НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Бурилко Олександр Андрійович

УДК 517.91

Колективна динаміка та біфуркації у мережах зв'язаних фазових осциляторів

01.01.02 — диференціальні рівняння
111 — математика

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Київ — 2020

Дисертацією є рукопис.
Роботу виконано в Інституті математики НАН України.

Науковий консультант:

доктор фізико-математичних наук, професор,
член-кореспондент НАН України
Бойчук Олександр Андрійович,
Інститут математики НАН України,
завідувач лабораторії крайових задач
теорії диференціальних рівнянь.

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, професор,
член-кореспондент НАН України
Слюсарчук Василь Юхимович,
Національний університет водного господарства
та природокористування, м. Рівне,
професор кафедри вищої математики;

доктор фізико-математичних наук, професор
Парасюк Ігор Остапович,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
завідувач кафедри геометрії, топології і динамічних систем;

доктор фізико-математичних наук, професор
Черевко Ігор Михайлович,
Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича,
завідувач кафедри математичного моделювання.

Захист відбудеться *3 березня 2020 р. о 15 годині* на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.02 Інституту математики НАН України за адресою: 01024, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розісланий *21 січня 2020 р.*

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради **А.П. Голуб**

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Мережі зв'язаних осциляторів привернули значну увагу багатьох дослідників за останні пів сторіччя. Їхнє вивчення може сприяти розумінню основних динамічних особливостей зв'язаних систем багатьох видів, починаючи від атомів чи нейронів і закінчуючи лазерами й живими організмами. Основна проблема полягає в розумінні того, яким чином специфічні властивості індивідуальної поведінки окремих динамічних об'єктів (осциляторів, нейронів тощо) й архітектура зв'язків між різними об'єктами можуть привести до появи нових колективних явищ.

Основоположним і найглибше вивченим колективним явищем є синхронізація кількох зв'язаних подібних динамічних об'єктів. Перші експерименти, що засвідчили протифазову синхронізацію двох годинникових маятників провів Х. Гюйгенсом іще у сімнадцятому сторіччі. Сплеск наукового інтересу до синхронізації почався наприкінці дев'ятнадцятого — на початку двадцятого сторіч з виникненням електродинаміки й успіхами у дослідженні взаємодії нейронів. Подальші поштовхи до розвитку теорії синхронізації та колективної динаміки були спричинені винаходом комп'ютерів й появою кібернетики, появою радіофізики, розвитком теорії коливань, появою теорії біфуркацій, успіхами у дослідженні людського мозку й появою математичних нейронних моделей (моделі Ходжкіна–Хакслі передусім), різноманітними біологічними спостереженнями колективної динаміки живих організмів, виявленням коливних хімічних реакцій, винайденням лазерів, появою приладів, що стимулюють роботу серця й мозку, появою комп'ютерних мереж та штучних нейронних мереж. Серед учених, які зробили значний внесок у становлення теорії синхронізації, варто згадати Дж. Релея, Б. Ван-дер-Поля, Е. Епплтона, А. Андронова, А. Вітта, Н. Віннера. В середині двадцятого сторіччя з'явилось розуміння складності колективної динаміки взаємодійних об'єктів і необхідність створення математичних моделей, які б описували спільні риси синхронізації навіть незалежно від природи та складності взаємодійних об'єктів і були якомога простішими та зручними для подальшого аналітичного вивчення. Перша вагома спроба була здійснена А. Вінфрі у 1967 році, який запропонував складну осциляторну модель. Іншим значним проривом у теорії синхронізації можна вважати запропоновану у 1975 році японським фізиком Йошикі Курамото модель зв'язаних фазових осциляторів.

За короткий час модель Курамото стала популярною завдяки своїй простоті, зручності для дослідження й можливості описання структурно дуже відмінних між собою режимів колективної динаміки, як, наприклад, повна синхронізація, часткова синхронізація, протифазна синхронізація, хвилі обертання, довготривала синхронізація з перемиканням, химерні стани тощо. Важливою особливістю вказаної моделі є її гнучкість: змога легко описувати різні мережі взаємодій, можливість легко ускладнювати способи взаємодії, наближаючи математичний опис до конкретного природнього явища. Дослідження моделі Курамото та її застосування приводять до появи нових типів моделей колективної динаміки. Відзначимо, зокрема, моделі Курамото з запізненням, з пластичністю, з адаптацією, з випадковими розподілами частот шумом, з нелінійними фазовими зсувами, зі зворотнім впливом, з інерцією, з центральним елементом, з хабами, а також нескінченно–вимірні, різницеві, ланцюгові та кільцеві осциляторні моделі, мережі осциляторів, задані специфічними графами. Вагомий внесок у розробку теорії зв'язаних фазових осциляторів зробили С. Строгатц, А. Піковський, М. Розенблюм, Ю. Куртс, Х. Сакагучі, Дж. Крофорд, С. Ватанабе, Н. Копелл, Б. Ерментраут, І. Блехман, Е. Отт, Х. Даідо, Р. Міролло, А. Аренас, Дж. Свіфт, П. Ешвін, Х. Корі, Д. Гансел, Р. Борисюк, Я. Казанович, Ю. Майстренко, О. Омельченко, С. Янчук, О. Попович, Дж. Ацеброн, П. Тасс, Х. Шустер, П. Вагнер, К. Візенфельд, Х. Хонг, М. Тімме, П. Холмс, Е. Браун, Й. Накагава та іншиі. Дослідження моделей зв'язаних фазових осциляторів привело до виникнення нових глибоких теорій, таких, як теорія Ватанабе–Строгатца та анзац Отта–Антонсена, а також до описання нових колективних режимів, таких, як химерні стани, режими повільного перемикання.

Моделі зв'язаних осциляторів мають широке застосування при дослідженнях нейронних мереж, надпровідникових з'єднань Джозефсона, масивах лазерів і при моделюванні багатьох інших складних систем взаємодійних елементів. Незважаючи на те, що для моделювання окремих елементів мережі у більшості прикладних випадків застосовуються багатовимірні системи з дуже складною індивідуальною поведінкою, для моделювання їхньої колективної поведінки може бути достатньо вивчення лише їхньої фазової синхронізації. Одним зі способів дослідження синхронізації даних є виділення фаз сигналів за допомогою перетворення Гільберта, що дає змогу подальшого їхнього дослідження у формі осциляторних систем. Іншим чином осциляторну модель можна отримати як усереднення більш складної системи зі збереженням певних властивостей колективної поведінки. Дослідження простіших моделей взаємодійних елементів часто показує напрямок і дає інструменти для дослідження більш складних та загальних систем з подібними особливостями побудови мереж. Зокрема, за допомогою систем зв'язаних осциляторів також були отримані значні теоретичні результати про існування, стійкість та біфуркаційні переходи таких колективних режимів, як "змагання без переможців", "переможець отримує все", "змагання за синхронізацію". Також за допомогою подібних системи можуть бути змодельовані певні ситуації в теорії ігор та теорії конфліктів.

Моделі фазових осциляторів, що описуються системами диференціальних рівнянь з параметрами, є важливими та цікавими математичними об'єктами. Вивчення колективних та перехідних режимів у таких системах приводить до появи нових понять та широкого спектру досліджень у теорії динамічних систем, теорії біфуркацій, теорії складності. Наявність різноманітних колективних режимів у мережах осциляторів залежить від індивідуальної поведінки динамічних об'єктів, архітектури мережі та типів впливу елементів одних на інших. Це створює взаємозв'язок між симетріями мережі, інваріантними многовидами системи, кластерними режимами моделі, а також задає можливі типи біфуркацій переходів. Зокрема, певні типи симетричних біфуркацій було виявлено саме завдяки таким системам. Велику кількість гетероклінічних біфуркацій виявлено саме завдяки системам зв'язаних елементів. Значний вплив такі системи мають і на теорію детермінованого хаосу, зокрема, активно досліджується наявність хаотичної синхронізації, консервативного хаосу та хаотичних химер у системах подібного типу. Також відзначимо, що аналітичні дослідження зв'язаних систем переважно доповнюються і підтверджуються експериментально та за допомогою комп'ютерної симуляції, що також приводить до появи нових наукових міжгалузевих течій.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертацію виконано у відділі диференціальних рівнянь та теорії коливань Інституту математики НАН України згідно з науково–дослідними темами "Конструктивні та якісні методи аналізу систем диференціальних, функціонально-диференціальних, імпульсних та різницевих рівнянь", номер державної реєстрації

0116U003121; "Аналітичні та групові методи дослідження математичних моделей сучасного природознавства", номер державної реєстрації 0117U002119.

Мета і завдання дослідження. *Метою* дисертації є розробка нових методів побудови аналітичного дослідження колективної динаміки широкого класу моделей зв'язаних динамічних елементів, що описують колективні природні явища. Основну увагу дисертації зосереджено на описанні та доведенні існування, стійкості, мультистабільності, біфуркаційних переходів, басейнів притягання розв'язків систем диференціальних рівнянь з параметрами, що описують колективні режими у мережах з різними індивідуальними динаміками елементів, різними архітектурами зв'язків і різними типами взаємодії.

Об'єктом дослідження є системи нелінійних диференціальних рівнянь з параметрами, що моделюють складні мережі взаємодійних коливних елементів (фазових осциляторів, нейронів).

Предметом дослідження є стійкість та біфуркації розв'язків систем диференціальних рівнянь, що відповідають різним колективним режимам (повна синхронізація, кластерні режими, антифазні режими, хвилі обертання, режими повільного перемикання, режим *переможець отримує все*, режим *боротьба за синхронізацію*, режим *змагання без переможців*, химерні стани).

Методи дослідження. У роботі запропоновано комплексний підхід до дослідження моделей зв'язаних фазових осциляторів, що задаються за допомогою різних мереж та типів взаємодії між індивідуальними динамічними об'єктами. Підхід полягає у виявленні можливих симетрій системи, виявленні та дослідженні інваріантних многовидів та інваріантних областей, дослідженні можливості редукції системи, що враховує симетрії, наявність інваріантних підпросторів, стійких кластерних режимів, ієрархічних структур, тощо. При вивченні стійкості та біфуркацій колективних режимів застосовується поєднання аналітичних досліджень з чисельними експериментами та побудовою схематичних і біфуркаційних діаграм.

Наукова новизна одержаних результатів. Основні результати, які визначають наукову новизну та виносяться на захист, такі:

1. Досліджувалась колективна динаміка у системах глобально зв'язаних фазових осциляторів з різними типами взаємодії. Доведено існування режимів повної та часткової синхроніза-

ції, режимів повільного перемикання і протифазних режимів у стандартній моделі Курамото, моделі Курамото-Сакагучі та моделі з нелінійним фазовим зсувом у функції взаємодії. Детально описано умови стійкості та біфуркаційних переходів, мультистабільності різних колективних режимів та їхні басейни притягання. Для систем з квадратичним фазовим зсувом описано структуру багатопараметричних сімей періодичних орбіт та гетероклінічних циклів.

2. Було запропоновано розширення моделі Хонг–Строгатца зв'язаних осциляторів з притяганням, відштовхуванням та фазовим зсувом. Модель описує протидію двох конкуруючих груп конформістів на нонконформістів. Доведено, що дана система може мати різноманітні режими протистояння: протифазний режим двох груп, глобальна протифаза всіх елементів системи, режим нечіткого протистояння, мандрівні хвилі, а також два "ренегатних" режими. Показано, що наявність фазового зсуву значно ускладнює колективну динаміку системи, приводить до появи нових типів розв'язків, а також нових біфуркацій.
3. Досліджувалося співіснування дисипативної та консервативної динамік у кільцевих осциляторних мережах з анізотропним зв'язком. Виявлено, що таке співіснування є наслідком часово–оборотної симетрії у системі. Доведено, що консервативні та дисипативні області розділяються багатовимірними множинами гетероклінічних циклів. Показано зв'язок циркулянтної осциляторної мережі з нелінійним рівнянням Шрьодінгера.
4. Було запропоновано поняття "слабкий химерний стан" в мережах нерозрізнюваних фазових осциляторів. Було розв'язано задачу про мінімальну осциляторну мережу, що містить химерні стани. Було наведено побудови модульних осциляторних систем, що мають химерні стани гетероклінічного типу. Запропоновано метод біфуркаційного аналізу химерних станів за допомогою редукцій системи на інваріантні многовиди.
5. Досліджувалась осциляторна модель з центральним елементом, що використовується для описання нейронних процесів зорового пошуку, уваги та пам'яті. Доведено твердження про існування, стійкість та біфуркації розв'язків, що відповідають режимам боротьби периферичних осциляторів за синхронізацію з центральним.

6. Була запропонована та досліджувалась узагальнена система з центральним елементом та адаптацією. Було доведено, що ця система має стійкі режими "переможець отримує все" стаціонарних та нестаціонарних типів, а також показано адаптацію частоти центрального осцилятора до власної частоти периферичного осцилятора–переможця.
7. Описано нові біфуркації появи гетероклінічних циклів, симетричні біфуркації та біфуркації втрати симетрій. Виявлена та досліджена нова біфуркація сідло–вузла на інваріантному торі (SNIT).

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота містить математичні дослідження, що мають теоретичний характер, а також описання застосувань отриманих результатів у природознавстві. У роботі методами теорії динамічних систем моделюються колективні режими різних галузей природознавства. Отримані в роботі теоретичні результати можуть бути використані в аналітичній та якісній теорії диференціальних рівнянь, теорії коливань, теорії біфуркацій та теорії хаосу. Результати дисертаційної роботи можуть бути використані та вже використовуються для описання колективних процесів у фізиці, науці про нейрони, медицині, хімії, соціології, а також у запроваджені штучних нейронних мереж.

Особистий внесок здобувача. Тематику дисертаційної роботи визначено здобувачем особисто. Всі отримані в дисертації результати є новими. З результатів, надрукованих у спільних зі співавторами статтях, в основну частину дисертації увійшли тільки такі, що отримані здобувачем самостійно, за винятком кількох результатів, де вклад співавторів є рівноцінним. У роботах [3, 5, 6, 7, 9, 17, 18, 20] внесок всіх співавторів у формулювання та доведення теоретичних результатів є рівноцінним. У роботах, що носять міжгалузевий характер, автору дисертації належить математична частина досліджень, а співавторам описання фізичної, біологічної чи медичної мотивації виникнення моделей, побудова моделей та природнича інтерпретація отриманих математичних результатів.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації доповідалися на Міжнародних наукових конференціях: *Диференціальні та інтегральні рівняння* (Одеса, Україна, 2000), *Український Математичний Конгрес* (Київ, Україна, 2001), *Шості боголюбівські* *читання* (Чернівці, Україна, 2003), *Theory and applications of coupled cell networks* (Кембрідж, Великобританія, 2005), *Nonlinear Dynamics in Engineering and Nanotechnologies* (Ялта, Україна, 2006), *Complex dynamics and delay effects in complex systems* (Берлін, Німеччина, 2006), Конференції, присвяченій 80–річчю проф. Г. Хакена (Бад Хонеф, Німеччина, 2007), *Mathematical modeling in neuroscience* (Київ, Україна, 2008), *Dynamics of coupled phase oscillators* (Берлін, Німеччина, 2009), International workshop *Nonlinear dynaics on networks* (Київ, Україна, 2010), *Nonlinear dynamics of electronic systems* (Вольфенбютель, Німеччина, 2011), *Synchronization and oscillators with generalized coupling* (Екзетер, Великобританія, 2016), *Сучасна стохастика: Теорія та застосування IV* (Київ, 2018), *Сучасні проблеми математики* (Чернівці, Україна, 2018), *Dynamics of coupled phase oscillators* (Берлін, Німеччина, 2018), 11^{th} *Nonlinear Economics Dynamics Conference* (Київ, Україна, 2019).

Результати дисертаційної роботи неодноразово доповідалися та обговорювалися на семінарах відділу диференціальних рівнянь та теорії коливань Інституту математики НАН України (керівник: академік А.М. Самойленко), засіданнях Вченої Ради Інституту математики НАН України, семінарі відділу випадкових процесів Інституту математики НАН України (керівник проф. А.А. Дороговцев), семінарах "Теорія конфліктів" Інституту математики НАН України (керівник: проф. В.Д. Кошманенко), семінарі Лабораторії складних систем КПУ Драгоманова (керівник: проф. Ю.Г. Кондратьєв), семінарі кафедри математичного аналізу та диференціальних рівнянь КПУ Драгоманова (керівник: проф. Г.М. Торбін), семінарі "Математика та науки про життя" Інституту математики НАН України (2011, керівник: д.ф.-м.н. О.В. Антонюк), засіданнях об'єднаного Берлінського семінару з динамічних систем (керівники: проф. Б. Фідлер, проф. М. Вольфрум), семінарі Інституту медицини наукового центру м. Юліх, Німеччина (керівних проф. П. Тасс), семінарах факультету фізики та астрономії Університету м. Потсдам, Німеччина (керівники: проф. А. Піковський, проф. М. Розенблюм), семінарах математичного факультету м. Екзетер, Великобританія (керівник: проф. П. Ешвін), семінарах математичного факультету Державного Університету Джорджії, США (керівники: проф. А. Шильніков, проф. І. Бєлих).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано у роботах [1-20], що відповідають вимогам до публікації результатів дисертаційних робіт у фахових виданнях із фізико-математичних наук. 4 із вказаних робіт надруковано без співавторів, 15 у закордонних виданнях. Згідно з міжнародними науковометричними базами даних Scopus та Web of Science є понад 300 посилань на 14 з наведених робіт автора дисертації, понад 250 з яких без самоцитувань. h–index цих робіт у вказаних базах даних становить 9.

Відповідно до класифікації SCImago Journal & Country Rank наукові публікації [3, 4, 7, 9, 10, 14, 15, 16] надруковано у виданнях, які відносяться до квартиля Q1; роботи [6, 12, 13] – у виданнях, що відносяться до Q2; роботи [8, 20] – у виданнях з Q3.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі змісту, вступу, семи розділів, висновків, списку використаних джерел, що містить 353 найменування та 6 додатків. Робота містить 45 рисунків. Повний обсяг роботи становить 462 сторінки.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** визначено об'єкт і предмет дослідження та обґрунтовано актуальність теми дисертації, сформульовано мету і завдання дослідження, описано методи дослідження, охарактеризовано наукову новизну та теоретичне і практичне значення дослідження, прокоментовано повноту викладення матеріалу в опублікованих працях та його ступінь апробації.

У **першому розділі** формулюються основні завдання дослідження, подається огляд літератури, окреслюються питання, які залишилися відкритими, і анонсуються нові результати, які виносяться на захист. У цьому розділі коротко описана історія виникнення поняття синхронізації та більш загального поняття колективної динаміки, показано мотивацію виникнення математичних моделей, що описують колективні режими у різних галузях природознавства, описано сучасний стан досліджень у цьому напрямку. Детально описано моделі зв'язаних осциляторів та наведено основні означення та поняття з теорії синхронізації.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь, що описує взаємодію N зв'язаних фазових осциляторів

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} K_{ij}\Gamma_{ij}(\theta_i - \theta_j), \quad i = 1, \ldots, N, \tag{1}$$

де $\theta_i \in [0, 2\pi) = \mathbb{T}^1$ – фазові змінні, ω_i – власні частоти осциляторів, K_{ij} – параметри зв'язків між осциляторами, $\Gamma_{ij}(x)$ – гладкі 2π–періодичні функції зв'язку. Цю систему будемо називати *узагальненою моделлю Курамото* або *моделлю типу Курамото*. Параметр K_{ij} вказує на силу впливу i–того осцилятора на j–й. При $K_{ij} = 0$ такий вплив відсутній. Матриця $K = \{K_{ij}\}_{i,j=1}^N$ описує мережу зв'язків між елементами. Функції $\Gamma_{ij}(x)$ можуть бути ідентичними для всієї мережі або для її частини. Залежно від типу мережі та вигляду функції взаємодії система має ту чи іншу власну назву.

Система може бути узагальнена різними способами з урахуванням тих чи інших особливостей об'єкта, що моделюється. Природнім є розширення системи завдяки введення нових рівнянь, які описують залежність сили зв'язку між елементами від ступеню синхронізації між ними. Оскільки системи фазових осциляторів є певними редукціями нейронних моделей, то такі зв'язки описують явища *адаптації* чи *синаптичної пластичності* взаємодійних нейронів. У цьому разі параметри зв'язків є функціями часу $K_{ij} = K_{ij}(t)$, для яких задаються додаткові диференціальні рівняння. У більш загальних моделях інші параметри системи (1) можуть перетворитись у функції для точнішого опису певних фізичних чи нейронних особливостей колективної динаміки. У роботі також розглядались термодинамічні граничні переходи у системі (1) при $N \to \infty$ та порівнювались властивості скінченно та нескінченно–вимірних систем.

Для дослідження колективних режимів системи (1) зручно зафіксувати один із її елементів. Отже, проводячи заміну

$$\varphi_i = \theta_1 - \theta_{i+1}, \qquad i = 1, \ldots, N-1. \tag{2}$$

переходимо від системи (1) до системи меншої на один розмірності

$$\frac{d\varphi_i}{dt} = \Delta_i + \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\left(K_{1,j}\Gamma_{1,j}(\varphi_{j-1})\right. \\ \left. -K_{i+1,j}\Gamma_{i+1,j}(\varphi_{j-1} - \varphi_{i-1})\right), \quad i = 1, \ldots, N-1, \tag{3}$$

де $\Delta_i = \omega_1 - \omega_{i+1}$, $i = 1, \ldots, N-1$, та $\varphi_0 := 0$. У подальшому називатимемо систему (3) *системою у фазових різницях* для різних моделей типу Крамото (1).

Коротко опишемо основні з понять та означень, даних у підрозділі 1.2.2 дисертаційної роботи.

1.Розглянемо комплексне середнє поле системи (1)

$$Z(t) = R(t)e^{\imath\psi(t)} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} e^{\imath\theta_j(t)} \tag{4}$$

де $\imath = \sqrt{-1}$. Називаємо його амплітуду $R(t)$ – *параметром порядку.*

2. Будемо говорити, що два осцилятори θ_i та θ_j є *фазово синхронізованими*, якщо $|\theta_i(t) - \theta_j(t)| \to 0$ при $t \to \infty$ (якщо границя існує).

3. θ_i та θ_j перебувають у *протифазі*, якщо $|\theta_i(t) - \theta_j(t)| \to \pi$, $t \to \infty$.

4. Осцилятори θ_i та θ_j є *фазово замкнутими*, якщо $|\theta_i(t) - \theta_j(t)| \leq \text{const} < 2\pi \ \forall \ t$ (для неперервної репрезентації $\theta_i(t) \in \mathbb{R}$).

5. θ_i та θ_j *десинхронізовані*, якщо вони не є фазово замкнутими.

6. Система має *режим повної синхронізації* Θ_{sync}, якщо всі її осцилятори синхронізовані між собою, тобто $\Theta_{sync} = (\theta, \dots, \theta)$.

7. Одночасна синхронізація m осциляторів ($m \geq 2$) у системі називається або *m–кластером,* або (просто) *кластером.*

8. *k-кластерним станом $\mathcal{P}_k$*, $k = 2, \dots, N-1$, назвемо ризбиття множини осциляторів $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_N)$ на k кластерів.

9. Осцилятори θ_i та θ_j є *частотно синхронізованими*, якщо

$$\Omega_{ij} := \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} |\theta_i(t) - \theta_j(t)| = 0. \tag{5}$$

10. Система має стан *глобальної антифази*, якщо $R = 0$. Такі режими описує $(N-2)$-вимірний многовид:

$$\mathcal{M}^{(N)} = \left\{ (\theta_1, \dots, \theta_N) : \quad \sum_{j=1}^{N} \mathrm{e}^{\imath\theta_j} = 0 \right\}. \tag{6}$$

11. Система має режим *розподілених фаз* (або *хвилі обертання*)

$$\Theta_{splay} = \mathcal{M}_k = \left(\theta, \theta + k\frac{2\pi}{N}, \theta + k\frac{2\cdot 2\pi}{N}, \dots, \theta + k\frac{(N-1)2\pi}{N}\right), \tag{7}$$

де $k = 1, \dots, N-1$, індекси беруться за модулем N.

12. Будемо казати, що фазові осцилятори θ_i, $i = 1, \dots, N$, задані системою (1) , є *ідентичними*, якщо $\omega_i = \omega$, $i = 1, \dots, N$.

Другий розділ дисертації присвячено дослідженню колективної динаміки у моделі глобально зв'язаних фазових осциляторів з нелінійною функцією взаємодії, запропонованій А. Піковським та М. Розенблюмом. Така модель є узагальненням класичної моделі Курамото та моделі Курамото–Сакагучі, атакож вона більш детально описує певні фізичні об'єкти (зокрема, масиви надпровідникових з'єднань Джозефсона), що використовують взаємодію через середнє поле.

Розглянемо ансамбль N зв'язаних фазових осциляторів, які взаємодіють глобально за допомогою комплексного середнього поля (4) з амплітудою R таким чином, що

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i - \frac{K}{N}\sum_{j=1}^{N}\sin\left(\theta_i - \theta_j - \alpha(R,\beta)\right), \quad i = 1,\ldots,N. \tag{8}$$

де K – загальний параметр зв'язку. Функція взаємодії $g(x) = -\sin(x-\alpha)$ залежить від нелінійного фазового зсуву $\alpha(R,\beta)$, залежного від параметра порядку R та вектору біфуркаційних параметрів $\beta = (\beta_1,\ldots,\beta_m)$, $m \geq 1$.

Система глобально зв'язаних ідентичних осциляторів має симетрію перестановок $\mathbf{S}_N$, що приводить до існування кластерних інваріантних многовидів $\mathcal{P}_k$. Многовиди $\mathcal{P}_{N-1}$ розділяють фазовий простір $\mathbb{T}^N$ на $(N-1)!$ канонічних інваріантних областей вигляду

$$\mathcal{C} = \left\{(\theta_1,\ldots,\theta_N) : \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_N < \theta_1 + 2\pi\right\}. \tag{9}$$

(з точністю до перестановок індексів).

Теорема 2.4.1. *Система у фазових різницях відповідна до (8) з нелінійним фазовим зсувом $\alpha(R,\beta) \in C^1(\mathbb{T}^{N-1})$ у функції взаємодії має такі особливі множини:*

1. *Положення рівноваги $\Phi_{sync} = (0,\ldots,0)$, яке відповідає режимові повної синхронізації Θ_{sync} оригінальної системи (8), що є стійким при $\alpha(1,\beta) \in (-\pi/2,\pi/2)$. При $\alpha(1,\beta) = \pm\pi/2$ точка Φ_{sync} втрачає свою стійкість унаслідок одночасних транскритичних біфуркацій, що відбуваються вздовж інваріантних дво–кластерних многовидів з ізотропією $\mathbf{S}_p \times \mathbf{S}_{N-p}$, $p = 1,\ldots,[N/2]-1$. У випадку парної кількості осциляторів $N = 2p$, разом з транскритичною біфуркацією відбувається вилкова біфуркація вздовж многовидів з ізотропією $\mathbf{S}_{N/2} \times \mathbf{S}_{N/2}$.*

2. $(N-3)$–вимірний інваріантний многовид $\mathcal{M}^{(N)}$, що цілком складається з особливих точок. Кожна точка є нейтрально стійкою у $N-2$ напрямках усередині самого многовида $\forall\alpha$. У двох трансверсальних до многовиду напрямках вона є стійкою при $\alpha \in (\pi/2, 3\pi/2)$. Многовид втрачає свою стійкість унаслідок виродженої біфуркації Андронова–Хопфа при $\alpha = \pm\pi/2$.

3. Дво–кластерні стани, які належать інваріантним многовидам $\mathcal{P}_2$ з ізотропією $\mathbf{S}_p \times \mathbf{S}_{N-p}$, $p \neq N/2$.

4. Граничні цикли всередині інваріантних областей $\mathcal{C}$.

5. Гетероклінічні цикли на границях інваріантних областей $\partial\mathcal{C}$, які існують у моменти гетероклінічних біфуркацій, котрі складаються з локальних сідло—вузлових, транскритичних чи вилкових біфуркацій на двокластерних многовидах $\mathcal{P}_2$.

Теорема 2.3.1 детально описує динаміку моделі Курамото-Сакагучі зі сталим фазовим зсувом $\alpha = \mathrm{const}$. Зокрема, при $\alpha = \pm\pi/2$ відбувається ряд локальних та глобальних біфуркацій. У біфуркаційний момент інваріантні області $\mathcal{C}$ заповнені неперервною множиною періодичних розв'язків, а їхні границі $\partial\mathcal{C}$ неперервною множиною гетероклінічних циклів.

Детально описаний випадок системи (8) з квадратичною функцією фазового зсуву: $\alpha = \alpha(R, \beta) = \beta_1 + \beta_2 R^2$. У цьому випадку проаналізовано різні типи біфуркацій появи гетероклінічних циклів та сімей гетероклінічних циклів. Показано, що при зміні параметрів є типовим такий ланцюжок біфуркаційних переходів: повна синхронізація $\to$ дво-кластерний режим $\to$ режим повільного перемикання між кластерами $\to$ періодичний/квазіперіодичний частково синхронний стан $\to$ режим повної протифази.

У **третьому** розділі розглядається узагальнена модель Курамото глобально зв'язаних фазових осциляторів

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + \frac{K}{N}\sum_{j=1}^{N} g(\theta_i - \theta_j), \quad j = 1, \dots N, \tag{10}$$

з 2π–періодичною гладкою функцією взаємодії $g(x)$. Більш детально досліджено систему (10) з двогармонічною функцією зв'язку

$$g(x) = -\sin(x-\alpha) + r\sin(2x-\beta), \tag{11}$$

де α, β, r – параметри. У разі ідентичності власних частот система (10) має симетрію перестановок $\mathbf{S}_N$, що приводить до розщеплення її фазового простору $(N-1)!$ канонічних інваріантних областей $\mathbb{C}$, які містять винятково фазово незамкнуті траєкторії. Було показано, що система має такі особливі режими:

1. Режим *повної синхронізації* Θ_{sync}, що є стійким при $g'(x) < 0$;
2. Режими рівномірного розподілу фаз Θ_{splay}, що є стійкими при

$$\sum_{j=1}^{N-1} g'\left(\frac{2\pi}{N}j\right)\left(1-\cos\left(\frac{2pj\pi}{N}\right)\right) < 0, \quad p = 1, \ldots, N-1;$$

3. Режим *повної антифази* $\mathcal{M}^{(N)}$, що є інваріантним для $N = 2, 3, 4$;
4. *Двокластерні режими* $\Theta_{p,N-p} \subset \mathcal{P}_2$;
5. *Багатокластерні режими*, якщо $g(x)$ має не менш ніж дві гармоніки;
6. Режими *повільного перемикання між кластерами*, що відповідають гетероклінічним циклам системи у фазових різницях;
7. Режими *близькі до повної протифази*, що відповідають періодичним та квазіперіодичним траєкторіям.

Для системи (10), (11) проаналізовано глобальні біфуркації появи гетероклінічних циклів, частинами яких є різні локальні біфуркації. Зокрема, описано сценарії проходження сідло–вузлової/гетероклінічної, $\mathbf{S}_N$–транскритичної гомоклінічної, $\mathbb{Z}_N$–симетричної сідлово–зв'язної, транскритично–вилкової/гетероклінічної біфуркацій, а також змішаної вилкової біфуркації гетероклінічного та граничних циклів. Описано біфуркації корозмірності–два у таких системах та появу багатовимірних неперервних множин гетероклінічних циклів. Відзначимо, що гетероклінічні траєкторії та близькі до них за структурою граничні цикли відповідають режимам повільного перемикання між осциляторними кластерами. Також гетероклінічні цикли у складних системах можуть інтерпретуватись як режими *змагання без переможця*.

Показано, що системи глобально зв'язаних ідентичних осциляторів є градієнтними для довільних непарних періодичних функцій взаємодії $g(x)$ та такі самі системи є бездивергентними, коли функція взаємодії є парною. Більш детально описано симетрії, інваріантні многовиди, багатопараметричні сім'ї нейтральних розв'язків систем з парною взаємодією.

Досліджувались властивості системи (10) у випадку, коли осцилятори є *неідентичними.* Наведено твердження щодо екстремальної чутливості до збурень власних частот та руйнування інваріантних областей фазово–замкнутих траєкторій. Показано, що система є екстремально чутливою у моменти гетероклінічних біфуркацій для $N \geq 3$ та описано біфуркаційні перетворення розв'язків.

У **четвертому** розділі досліджується осциляторна система *з притяганням та відштовхуванням*:

$$\frac{d\theta_i}{dt} = -\frac{K_1}{N}\sum_{j=1}^{N}\sin(\theta_i - \theta_j - \alpha), \quad i \in J_1,$$
$$\frac{d\theta_i}{dt} = -\frac{K_2}{N}\sum_{j=1}^{N}\sin(\theta_i - \theta_j - \alpha), \quad i \in J_2, \tag{12}$$

де J_1 – підмножина індексів $\mathcal{N} = \{1,\ldots,N\}$, $J_2 = \mathcal{N} \setminus J_1$, $K_1 > 0$, $K_2 < 0$ – різні сили зв'язків, α – параметр фазового зсуву. Ця система є розширенням моделі Даідо/Хонг-Строгатца з фазовим зсувом α. У системі (12) вся множина осциляторів $(\theta_1,\ldots,\theta_N)$ розпадається на дві підмножини $\mathcal{H}_1$ – *конформістів*, що мають індекси з J_1 (зв'язок $K_1 > 0$ сприяє притяганню осциляторів) та $\mathcal{H}_2$ – *нонконформістів*, що мають індекси з J_2 (зв'язок $K_2 > 0$ спричиняє відштовхування). Масштабуючи час у системі (12) та вводячи новий параметр $k := K_2/K_1$, можна редукувати кількість параметрів до двох.

Було доведено, що система (12) має два многовиди $\mathcal{P}_m^1$ та $\mathcal{P}_m^2$, що відповідають синхронізації m конформістів та m нонконформістів, які є інваріантними щодо потоків системи, а також щодо зміни її параметрів. Було показано, що ці многовиди розділяють фазовий простір на інваріантні області, які не є фазово замкнутими на відміну від областей $\mathcal{C}$ систем, розглянутих у розділах 2 та 3.

Теорема 5.4.1. *Для $\alpha = 0$ і будь–яких значень параметру k, таких, що $k \neq 0$, $k \neq -N_2/N_1$, всі положення рівноваги системи у фазових різницях відповідної (12) утворюють таку множину:*
$FP = FP_{0\pi} \cup \mathcal{M}^{(N)}$, де
$FP_{0\pi} = \{(\varphi_1,\ldots,\varphi_{N-1}) : \varphi_j = \{0,\pi\},\ j = 1,\ldots,N\}$,
$\mathcal{M}^{(N)}$ – антифазний многовид (6), записаний у фазових різницях.

Введемо локальні параметри порядку для протидійних груп $\mathcal{H}_s$:

$$Z_s(t) = r_s(t)e^{\imath\psi_s(t)} = \frac{1}{N_s}\sum_{j\in J_s} e^{\imath\theta_j(t)}, \quad s = 1,2,$$

та різницю фаз середніх полів $\delta(t) = \psi_1(t) - \psi_2(t)$, $N_s = |J_s|$. Тоді при $\alpha = 0$ система Хонг-Строгатца має такі режими протистояння конформістів та нонконформістів:

1. *π-стан* з $r_1 = r_2 = 1$, $\delta = \pi$, що є стійким при $k < -N_2/N_1$, $N_1 > N_2$, $N \geq 3$;
2. *Некогерентний стан* з $r_1 = r_2 = 0$ (нонконформісти перемагають), що є $(N-2)$-вимірним підмноговидом $\mathcal{M}^{(N)}$;
3. *Розмитий π-стан* з $N_1 r_1 = N_2 r_2$, $\delta = \pi$ та $R = 0$.
4. *Ренегатний режим* з $r_1 = 1$, $r_2 = (N_2 - 2)/N_2$, $\delta = \pi$, що є стійким при $k \in (-N_2/N_1, -(N_2-2)N_2)$;
5. *Повна синхронізація* з $R = 0$, що може відбутися лише при $N_2 \in \{0, 1\}$. При $N_2 = 1$ режим є стійким, коли $k \in (-1/(N-1), 0)$;
6. *Мандрівні хвилі* з $r_1 = 1$ та нестаціонарними $r_2 = r_2(t)$, $\delta = \delta(t)$.

У випадку наявності фазового зсуву $\alpha \neq 0$ динаміка системи (12) є значно складнішою стосовно системи Хонг-Строгатца, з'являються нові колективні режими, що описуються багатопараметричними сім'ями періодичних орбіт з нестаціонарними параметрами порядку $r_1 = r_1(t)$, $r_2 = r_2(t)$, $\delta = \delta(t)$, фазово незамкнутими гетероклінічними циклами, а також хаотичними траєкторіями.

Біфуркаційні переходи між різними режимами було детально досліджено для систем різних розмірностей та проілюстровано за допомогою фазових портретів, схематичних та біфуркаційних діаграм.

У **п'ятому** розділі було розглянуто *циркулянтну* мережу зв'язаних осциляторів:

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_i + \sum_{j=1}^{N} K_j g(\theta_i - \theta_{i+j}), \quad i = 1, \ldots, N, \tag{13}$$

де K_j, $j = 1, \ldots, N$, – параметри сили взаємодії, а всі індекси беруться за модулем N. Було показано, що система *ідентичних* осциляторів має *хвилі обертання* $\mathcal{M}_k$ (7) для довільних функцій $g(x)$ та описано їхні біфуркації. Було показано, що коли матриця зв'язків є кососиметричною, то система ідентичних осциляторів (13) є часово оборотною, тобто вона має інволюцію $\mathcal{R}$ фазового простору: $G(\mathcal{R}\Theta) = -\mathcal{R}(G(\Theta))$, $\mathcal{R}^2 = Id$, де $G(\Theta)$ – права частина (13). Така властивість веде до співіснування консервативної та дисипативної динамік.

Теорема 5.4.1. *Для функцій зв'язку, що задовольняють умову g'(0)≠0 та для майже всіх кососиметричних матриць зв'язку K, таких, що $K_j = -K_{-j}$, система у фазових різницях відповідна (13) має такі динамічні режими:*

(A) *Сім'ї періодичних розв'язків у околі точки $\Phi_{sync} = \mathcal{M}_0$: Існує однопараметрична сім'я періодичних розв'язків $\Phi_\sigma(t)$ в околі $\mathcal{M}_0$, коли N є непарним, та двопараметрична сім'я $\Phi_{(\sigma_1,\sigma_2)}(t)$ періодичних розв'язків, коли N є парним, з періодом близьким до $2\pi/\Omega_m$, де $\Omega_m = 2g'(0)\sum_{j=1}^{[(N-1)/2]} K_j \sin\left(\frac{2mj\pi}{N}\right)$.*

(B) *Щільна множина інваріантних торів у околі $\mathcal{M}_0$: При виконанні умов (b1) та (b2), вказаних нижче, існують аналітичні $[(N-1)/2]$–вимірні квазіперіодичні тори з несумірними частотами близькими до $\Omega_1, \ldots, \Omega_{[(N-1)/2]}$. Тори є інваріантними щодо потоку системи і до оборотного перетворення $\mathcal{R}$. Крім того, якщо U_ε є ε–околом точки $\mathcal{M}_0$, тоді міра Лебега інваріантного тору прямує до повної міри околу U_ε при $\varepsilon \to 0$.*

– (b1) Умова нерезонансності: $(q, \Omega) = \sum_{m=1}^{[(N-1)/2]} q_m \Omega_m \neq 0$ виконується для всіх q з $|q| \le 2l + 2$ та деяким $l \in \mathbb{N}$,

– (b2) Умова невиродженості: ведучі кубічні члени нормальної форми є невиродженими, у будь–якому околі $\mathcal{M}_0$.

(C) *Твердження* (A) *та* (B) *виконуються також для околу точки $\mathcal{M}_{N/2}$, якщо N є парним.*

(D) *Дисипативна динаміка: Положення рівноваги $\mathcal{M}_k$, $k \neq 0$, є стоком, якщо умова*

$$\sum_{j=1}^{[(N-1)/2]} K_j \left(g'\left(\frac{2\pi kj}{N}\right) - g'\left(-\frac{2\pi kj}{N}\right)\right)\left(1 - \cos\left(\frac{2mj\pi}{N}\right)\right) < 0$$

задовольняється для всіх $m = 1, \ldots, N-1$, де $[x]$ – ціла частина числа x. У цьому випадку $\mathcal{M}_{-k}$ є джерелом.

Було показано, що консервативну та дисипативну частини розділяють сім'ї гетероклінічних циклів, а також описано структуру цих множин для маловимірних систем. Було доведено, що система (13) з непарною функцією $g(x)$ є бездивергентною та має перші інтеграли

$$E_1(\theta_1, \ldots, \theta_N) = \sum_{i=1}^{N} h(\theta_i - \theta_{i+1}), \quad h'(x) = g(x),$$

$$E_2(\theta_1, \ldots, \theta_N) = \sum_{i=1}^{N} (-1)^{i-1} \theta_i.$$

Показано, як при зміні параметрів система може перетворитись з консервативної у консервативно-дисипативну і врешті у дисипативну систему. Описано, яким чином при таких біфуркаціях змінюється структура межі консервативної області. Було показно, що система може мати кілька "острівців"консервативної динаміки у фазовому просторі, якщо функція взаємодії $g(x)$ містить старші гармоніки у розкладі в ряд Фур'є. Досліджувалося, при яких неідентичних власних частотах система залишається консервативно-дисипативною. Було показано, що така динаміка є можливою, коли власні частоти ω_i є попарно рівновіддаленими.

При термодинамічному переході кількості осциляторів до нескінченності, коли кількість зв'язків залишається скінченною, формально виведене амплітудне рівняння для розв'язків в околі режиму синхронізації (Теорема 5.7.1). Це рівняння має вигляд нелінійного рівняння Шрьодінгера і описує Гамільтоново–подібну область, що існує навколо синхронного стану, аналогічно випадку скінченно–компонентних кілець.

Шостий розділ присвячено дослідженню нового математичного об'єкту та фізичного явища, що має назву "химерний стан" (або "химера"), яке було запропоноване Й. Курамото та Д. Баттогтохом у 2002 році. Незважаючи на великий інтерес дослідників до химерних станів, їхнього строгого аналітичного означення довгий час не існувало. Математичне означення "слабкого химерного стану" було вперше запропоновано П. Ешвіним та О. Бурилком у роботі [8].

Означення 6.2.1. Будемо казати, що осцилятори є *нерозрізнюваними*, якщо осцилятори є ідентичними та взаємозамінними у сенсі, що кожен з них має однакову кількість та силу зв'язків

Далі використовуємо позначення Ω_{ij} з формули (5) означення часткової синхронізації.

Означення 6.2.3. Будемо говорити, що множина $\mathcal{A}$ є *слабким химерним станом* для системи нерозрізнюваних фазових осциляторів, якщо вона є зв'язною ланцюгово–рекурентною інваріантною щодо потоку множиною такою, що на кожній траєкторії з множини $\mathcal{A}$ існують індекси i, j та k, такі, що $\Omega_{ij} \neq 0$, а $\Omega_{ik} = 0$.

Наступна теорема наводить модульну конструкцію *мінімальної* осциляторної мережі, що має стійкий слабкий химерний стан.

Теорема 6.3.1. *Існує відкрита множина параметрів* (r, α), *така, що чотирьох–осциляторна система*

$$\begin{aligned}
\frac{d\theta_1}{dt} &= \omega + (g(\theta_1 - \theta_3) + g(0)) + \varepsilon\,(g(\theta_1 - \theta_2) + g(\theta_1 - \theta_4)\,,\\
\frac{d\theta_2}{dt} &= \omega + (g(\theta_2 - \theta_4) + g(0)) + \varepsilon\,(g(\theta_2 - \theta_3) + g(\theta_2 - \theta_1)\,,\\
\frac{d\theta_3}{dt} &= \omega + (g(\theta_3 - \theta_1) + g(0)) + \varepsilon\,(g(\theta_3 - \theta_4) + g(\theta_3 - \theta_2)\,,\\
\frac{d\theta_4}{dt} &= \omega + (g(\theta_4 - \theta_2) + g(0)) + \varepsilon\,(g(\theta_4 - \theta_1) + g(\theta_4 - \theta_2)\,,
\end{aligned} \tag{14}$$

з функцією зв'язків (11) має притягувальний химерний стан для $\varepsilon = 0$, *який зберігається для всіх* ε, *коли* $|\varepsilon|$ *достатньо мала величина.*

У цьому розділі також було запропоновано метод конструювання блочних мереж нерозрізнюваних осциляторів, що мають химери різного типу. Зокрема було показано існування гетероклінічних та хаотичних химер. Було запропоновано метод виявлення та дослідження химерних станів у немодульованих системах осциляторів. Метод полягає у відшуканні додаткових симетрій, що дає змогу довести існування інваріантних многовидів системи, які відповідають різним типам кластеризації. Використовуючи цей метод, було показано існування різних типів ізольованих химер та неперервних множин химер для різних мереж, а також різні біфуркаційні сценарії виникнення таких режимів.

У **сьомому** розділі наведено результати щодо систем зв'язаних осциляторів з центральним елементом. Такі системи вивчались з метою моделювання нейронних процесів зорового пошуку, уваги та пам'яті.

У підрозділі 7.1 розглянуто систему

$$\frac{d\theta_0}{dt} = \omega_0 + \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} a_j f(\theta_j - \theta_0), \tag{15}$$

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + bg(\theta_0 - \theta_i), \quad i = 1, \ldots, N, \tag{16}$$

що описує взаємодію *центрального осцилятора (ЦО)* з фазою θ_0 та *периферичних осциляторів (ПО)* з фазами θ_i, $i = 1, \ldots, N$. Функції $f(x)$ та $g(x)$, що припускаються гладкими 2π-періодичними та непарними, описують вплив ПО на ЦО та навпаки. a_j та b – параметри сили взаємодії. Найбільш важливими з прикладного погляду є режими боротьби ПО за синхронізацію з ЦО. Позначимо через $\Phi_k = (\varphi_1, \ldots, \varphi_N)$ точки фазового простору $\mathbb{T}^N$ системи у фазових різницях $\varphi_i = \theta_i - \theta_0$, що мають k координат рівних 0 та $N - k$ координат рівних π (лише k ПО виграли змагання за синхронізацію, інші програли). У Теоремі 7.1.1 показано, що Φ_k є положеннями рівноваги системи ідентичних осциляторів, а також наводяться умови їхньої стійкості. Детально описано умови виникнення локальних та глобальних біфуркацій у системі (15), (16) у разі, коли функції f та g є двогармонічними. Описано кілька типів інваріантних многовидів системи. Показано, що система має ієрархічні структури, коли динаміка на інваріантних підпросторах системи більшої розмірності є аналогічною динаміці усієї системи меншої розмірності. Описано стійкість, біфуркації, мультистабільність та басейни притягання різних колективних режимів. Також поазано існування консервативного хаосу, подібного до ABC-потоків, для $N \geq 4$.

У підрозділі 7.2 було запропоновано та досліджувалось розширення системи моделі з центральним елементом (15), (16). Сили впливу ПО на ЦО a_i та частота ЦО ω_0 у цьому випдку є функціями, для яких вводяться додаткові рівняння:

$$\frac{d\omega_0}{dt} = \frac{\alpha}{N} \sum_{j=1}^{N} a_j f(\theta_j - \theta_0), \tag{17}$$

$$\frac{da_i}{dt} = \beta \left(-a_i + c + \gamma h(\theta_i - \theta_0) \right), \quad i = 1, \ldots, N, \tag{18}$$

Функції f, g, h ма є 2π–періодичними та задовольняють умови:

$$f(x) = -f(-x), \quad f'(0) > 0 \quad f'(\pi) = 0, \tag{19}$$

$$g(x) = -g(-x), \quad g'(0) > 0, \quad g'(\pi) < 0, \tag{20}$$

$$h(x) = h(-x), \quad h(0) = 1, \quad h(\pi) = 0, \quad h'(0) = h'(\pi) = 0, \tag{21}$$

де ω_i, $i = 1, \ldots, N$, α, β, γ, b, c є параметрами системи (15)–(18).

Метою впровадження такої розширеної системи моделювання різних типів нейронного режиму *"переможець отримує все" (ПОВ)*, коли тільки один ПО-переможець фазово синхронізується з ЦО тим часом, як інші ПО-невдахи перебувають з ЦО в антифазі або десинхронізовані з ним. Система (15)–(18) може моделювати розділення амплітуд a_i ПО різних типів, а також керування частотою ЦО.

У роботі показано, що точки $P_k = (\Phi_k, \omega, \Psi_k)$, $k = 0, \ldots, N$ є положеннями рівноваги системи у фазових різницях ідентичних ПО у фазовому просторі $\mathbb{T}^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$, де $\Psi_k \in \mathbb{R}^N$ мають k координат, які дорівнюють c та $N - k$ коордниннат, які дорівнюють $c + \gamma$.

Теорема 7.2.1. *Система (15)–(18), записана у фазових різницях для ідентичних периферичних осциляторів, може мати або стійке положення рівноваги (повна синхронізація) для $b > 0$, або N стійких положень рівноваги P_1 (ПОВ процедура) разом із одним стійким положення рівноваги P_0 (відсутність ПО–переможців) для $b < 0$. Інші $2^N - N - 2$ положення рівноваги P_k, $k = 2, \ldots, N-1$, є нестійкими точками (сідлами) для будь–яких значень параметрів. Точка P_N є стійкою, якщо $N \geq 2$ та $b > 0$. Положення рівноваги P_1 стійке, якщо*

$$b < 0, \quad (c + \gamma) f'(0) + N b g'(0) > 0.$$

Для систем неідентичних осциляторів розглянемо певні спеціальні функції, властивості яких обрані з біологічних міркувань опису нейронних процесів. Розглянемо функції взаємодії:

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\dfrac{|x - \pi|^\nu}{\pi^{\nu-1}}\right), & x \in [0, \pi], \\ -\sin\left(\dfrac{|x + \pi|^\nu}{\pi^{\nu-1}}\right), & x \in [-\pi, 0], \end{cases} \tag{22}$$

$$g(x) = \sin x, \tag{23}$$

$$h(x) = \begin{cases} \left(\frac{\mu^2 - x^2}{\mu^2}\right)^\sigma, & |x| < \mu, \\ 0, & \mu \leq |x| \leq \pi, \end{cases} \tag{24}$$

з параметрами $\nu > 1$, $\sigma \gg 1$, $\mu \in (0, \pi)$. Без обмеження загальності упорядкуємо власні частоти периферичних осциляторів:

$$\omega_1 \geq \omega_2 \geq \ldots \geq \omega_N.$$

Теорема 7.2.2. *Система (15)–(18), записана у фазових різницях для неідентичних периферичних осциляторів із функціями зв'язку (19)–(21), при достатньо великих значеннях параметра ν функції f і малих збуреннях власних частот $\omega_i = \omega + \Delta_i, |\Delta_i| < |b|$, має N положень рівноваги Q_l, що відповідають синхронізації l-того периферичного осцилятора з центральним осцилятором. У цьому випадку $\omega_0 \approx \omega_l$, тобто центральний осцилятор отримує частоту, близьку до власної частоти периферичного осцилятора–переможця. Крім того, осцилятор-переможець є когерентним з центральним осцилятором, у той час, як інші периферичні осцилятори є радикально некогерентними з ним. Координати Q_l апроксимуються координатами точки*

$$(\overline{\varphi}_1, \ldots, \overline{\varphi}_{l-1}, \underbrace{0}_{l}, \overline{\varphi}_{l+1}, \ldots, \overline{\varphi}_N, \omega_l, c, \ldots, c, \underbrace{c+\gamma}_{N+1+l}, c, \ldots c), \qquad (25)$$

де $\overline{\varphi}_i \approx \pi - \arcsin((\omega_i - \omega_l)/b)$, $i \neq l$. Положення рівноваги Q_l є стійким, якщо $b < 0$, $(c+\gamma)\nu + Nb > 0$.

Було показано, що дослідження біфуркацій виникнення нестаціонарних ПОВ режимів при варіації частот ω_i у системи (15)–(18) можна звести до дослідження біфуркацій на $(N-1)$-вимірних інваріантних тороїдальних многовидах. Було виявлено, що при цьому відбувається глобальна біфуркація нового типу.

Теорема 7.2.5. *У результаті SNIT (сідло–вузол на інваріантному торі) біфуркації пари стійкого LT_l^{m-1} і сідлового ST_l^{m-1} $(m-1)$–вимірних торів у системі (15)–(18) виникає стійкий m–вимірний тор LT_l^m. Ця SNIT біфуркація відбувається для будь–якого числа $m = 2, \ldots, N-1$, коли різні $m-1$ значень $|(\omega_l - \omega_i)/b| - 1$, $i \neq l$, є додатніми, одне таке значення є нульовим, $N - m - 1$ значень є негативними.*

У цілому динаміку режимів *переможець отримує все* можна описати наступним чином.

1. Система (15)–(18) має N ПОВ режимів, стійкість та існування яких не залежать від власних частот.
2. Тип ПОВ режиму й біфуркації переходів від одних режимів до інших суттєво залежить від власних частот.
3. Існують різні ПОВ-режими в залежності від кількості ПО–невдах, кожен із яких може або перебувати у протифазі до ЦО, або рухатись

фазовим колом, переважнорозташовуючись у протифазі.
4. Середня частота центрального осцилятора адаптується до власної частоти осцилятора–переможця $\omega_0(t) \to \omega_l$, $t \to \infty$.
5. Амплітуда ПО–переможця завжди близька до верхньої границі $c + \gamma$, у той час, як амплітуди інших ПО–невдах близькі до нижньої границі c.

Наприкінці дисертації наведено основні результати й висновки.

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена дослідженню існування, стійкості та біфуркацій різних режимів колективної динаміки у моделях зв'язаних фазових осциляторів, що описуються системами диференціальних рівнянь з параметрами. Основні результати дисертаційної роботи можна сформулювати таким чином:

• Запропоновано комплексний підхід до дослідження моделей зв'язаних фазових осциляторів, що задаються за допомогою різних мереж та типів взаємодії між індивідуальними динамічними об'єктами. Підхід полягає у виявленні можливих симетрій системи, виявленні та дослідженні інваріантних многовидів, дослідженні можливості редукції системи, що враховує симетрії, наявність інваріантних підпросторів, ієрархічних структур, тощо. Дослідження ведуться шляхом накопичення інформації від простіших випадків (щодо розмірностей, симетрій, кількості параметрів) до складніших, із використанням теорії біфуркацій, теорії коливань та теорії збурень. При вивченні стійкості, біфуркацій мультистабільності колективних режимів застосовувалось поєднання аналітичних досліджень з чисельними експериментами та побудовою схематичних і біфуркаційних діаграм. Математичні моделі впроваджуються й досліджуються з ретельним урахуванням особливостей конкретних природніх явищ, а отримані теоретичні результати знаходять зворотню природничу інтерпретацію, що узгоджується із експериментальними даними.

• Було описано існування і стійкість режимів колективної динаміки для моделі глобально зв'язаних осциляторів із нелінійним зсувом у функції взаємодії. Було показано, що така система має режим повної синхронізації, двокластерні режими, граничні та гетероклінічні цикли, а також режим повної антифази з нульовим параметром порядку. Аналогічні результати отримано у випадках стандартної моделі Курамото та моделі Курамото–Сакагучі. Запропоновані методи доповнюють теорію Ватанабе–Строгатца при дослідженні біфуркацій на кластерних многовидах, де вказана теорія не діє. Проведено детальний біфуркаційний аналіз систем з квадратичним фазовим зсувом у функції взаємодії.

- Вивчалась узагальнена система глобально зв'язаних фазових осциляторів з дво–гармонічною функцією взаємодії. Описано структуру канонічних інваріантних областей та інваріантних многовидів для систем різної розмірності. Показано градієнтність систем із непарними функціями взаємодії та бездивергентність з парними. Знайдено та описано нові типи гетероклінічних біфуркацій для систем різних розмірностей. Проаналізовано стійкість і біфуркації режиму повільного перемикання між кластерами та режиму "змагання без переможців". Показано мультистабільність та досліджено басейни притягання колективних режимів різних типів. Досліджувалась екстремальна чутливість до збурень власних частот неідентичних осциляторів. Показано, як ця чутливість пов'язана з існуванням сідло–вузлових/гетероклінічних біфуркацій.
- Досліджувалась модель зв'язаних осциляторів зі притягувальними і відштовхувальними елементами, що може застосовуватись у соціології та описувати колективну взаємодію двох груп: конформістів (усі осцилятори прагнуть бути синхронізованими) і нонконформістів (осцилятори прагнуть перебувати у глобальній антифазі). Для такої моделі доведено існування різних стійких режимів: режим антифазного протистояння двох груп, режим розмитого протистояння, некогерентний режим перемоги нонконформістів, мандрівні хвилі, ренегатні режими синхронізації одного нонконформіста з конформістами. Для маловимірних систем проведено біфуркаційний аналіз для узагальненої притягувально–відштовхувальної мережі з фазовим зсувом у функції взаємодії. Показано, що система має фазово незамкнуті, періодичні, квазіперіодичні, гетероклінічні і хаотичні розв'язки.
- Доведено співіснування консервативної та дисипативної динамік у циркулянтних мережах фазових осциляторів із кососиметричною матрицею взаємодії. Доведено, що консервативні області відділяються від дисипативних за допомогою множин неізольованих граничних циклів. Показано співіснування сімей граничних циклів з багатопараметричними сім'ями квазіперіодичних орбіт у консервативних областях. Знайдено перші інтеграли для бездивергентних систем із циркулянтним зв'язком. Для систем нескінченної кількості зв'язаних

осциляторів на кільцевій мережі з кососиметричним циркулянтним зв'язком було формально виведене амплітудне рівняння в околі синхронного розв'язку, а також показано зв'язок цієї системи з нелінійним рівнянням Шрьодінгера.

- Досліджувалось явище "химерного стану" для систем нерозрізнюваних фазових осциляторів. Було запропоновано поняття "слабкого химерного стану". Доведено, що система чотирьох осциляторів є найменшою можливою, яка має стійкий слабкий химерний стан. Було наведено побудови модульних осциляторних систем, що мають химерні стани гетероклінічного типу. Проведено аналіз біфуркацій появи химерних станів у маловимірних осциляторних системах.
- Доведено твердження про існування, стійкість та біфуркації колективних режимів у осциляторній моделі з центральним елементом та її узагальненні: осциляторній системі з адаптацією. Показано наявність ієрархічних структур, гетероклінічних циклів та консервативного хаосу в системах такого типу. Були доведені твердження про умови існування стаціонарних і нестаціонарних режимів "боротьба за синхронізацію" та "переможець отримує все". Виявлено й описано новий вид біфуркації: сідло–вузол на інваріантному торі.

Список опублікованих праць за темою дисертації

1. Бурилко О.А. Колективна динаміка та біфуркації у симетричних мережах фазових осциляторів. II. *Нелінійні коливання*, **22(3)**, 312–340 (2019).
2. Бурилко О.А. Колективна динаміка та біфуркації у симетричних мережах фазових осциляторів. I. *Нелінійні коливання*, **22(2)**, 165–195 (2019).
3. Burylko O., Mielke A., Wolfrum M., Yanchuk S. Coexistence of Hamiltonian–like and dissipative dynamics in rings of coupled phase oscillators with skew–symmetric coupling. *SIAM Journal of Applied Dynamical Systems*, **17 (3)**, 2076–2105 (2018).
4. Burylko O., Kazanovich Y., Borisyuk R. Winner–take–all in a phase oscillator system with adaptation. *Scientific Reports*, **8**, 416 (2018).
5. Ashwin P., Bick C., Burylko O. Identical phase oscillator networks: bifurcations, symmetry and reversibility for generalized coupling. *Frontiers in Applied Mathematics and Statistics*, **2(7)**, (2016).
6. Ashwin P., Burylko O. Weak chimeras in minimal networks of coupled phase oscillators. *Chaos*, **25(1)**, 013106 (2015).

7. Burylko O., Kazanovich Y., Borisyuk R. Bifurcation study of phase oscillator systems with attractive and repulsive interaction. *Physical Review E*, **90**, 022911 (2014).
8. Merrison-Hort R., Yousif N., Njap F., Hofmann U.G., Burylko O., Borisyuk R. An interactive channel model of the basal ganglia: Bifurcation analysis under healthy and parkinsonian conditions. *The Journal of Mathematical Neuroscience*, **3(14),** 1–40 (2013).
9. Kazanovich Y., Burylko O., Borisyuk R. Competition for synchronization in a phase oscillator system. *Physica D*, **261**, 114–124 (2013).
10. Burylko O., Kazanovich Y., Borisyuk R. Bifurcations in phase oscillator networks with a central element. *Physica D*, **241**, 1072–1089 (2012).
11. Burylko O. Competition and bifurcations in phase oscillator networks with positive and negative couplings. *Proceedings of International Workshop on Nonlinear Dynamics of Electronic Systems*, **20**, 161–164, (2012).
12. Burylko O., Pikovsky A. Desynchronization transitions in nonlinearly coupled phase oscillators. *Physica D*, **240**, 1352–1361 (2011).
13. Ashwin P., Burylko O., Maistrenko Y. Bifurcation to heteroclinic cycles and sensitivity in three and four coupled phase oscillators. *Physica D.* **237**, 454–466 (2008).
14. Maistrenko Y., Lysyansky B., Hauptmann C., Burylko O., Tass P.A. Multistability in the Kuramoto model with synaptic plasticity. *Physical Review E*, *75*, 066207 (2007).
15. Ashwin P., Burylko O., Maistrenko Y., Popovych O. Extreme sensitivity to detuning for globally coupled phase oscillators. *Physical Review Letters*, **96**, 054102 (2006).
16. Maistrenko Y., Popovych O., Burylko O., Tass P.A. Mechanism of desychronization in the finite–dimensional Kuramoto model. *Physical Review Letters*, **93**, 084102 (2004).
17. Burilko A., Davydenko A. To the problem of complementability of periodic frame to a periodic basis. *Nonlinear Oscillations,* **4(4)**, 458–470 (2001).
18. Burilko A., Davydenko A. To the problem of introduction of local coordinates in the neighbourhood of an invariant toroidal set. *Nonlinear Oscillations,* **4(2)**, 171–190 (2001).

19. Бурилко О.А. Функції Гріна слабкорегулярних систем лінійних диференціальних рівнянь. *Нелінійні Коливання*, **3(3)**, 315–322 (2000).
20. Samoilenko A.M., Burilko A.A., Grod I.N. Moduli of continuity of the derivatives of invariant tori for linear extensions of dynamical systems. *Differential Equations*, **36(1)**, 120–131 (2000).
21. Burylko O. What are chimeras in dynamical systems? 11^{th} *Nonlinear Economics Dynamics Conference* (Kyv, Ukraine, 4–6 September, 2019) P. 11.
22. Burylko O., Kazanovich Y., Borisyuk R. Winner–take–all in a phase oscillator system with adaptation, *Modern Stochastics: Theory and Applications. IV* (Kyiv, Ukraine, May 24-26, 2018) P. 24.
23. О. Бурилко, Казанович Я., Борисюк Р. Переможець отримує все в системі фазових осциляторів з адаптацією. *Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях* (Чернівці, Україна, 17–19 вересня, 2018), С. 50.
24. Burylko O. Winner–take–all in a phase oscillator system with adaptation, WIAS Workshop "Dynamics of Coupled Oscillator Systems" (Berlin, Germany, 19–21 November, 2018) P. 12.
25. Borisyuk R., Burylko O., Kazanovich Y. Multiple Winner–Take–All solutions in the star–like system of phase oscillators with parameter adaptation. *SIAM Conference on Applications of Dynamical Systems* (Snowbird, USA, May 21–25, 2017) P. 84.
26. Burylko O. Coexistence of Hamiltonian–like and dissipative dynamics in chains of coupled phase oscillators with skew–symmetric coupling. *Workshop on synchronization and oscillators with generalized coupling* (Exeter, UK, 20–22 April, 2016), P. 3.
27. Burylko O., Kazanovich Y. Borisyuk R. Analysis of bifurcations and the study of competition in phase oscillator networks with positive and negative coupling. *SIAM Conference on Applications of Dynamical Systems* (Snowbird, USA, May 19–23, 2013), P. 71.
28. О. Бурилко, Казанович Я., Борисюк Р. Біфуркації в моделі фазових осциляторів з притягуючими та відштовхуючими зв'язками. *Боголюбовські читання DIF-2013* (Севастополь, Україна, 23–30 Червня, 2013), С. 74.

29. Burylko O. Heteroclinic cycles in coupled phase oscillators systms with asymmetric coupling functions. *International workshop "Nonlinear Dynamics on Networks"* (Kyiv, Ukraine, 5–9 July, 2010), P. 26.
30. Malashchenko T., Barnett W., Burylko O. Cymbalyuk G. Control of bursting activity by modulation of ionic currents. *Eighteenth Annual Computational Neuroscience Meeting* (Berlin, Germany, 13 July, 2009) P. 27.
31. Burylko O., Pikovsky A., Rosenblum M. Bifurcations in generalization of Kuramoto–Sakaguchi model of coupled phase oscillators. *International Workshop on Nonlinear Dynamics of Electronic Systems*, (Rapperswil, Switzerland, 21-24 June, 2009) p. 211–214.
32. Burylko O. Bifurcation to heteroclinic cycles and sensitivity in coupled phase oscillators. *Internatilnal workshop "Mathematical modeling in neuroscience"* (Kyiv, Ukraine, 16–18 July 2008) P. 8.
33. Burylko O. Bifurcation to heteroclinic cycles in phase coupled oscillators. *Workshop "Complex dynamics and delay effects in complex systems"*(Berlin, Germany, 11–13 September, 2006), P. 18.
34. Burylko O., Ashwin P., Maistrenko Y. Bifurcation of heteroclinic cycles in Kuramoto model of globally coupled oscillators, *International workshop "Theory and applications of coupled cell networks"* (Cambridge, UK, 26–30 September, 2005) P. 21.
35. Майстренко Ю., Бурилко О. Синхронізіція в моделі Курамото глобально зв'язаних осциляторів. *Міжнародна наукова конференція "Шості боголюбівські читання"* (Чернівці, Україна, 26–30 серпня, 2003) С. 135.
36. Бурилко О., Давиденко А. Проблеми введення локальних координат в околі інваріантної тороїдальної множини. *Український Математичний Конгрес* (Київ, Україна, 27–29 серпня, 2001), С. 26.
37. Бурилко О. Функції Гріна експоненціально трихотомічних систем диференціальних рівнянь. *Міжнародна конференція "Диференціальні та інтегральні рівняння"* (Одеса, Україна, 12–14 вересня, 2000), С. 43.

АНОТАЦІЇ

Бурилко О.А. Колективна динаміка та біфуркації у мережах зв'язаних фазових осциляторів. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико–математичних наук за спеціальністю 01.01.02 “Диференціальні рівняння” (111 — Математика). Інститут математики НАН України, Київ, 2020.

Дисертаційна робота присвячена дослідженню колективної динаміки у складних мережах зв’язаних осциляторів, заданих за допомогою систем звичайних диференціальних рівнянь з параметрами. Під колективною динамікою ми розуміємо різноманітні типи взаємодії між елементами, які мають індивідуальну динаміку. У роботі описуються такі колективні режими, як фазова й частотна синхронізації, протифазні режими, режими рівномірного розподілу фаз, мандрівні хвилі, кластерні режими, режими повільного перемикання між кластерами, хаотична синхронізація, *химерні стани*, *гетероклінічні химери*. Також досліджуються режими: *переможець отримує все*, *змагання без переможця*, *конкуренція за синхронізацію*, протистояння між конформістами та нонконформістами. У роботі розглядаються осциляторні моделі з різною індивідуальною динамікою елементів, різною архітектурою зв’язків, а також з різними типами взаємодії між елементами. Вивчалися класичні, а також були впроваджені та досліджувались нові складні осциляторні системи. Моделі будуються з урахуванням тих чи інших природничих процесів, а кожен математичний результат має конкретну природничу інтерпретацію. У роботі доведено твердження про існування, стійкість, мультистабільність і біфуркаційні переходи у системах глобально зв’язаних фазових осциляторів, мережах з центральним елементом, системах із циркулянтним зв’язком, системах нерозрізнюваних елементів, блокових мережах, осциляторних мережах з адаптацією, системах з притяганням і відштовхуванням, що моделюють взаємодію груп конформістів і нонконформістів. Виявлено й описано нові типи біфуркацій появи гетероклінічних циклів, а також сідло-вузлову біфуркацію на інваріантному торі. Показано співіснування консервативної й дисипативної динамік у складних системах з циркулянтним кососиметричним зв’язком. Показано зв’язок нескінченновимірних циркулянтних систем із нелінійним рівнянням Шрьодінгера. Для систем ідентичних елементів отримано результати про взаємозв’язок між симетріями мережі та існуванням інваріантних многовидів, інваріантних областей і кластерних режимів. Описано умови екстремальної чутливості до збурень власних частот і появи фазово–незамкнутих траєкторій у системах неідентичних осциляторів. Доведено твердження про градієнтність, бездивергентність систем із парними й непарними функціями взаємодії, показано, коли такі системи є часово–оборотними або інтегровними. Знайдено мінімальні мережі фазових осциляторів, що мають стійкі химерні стани.

Ключові слова: осциляторна мережа, фазові осцилятори, синхронізація, модель Курамото, біфуркація, гетероклінічний цикл, мережа з центральним елементом, система з адаптацією, химерний стан, інваріантний многовид, симетрія, часово–реверсивна система, параметр порядку, нелінійний фазовий зсув.

Бурилко А.А. Коллективная динамика и бифуркации в сетях связанных фазовых оссилляторов. — Квалификационная научная работа на правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 “Дифференциальные уравнения” (111 — математика). — Институт математики НАН Украины, Киев, 2020.

Диссертационная работа посвящена исследованию коллективной динамики в сетях связанных осцилляторов, заданных при помощи систем обыкновенных дифференциальных уравнений с параметрами. Под коллективной динамикой мы понимаем разнообразные типы взаимодействия между элементами, которые имеют индивидуальную динамику. В работе описываются такие коллективные режимы, как фазовая и частотная синхронизации, противофазные режимы, режимы равномерного распределения фаз, бегущие волны, кластерные режимы, режимы медленного переключения между кластерами, хаотическая синхронизация, *химерные состояния*, *гетероклинические химеры*. Также исследуются режимы: *победитель получает все*, *соревнование без победителя*, *конкуренция за синхронизацию*, противостояние между конформистами и нонконформистами. В работе рассматриваются осцилляторные модели с разной индивидуальной динамикой элементов, разной архитектурой связей, а также с разными типами взаимодействия между элементами. Изучались классические, а также внедрены и исследованы новые сложные осцилляторные системы. Модели строятся с учетом тех или иных естественных процессов, а каждый математический результат имеет конкретную естественную интерпретацию. В работе доказаны утвер-

ждения о существовании, устойчивости, мультистабильности и бифуркационных переходах в системах глобально связанных фазовых осцилляторов, сетях с центральным элементом, системах с циркулянтной связью, системах неразличимых элементов, блочных сетях, осцилляторных сетях с адаптацией, системах с притягиванием и отталкиванием, моделирующих взаимодействие групп конформистов и нонконформистов. Обнаружены и описаны новые типы бифуркаций появления гетероклинических циклов, а также седло-узловой бифуркации на инвариантном торе. Было показано сосуществование консервативной и диссипативной динамик в сложных системах с циркулянтной кососимметрической связью. Показано связь бесконечномерных циркулянтных систем с нелинейным уравнением Шрёдингера. Для систем идентичных элементов получены результаты о взаимосвязи между симметриями сети и существовании инвариантных многообразий, инвариантных областей и кластерных режимов. Описаны условия экстремальной чувствительности к возмущениям собственных частот и появления фазово-замкнутых траекторий в системах неидентичных осцилляторов. Были доказаны утверждения о градиентности, бездивергентности систем с четными и нечетными функциями взаимодействия, а также было показано, когда такие системы обратимы и интегрируемы. Были найдены минимальные сети фазовых осцилляторов, имеющие устойчивые химерные состояния.

Ключевые слова: осцилляторная сеть, фазовые осцилляторы, синхронизация, модель Курамото, бифуркация, гетероклинический цикл, сеть с центральным элементом, система с адаптацией, химерное состояние, инвариантное многообразие, симметрия, оборотная система, параметр порядка, нелинейный фазовый сдвиг.

Burylko O.A. Collective dynamics and bifurcation in networks of coupled phase oscillators. — Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

Thesis for the degree of Doctor of Physical and Mathematical Sciences, speciality 01.01.02 “Differential equations” (111 — Mathematics). — Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, 2020.

The dissertation is devoted to the study of collective dynamics in complex models of the coupled oscillators given by the systems of ordinary differential equations with parameters. By collective dynamics we understand different types of interaction between different elements that have their individual dynamics. In particular, the manifestations of

collective dynamics in phase models are as follows: full or partial phase and frequency synchronization, anti–phase modes, regimes of the uniform phase distribution, traveling waves, cluster modes, slow switching regimes between clusters, chaotic synchronization, chimera states, heteroclinic chimeras, etc. Collective dynamics can also be attributed to the following modes: winner–take–all, winnerless competition, competition for synchronization, the opposition between conformists and contrarians. In this work we study well–known models, as well as propose and analyze the new ones. Models are constructed taking into account certain natural processes and each mathematical result has a specific natural interpretation. In particular, the results obtained in the work have interpretations in the systems of superconducting Josephson junctions, the study of neural processes of the attention and memory, Parkinson's disease, sociological modeling of the interaction of two groups of different interests, modeling of conflicts, modeling artificial neural networks.

The collective dynamics in the model of globally coupled phase oscillators with a nonlinear phase shift in the coupling function is studied. It is shown that the system with nonlinear phase shift has completely synchronous solutions, two–cluster modes, several different slow switching regimes between clusters, full anti-phase mode, as well as complex periodic and quasiperiodic modes. Bifurcation transitions between different collective modes are described in detail. The synchronization and bifurcation in the systems of globally coupled oscillators with a generalized coupling function is investigated. The statements about the stability of the mode of complete synchronization, the splay state and the different two–cluster modes are given. The influence of the system symmetries on the existence of cluster modes, invariant manifolds, and canonical invariant regions of the system, containing phase–locked trajectories, is demonstrated. Particular attention is paid to the study of the existence of the slow switching regimes which are described by different types of heteroclinic cycles. The statements regarding the extreme sensitivity to detuning of the frequencies and the destruction of invariant regions of phase–closed trajectories are presented.

The collective regimes in the models of coupled oscillators with both simultaneous attractive and repulsive interactions are studied. Such systems model the struggle between groups of conformists and contrarians and the imposition of their collective behavior on their opponents. These models well describe certain sociological phenomena. The results are obtained concerning the stability and bifurcations of the two groups synchronization mode and their anti-phase regime, the global anti–phase mode, blurred π–state, traveling waves, as well as two "renegade" regimes. It is shown that the finite–dimensional system has several modes that are impossible in the reduced Hong–Strogatz system which describes an infinite number of interacting objects. The bifurcation analysis of the attractive–repulsive model with phase shift is carried out. It is shown that the presence of phase shift significantly complicates the dynamics of the system leading to the emergence of new collective regimes. It has also been shown that such systems can have a chaotic dynamics in the presence of four or more elements.

The rings of coupled phase oscillators with anisotropic coupling are studied. When the coupling is skew–symmetric, the system shows robustly the coexistence of conservative and dissipative dynamics in the phase space. We relate this phenomenon to the time-reversibility of the system. It has been shown that the conservative regions contain families of the neutral–stable periodic orbits and quasi-periodic tori. It is proven that the boundary between the dissipative and conservative regions consists of families of heteroclinic cycles. It is proven that the circulant skew–symmetric system is divergence–free in the case when the interacting function between the elements is odd and such a system is gradient in the case of even coupling function. In the case of the thermodynamic transition of the oscillators number to the infinity, we formally derive the amplitude equation for solutions in the neighborhood of the synchronous solution. This equation has the form of a nonlinear Schrödinger equation.

A new mathematical object and physical phenomenon called the chimera state is investigated. We give the mathematical definition of a "weak chimera state" for the networks of indistinguishable phase oscillators. It has been shown that the smallest dimension of the system with weak chimeras is four. We proposed the method of the constructing of modular networks that have chimera states of the different types including chaotic and heteroclinic chimeras. A method for the detection and study of the chimera states in non–modular oscillator systems has been proposed.

The oscillator model with central element and its extension with adaptation are proposed and studied. Such a model describes neural processes of visual search, attention and memory. Different regimes that correspond to the competition of peripheral oscillators for synchronization with the central one are thoroughly described for such systems. The existence of conservative chaos and slow shift regimes are demonstrated.

It has been proven that for a wide variety of parameters, the model with adaptation describes the *winner-take-all* mode which is one of the important computational principles in artificial neural networks. It has been proven that the entire phase space of the system is split into attracting regions of different stable solutions that corresponds to different stationary and non–stationary winner–take–all regimes. In the study of non-stationary modes, a new bifurcation type called a saddle–node on invariant torus (SNIT) bifurcation has been considered and is described in detail.

Key words: oscillators network, phase oscillators, synchronization, Kuramoto model, bifurcation, heteroclinic cycle, network with central element, system with adaptation, chimera state, invariant manifold, symmetry, time–reversible system, order parameter, nonlinear phase shift

Підписано до друку 24.12.2019. Формат $60\times84/16$. Папір офс. Офс. друк.
Фіз. друк. арк. 2,06. Умов. друк. арк. 1,91.
Наклад 120 пр. Зам. 52. Безкоштовно.

Інститут математики НАН України,
01024, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.