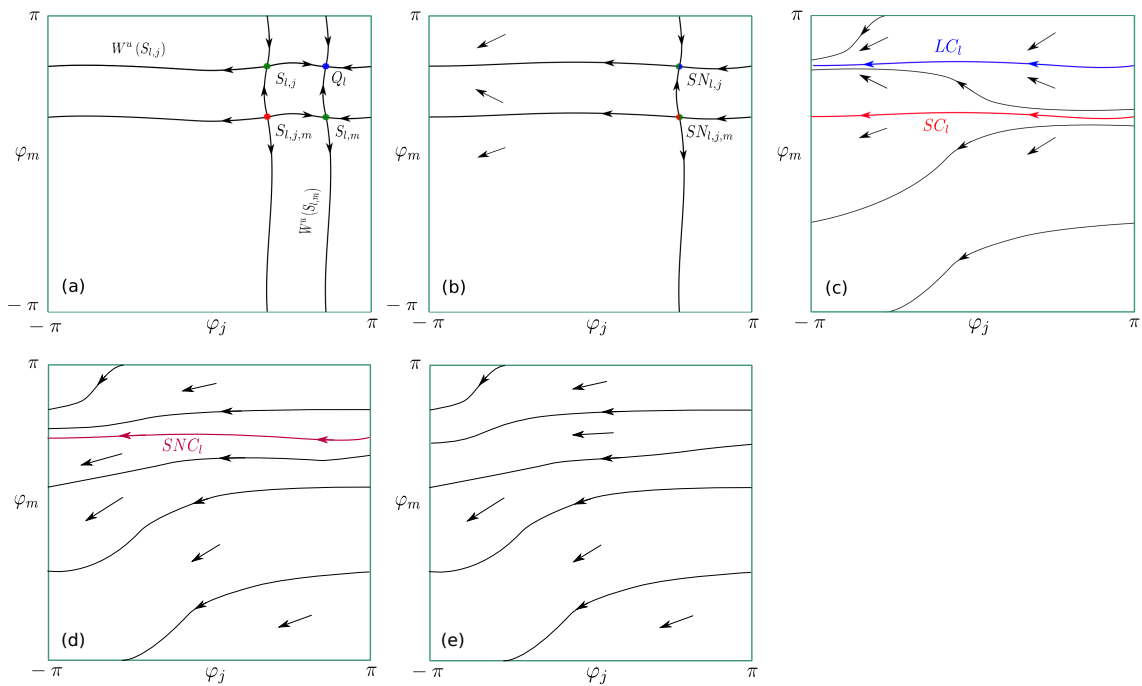


Рис. 8.42: Схематичні фазові портрети, які демонструють біфуркаційні переходи на дво-вимірному інваріантному тороїдальному многовиді. Біфуркації з'являються всередині многовиду, який є стійким у всіх трансверсальних напрямках. Переходи двох одночасних біфуркацій показані на малюнках (a)–(c). Стійкий та нестійкий сідлові цикли  $LC_l$  та  $SC_l$  виникають (малюнок (c)) після SNIC біфуркацій положень рівноваги. Локальна сідло-вузлова (fold) біфуркація двох циклів є глобальною біфуркацією на інваріантному тороїдальному многовиді (SNIT біфуркація). Вона призводить до появи дво-вимірного граничного тору  $LT_l^2$ . Біфуркаційний перехід всередині інваріантного тороїдального многовиду показано на малюнках (c)–(e).  $SNC_l$  позначає сідло-вузловий цикл. Стійкі (нестійкі) особливі точки та цикли відмічені синім (червоним) кольором, сідла показані зеленим кольором.

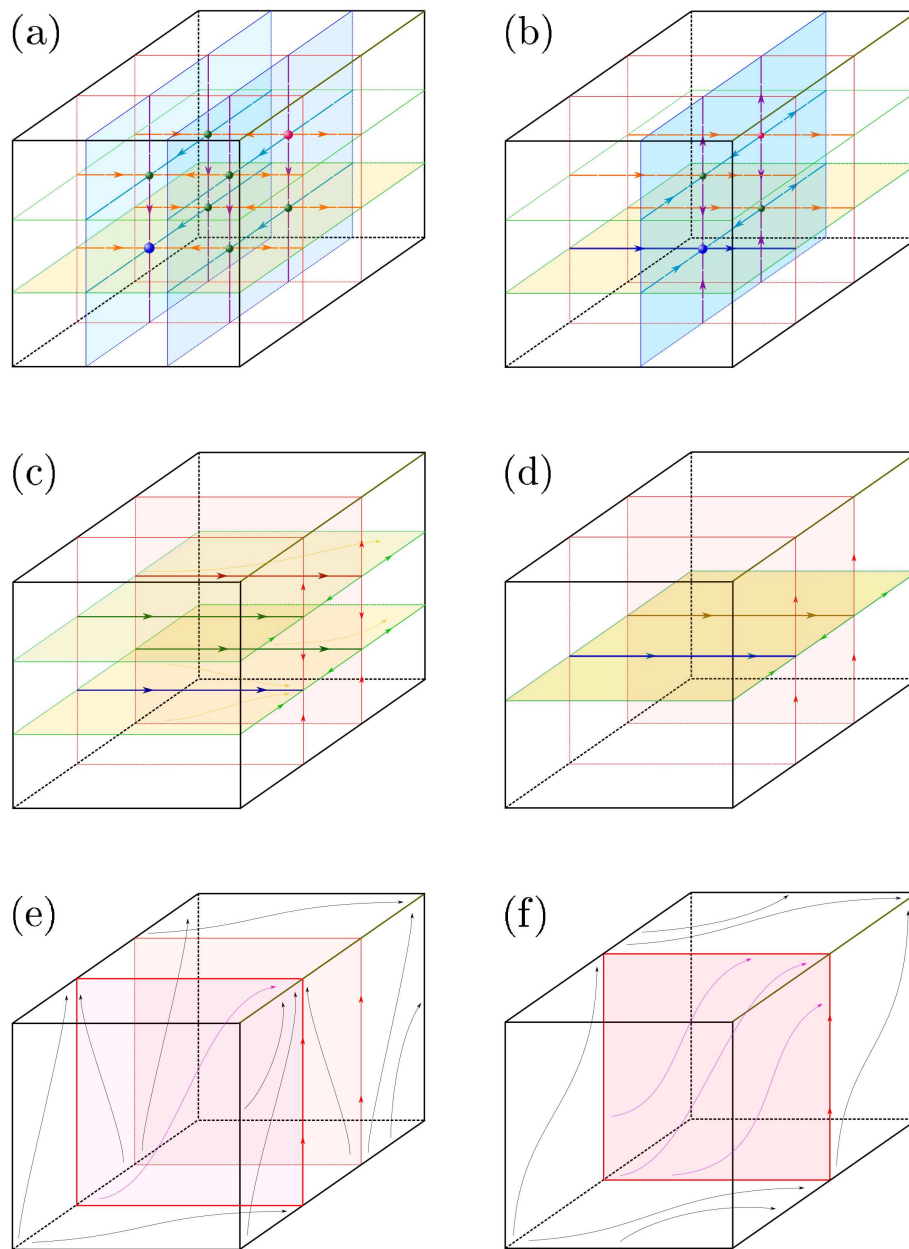


Рис. 8.43: Схема 3D SNIT біфуркації. Ланцюг біфуркаційних переходів у тривимірному тороїдальному фазовому просторі  $\mathbb{T}^3 \ni (\varphi_i, \varphi_j, \varphi_m)$  показано у вигляді схематичних фазових діаграм. **(a)** Положення рівноваги, 1D інваріантними многовидами та 2D інваріантними многовидами. **(b)** Чотири одночасні SNIC біфуркації. **(c)** Поява стійкого, нестійкого та двох сідлових циклів у результаті SNIC біфуркацій. **(d)** Дві одночасні складкові біфуркації періодичних орбіт. **(e)** Поява стійкої та нестійкої 2D поверхонь у результаті зникнення граничних циклів. **(f)** SN стійкої та нестійкої граничних 2D поверхонь у 3D торі (SNIT).

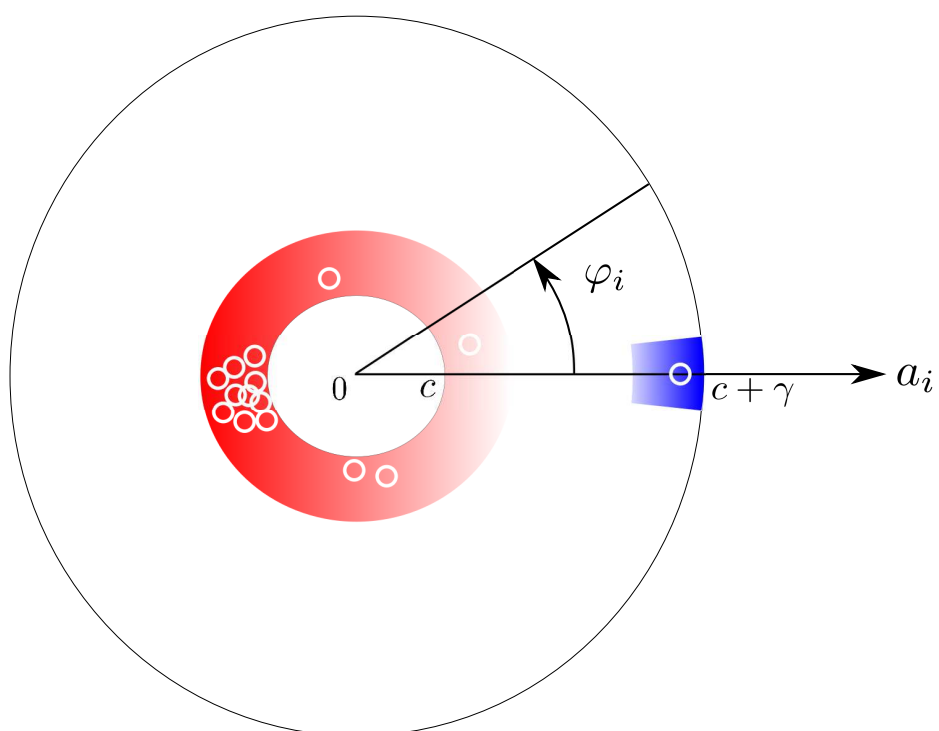


Рис. 8.44: Схематична діаграма розподілу осциляторів з амплітудами  $a_i$  та фазовими різницями  $\varphi_i$ . Синім кольором позначено положення переможця, червоним — положення переможених. Темніший колір означає більшу ймовірність знаходження осциляторів у зазначеній області. Маленькі білі кола відповідають окремим периферичним осциляторам.

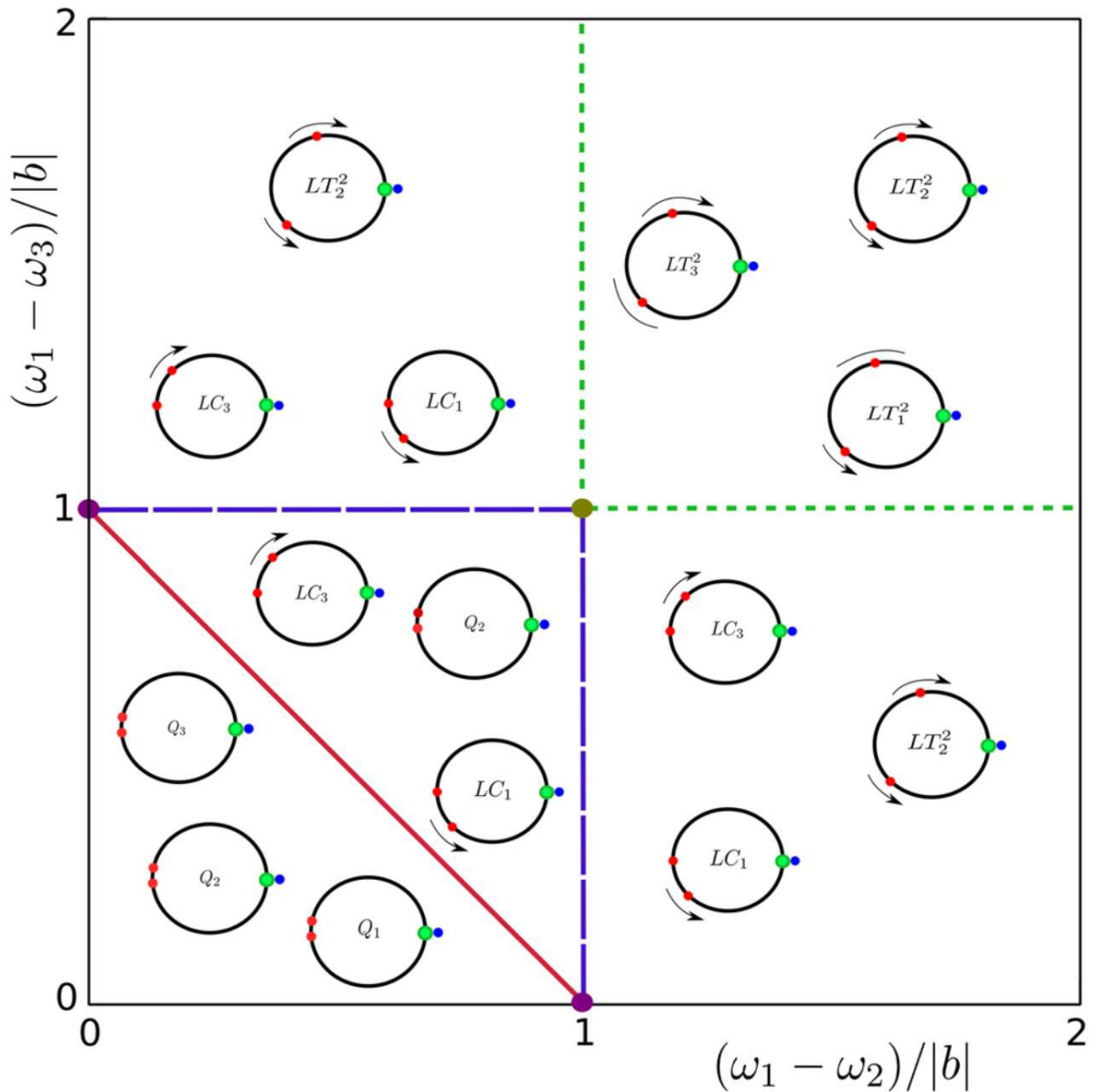


Рис. 8.45: Біфуркаційна діаграма випадку  $N = 3$  для системи (7.26)–(7.29) на біфуркаційній площині  $((\omega_1 - \omega_2)/|b|, (\omega_1 - \omega_3)/|b|)$ . Темна червона лінія є границею SNIC біфуркації, темна синя та зелена лінії показують границі SNIT біфуркацій. Розподіли фаз режимів *переможець отримує все* у різних біфуркаційних областях зображено на колі: зеленим кольором позначено центральний осцилятор, синім — периферичний осцилятор-переможець, червоним — осцилятори-невдахи.

## Додаток Е

### Таблиці

Табл. 8.1: Біфуркації корозмірності–один проілюстровані на Рис. 8.8.

<i>ID</i>	Вилкова біфуркація на інваріантних лініях
<i>BEGH</i>	Транскритична біфуркація в початку координат
<i>BEGH</i>	Біфуркація Андронова–Хопфа антифазного розв'язку
<i>HFAED</i>	Сідло–вузлова біфуркація на інваріантних лініях
<i>BE</i>	$S_3$ -транскритична гомоклінічна біфуркація
<i>ED</i>	Сідло–вузлова гомоклінічна біфуркація
<i>BD</i>	Сідло–вузлова біфуркація граничних циклів
<i>HCD</i>	$Z_3$ -гетероклінічна біфуркація
<i>DJ</i>	Вилкова біфуркація
<i>DK</i>	Сідло–вузлова біфуркація
<i>DL</i>	Сідло–вузлова біфуркація

Табл. 8.2: Біфуркації проілюстровані на Рис. 8.12.

<i>BEGH</i>	Транскритична–вилкова біфуркація в початку координат
<i>BQ</i>	Обернена вилкова біфуркація сідел з $(\mathbf{S}_2)^2 \times_s \mathbb{Z}_2$ симетрією
<i>BV</i>	Вилкова/гетероклінічна біфуркація розв'язків з симетрією $\mathbf{S}_2 \times \mathbf{S}_2$ (у транскритичному до $\mathbf{S}_2 \times \mathbf{S}_2$ напрямку)
<i>BM</i>	Біфуркація Андронова–Хопфа антифазного розв'язку ( $\mathbb{Z}_4$ ) та зміни стійкості гетероклінічних циклів
<i>HAED</i>	Сідло–вузлова біфуркація розв'язків з симетрією $\mathbf{S}_3 \times \mathbf{S}_1$
<i>IFGD</i>	Транскритична біфуркація розв'язків з симетрією $\mathbf{S}_3 \times \mathbf{S}_1$ у джерелі $U_i$
<i>DK</i>	Біфуркація сідлового з'єднання (не гетероклінічна) у підпросторі з симетрією $\mathbf{S}_2$
<i>DJ</i>	Транскритична біфуркація розв'язків з симетрією $\mathbf{S}_3 \times \mathbf{S}_1$ у точці стоку $W_i$
<i>DTL</i>	Сідло–вузлова біфуркація всередині тетраедра на $\mathbf{S}_2$ -площині
<i>BTR</i>	Вилкова біфуркація граничних циклів всередині тетраедра
<i>IFGD'</i>	Лінія сідло–вузлової біфуркації, що лежить справа кривій <i>IFGD</i> та дуже близько до неї
<i>DJ'</i>	Лінія сідло–вузлової біфуркації, що лежить між <i>DK</i> та <i>DJ</i> (біфуркація виникає на $W_i V_i$ у фазовому просторі)
<i>DL', DL''</i>	Дві лінії сідло–вузлових біфуркацій між лініями <i>DJ</i> та <i>DL</i> , друга з цих біфуркацій відбувається на $\mathbf{S}_3 \times \mathbf{S}_1$ інваріантній лінії



Табл. 8.3: Умови асимптотичної стійкості розв'язків  $\Phi_k$ ,  $k = 0, \dots, N$ , системи (7.23) для параметрів  $a, b, r, p$  при  $N \geq 3$  (частина 1).

$p = r$	$k = 0$	$b > 0$	$a > -\frac{b}{N}$ для $r > \frac{1}{2}$
		$b < 0$	$a < -\frac{b}{N}$ для $r < \frac{1}{2}$
	$k = 1$	$b > 0$	$a > -\frac{b}{N}$ для $r > \frac{1}{2}$
		$b < 0$	$a > -\frac{2br}{N(p-q)}$ для $q < r < \frac{1}{2}$
			$-\frac{b}{N} < a < -\frac{2br}{N(p-q)}$ для $-\frac{1}{2} < r \leq -q$
	$2 \leq k \leq N - 2$	$b > 0$	$a > -\frac{b}{N}$ для $r > \frac{1}{2}$
		$b < 0$	$a < -\frac{b}{N}$ для $r < -\frac{1}{2}$
	$k = N - 1$	$b > 0$	$a > -\frac{b}{N}$ для $r > \frac{1}{2}$
			$-\frac{2br}{N(p+q)} < a < -\frac{b}{N}$ для $q < r < \frac{1}{2}$
			$a < -\frac{2br}{N(p+q)}$ для $-\frac{1}{2} < r \leq -q$
		$b < 0$	$a < -\frac{b}{N}$ для $r < -\frac{1}{2}$
	$k = N$	$b > 0$	$a > -\frac{b}{N}$ для $r > -\frac{1}{2}$
$b < 0$		$a < -\frac{b}{N}$ для $r < -\frac{1}{2}$	
$r \neq 0, p = 0$	$k = 0$	$b > 0$	$a > \frac{b}{N(2r-1)}$ для $r > \frac{1}{2}$
		$b < 0$	$a < \frac{b}{N(2r-1)}$ для $r < \frac{1}{2}$
	$k = 1$	$b < 0$	$a > \frac{b}{2r(N-2)-N}$ для $\frac{1}{2} - \frac{1}{N} < r < \frac{N}{2(N-2)}$
	$k = N - 1$	$b > 0$	$a < \frac{b}{2r(N-2)+N}$ для $-\frac{N}{2(N-2)} < r < -\frac{1}{2} + \frac{1}{N}$
	$k = N$	$b > 0$	$a > -\frac{b}{N(2r+1)}$ для $r > -\frac{1}{2}$
$a < -\frac{b}{N(2r+1)}$ для $r < -\frac{1}{2}$			

Табл. 8.4: Умови асимптотичної стійкості розв'язків  $\Phi_k, k = 0, \dots, N$ , системи (7.23) для параметрів  $a, b, r, p$  при  $N \geq 3$  (частина 2).

$r = 0$ $p \neq 0$	$k = 0$	$b > 0$	$a < -\frac{b(2p-1)}{N}$ для $p > \frac{1}{2}$
		$b < 0$	$a < -\frac{b(2p-1)}{N}$ для $p < \frac{1}{2}$
	$k = 1$	$b > 0$	$a < -\frac{b(4p^2-1)}{2p(N-2)+N}$ для $p > \frac{1}{2}$
		$b < 0$	$\frac{b(4p^2-1)}{2p(N-2)+N} < a < \frac{4bp}{N-2}$ для $-u < p \leq p_1$
			$a < \frac{4bp}{N-2}$ для $p_2 < p \leq -u$
		$a < -\frac{b(4p^2-1)}{2p(N-2)+N}$ для $p \leq p_2$ , де $u := \frac{N}{2(N-2)}, p_{1,2} := -u \pm \sqrt{u^2 - \frac{1}{4}}$	
	$2 \leq k \leq \frac{N}{2}$	$b > 0$	$a < \frac{b(4p^2-1)}{2p(N-2k)+N}$ для $p > \frac{1}{2}$ ,
		$b < 0$	$\frac{b(4p^2-1)}{2p(N-2k)+N} < a < \frac{4bp}{N-2k}$ для $-s < p < -\frac{1}{2}$
			$a < \frac{4bp}{N-2k}$ для $p_2 < p \leq -s$
		$a < \frac{b(4p^2-1)}{2p(N-2k)+N}$ для $p \leq p$ , де $s := \frac{N}{2(N-2k)}, p_{1,2} := -s \pm \sqrt{s^2 - \frac{1}{4}}$	
	$k = \frac{N}{2}$	$b > 0$	$a < \frac{b(4p^2-1)}{N}$ для $p > \frac{1}{2}$
		$b < 0$	$a > \frac{b(4p^2-1)}{N}$ для $p < \frac{1}{2}$
	$\frac{N}{2} \leq k < N - 2$	$b > 0$	$a > \frac{b(4p^2-1)}{2p(N-2k)-N}$ для $p \geq p_1$
			$a > \frac{2bp}{N-2k}$ для $-s \leq p < p_1$
			$\frac{2bp}{N-2k} < a < \frac{b(4p^2-1)}{2p(N-2k)-N}$ для $-\frac{1}{2} < p \leq s$
		$b < 0$	$a > \frac{b(4p^2-1)}{2p(N-2k)-N}$ для $p < -\frac{1}{2}$
	$k = N - 1$	$b > 0$	$a > \frac{b(4p^2-1)}{2p(N-2k)-N}$ для $p \geq p_1$
			$a > \frac{2bp}{N-2k}$ для $s \leq p < p_1$
			$-\frac{2bp}{N-2k} < a < -\frac{b(4p-1)}{2p(N-2k)-N}$ для $p_2 \leq p < s$
		$b < 0$	$a > -\frac{b(4p^2-1)}{2p(N-2k)-N}$ для $p < -\frac{1}{2}$
$k = N$	$b > 0$	$a > -\frac{b(4p^2+1)}{N}$ для $p > -\frac{1}{2}$	
	$b < 0$	$a > -\frac{b(4p^2+1)}{N}$ для $p < -\frac{1}{2}$	