

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Чуйков Артем Сергійович

УДК 517.51

ДИСЕРТАЦІЯ

**ФРАКТАЛЬНИЙ АНАЛІЗ ФУНКЦІЙ ЗІ
СКЛАДНОЮ ЛОКАЛЬНОЮ БУДОВОЮ,
ВИЗНАЧЕНИХ У ТЕРМІНАХ ЛАНЦЮГОВИХ
ДРОБІВ**

01.01.01 — математичний аналіз

111 — математика

Подається на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

_____ А. С. Чуйков

Науковий керівник: **Працьовитий Микола Вікторович**,
доктор фізико-математичних наук, професор

Київ — 2019

АНОТАЦІЯ

Чуйков А. С. Фрактальний аналіз функцій зі складною локальною будовою, визначених у термінах ланцюгових дробів. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 — математичний аналіз (111 — математика). — Інститут математики НАН України, Київ, 2019.

Дисертаційна робота виконана у лабораторії фрактального аналізу Інституту математики НАН України.

Дисертаційне дослідження присвячене вивченню структурних, топологометричних і фрактальних властивостей функцій, які є неперервними на деякому відрізку або мають не більш ніж зліченну множину розривів, водночас їхні множини особливостей (варіаційного, диференціального й ін. характеру) є всюди щільними. Такі функції фігурують у роботах Г. Мінковського, Р. Салема, В. Серпінського, Т. Такагі, О. Beaver і Т. Garrity, М. Lamberger та ін.

Для потреб теорії функцій, метричної і ймовірнісної теорії чисел, фрактального аналізу і фрактальної геометрії системи кодування дійсних чисел є зручним знаряддям вивчення математичних об'єктів зі складною локальною тополого-метричною структурою (множин, функцій, перетворень простору, динамічних систем тощо). Такі системи можуть використовувати скінченний, нескінченний або змінний алфавіти. Специфіка кодування чисел ланцюговими дробами відрізняється від зображення чисел з використанням «фундаментальних послідовностей» (типу s -кових зображень і їх узагальнення Q -зображення, рядів Кантора тощо).

Актуальність дослідження полягає в тому, що засоби теорій кодування дійсних чисел, фракталів і ланцюгових дробів забезпечують можливість для теоретичного аналізу локально-складних функцій з автотодельними властивостями, які все частіше з'являються у моделях реальних процесів і

явищ фізичної, економічної, інформаційної природи.

Дисертаційна робота складається з анотацій українською й англійською мовами, переліку скорочень і умовних позначень, вступу, п'ятих розділів, розбитих на підрозділи, висновків до кожного розділу й загальних висновків, списку використаних джерел і додатку.

Основними об'єктами дослідження є:

1) ланцюгове A_s -зображення чисел

$$[a; b] \ni x = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}} \equiv \Delta_{a_1 a_2 \dots a_n}^{A_s},$$

де a_n — елементи фіксованої впорядкованої за зростанням множини додатних дійсних чисел $A_s = \{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{s-1}\}$, і функції, з ним пов'язані;

2) неперервні функції й перетворення відрізка (бієктивні відображення відрізка на себе), які зберігають хвости ланцюгових зображень чисел із використанням елементарних і A_2 -дробів;

3) аналог Трибін-функції, заданої перетворювачем цифр нега-трийкового зображення чисел у ланцюгове A -зображення чисел:

$$x = \bar{\Delta}_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^3 \equiv \frac{3}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} (-3)^{-k} \alpha_k \xrightarrow{f} y = \Delta_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n}^A,$$

де

$$\beta_1 = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \alpha_1 = 2, \\ 0, & \text{якщо } \alpha_1 \neq 2; \end{cases} \quad \beta_{k+1} = \begin{cases} 1 - \beta_k, & \text{якщо } \alpha_{k+1} + \alpha_k = 2, \\ \beta_k, & \text{якщо } \alpha_{k+1} + \alpha_k \neq 2. \end{cases}$$

4) функції, визначені перетворювачами цифр зображень чисел із рівнопотужними алфавітами, однією з яких є функція

$$\begin{aligned} g([a_1(x), a_2(x), \dots, a_n(x), \dots]) &= \Delta_{a_1 a_2 \dots a_n}^{\tilde{L}} \equiv \\ &\equiv \frac{1}{a_1} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{a_1(a_1+1) \cdots a_{n-1}(a_{n-1}+1)a_n}, \end{aligned}$$

аргумент якої подано у формі елементарного ланцюгового дроби, а значення функції — у формі знаковмінного ряду Люрота з тими самими елементами.

У вступі обґрунтовано актуальність дослідження, визначено об'єкт, предмет, мету і завдання, зазначено наукову новизну одержаних результатів і особистий внесок здобувача.

У першому розділі подано огляд систем числення, які використовуються для конструювання й дослідження функцій, а саме: елементарні ланцюгові дроби, ланцюгові дроби з двосимвольними алфавітами (дроби Данжуа та A_2 -дроби), ряди Люрота, s -кова й нега- s -кова системи числення. Також зроблено огляд відомих функцій зі складними локальними властивостями, зокрема, неперервних ніде не монотонних (функції, пов'язані з Q -зображенням чисел), сингулярних (функції Салема, Мінковського), ніде не диференційовних (функція Такаґі, Трибін-функція).

У другому розділі дисертації вивчено властивості операторів лівостороннього і правостороннього зсувів цифр зображення дійсних чисел елементарними ланцюговими дробами:

$$T(x) = T([a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]) = [a_2, a_3, \dots, a_{n+1}, \dots],$$

$$\delta_i(x) = \delta_i([a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]) = [i, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots],$$

а також функцій, які пов'язані з ними. Вивчено диференціальні й інтегральні властивості класу функцій τ_f , який заданий перетворювачем перших k елементів елементарного ланцюгового дроби:

$$\begin{aligned} \tau_f(x) &= \tau_f([a_1(x), a_2(x), a_3(x), \dots]) = \\ &= [f(a_1(x), a_2(x), \dots, a_k(x)), a_{k+1}(x), a_{k+2}(x), \dots)], \end{aligned}$$

де $f(a_1, a_2, \dots, a_k)$ — натуральна функція натуральних змінних a_1, a_2, \dots, a_k .

Побудовано неперервні перетворення, що зберігають хвости елементарного ланцюгового зображення чисел і фрактальну розмірність Гаусдорфа-Безиковича борелівських множин.

Третій розділ присвячено двом функціям. Перша функція, названа квазіінверсором цифр елементарного ланцюгового зображення чисел (що є певним аналогом інверсорів цифр скінченно-символьних зображень чисел), означена рівністю $f([a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]) = [b_1, b_2, \dots, b_n, \dots]$, де

$$b_1 = 1, b_n = \begin{cases} 1, & \text{якщо } a_n \neq 1; \\ n, & \text{якщо } a_n = 1, n = 2, 3, \dots \end{cases}$$

Доведено її ніде не монотонність і канторовість множини її значень. Описано множини рівнів цієї функції.

Друга функція означена проектуванням цифр елементарного ланцюгового зображення чисел у цифри зображення чисел знаковмінними рядами Люрота. Доведено її неперервність і монотонність, знайдено систему функціональних рівнянь, єдиним розв'язком якої є ця функція.

У четвертому розділі вивчається зображення чисел ланцюговими A_2 -дробами. Вивчено оператори лівостороннього і правостороннього зсувів цифр ланцюгового A -зображення:

$$\omega(x) = \omega(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^A) = \Delta_{\alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_{n+1} \dots}^A, \quad \delta_i(x) = \delta_i(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^A) = \Delta_{i \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^A,$$

і знайдено оцінку для коефіцієнта c_n оператора лівостороннього зсуву n -го

$$\text{порядку } \omega^n(x) = \underbrace{\omega(\omega(\dots \omega(x)))}_n = \frac{u_n x + v_n}{c_n x + d_n}.$$

Знайдено інваріантну міру відносно оператора лівостороннього зсуву цифр ланцюгового A -зображення, а саме: інваріантною мірою відносно оператора лівостороннього зсуву цифр ω ланцюгового A -зображення є ймовірнісна міра $\mu_X(\cdot)$, що відповідає розподілу випадкової величини X , яка представлена ланцюговим A_2 -дробом, цифри якої є незалежними і однаково розподіленими.

Побудовано неперервні перетворення f , що зберігають хвости цих зображень, а саме $f : [0,5; 1] \rightarrow [0,5; 1]$, для яких $O_x \cap O_{f(x)} \neq \emptyset$, де $O_u = \{u, \omega(u), \omega^2(u), \dots\}$ — орбіта точки u динамічної системи з фазовим простором $[0,5; 1]$ і відображенням ω . Основним результатом є конструктивне доведення того, що множина всіх неперервних перетворень відрізка $[0,5; 1]$, які зберігають хвости ланцюгового A -зображення чисел відносно операції «композиція функцій» утворює нескінченну некомутативну групу.

Сконструйовано функцію, яка є аналогом функцій Буша-Вундерліха і Трибін-функції, чий аргумент розглядається у формі нега-трійкового зображення, а значення функції — у формі ланцюгового A -зображення. Доведено, що вона є неперервною на відрізку $[0,5; 1]$ ніде не монотонною функцією і має необмежену варіацію. Описано властивості графіка цієї функції, зокрема автомодельні, і множин її рівнів.

Розглянуто скінченні ланцюгові A_2 -дроби й вивчено деякі їхні властивості. Вивчено властивості дійсних чисел з періодичними ланцюговими A_2 -зображеннями, отримано оцінки наближень дійсних чисел відрізка $[0,5; 1]$ ланцюговими A_2 -дробами.

П'ятий розділ присвячено основам тополого-метричної теорії зображення чисел ланцюговими A_3 -дробами. Зокрема, знайдено умови нульової надлишковості зображення чисел ланцюговими A_3 -дробами, описано властивості циліндричних і хвостових множин, з'ясовано геометричний зміст цифр. Отримано оцінки для знаменників підхідних дробів ланцюгових A_3 -дробів при $s_0 = 2/3, s_2 = 2$.

Додаток містить список публікацій здобувача на тему дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації.

Ключові слова: ланцюговий дріб, ланцюгове A_s -зображення чисел, нега-трійкове зображення чисел, ряди Люрота, циліндричні множини, перетворення відрізка, що зберігає хвости зображення, неперервна ніде не монотонна функція, автомодельність, множина рівня функції.

ABSTRACT

Chuikov A. S. Fractal analysis of functions with complex local structure defined in terms of continued fractions. — Manuscript.

Candidate of Physical and Mathematical Sciences Thesis, speciality 01.01.01 — mathematical analysis (111 — mathematics). — Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2019.

The work is prepared at the laboratory of fractal analysis of Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine.

The thesis is devoted to the study of structural, topological-metric and fractal properties of functions, that are continuous on a certain closed interval or have no more than a countable set of discontinuities. At the same time their sets of particular qualities (variational, differential etc.) are everywhere dense. Such functions were considered in articles by H. Minkowski, R. Salem, W. Sierpinski, T. Takagi, O. Beaver and T. Garrity, M. Lamberger and others.

For the needs of function theory, metric and probability number theory, fractal analysis and fractal geometry the real number coding systems are a convenient tool for studying mathematical objects with complex local topological and metric structures (sets, functions, transformations of space, dynamic systems etc.). Such systems may use finite, infinite, or variable alphabets. The specificity of encoding numbers by continued fractions differs from the representation of numbers using «fundamental sequences» (such as s -adic representations and their generalization Q -representation, Cantor series etc.).

Locally complex functions with auto-modeling properties more often appear in models of real processes and phenomena of physical, economic, informational nature. The relevance of the study lies in the fact that the means of the theories of encoding real numbers, fractals, and continued fractions provide an opportunity for theoretical analysis of such functions.

The thesis consists of abstracts in Ukrainian and English, a list of abbreviati-

ons and symbols, introduction, five sections, divided into subsections, conclusions for each section and general conclusions, a list of sources used and appendix.

The main objects of study are:

1. an A_s -continued fraction representation of numbers, such as

$$[a; b] \ni x = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}} \equiv \Delta_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}^{A_s},$$

where a_n are elements of a fixed ascending set of real numbers $A_s = \{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{s-1}\}$, and functions associated with this representation;

2. continuous functions and transformations of closed interval (such as bijective reflections of the segment on itself) that preserve the tails of representation of numbers (by elementary continued fractions and A_2 -continued fractions);
3. an analogue of the Tribine-function, which is defined by a digit converter of nega-3-adic representation of numbers to A -continued fraction representation of numbers that is

$$x = \bar{\Delta}_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^3 \equiv \frac{3}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} (-3)^{-k} \alpha_k \xrightarrow{f} y = \Delta_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n \dots}^A,$$

where

$$\beta_1 = \begin{cases} 1 & \text{if } \alpha_1 = 2, \\ 0 & \text{if } \alpha_1 \neq 2; \end{cases} \quad \beta_{k+1} = \begin{cases} 1 - \beta_k & \text{if } \alpha_{k+1} + \alpha_k = 2, \\ \beta_k & \text{if } \alpha_{k+1} + \alpha_k \neq 2. \end{cases}$$

4. functions that are defined by converters of the digit of representations of numbers whose alphabets have the same power. One such function is the function

$$\begin{aligned} g([a_1(x), a_2(x), \dots, a_n(x), \dots]) &= \Delta_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}^{\tilde{L}} \equiv \\ &\equiv \frac{1}{a_1} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{a_1(a_1+1) \cdots a_{n-1}(a_{n-1}+1)a_n}, \end{aligned}$$

whose argument is in the form of an elementary continued fraction, and the value of the function is given in the form of an Lüroth-type alternating series with the same elements.

The introduction substantiates the relevance of the research, determined the object, subject, purpose and objectives of the study. The scientific novelty of the obtained results and the personal contribution of the applicant are also indicated.

The first section provides an overview of calculus systems that are used to design and study functions, namely, elementary continued fractions, continued fractions with two-character alphabets (Denjoy's continued fractions and A_2 -continued fractions), Lüroth-type alternating series, s-adic and nega-s-adic representations of numbers. An overview of well-known functions with complex local properties is also provided. In particular, these are continuous nowhere monotone functions (functions related to the Q -representation of numbers), singular functions (Salem function, Minkowski function), non-differentiable functions (Takagi function, Tribine function).

In the second section of the dissertation the properties of operators of left and right shifts of digits of the representation of real numbers by elementary continued fractions that is

$$T(x) = T([a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]) = [a_2, a_3, \dots, a_{n+1}, \dots],$$

$$\delta_i(x) = \delta_i([a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]) = [i, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]$$

are studied. The functions associated with these operators are also studied. Differential and integral properties of the class of functions, which is given by the converter of the first k elements of elementary continued fractions, are studied. Namely,

$$\begin{aligned} \tau_f(x) &= \tau_f([a_1(x), a_2(x), a_3(x), \dots]) = \\ &= [f(a_1(x), a_2(x), \dots, a_k(x)), a_{k+1}(x), a_{k+2}(x), \dots)], \end{aligned}$$

where $f(a_1, a_2, \dots, a_k)$ natural function of natural variables a_1, a_2, \dots, a_k .

Continuous transformations of $[0; 1]$ that preserve the tails of these representation of numbers and fractal dimension of Hausdorff-Bezikovich of Borel sets are built.

The third section is devoted to two functions. A first function is called the quasi-inversor of the digits of the elementary continued fraction representation of numbers. It is a certain analogue of the inversors of numbers of finitely symbolic representations of numbers. This function is defined by equality

$$f([a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]) = [b_1, b_2, \dots, b_n, \dots],$$

where

$$b_1 = 1, \quad b_n = \begin{cases} 1 & \text{if } a_n \neq 1; \\ n & \text{if } a_n = 1, n = 2, 3, \dots, \end{cases}$$

Its monotony and cantority of set of its values are proved. Level sets of this function are described.

The second function is defined by the projector of digits of elementary continued fraction representation of numbers into digits of representation of numbers by Lüroth alternating series. Its continuity and monotony are proved. A system of functional equations is found, the only solution of which is this function.

The fourth section examines the representation of numbers by A_2 -continued fractions. The properties of left and right shift operators of digits of the A -continued fractions representation of real numbers are studied. That is

$$\omega(x) = \omega(\Delta_{a_1(x)a_2(x)\dots}^A) = \Delta_{a_2(x)a_3(x)\dots}^A, \quad \delta_i(x) = \delta_i(\Delta_{a_1(x)a_2(x)\dots}^A) = \Delta_{ia_1(x)a_2(x)\dots}^A.$$

The estimate for the coefficient c_n of the left shift operator of the n -th order

$$\omega^n(x) = \underbrace{\omega(\omega(\dots\omega(x)))}_n = \frac{u_n x + v_n}{c_n x + d_n} \text{ is found.}$$

An invariant measure with respect to the left shift operator ω of an A -continued fraction representation is found. Namely, an invariant measure with

respect to the left shift operator ω of an A -continued fraction representation is a probability measure $\mu_X(\cdot)$ corresponding to the distribution of a random variable X represented by an A_2 -continued fraction whose elements are independent and identically distributed.

Continuous transformations f are built that preserve the tails of these representation, namely $f : [0,5;1] \rightarrow [0,5;1]$ for which $O_x \cap O_{f(x)} \neq \emptyset$ where the set $O_u = \{u, \omega(u), \omega^2(u), \dots\}$ is orbit of point u of a dynamic system with phase space $[0,5;1]$ and mapping ω . It is proved that the set of all continuous transformations of $[0,5;1]$ that preserve tails of an A -continued fraction representation together with an operation «function composition» form an infinite non-commutative group.

A function whose argument considered in the form of a nega-3-adic representation of numbers and the value of a function considered in the form of a A -continued fraction representation of number is constructed. This function is analogous to the Bush-Wunderlich function and the Tribine-function. It is proved that it is continuous on $[0,5;1]$ nowhere monotone function and has unlimited variation. The properties of the function graph, in particular the auto-modeling properties, and the properties of its level sets are described.

Finite A_2 -continued fractions are considered and some of their properties are studied. Properties of real numbers with periodic A_2 -continued fraction representation are studied. Estimates of the approximation of real numbers of a $[0,5;1]$ by continued fractions are obtained.

The fifth section deals with the foundations of the topological-metric theory of the representation of numbers by A_3 -continued fractions are set. In particular, conditions of zero excess of A_3 -continued fraction representations are obtained. The properties of the cylindrical and tail sets are also described. The geometric content of the digits is found out. The estimates of the denominators of the converdents of the A_3 -continued fractions at $s_0 = 2/3, s_2 = 2$.

The application contains a list of publications of the applicant on the topic

of the dissertation and information about the approbation of the results of the dissertation.

Key words: continued fraction, A_s -continued fraction representation of numbers, nega-3-adic representation of numbers, Lüroth series, cylindrical sets, transformation of closed interval, that preserve tails of representation, continuous nowhere monotonic function, auto-modeling, level sets of the function.

Список опублікованих праць здобувача на тему дисертації

1. Чуйков А. С. Найпростіші неперервні та кусково-неперервні функції, які зберігають хвости елементарного ланцюгового зображення чисел. *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки*. К.: НПУ імені М. П. Драгоманова. 2014, №16 (2). С. 94-99.

2. Працьовитий М. В., Чуйков А. С. Найпростіші функції, пов'язані з оператором лівостороннього зсуву елементів ланцюгового зображення чисел. *Зб. праць. Інституту математики НАН України*. 2016. Т. 13, № 3. С. 158-173.

3. Працьовитий М. В., Чуйков А. С., Кюрчев Д. В. Ланцюгові A_3 -дроби: основи метричної теорії. *Зб. праць. Ін-ту математики НАН України*. 2017. Т. 14, № 4. С. 97-110.

4. Працьовитий М. В., Чуйков А. С. Неперервна ніде не монотонна функція, означена в термінах нега-трійкових і ланцюгових A_2 -дробів. *Зб. праць. Ін-ту математики НАН України*. 2018. Т. 15, № 1. С. 147-161.

5. Pratsiovytyi M.V., Chuikov A.S. Continuous distributions whose functions preserve tails of a A -continued fraction representation of numbers. *Random Operators and Stochastic Equations*. 2019. Vol. 27 (3). Pp. 199-206.

6. Pratsiovytyi M. V., Makarchuk O. P., Chuikov A. S. Approximation and estimates in the periodic representation of real numbers of the closed interval $[0,5; 1]$ by A_2 -continued fractions. *Journal of Numerical & Applied Mathematics*

с.с. 2019. № 1 (130). Рр. 71-83.

Тези доповідей на конференціях

1. Працьовитий М. В., Чуйков А. С. Властивості однієї функції, заданої у термінах ланцюгових дробів. *П'ятнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука*, 15-17 травня 2014 р. Київ: Т. 2. Алгебра. Геометрія. Математичний аналіз. Київ: НТУУ «КПІ», 2014. С. 155.

2. Чуйков А. С. Геометрія зображення чисел канонічними ланцюговими дробами та її застосування. *Матеріали Міжнародної науково-методичної конференції «Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі»*, 25-26 червня 2015р. Київ: НУХТ, 2015 р. С. 99-101.

3. Chuikov A. S. Functions defined in terms of continued fractions. *International conference «Probability, Reliability And Stochastic Optimization»*, April 7-10, 2015, Kyiv, Ukraine: Conf. materials. P. 18.

4. Чуйков А. С. Функції – перетворювачі елементів ланцюгового дроби. *Тези доповідей IV всеукраїнської конференції молодих вчених з математики та фізики, 23-25 квітня 2015 р.* Київ: НТУУ «КПІ», 2015. С. 55.

5. Працьовитий М. В., Дмитренко С. О., Чуйков А. С. Інверсор цифр ланцюгового A_2 -зображення дробової частини числа. *Тези доповідей Четвертої всеукраїнської конференції молодих вчених з математики та фізики, 23-25 квітня 2015 р.* Київ: НТУУ «КПІ», 2015. С. 47.

6. Чуйков А. С. Про одну неперервну ніде не монотонну функцію, задану за допомогою ланцюгового дроби. *Міжнародна конференція молодих математиків, 3-6 червня 2015р.*, м. Київ, Україна: Тези доповідей. К.: ІМ НАН України, 2015. С. 89.

7. Працьовитий М. В., Чуйков А. С. Деякі функції, пов'язані з оператором Гауса. *Тези доповідей V Всеукр. наук. конф. молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методика їх навчання»*, 25-26 квітня 2016 р. Київ: НПУ імені

М. П. Драгоманова, 2016. С. 42.

8. Працьовитий М. В., Чуйков А. С. Аналог інверсора цифр для ланцюгового зображення чисел. *Збірник тез Всеукр. наук.-метод. конф. «Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі», присвяченої пам'яті професора С. С. Левіщенка, 7-8 жовтня 2016 р.* Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2016. С. 71.

9. Чуйков А. С., Працьовитий М. В. Аналог Трибін-функції, означеної у термінах ланцюгових та нега-трийкових дробів. *VI Всеукр. конф. молодих вчених з математики та фізики, 21-22 квітня 2017 р.* Київ: НаУКМА, 2017. С. 50.

10. Чуйков А. С. Про необмеженість варіації однієї ніде не монотонної функції. *Матеріали Міжнар. наук. конф. «Асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь», присвяченої 85-річчю доктора фізикоматематичних наук, професора, академіка НАПН України М. І. Шкіля, 13-14 грудня 2017 р.* Київ: НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2017. С. 88-89.

11. Chukov A. S., Pratsiovytyi M. V. Continuous transformations preserving tails of a A -continued fraction representation of numbers. *Sixth International Conference on Analytic Number Theory and Spatial Tessellations*, Kyiv, 2018. P. 26.

12. Чуйков А. С. Апроксимація дійсних чисел відрізка $[0, 5; 1]$ ланцюговими A_2 -дробами. *Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методика їх навчання», 23 травня 2019 р.* Київ, 2019. С. 51.

ЗМІСТ

Перелік скорочень і умовних позначень	18
Вступ	19
Розділ 1. Огляд літератури та концептуальні засади дослідження	34
1.1. Системи кодування дійсних чисел	34
1.1.1. Основи метричної теорії елементарних ланцюгових дробів	34
1.1.2. Ланцюгові A_2 -дроби та їхні властивості	40
1.1.3. Геометрія та властивості зображення чисел дробами Данжуа	43
1.1.4. Зображення дійсних чисел знакозмінними рядами Люрота	48
1.1.5. s -кова та не- s -кова системи числення	49
1.2. Фрактальний аналіз функцій	51
Висновки до розділу 1	55
Розділ 2. Функції і перетворення, що зберігають хвости зображення чисел елементарними ланцюговими дробами	56
2.1. Функції, задані перетворювачами першого елемента зображення чисел	56
2.2. Оператори лівостороннього та правостороннього зсувів цифр зображення	62
2.3. Неперервні перетворення, які зберігають хвости елементарного ланцюгового зображення чисел	64

	16
2.4. Інші функції, які зберігають хвости зображення	66
Висновки до розділу 2	73
Розділ 3. Функції, задані перетворювачами цифр елементарного ланцюгового зображення чисел	74
3.1. Квазіінверсор цифр зображення чисел	74
3.2. Функція, задана перетворювачем елементів елементарного ланцюгового дроби у знакозмінний ряд Люрота	77
Висновки до розділу 3	83
Розділ 4. Зображення чисел ланцюговими дробами з двосимвольним алфавітом	84
4.1. Оператор лівостороннього зсуву цифр ланцюгового A -зображення	84
4.2. Інваріантні міри для оператора лівостороннього зсуву	87
4.3. Оператор правостороннього зсуву цифр ланцюгового A -зображення	89
4.4. Функція $z(x)$	93
4.5. Неперервні перетворення відрізка $[0,5; 1]$, що зберігають хвости ланцюгового A -зображення чисел	94
4.6. Неперервна ніде не монотонна функція, означена в термінах ланцюгових A_2 -дробів та нега-трійкових дробів	97
4.6.1. Основний об'єкт дослідження та коректність його означення	97
4.6.2. Неперервність та ніде не монотонність функції	100
4.6.3. Множини рівнів функції	105
4.6.4. Варіаційні властивості функції	106
4.6.5. Автомодельність графіка функції	109
4.7. Умови раціональності числа за його ланцюговим A_2 -зображенням	110

4.8. Властивості чисел з періодичними ланцюговими A_2 -зображеннями	114
4.9. Апроксимація дійсних чисел відрізка $[0,5; 1]$ ланцюговими A_2 -дробами	116
Висновки до розділу 4	121
Розділ 5. Основи метричної теорії зображення чисел ланцюговими A_3-дробами	122
5.1. Ланцюгові A_3 -дроби	122
5.2. Підхідні дроби	123
5.3. Метричні властивості	124
5.4. Хвостові множини	131
Висновки до розділу 5	133
Загальні висновки	134
Список використаних джерел	136
Додаток	147

Перелік скорочень і умовних позначень

\mathbb{N}	– множина натуральних чисел;
\mathbb{Z}_0	– множина цілих невід’ємних чисел;
\mathbb{R}	– множина дійсних чисел;
(a_n)	– числова послідовність;
$\alpha_k(x)$	– k -та цифра певного зображення числа x ;
$[a_1, a_2, \dots, a_n]$	– скінченний ланцюговий дріб;
$[a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]$	– нескінченний ланцюговий дріб;
$\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^{c.f.}$	– циліндр рангу n з основою $c_1 c_2 \dots c_n$ елементарного ланцюгового зображення чисел;
$\Delta_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}^{\tilde{L}}$	– зображення числа x у вигляді знакозмінного ряду Люрота;
$\Delta_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}^s$	– s -кове зображення дійсного числа x ;
$\bar{\Delta}_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}^s$	– неґа- s -кове зображення дійсного числа x ;
$\Delta_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}^{A_2}$	– ланцюгове A_2 -зображення дійсного числа x ;
$\Delta_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}^A$	– ланцюгове A -зображення дійсного числа x ;
$ \Delta_{a_1 a_2 \dots a_n}^A $	– довжина циліндра ланцюгового A -зображення;
$f^{-1}(y_0)$	– множина рівня y_0 функції f ;
\equiv	– ліва і права сторони рівні за означенням.

Вступ

Дисертаційне дослідження присвячене вивченню структурних, топологометричних і фрактальних властивостей функцій, які є неперервними на деякому відрізку або мають не більш ніж зліченну множину розривів, водночас їхні множини особливостей (варіаційного, диференціального та ін. характеру) є всюди щільними. Такі функції ми називаємо функціями зі складною локальною поведінкою (структурою).

Актуальність теми. Ми кажемо, що функція має фрактальні властивості (типу самоподібних, самоафінних, автомодельних, розмірнісних), якщо її має або графік функції, або множина значень функції, або рівні функції, або множини особливостей різного роду тощо. Фрактальний аналіз таких функцій, крім вивчення вказаних множин, займається вивченням питання, як під дією функції трансформуються фрактальні розмірності (типу Гаусдорфа-Безиковича, ентропійна, клітинкова) борелівських підмножин області визначення. Традиційними для нього є дослідження сингулярних, ніде не монотонних, ніде не диференційовних функцій. При цьому поглиблюються індивідуальні теорії функцій (Кантора, Салема, Мінковського, Серпінського, Буша-Вундерліха, Трибін-функції тощо) і загальна теорія (у багатьох класах функцій, залежних від скінченної або нескінченної кількості параметрів). Вагомим фактором інтересу до таких функцій є факти про масивність таких функцій у відомих просторах (теореми Банаха-Мазуркевича, Замфіреску, Козирєва).

Ланцюгові дроби (елементарні, A_2 -дроби, дроби Данжуа) використовувалися для конструювання і дослідження функцій і ймовірнісних мір зі фрактальними властивостями у роботах М. В. Працьовитого [44, 45], М. В. Працьовитого і О. Л. Лещинського [28, 52], О. Л. Лещинського [26, 27], Г. М. Торбіна і Ю. В. Кулиби [1, 20], М. В. Працьовитого і Д. В. Кюрчева [51, 103], Д. В. Кюрчева [22, 23, 24, 25], Я. Ф. Виннишина [8] та ін. Більшість із цих робіт стосувалась розподілів випадкових величин, до них відповідних

функцій розподілу і ймовірнісних мір. Геометрія зображення чисел ланцюговими дробами має непросту метричну складову, що породжує істотні труднощі при вивченні метричних властивостей об'єктів. Ці труднощі вдається подолати не на кожному з шляхів наших наукових інтересів. Водночас ми впевнені, що поєднання ідей ланцюговості й кодування чисел засобами скінченного алфавіту є багатонадійним.

У цій роботі ми акцентуємо увагу на аналогах об'єктів, які визначались самоподібними зображеннями дійсних чисел, для них оператор лівостороннього зсуву цифр є лінійною функцією на кожному з циліндрів першого рангу. Отримуючи при цьому задачі у старих постановках, ми намагаємось за рахунок поглиблення теорії зображень чисел подолати труднощі, пов'язані з несамоподібністю.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.

Робота виконана в рамках дослідження математичних об'єктів із локально складною структурою і фрактальними властивостями, що проводиться у відділі динамічних систем та фрактального аналізу Інституту математики НАН України. Дослідження здійснювалося в рамках науково-дослідних тем:

- фрактальний аналіз математичних об'єктів зі складною локальною будовою (№ державної реєстрації 0107U000583);
- фрактальний аналіз неперервних функцій і мір (№ державної реєстрації 0111U000053);
- двійкове кодування дійсних чисел та фрактали (№ державної реєстрації 0110U001279).

Об'єкт дослідження. Основними об'єктами дослідження є:

- 1) ланцюгове A_s -зображення чисел

$$[a; b] \ni x = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}} \equiv \Delta_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}^{A_s},$$

де a_n — елементи фіксованої впорядкованої за зростанням множини додатних дійсних чисел $A_s = \{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{s-1}\}$, і функції, з ним пов'язані;

2) неперервні функції й перетворення відрізка (бієктивні відображення відрізка на себе), які зберігають хвости ланцюгових зображень чисел із використанням елементарних і A_2 -дробів;

3) аналог Трибін-функції, заданої перетворювачем цифр нега-трийкового зображення чисел у ланцюгове A -зображення чисел:

$$x = \bar{\Delta}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\dots}^3 = \frac{3}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} (-3)^{-k} \alpha_k \xrightarrow{f} y = \Delta_{\beta_1\beta_2\dots\beta_n\dots}^A,$$

$$\text{де } \beta_1 = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \alpha_1 = 2, \\ 0, & \text{якщо } \alpha_1 \neq 2; \end{cases} \quad \beta_{k+1} = \begin{cases} 1 - \beta_k, & \text{якщо } \alpha_{k+1} + \alpha_k = 2, \\ \beta_k, & \text{якщо } \alpha_{k+1} + \alpha_k \neq 2; \end{cases}$$

4) функції, визначені перетворювачами цифр зображень чисел із рівнопотужними алфавітами.

Предметом дослідження є геометрія зображення чисел ланцюговими дробами, структурні, варіаційні, диференціальні, автотельні та фрактальні властивості функцій, тополого-метричні властивості суттєвих для них множин.

Метою дисертаційного дослідження є опис властивостей функцій, які задаються перетворювачами цифр ланцюгового зображення чисел у інші зображення або перекодуванням цифр ланцюгового зображення.

Завданнями дослідження є такі:

- 1) поглиблення метричної складової геометрії зображення чисел ланцюговими дробами, вивчення варіаційних, диференціальних властивостей вказаних функцій, автотельних властивостей графіка;
- 2) вивчення диференціальних та інтегральних властивостей кусково-неперервних функцій, заданих за допомогою перетворювачів елементів елементарного ланцюгового дроби;

- 3) конструювання й дослідження властивостей функцій, заданих за допомогою ланцюгових A_2 -дробів;
- 4) конструювання й вивчення властивостей функцій, які задані перетворювачами цифр елементарного ланцюгового зображення чисел в інше зображення дійсних чисел;
- 5) побудова основ тополого-метричної теорії зображення чисел ланцюговими A_3 -дробами.

Методи дослідження. У роботі використовувались прийоми і методи теорії ланцюгових дробів, математичного аналізу, метричної і ймовірнісної теорії чисел, теорії функцій дійсної змінної, фрактального аналізу і фрактальної геометрії.

Наукова новизна одержаних результатів. Основні наукові результати, що виносяться на захист, такі.

1. Побудовано неперервні перетворення відрізка $[0; 1]$, які зберігають хвости зображення чисел елементарними ланцюговими дробами.
2. Доведено, що множина неперервних перетворень відрізка $[0,5; 1]$, які зберігають хвости ланцюгового A_2 -зображення чисел, відносно операції «суперпозиція функцій» утворює нескінченну некомутативну групу.
3. Введено функцію, названу квазіінверсором цифр елементарного ланцюгового зображення чисел (що є певним аналогом інверсорів цифр скінченно-символьних зображень чисел), доведено її ніде не монотонність і канторовість множини значень, описано множини рівнів.
4. Вивчено властивості функції, яку означено проектуванням цифр елементарного ланцюгового зображення чисел у цифри зображення чисел знакозмінними рядами Люрота. Доведено її неперервність та монотонність, знайдено систему функціональних рівнянь, єдиним розв'язком якої є ця функція.
5. Сконструйовано функцію, яка є аналогом функцій Буша-Вундерліха

та Трибін-функції, чий аргумент розглядається у формі нега-трійкового зображення, а значення функції — у формі ланцюгового A -зображення. Доведено, що вона є неперервною на відрізку $[0,5; 1]$ ніде не монотонною функцією і має необмежену варіацію. Описано властивості графіка цієї функції, зокрема, автомоделні, та множин її рівнів.

6. Знайдено оцінки наближень дійсних чисел відрізка $[0,5; 1]$ ланцюговими A_2 -дробами.
7. Закладено основи тополого-метричної теорії зображення чисел ланцюговими A_3 -дробами, зокрема, знайдено умови нульової надлишковості зображення чисел ланцюговими A_3 -дробами, описано властивості циліндричних і хвостових множин, з'ясовано геометричний сенс цифр.

Практичне значення одержаних результатів. Робота має переважно теоретичний характер. Отримані результати є певним внеском у теорію функцій дійсної змінної, фрактальний аналіз і фрактальну геометрію.

Особистий внесок здобувача.

У роботах, опублікованих у співавторстві з науковим керівником, Працьовитому М. В. належить загальна постановка задач, ідеї доведення деяких тверджень, редагування і перевірка одержаних результатів.

У роботі [6^a], виконаній у співавторстві з Макарчуком О.П., йому належать ідеї доведення теореми 4.1.1 і леми 4.9.1. Доведення цих тверджень належать здобувачеві. У роботі [3^a], виконаній спільно з Кюрчевим Д.В., йому належить ідея розгляду трисимвольного ланцюгового зображення чисел.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дослідження доповідались на таких наукових конференціях і семінарах:

- П'ятнадцята міжнародна наукова конференція імені акад. М. Кравчука, Київ, 15-17 травня 2014 р.;

- Міжнародна конференція «Імовірність, надійність та стохастична оптимізація», Київ, 7-10 квітня 2015 р.;
- Четверта всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики, Київ, 23-25 квітня 2015 р.;
- Міжнародна конференція молодих математиків, Київ, 3-6 червня 2015 р.;
- Міжнародна науково-методична конференція «Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі», Київ, 25-26 червня 2015 р.;
- П'ята всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методика їх навчання», Київ, 25-26 квітня 2016 р.;
- Шоста всеукраїнська конференція молодих вчених з математики та фізики, Київ, 21-22 квітня 2017 р.;
- Міжнародна наукова конференція «Асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь, присвячена 85-річчю доктора фізико-математичних наук, професора, академіка НАПН України М.І. Шкіля», Київ, 13-14 грудня 2017 р.;
- Шоста міжнародна конференція з аналітичної теорії чисел та просторових мозаїк, Київ, 24-28 вересня 2018 р.;
- Восьма всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методика їх навчання», Київ, 23 травня 2019 р.;
- Семінар відділу фрактального аналізу Інституту математики НАН України та НПУ імені М. П. Драгоманова (керівник – доктор фізико-математичних наук, професор М. В. Працьовитий).
- Семінар відділу теорії функцій Інституту математики НАН України (керівник – доктор фізико-математичних наук, професор А. С. Романюк).

Публікації. Основні результати дослідження викладено у 6 наукових статтях [1^a] - [6^a], опублікованих у виданнях, що внесені до переліку наукових фахових видань України, з них 2 статті [5^a, 6^a] у наукових виданнях, що входять до міжнародних наукометричних баз даних (Scopus, Web of Science), і додатково відображено у матеріалах конференцій [7^a] – [18^a].

Структура дисертації. Дисертаційна робота складається з анотації, переліку скорочень і умовних позначень, вступу, п'ятих розділів, розбитих на підрозділи, висновків до кожного розділу й загальних висновків, списку використаних джерел (112 найменувань) і додатка, який містить список публікацій здобувача на тему дисертації й відомості про апробацію результатів дисертації. Загальний обсяг дисертації становить 149 сторінок.

Основний зміст роботи. У вступі обґрунтовано актуальність дослідження, визначено об'єкт, предмет, мету і завдання дослідження, зазначено наукову новизну одержаних результатів і особистий внесок здобувача.

Перший розділ «**Огляд літератури та концептуальні засади дослідження**» має вступний характер. У ньому описані властивості деяких зображень дійсних чисел, які використовуються для подальшого конструювання й дослідження функцій, а саме: елементарне ланцюгове зображення, ланцюгове A_2 -зображення, зображення дробами Данжуа, зображення знакомінними дробами Люрота, s -кова й нега- s -кова системи числення. Наведено відомі приклади функцій, які мають складну локальну будову: сингулярних (функції Салема й Мінковського), ніде не монотонних (функції, пов'язані з Q -зображенням) і ніде не диференційовних (функція Такагі і Трибін-функція).

Другий розділ «**Функції і перетворення, що зберігають хвости зображення чисел елементарними ланцюговими дробами**» присвячено функціям і перетворенням відрізка $[0; 1]$, які зберігають хвости елементарного ланцюгового зображення дійсних чисел. Для конструювання таких перетворень використовувались оператори лівостороннього і право-

стороннього зсуву цифр.

Нехай i – довільне фіксоване натуральне число, $\varphi_i(j)$ – задана натуральна функція натуральної змінної j , залежна від параметра i . Розглядається функція f_{φ_i} , означена рівністю

$$y = f_{\varphi_i}(x) = [\varphi_i(a_1), a_2, \dots, a_n, \dots], \quad \text{де } x = [a_1, a_2, \dots, a_n, \dots].$$

Теорема 2.1.1. *Функція f_{φ_i} на кожному циліндрі першого рангу є неперервною і строго зростаючою функцією, причому на $\Delta_{a_1}^{c.f.}$ виражається формулою:*

$$f_{\varphi_i}(x) = \frac{x}{(\varphi_i(a_1) - a_1)x + 1}.$$

Теорема 2.1.2. *Функція f_{φ_i} є неперервною на півінтервалі $(0; 1]$ тоді і лише тоді, коли $\varphi_i(a_1) = \varphi(i) + a_1$.*

Розглядається оператор лівостороннього зсуву $T(x)$, заданий рівністю

$$T([a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]) = [a_2, a_3, \dots, a_{n+1}, \dots].$$

Лема 2.2.1. *Оператор лівостороннього зсуву $T(x)$ є кусково-неперервною функцією, яка на циліндрах першого рангу аналітично задається*

формулою: $T(x) = \frac{1}{x} - a_1(x)$. У кожній точці виду $\frac{1}{i+1}$, $i \in \mathbb{N}$ функція має розрив першого роду зі стрибком 1.

Нехай i – натуральний параметр. Означається клас функцій, визначених у раціональних та ірраціональних точках півінтервалу $(0; 1]$ рівностями: $\delta_i(x) = [i, a_1, a_2, \dots, a_n]$, $\delta_i(x) = [i, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]$, $i = 1, 2, \dots$ відповідно, причому за неперервністю нехай $\delta_i(0) := \frac{1}{i}$.

Лема 2.2.2. *Функція $\delta_i(x)$ аналітично виражається формулою*

$$\delta_i(x) = \frac{1}{i + x}$$

і є неперервною і строго спадною функцією, причому множиною її значень є проміжок: $[\frac{1}{i+1}; \frac{1}{i}]$.

Лема 2.2.3. Якщо i — фіксоване натуральне число, то рівняння $\delta_i(x) = T(x)$ має зліченну множину розв'язків: $x_n^{(i)} = [n, i, n, i, \dots] = [\overline{n, i}]$, $n \in \mathbb{N}$, кожен із яких є ірраціональним числом.

Лема 2.3.1. Функція

$$f(x) = \begin{cases} \delta_1(x), & \text{якщо } 0 \leq x \leq x_1^{(1)}, \\ T(x), & \text{якщо } x_1^{(1)} \leq x \leq 1; \end{cases} \quad (1)$$

є неперервною і строго спадною на $[0; 1]$, причому $f(0) = 1$ і $f(1) = 0$.

Кажемо, що функція $\varphi(x)$ зберігає хвости елементарного ланцюгового зображення чисел, якщо для будь-якого $x \in [0; 1]$ існують такі цілі невід'ємні числа $k = k(x)$ і $m = m(x)$, що діють рівності $a_{k+j}(x) = a_{m+j}(\varphi(x))$ для кожного $j \in \mathbb{N}$.

Теорема 2.3.1. Якщо s — фіксоване натуральне число, $(n_1, n_2, \dots, n_s), (m_1, m_2, \dots, m_s)$ — задані набори натуральних чисел, що задовольняють умови $1 < n_1 < n_2 < \dots < n_s$, $m_1 > m_2 > \dots > m_s > 1$, то функція

$$f(x) = \begin{cases} \delta_1(x), & 0 \leq x \leq x_{m_1}^{(1)}, \\ T(x), & x_{m_1}^{(1)} < x \leq x_{m_1}^{(n_1)}, \\ \delta_{n_1}(x), & x_{m_1}^{(n_1)} < x \leq x_{m_2}^{(n_1)}, \\ T(x), & x_{m_2}^{(n_1)} < x \leq x_{m_2}^{(n_2)}, \\ \dots & \dots \\ \delta_{n_s}(x), & x_{m_s}^{(n_s)} < x \leq x_1^{(n_s)}, \\ T(x), & x_1^{(n_s)} < x \leq 1; \end{cases}$$

є неперервним строго спадним перетворенням відрізка $[0; 1]$, що зберігає хвости зображення чисел елементарними ланцюговими дробами і фрактальну розмірність Гаусдорфа-Безиковича борелівських множин.

Нехай k — деяке фіксоване натуральне число, $f(a_1, a_2, \dots, a_k)$ — натуральна функція натуральних змінних a_1, a_2, \dots, a_k . Означимо клас функцій

рівністю:

$$\begin{aligned}\tau_f(x) &= \tau_f([a_1(x), a_2(x), a_3(x), \dots]) = \\ &= [f(a_1(x), a_2(x), \dots, a_k(x)), a_{k+1}(x), a_{k+2}(x), \dots)].\end{aligned}$$

Лема 2.4.1. *Функція $\tau_f(x)$ задається формулою:*

$$\tau_f(x) = \frac{1}{f(a_1, a_2, \dots, a_k) + T^k(x)} \quad (2)$$

і є неперервною й монотонно зростаючою (спадною) на кожному з циліндрів k -го рангу при непарному (парному) значенні k , множиною значень якої є півінтервал $\left(\frac{1}{f(a_1, a_2, \dots, a_k) + 1}, \frac{1}{f(a_1, a_2, \dots, a_k)} \right]$.

Третій розділ «**Функції, задані перетворювачами цифр елементарного ланцюгового зображення чисел**» присвячено двом функціям: квазіінверсору цифр елементарного ланцюгового зображення чисел і тривіальному проекторові цифр зображення чисел елементарними ланцюговими дробами у цифри зображення знакозмінними рядами Люрота. Перша функція означається рівністю: $f([a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]) = [b_1, b_2, \dots, b_n, \dots]$,

$$\text{де } b_1 = 1, b_n = \varphi(a_n) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } a_n \neq 1; \\ n, & \text{якщо } a_n = 1, n = 2, 3, \dots, \end{cases}$$

Теорема 3.1.1. *Множиною значень функції f є множина канторівського типу (ніде не щільна множина нульової міри Лебега)*

$$E_f = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k = \lim_{k \rightarrow \infty} F_k,$$

$$\text{де } F_1 = \Delta_1^{c.f.}, F_k = \bigcup_{b_2 \in \{1,2\}} \bigcup_{b_3 \in \{1,3\}} \dots \bigcup_{b_k \in \{1,k\}} \Delta_{1b_2b_3\dots b_k}^{c.f.}$$

Теорема 3.1.2. *Функція f є ніде не монотонною. Множина її рівня $y_0 = [1, b_2, \dots, b_n, \dots]$, $b_n \in \{1, n\}$ є:*

- 1) зчисленною, якщо в зображенні числа y_0 кількість одиниць скінченна;
 2) континуальною, якщо кількість одиниць нескінченна.

Другою є функція, яка в раціональних та ірраціональних точках коректно означена рівностями

$$g([a_1, a_2, \dots, a_n]) = \Delta_{a_1 a_2 \dots a_n}^{\tilde{L}}, \quad g([a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]) = \Delta_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}^{\tilde{L}}$$

відповідно. Доведено, що вона є неперервною й монотонно зростаючою.

Теорема 3.2.1. *Монотонно зростаюча функція $g : (0; 1] \rightarrow (0; 1]$, означена рівністю $g([a_1, a_2, \dots]) = \Delta_{a_1 a_2 \dots}^{\tilde{L}}$, задовольняє такі функціональні рівняння:*

$$\begin{aligned} g\left(\frac{x}{kx+1}\right) &= \frac{k+a_1(a_1+1)g(x)}{(a_1+k)(a_1+k+1)}, \forall k \in \mathbb{N}; \\ g\left(\frac{1}{i+x}\right) &= \frac{1}{i} - \frac{1}{i(i+1)}g(x), \forall i \in \mathbb{N}; \\ g\left(\frac{1}{x} - a_1\right) &= (a_1+1)(1-a_1g(x)). \end{aligned}$$

Теорема 3.2.2. *Функція $g([a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]) = \Delta_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}^{\tilde{L}}$ — це єдиний розв'язок системи функціональних рівнянь*

$$g\left(\frac{1}{i+x}\right) = \frac{1}{i} - \frac{1}{i(i+1)}g(x), i \in \mathbb{N}$$

у класі обмежених на $(0; 1]$ функцій.

Четвертий розділ «Зображення чисел ланцюговими дробами з двосимвольним алфавітом» присвячено дослідженню функцій, заданих за допомогою ланцюгових A_2 -дробів. Побудовано неперервні перетворення відрізка $[0,5; 1]$, які зберігають хвости ланцюгового A -зображення чисел: $x = \Delta_{a_1 a_2 \dots a_k \dots}^{A_2} = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \dots}^A$, де $\alpha_k = 2a_k - 1$, $a_k \in A_2 \equiv \{\frac{1}{2}, 1\}$. Основним результатом цього розділу є конструктивне доведення того, що множина всіх неперервних перетворень відрізка $[0,5; 1]$, які зберігають хвости ланцюгового A -зображення чисел відносно операції «композиція (суперпозиція) функцій», утворює нескінченну некомутативну групу. Знайдено

інваріантну міру для оператора лівостороннього зсуву. Побудовано й досліджено неперервну ніде не монотонну функцію, задану перетворювачем цифр нега-трійкового зображення чисел у їхнє ланцюгове A -зображення. Розглянуто скінченні ланцюгові дроби.

Означення 4.1.1. У множині всіх ланцюгових A -зображень дійсних чисел відрізка $[0,5; 1]$ оператор ω лівостороннього зсуву цифр означається рівністю: $\omega(\Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\dots}^A) = \Delta_{\alpha_2\alpha_3\dots\alpha_{n+1}\dots}^A$.

Лема 4.1.1. Функція $\omega(x)$ на кожному циліндрі першого рангу є неперервною, монотонно спадною й опуклою вниз, причому: $\omega(x) = \frac{1}{x} - a_1(x)$. У точці $x = \frac{2}{3}$ функція має розрив першого роду зі стрибком $\frac{1}{2}$.

Теорема 4.2.1. Інваріантною мірою відносно оператора лівостороннього зсуву цифр ω ланцюгового A -зображення є ймовірнісна міра $\mu_X(\cdot)$, що відповідає розподілу випадкової величини X , яка представлена ланцюговим A_2 -дробом, цифри якої є незалежними й однаково розподіленими.

Означення 4.3.1. У множині всіх ланцюгових A -зображень дійсних чисел відрізка $[0,5; 1]$ оператор δ_i з параметром $i \in \{0; 1\}$ правостороннього зсуву цифр означається рівністю: $\delta_i(\Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\dots}^A) = \Delta_{i\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\dots}^A$.

Лема 4.3.1. Функція $y = \delta_i(x)$, яка аналітично задається формулою $\delta_i(x) = \frac{1}{i+x}$, є неперервною, строго спадною й опуклою вниз на відрізку $[0,5; 1]$; вона набуває всіх значень із відрізка $[\frac{1}{i+1}; \frac{2}{2i+1}]$.

Лема 4.3.6. Розв'язками рівняння $\omega^n(x) = \delta_{i_1i_2\dots i_n}(x)$ є числа у формі $x = \Delta_{(\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n i_1 i_2 \dots i_n)}^A$.

Лема 4.5.2. Функція

$$f(x) = \begin{cases} \omega^n(x) & \text{при } 0,5 \leq x < \Delta_{\underbrace{1010\dots}_{n \text{ цифр}}, i_1\dots i_n}^A, \\ \delta_{i_1 i_2 \dots i_n}(x) & \text{при } \Delta_{\underbrace{1010\dots}_{n \text{ цифр}}, i_1\dots i_n}^A \leq x < \Delta_{\underbrace{0101\dots}_{n \text{ цифр}}, i_1\dots i_n}^A, \\ \omega^n(x) & \text{при } \Delta_{\underbrace{0101\dots}_{n \text{ цифр}}, i_1\dots i_n}^A \leq x \leq 1; \end{cases}$$

є неперервним (строго зростаючим при парному n і строго спадним при непарному n) перетворенням відрізка $[0, 5; 1]$, яке зберігає хвости ланцюгового A -зображення.

Теорема 4.5.1. Множина G всіх неперервних перетворень відрізка $[0, 5; 1]$, які зберігають хвости ланцюгового A -зображення чисел, відносно операції \circ – «суперпозиція функцій» утворює нескінченну некомутативну групу.

Розглядається функція $y = f(x)$, аргумент якої має нега-трійкове зображення, а саме:

$$x = \bar{\Delta}_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^3 \equiv \frac{3}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{(-3)^n}, \quad \alpha_n \in \{0, 1, 2\},$$

а значення функції має ланцюгове A -зображення

$$f(x) = \Delta_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n \dots}^A, \quad \beta_n \in \{0, 1\},$$

причому

$$\beta_1 = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \alpha_1 = 2, \\ 0, & \text{якщо } \alpha_1 \neq 2; \end{cases} \quad \beta_{k+1} = \begin{cases} 1 - \beta_k, & \text{якщо } \alpha_{k+1} + \alpha_k = 2, \\ \beta_k, & \text{якщо } \alpha_{k+1} + \alpha_k \neq 2. \end{cases}$$

Теорема 4.6.1. Функція f є неперервною на $[0; 1]$ і ніде не монотонною.

Теорема 4.6.2. На циліндрі $\bar{\Delta}_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1}}^3$ найбільше або найменше значення функції досягається у його внутрішній точці $x_0 = \bar{\Delta}_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1}(1)}^3$, на циліндрі $\bar{\Delta}_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{m-1} \alpha_m}^3$, де $\alpha_m \in \{0, 2\}$ функція набуває свого найбільшого і найменшого значення на кінцях циліндра.

Лема 4.6.1.

1. Якщо ланцюгове A -зображення точки y_0 має форму $\Delta_{(01)}^A$, то множина $f^{-1}(y_0)$ складається з двох точок.
2. Якщо ланцюгове A -зображення точки y_0 має форму $\Delta_{(10)}^A$, то множина $f^{-1}(y_0)$ складається з однієї точки.

3. Якщо в ланцюговому A -зображенні точки y_0 всі цифри дорівнюють 0, то множина $f^{-1}(y_0)$ є зліченною множиною.

Теорема 4.6.3. Функція f є функцією необмеженої варіації.

Теорема 4.6.4.

1. Частина

$$\Gamma_1 = \{M(x, y) : x = \bar{\Delta}_{1\alpha_2\alpha_3\dots\alpha_n\dots}^3, \quad y = f(x)\}$$

графіка Γ функції f симетрична відносно прямої $x = \bar{\Delta}_{(1)}^3$.

2. Відображення, яке переводить частину графіка

$$\Gamma_0 = \{M(x, y) : x = \bar{\Delta}_{0\alpha_2\alpha_3\dots\alpha_n\dots}^3, \quad y = f(x)\}$$

у частину

$$\Gamma_2 = \{M(x, y) : x = \bar{\Delta}_{2\alpha_2\alpha_3\dots\alpha_n\dots}^3, \quad y = f(x)\},$$

задається формулою:
$$\begin{cases} x' = \bar{\Delta}_{[2-\alpha_1][2-\alpha_2]\dots[2-\alpha_n]\dots}^3, \\ y' = \Delta_{[1-\beta_1][1-\beta_2]\dots[1-\beta_n]\dots}^A. \end{cases}$$

Розглянуто скінченні ланцюгові дроби й вивчено їхні властивості.

Теорема 4.7.1. Кожне A_2 -раціональне число має зліченну множину різних скінченних ланцюгових A_2 -зображень.

Розглянуто властивості дійсних чисел із періодичними ланцюговими A_2 -зображеннями й отримано оцінки наближення дійсних чисел ланцюговими A_2 -дробами. Основними результатами є твердження.

Теорема 4.8.3. Якщо число

$$y = \frac{e}{f} + \sqrt{\frac{g}{h}} \in [0,5; 1],$$

де $e, f, g, h \in \mathbb{N}$, $(g; h) = (f; h) = 1$, $\sqrt{\frac{g}{h}} \notin \mathbb{Q}$, має представлення $y = [(\beta_1, \dots, \beta_k)]$, то виконується нерівність

$$h \leq \frac{1}{\sqrt{17}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{17}}{2} \right)^k - \left(\frac{1 - \sqrt{17}}{2} \right)^k \right).$$

Теорема 4.9.1. *Якщо для розкладу ірраціонального числа x у ланцюговий A_2 -дріб існують частоти цифр $\frac{1}{2}$ та 1, які дорівнюють відповідно $\nu_{\frac{1}{2}}$ й ν_1 , то для довільного $\varepsilon > 0$ існує номер n_0 , такий, що*

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{(\delta_1^{\nu_1} \eta_1^{\nu_{\frac{1}{2}}} - \varepsilon)^{2n+1}}, \forall n \geq n_0,$$

зокрема для довільного ірраціонального числа $y \in [0, 5; 1]$ існує номер n_1 і стала C , такі, що $|y - \frac{p_n}{q_n}| < \frac{C}{(\frac{1+\sqrt{17}}{4})^{2n+1}}, \forall n \geq n_1$.

П'ятий розділ «**Основи метричної теорії зображення чисел ланцюговими A_3 -дробами**» присвячено властивостям циліндрів ланцюгового A_3 -зображення дійсного числа а також властивостям хвостових множин.

Нехай $A_3 \equiv \{s_0, s_1, s_2\}$ – задана множина додатних дійсних чисел ($s_0 < s_1 < s_2$). Розглядаються всеможливі вирази у формі

$$\frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}} \equiv [a_1, a_2, \dots, a_n, \dots], \text{ де } a_i \in A_3,$$

які ми називаємо *ланцюговими A_3 -дробами*.

Теорема 5.3.3. *Якщо $s_0 s_2 = \frac{4}{3}$ і $s_1 = \frac{s_0 + s_2}{2}$, то зчисленна множина точок $x \in [\beta_1; \beta_2]$ має два ланцюгові A_3 -зображення*

$$\Delta_{a_1 a_2 \dots a_{n-1} s_i (s_2 s_0)}^{A_3} = \Delta_{a_1 a_2 \dots a_{n-1} s_{i-1} (s_0 s_2)}^{A_3}, \quad i \in \{1, 2\},$$

решта точок має єдине зображення.

Теорема 5.4.1. *Кожна хвостова множина є зліченною і щільною в $[\beta_1; \beta_2]$ множиною, а фактор-множина $G \equiv [\beta_1; \beta_2] / \sim$ є континуальною.*

Подяка. Автор висловлює вдячність науковому керівнику професору М. В. Працьовитому за постановку задач, підтримку та постійну увагу до даної роботи.

РОЗДІЛ 1

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ТА КОНЦЕПТУАЛЬНІ ЗАСАДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Цей розділ має вступний характер. У ньому ми систематизуємо відомості, що стосуються різних систем кодування (зображення) дійсних чисел, а також наводимо приклади відомих функцій зі складною локальною будовою.

1.1. Системи кодування дійсних чисел

Системою числення називається сукупність засобів для представлення (подання, математичного вираження) і зображення (скороченого символічного запису) дійсних чисел і побудови їхньої арифметики. Існує багато різних систем зображення (кодування) дійсних чисел зі скінченним або нескінченним алфавітами. Кожна з них породжує свою «геометрію» (геометричний зміст цифр, метричні співвідношення і геометричні властивості циліндричних і хвостових множин тощо), яка має метричну складову (метрична теорія зображення). Використання різних систем зображень дійсних чисел дозволяє конструювати об'єкти з бажаними й несподіваними локальними властивостями і досліджувати їхню структуру.

Стверджують, що система числення має нульову надлишковість, якщо майже всі (в розумінні потужності) дійсні числа мають єдине зображення і лише зчисленна множина чисел має їх два.

1.1.1. Основи метричної теорії елементарних ланцюгових дробів. Розглянемо геометрію і властивості зображення чисел елементарними ланцюговими дробами.

Означення 1.1.1. Елементарним ланцюговим дробом *називають* вираз вигляду [63]

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \cdots + \frac{1}{a_n + \cdots}}} = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n, \dots], \quad (1.1)$$

де $a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_n \in \mathbb{N}$, $n = 1, 2, \dots$

Формальний запис $x = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]$ називається *елементарним ланцюговим зображенням числа x* .

Ланцюгові дроби були введені у 1572 році італійським математиком Бомбеллі, а у 1613 році зустрічається їхнє сучасне позначення. Теорію ланцюгових дробів вперше виклав Л. Ейлер, який також поставив питання про їхні використання для розв'язування диференціальних рівнянь, застосував їх до розкладу функцій, представленні нескінченних добутків та ін. Після Ейлера слідували роботи М. Софронова, академіка В. М. Вісковатого, Д. Бернуллі, Ж. Л. Лагранжа. Важливі результати в метричній теорії елементарних ланцюгових дробів отримали П. Леві [93], О. Я. Хінчин [63, 89], В. І. Арнольд [2], V. Jarnik [85], J. T. Good [79], К. Е. Hirst [82], Т. W. Cusick [70], D. Hensley [81], С. Faivre [77], S. Kalpazidou [87], Т. Komatsu [90], С. D. Olds [98] та ін. В Україні узагальненнями ланцюгових дробів та їх застосуваннями займались В.Я. Скоробагатько [61], М. М. Пагіря [34, 33], Д. І. Боднар [6], П. І. Боднарчук [7], Х. Й. Кучмінська [21], Р. І. Дмитришин [12, 74, 75] та ін.

Відомо, що кожне дійсне число розкладається у елементарний ланцюговий дріб, і навпаки, кожному елементарному ланцюговому дроби відповідає певне дійсне число. Причому, необхідною і достатньою умовами раціональності значення елементарного ланцюгового дроби є його скінченність. Крім того, кожне раціональне число розкладається у елементарний ланцюговий

дріб двома способами:

$$[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n + 1] = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n, 1],$$

причому останнє зображення прийнято не використовувати. У такому випадку кожний елемент елементарного ланцюгового дроби однозначно визначається даним числом x , тобто є функцією від x : $a_k = a_k(x)$.

Теорема 1.1.1 (Ейлер-Лагранж). *Число можна подати у вигляді нескінченного періодичного елементарного ланцюгового дроби тоді і лише тоді, коли воно є ірраціональним розв'язком квадратного рівняння з цілими коефіцієнтами [31].*

Означення 1.1.2. Підхідним дробом k -го порядку для ланцюгового дроби $x = [a_0; a_1, a_2, \dots]$ називається скінченний ланцюговий дріб

$$[a_0; a_1, a_2, \dots, a_k], \text{ значення якого є деяке раціональне число } \frac{p_k}{q_k}.$$

Теорема 1.1.2. [63] [закон утворення підхідних дроби] Для будь-якого $k \geq 2$

$$\begin{cases} p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2}, \\ q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}. \end{cases}$$

Причому, за домовленістю, $p_0 = a_0, q_0 = 1, p_1 = a_1 a_0 + 1, q_1 = a_1$.

Теорема 1.1.3. *Підхідні дроби мають наступні властивості:*

1. *Всі вони нескоротні.*
2. $q_k p_{k-1} - p_k q_{k-1} = (-1)^k, k \geq 0.$
3. $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} - \frac{p_k}{q_k} = \frac{(-1)^k}{q_k q_{k-1}}, k \geq 1.$
4. $q_k p_{k-2} - p_k q_{k-2} = (-1)^{k-1} a_k, k \geq 1.$
5. $\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}} - \frac{p_k}{q_k} = \frac{(-1)^{k-1} a_k}{q_k q_{k-2}}, k \geq 2.$
6. $\frac{q_k}{q_{k-1}} = [a_k; a_{k-1}, \dots, a_1].$

$$7. q_k \geq \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{k-1}, \quad k \geq 2.$$

$$8. \frac{1}{q_k(q_k + q_{k+1})} \leq \left| x - \frac{p_k}{q_k} \right| \leq \frac{1}{q_k q_{k+1}}, \quad k \geq 0.$$

Надалі, якщо $x \in (0, 1]$, тобто $a_0 = 0$, то будемо також користуватись позначенням $x = [a_1, a_2, \dots]$.

Важливим в геометрії зображення чисел ланцюговими дробами є поняття циліндра.

Означення 1.1.3. Циліндром рангу m з основою $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m$ елементарного ланцюгового зображення чисел називається множина

$$\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}^{c.f.} = \{x | x = [a_1, a_2, \dots, a_m, a_{m+1} \dots], \alpha_i = a_i(x), i = 1, 2, \dots, m\}.$$

Циліндр є півінтервалом

$$([a_1, a_2, \dots, a_m + 1], [a_1, a_2, \dots, a_m]), \text{ якщо } m - \text{ непарне,}$$

$$([a_1, a_2, \dots, a_m], [a_1, a_2, \dots, a_m + 1]), \text{ якщо } m - \text{ парне.}$$

З [63] відомо, що довжина циліндра n -го рангу виражається формулою

$$|\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{c.f.}| = \frac{1}{q_n(q_n + q_{n-1})},$$

а основне метричне співвідношення має вигляд

$$\frac{|\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n s}^{c.f.}|}{|\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{c.f.}|} = \frac{1}{s^2} \cdot \frac{1 + \frac{q_{n-1}}{q_n}}{\left(1 + \frac{q_{n-1}}{sq_n}\right) \left(1 + \frac{1}{s} + \frac{q_{n-1}}{sq_n}\right)},$$

причому має місце подвійна нерівність $\frac{1}{3s^2} < \frac{|\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n s}^{c.f.}|}{|\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{c.f.}|} < \frac{2}{s^2}$.

Елементи ланцюгового дроби (1.1) визначаються з рівності:

$$a_n = a_n(x) = \left[\frac{1}{T^{n-1}(x)} \right], \quad T^{n-1}(x) \neq 0,$$

де $T : [0; 1) \rightarrow [0; 1)$ — перетворення Гауса, задане формулою:

$$T(x) := \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x} \right], \quad 0 < x < 1, \quad T(0) := 0, \quad a_1(x) = [1/x]. \quad (1.2)$$

Це перетворення «стирає» перший елемент ланцюгового дробу:

$$T([0; a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]) = [0; a_2, a_3, \dots, a_{n+1}, \dots],$$

і називається *оператором лівостороннього зсуву* цифр елементарного ланцюгового зображення чисел. Оператор T грає важливу роль у теорії динамічних систем і фігурує у працях багатьох дослідників, таких як: F. Schweiger [107], В. І. Арнольд [2] та ін. Зокрема, доведено, що оператор T володіє ергодичною інваріантною мірою μ , яка є абсолютно неперервною відносно міри Лебега:

$$\mu = \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{dx}{1+x}.$$

Застосування до цієї міри ергодичної теореми Біркгофа-Хінчина дає існування *сталой Хінчина*, яка означає наступне: середнє геометричне перших n елементів елементарного ланцюгового дробу майже скрізь прямує при $n \rightarrow \infty$ до абсолютної сталої [71]:

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \rightarrow \prod_{r=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{r(r+2)} \right)^{\log_2 r} \approx 2,6.$$

Крім того, зі сталою Хінчина тісно пов'язана *теорема Кузьміна*, яка стверджує, що ймовірність появи числа k на місці a_n дається наступною формулою [2]:

$$p_k = \frac{1}{\ln 2} \ln \left(1 + \frac{1}{k(k+2)} \right).$$

Застосування оператора зсуву T n разів породжує оператор T^n , який задається формулою [69]:

$$T^n([0; a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]) = [0; a_{n+1}, a_{n+2}, \dots] = \frac{q_n x - p_n}{p_{n-1} - q_{n-1} x}.$$

На основі оператора T можливою є побудова інших видів ланцюгових дробів. Так, відображення $T_E : [0; 1) \rightarrow [0; 1)$, задане формулою [80]

$$T_E(x) = \frac{1}{a_1(x)} T(x), \quad x \neq 0, T_E(0) := 0, \quad (1.3)$$

породжує ланцюгові дроби вигляду

$$\frac{1}{b_1 + \frac{1}{b_2 + \frac{1}{b_3 + \ddots}}} = [[0; b_1, b_2, \dots, b_n, \dots]], \quad b_n \in \mathbb{N}, \quad b_n \leq b_{n+1}, \quad (1.4)$$

які називаються *ланцюговими дробами Енгеля*. В силу останньої нерівності періодичні ланцюгові дроби такої форми мають у своєму періоді лише одне число. Причому існує нескінченно багато квадратичних ірраціональностей, які розкладаються у неперіодичні ланцюгові дроби Енгеля.

Розклад (1.4) отримується за формулами:

$$b_1 = b_1(x) := [1/x],$$

$$b_n = b_n(x) := b_1(T_E^{n-1}(x)), \quad n \geq 2, \quad T_E^{n-1}(x) \neq 0. \quad (1.5)$$

Наприклад, розкладемо у ланцюговий дріб Енгеля число $x = -\frac{3}{14} + \frac{3}{7}\sqrt{2}$. Використовуючи формули (1.3) і (1.5), послідовно отримуємо:

$$b_1(x) = \left[\frac{1}{x} \right] = \left[\frac{2}{3} + \frac{4}{3}\sqrt{2} \right] = 2,$$

$$T_E^1(x) = \frac{1}{b_1} T(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} + \frac{4}{3}\sqrt{2} - 2 \right) = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\sqrt{2},$$

$$b_2(x) = b_1(T_E^1(x)) = 3, \quad T_E^2(x) = \frac{1}{3} \left(\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{2} - 3 \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2},$$

$$b_3(x) = b_1(T_E^2(x)) = 4, \quad T_E^3(x) = \frac{1}{4}(2 + 2\sqrt{2} - 4) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} = T_E^2(x),$$

і далі процес зациклюється. Отже, $-\frac{3}{14} + \frac{3}{7}\sqrt{2} = [[0; 2, 3, \bar{4}]]$. Причому, розклад у елементарний ланцюговий дріб має вигляд: $[0; 2, \overline{1, 1, 4, 3}]$.

Розглянемо ще декілька прикладів розкладу чисел у ланцюгові дроби Енгеля.

Приклад 1. $\frac{89}{210} = [[0; 2, 5, 8, 9]]$.

Приклад 2 [80]. $\frac{-n + \sqrt{n^2 + 4n}}{2n} = [[0; \bar{n}]]$.

Приклад 3.

$$\frac{3\sqrt{2}}{7} = [0; 1, \overline{1, 1, 1, 5, 1, 28, 1, 5, 1, 1, 1, 2}] = [[0; 1, 1, 1, 1, 5, 5, 28, \overline{32}]].$$

Приклад 4.

$$\begin{aligned} \frac{3\sqrt{2}}{8} &= [0; 1, \overline{1, 7, 1, 2}] = \\ &= [[0; 1, 1, 7, 9, 21, 154, 160, 240, 241, 491, 4322, 74671, 336234, 2079982, \\ &2990602, 5151951, 9066731, 18957023, 114363891, 116768476, \dots]]. \end{aligned}$$

1.1.2. Ланцюгові A_2 -дроби та їхні властивості. Двосимвольні системи зображення (кодування) дійсних чисел привертали і продовжують привертати увагу багатьох дослідників. До таких систем відносяться класичне двійкове зображення і його узагальнення Q_2 -зображення [45, 48], медіантне зображення [3], ланцюгове A_2 -зображення [11, 22, 101] тощо.

Нехай $A_2 \equiv \{\frac{1}{2}, 1\}$ – двосимвольний алфавіт, $L_{A_2} = A_2 \times A_2 \times \dots \times A_2 \times \dots$ – простір послідовностей елементів двосимвольного алфавіту A_2 .

Нескінченний ланцюговий дріб

$$\frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_n + \dots}}} = [a_1, a_2, \dots, a_n, \dots],$$

де $a_n \in A_2$, називається [11, 103] ланцюговим A_2 -дробом.

Оскільки $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$, то кожен ланцюговий A_2 -дріб є збіжним [63].

Теорема 1.1.4. [11] Для будь-якого числа $x \in [0,5; 1]$ існує послідовність $(a_n) \in L$, така що

$$x = [a_1, a_2, \dots, a_n, \dots], \quad (1.6)$$

причому числа зліченної множини можна представити у вигляді двох формально різних ланцюгових A_2 -дробів:

$$x = [a_1, a_2, \dots, a_n, \frac{1}{2}, (\frac{1}{2}, 1)] = [a_1, a_2, \dots, a_n, 1, (1, \frac{1}{2})],$$

де круглі дужки символізують період.

Ті числа відрізка $[0,5; 1]$, які мають два представлення ланцюговими A_2 -дробами, а також числа 0,5 і 1, називаються A_2 -раціональними числами, решта чисел – A_2 -іраціональними.

Рівність (1.6) скорочено записуватимемо $x = \Delta_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}^{A_2}$ і називатимемо ланцюговим A_2 -зображенням числа x .

Означення 1.1.4. Нехай (c_1, c_2, \dots, c_m) – фіксований набір символів, $c_i \in A_2$. Циліндром рангу m із основою $c_1 c_2 \dots c_m$ ланцюгового A_2 -зображення чисел називають множину таких x , які мають ланцюгове A_2 -зображення з першими m символами, що дорівнюють відповідно c_1, c_2, \dots, c_m , тобто

$$\Delta_{c_1 \dots c_m}^{A_2} = \{x | x = [a_1, a_2, \dots, a_m, \dots], a_i(x) = c_i, i = 1, 2, \dots, m, a_i \in A_2\}.$$

Циліндр $\Delta_{c_1 \dots c_m}^{A_2}$ є відрізком, причому:

$$\min \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{A_2} = \begin{cases} [c_1, c_2, \dots, c_m + 1] & \text{при непарному } m, \\ [c_1, c_2, \dots, c_m + 0,5] & \text{при парному } m; \end{cases}$$

$$\max \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{A_2} = \begin{cases} [0; c_1, c_2, \dots, c_m + 0,5] & \text{при непарному } m, \\ [0; c_1, c_2, \dots, c_m + 1] & \text{при парному } m. \end{cases}$$

Довжина циліндра m -го рангу $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{A_2}$ обчислюється за формулою

$$|\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{A_2}| = \frac{1}{(q_{m-1} + q_m)(q_{m-1} + 2q_m)},$$

де q_m – знаменник підхідного дроби раціонального числа $[a_1, a_2, \dots, a_m]$:

$$q_0 = 1, q_1 = a_1, q_{n+1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1}.$$

Основне метричне відношення для ланцюгового A_2 -зображення чисел має вигляд

$$\frac{|\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n c}^{A_2}|}{|\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^{A_2}|} = \frac{(1 + c \frac{q_{n-1}}{q_n})}{(2c^2 + 1 + 2c \frac{q_{n-1}}{q_n})}, \quad c \in A_2,$$

зокрема

$$\frac{|\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n \frac{1}{2}}^{A_2}|}{|\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^{A_2}|} = \frac{2 + \frac{q_{n-1}}{q_n}}{3 + 2 \frac{q_{n-1}}{q_n}}, \quad \frac{|\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n 1}^{A_2}|}{|\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^{A_2}|} = \frac{1 + \frac{q_{n-1}}{q_n}}{3 + 2 \frac{q_{n-1}}{q_n}}.$$

З метою перекодування ланцюгових A_2 -дробів і їх значень засобами двосимвольного алфавіту $A \equiv \{0; 1\}$ введемо ланцюгове A -зображення:

$$x = [a_1, a_2, \dots, a_n, \dots] \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^A,$$

де $\alpha_n = 2a_n - 1 = \begin{cases} 0, & \text{якщо } a_n = 0,5; \\ 1, & \text{якщо } a_n = 1. \end{cases}$ В результаті перекодування маємо

два позначення одного і того ж циліндра:

$$\Delta_{a_1 a_2 \dots a_n}^{A_2} = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^A.$$

1.1.3. Геометрія та властивості зображення чисел дробами Данжуа. Arnaud Denjoy встановив [72], що кожне дійсне число x розкладається у ланцюговий (скінченний або нескінченний) дріб Данжуа вигляду

$$x = d_0 + \frac{1}{d_1 + \frac{1}{d_2 + \cdots + \frac{1}{d_n + \cdots}}}, \quad (1.7)$$

де $d_0 \in \mathbb{Z}$ таке, що $x - d_0 \geq 0$ і $d_n \in D_2 \equiv \{0, 1\}, n \in \mathbb{N}$. Подальші дослідження такого розкладу проводили М. Iosifescu і С. Крааікамп (див. [83, 84]).

Розклад числа x у дріб вигляду (1.7) називатимемо його D_2 -представленням, а формальний запис

$$x = [d_0; d_1, d_2, \dots, d_n, \dots]^{D_2}$$

називатимемо його D_2 -зображенням.

Зв'язок між ланцюговим дробом Данжуа й елементарним ланцюговим дробом визначається формулою, яка наведена в [84]:

$$x = [d_0; (0, 1)^{a_0 - d_0}, (1, 0)^{a_1 - 1}, 1, (1, 0)^{a_2 - 1}, 1, \dots]^{D_2}, \quad \mathbb{Z} \ni d_0 \leq x, \quad (1.8)$$

де вираз $(1, 0)^k$ означає, що група елементів $(1, 0)$ зустрічається k разів, причому вона відсутня, якщо $k = 0$; $a_i, i = 0, 1, 2, \dots$ — елементи розкладу числа x у елементарний ланцюговий дріб.

Зауважимо, що для будь-якого d_0 кожне раціональне число, аналогічно до елементарних ланцюгових дробів, має два зображення:

$$x_1 = [d_1, d_2, \dots, d_n, 1, 0, 1]^{D_2} \equiv [d_1, d_2, \dots, d_n, 1, 1]^{D_2} = x_2. \quad (1.9)$$

Зауважимо також, що у розкладі (1.8) не існує двох сусідніх нулів. Якщо це обмеження зняти, то кожне число матиме нескінченну кількість зобра-

жень, оскільки

$$\frac{1}{a + \frac{1}{b}} = \frac{1}{a + \frac{1}{0 + \frac{1}{0 + \frac{1}{b}}}}. \quad (1.10)$$

Перші n елементів a_1, a_2, \dots, a_n елементарного ланцюгового дроби дають $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ елементів ланцюгового дроби Данжуа, рівних 1, і $a_1 + a_2 + \dots + a_n - n$ елементів, рівних 0. Нехай Z_k — це кількість нулів серед перших k елементів d_1, \dots, d_k числа x , а W_k — кількість одиниць. Використовуючи результат Хінчина [89], що для майже всіх x відносно міри Лебега $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_j = \infty$ можна зробити висновок, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Z_k}{W_k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=1}^n a_j - n}{\sum_{j=1}^n a_j} = 1,$$

тобто майже всі x асимптотично мають однакову кількість нулів і одиниць у розкладі в ланцюговий дріб Данжуа.

Нехай $x \in \mathbb{R}$, $d_0 \in \mathbb{Z}$, $x - d_0 \geq 0$. Дріб $C_n = [d_0; d_1, d_2, \dots, d_n]^{D_2}$ називається підхідним дробом. Значення C_n обчислюється, використовуючи рівності: $1/0 = \infty$ і $1/\infty = 0$. Це означає, що $C_n = C_{n-2}$ при $d_n = 0$. Причому послідовність підхідних дроби p_n/q_n елементарного ланцюгового дроби є підпослідовністю підхідних дроби C_n ланцюгового дроби Данжуа. Закони утворення підхідних дроби для ланцюгового дроби Данжуа та елементарного ланцюгового дроби аналогічні:

$$\begin{cases} p_{-1} = 1, p_0 = d_0, p_n = d_n p_{n-1} + p_{n-2}; \\ q_{-1} = 0, q_0 = 1, q_n = d_n q_{n-1} + q_{n-2}, \quad n \geq 1. \end{cases}$$

Наприклад, дріб $\frac{11}{4}$ розкладається у елементарний ланцюговий дріб і

ланцюговий дріб Данжуа наступним чином:

$$\frac{11}{4} = [2; 1, 3] = [d_0; (0, 1)^{2-d_0}, 1, 1, 0, 1, 1]^{D_2}, \mathbb{Z} \ni d_0 < \frac{11}{4}.$$

Послідовності чисельників і знаменників підхідних дробів для числа $\frac{11}{4}$ при $d_0 = 0$ подано у таблиці 1.1.

i	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
p_i	1	0	1	1	1	2	3	5	3	8	11
q_i	0	1	0	1	0	1	1	2	1	3	4

Таблиця 1.1

Підхідні дроби розкладу числа $11/4$

Нехай x записаний у вигляді ланцюгового дроби Данжуа (1.8), причому нехай $d_0 = 0$ і $x \in (0; 1]$. Тоді $a_0 = 0$ і

$$x = [(1, 0)^{a_1-1}, 1, (1, 0)^{a_2-1}, 1, \dots, (1, 0)^{a_n-1}, 1, \dots]^{D_2} =: [1, d_2, \dots, d_n, \dots]^{D_2}.$$

Для дослідження геометрії ланцюгового D_2 -зображення використовуються тотожність:

$$[1, d_2, \dots, d_n, \infty]^{D_2} = [1, d_2, \dots, d_n + 1/\infty]^{D_2} = [1, d_2, \dots, d_n]^{D_2}.$$

Означення 1.1.5. Циліндром рангу m з основою $1c_2 \cdots c_m$ ланцюгового D_2 -зображення чисел називається множина

$$\Delta_{1c_2 \cdots c_m}^{D_2} = \{x | x = [1, d_2, \dots, d_m, \dots]^{D_2}, d_i(x) = c_i, i = \overline{2, m}\}.$$

Циліндри мають наступні властивості.

1) Циліндр $\Delta_{1c_2 \cdots c_m}^{D_2}$ є відрізком, причому:

а) Якщо m – парне (непарне) і $c_m = 1$, то:

$[1, c_2, \dots, c_{m-1}]^{D_2}$ – правий (лівий) кінець циліндра,

$[1, c_2, \dots, c_m]^{D_2}$ – лівий (правий) кінець циліндра.

б) Якщо m – парне (непарне) і $c_m = 0$, то:

$[1, c_2, \dots, c_m]^{D_2}$ – правий (лівий) кінець циліндра,

$[1, c_2, \dots, c_m, 1]^{D_2}$ – лівий (правий) кінець циліндра.

Дійсно, якщо m -парне і $c_m=1$, то

$$\min \Delta_{1c_2\dots c_m}^{D_2} = [1, c_2, \dots, c_m, (1, 0)]^{D_2} = [1, c_2, \dots, c_m]^{D_2},$$

$$\begin{aligned} \max \Delta_{1c_2\dots c_m}^{D_2} &= [1, c_2, \dots, c_m, (0, 1)]^{D_2} = \\ &= [1, c_2, \dots, c_{m-1}, (1, 0)]^{D_2} = [1, c_2, \dots, c_{m-1}]^{D_2}. \end{aligned}$$

Якщо ж m -парне і $c_m=0$, то

$$\min \Delta_{1c_2\dots c_m}^{D_2} = [1, c_2, \dots, c_m, (1, 0)]^{D_2} = [1, c_2, \dots, c_m]^{D_2},$$

$$\max \Delta_{1c_2\dots c_m}^{D_2} = [1, c_2, \dots, c_m, 1, (1, 0)]^{D_2} = [1, c_2, \dots, c_m, 1]^{D_2}$$

(оскільки елемент на $(m+1)$ -му місці не може дорівнювати 0). При непераному m міркування аналогічні.

Наслідок 1.1.1. $\min \Delta_{1c_2\dots c_{2k-1}10}^{D_2} = \max \Delta_{1c_2\dots c_{2k-1}11}^{D_2}$,

$$\min \Delta_{1c_2\dots c_{2k}11}^{D_2} = \max \Delta_{1c_2\dots c_{2k}10}^{D_2}.$$

2) Діаметр циліндра $\Delta_{1c_2\dots c_m}^{D_2}$ виражається формулою:

$$\left| \Delta_{1c_2\dots c_m}^{D_2} \right| = \begin{cases} |[1, c_2, \dots, c_m]^{D_2} - [1, c_2, \dots, c_{m-1}]^{D_2}|, & c_m = 1, \\ |[1, c_2, \dots, c_m]^{D_2} - [1, c_2, \dots, c_m, 1]^{D_2}|, & c_m = 0. \end{cases}$$

Впливає з першої властивості.

3) $\Delta_{1c_2\dots c_{m-1}0}^{D_2} = \Delta_{1c_2\dots c_{m-1}01}^{D_2}$, $\Delta_{1c_2\dots c_{m-1}1}^{D_2} = \bigcup_{i=0}^1 \Delta_{1c_2\dots c_{m-1}1i}^{D_2}$.

Впливає з того, що дроби Данжуа не містять двох послідовних нулів.

Лема 1.1.1. *Має місце рівність:*

$$[1, 1, d_3, \dots, d_n, \dots]^{D_2} + [1, 0, 1, d_3, \dots, d_n, \dots]^{D_2} = 1.$$

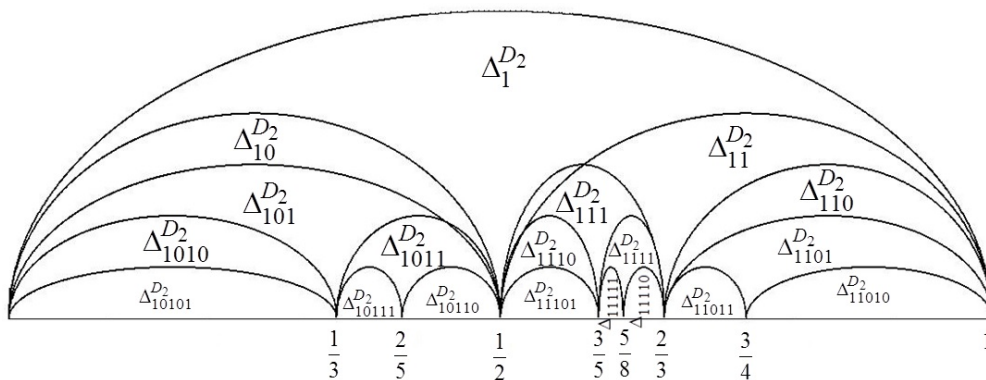


Рис. 1.1. Розташування циліндрів D_2 -зображення

Доведення. Нехай $a = 1 + [d_3, d_4, \dots]^{D_2}$, тоді

$$[1, 1, d_3, \dots, d_n, \dots]^{D_2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{a}} = \frac{a}{a + 1};$$

$$[1, 0, 1, d_3, \dots, d_n, \dots]^{D_2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{0 + \frac{1}{a}}} = \frac{1}{a + 1}.$$

Звідси

$$[1, 1, d_3, \dots, d_n, \dots]^{D_2} + [1, 0, 1, d_3, \dots, d_n, \dots]^{D_2} = \frac{a}{a + 1} + \frac{1}{a + 1} = 1.$$

□

Лема 1.1.2. *Має місце рівність:* $\left| \Delta_{11c_3c_4\dots c_n}^{D_2} \right| = \left| \Delta_{101c_3c_4\dots c_n}^{D_2} \right|$.

Доведення. Нехай $c_n = 1$. За властивості 1) і леми 1.1.1 маємо:

$$\begin{aligned} \left| \Delta_{11c_3c_4\dots c_n}^{D_2} \right| &= \left| [11c_3c_4\dots c_{n-1}]^{D_2} - [11c_3c_4\dots c_n]^{D_2} \right| = \\ &= \left| (1 - [101c_3c_4\dots c_{n-1}]^{D_2}) - (1 - [101c_3c_4\dots c_n]^{D_2}) \right| = \\ &= \left| [101c_3c_4\dots c_n]^{D_2} - [101c_3c_4\dots c_{n-1}]^{D_2} \right| = \left| \Delta_{101c_3c_4\dots c_n}^{D_2} \right|. \end{aligned}$$

При $c_n = 0$ міркування аналогічні. □

З леми 1.1.1 випливає наступна геометрична інтерпретація: циліндри у формі $\Delta_{11c_3\dots c_n}^{D_2}$ n -го рангу розташовані симетрично відносно точки $x = 0,5$ до циліндрів у формі $\Delta_{101c_3\dots c_n}^{D_2}$ $(n + 1)$ -го рангу.

1.1.4. Зображення дійсних чисел знакозмінними рядами Люрота. Відомо [86], що для будь-якого $x \in (0; 1]$ існує або скінчений набір (a_1, a_2, \dots, a_n) або послідовність (a_n) натуральних чисел така, що:

$$x = \frac{1}{a_1} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{a_1(a_1+1) \cdots a_{n-1}(a_{n-1}+1)a_n}. \quad (1.11)$$

Рівність (1.11) називається розкладом числа x в знакозмінний ряд Люрота (або \tilde{L} -зображенням числа x) і символічно зображається $\Delta_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}^{\tilde{L}}$. Відомо [59], кожне дійсне число є раціональним тоді і тільки тоді, коли його \tilde{L} -зображення є скінченим або періодичним.

Якщо (c_1, c_2, \dots, c_n) – заданий набір натуральних чисел, то циліндром рангу n з основою $c_1 c_2 \dots c_n$ називається множина $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^{\tilde{L}}$

$$\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^{\tilde{L}} = \{x | x = \Delta_{a_1 a_2 \dots a_n a_{n+1} \dots}^{\tilde{L}}, a_i(x) = c_i, i = 1, 2, \dots, m\}.$$

Циліндри мають наступні властивості:

1. $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^{\tilde{L}} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Delta_{c_1 c_2 \dots c_n i}^{\tilde{L}}$.
2. $\sup \Delta_{c_1 c_2 \dots c_{2m-1} i}^{\tilde{L}} = \inf \Delta_{c_1 c_2 \dots c_{2m-1} (i+1)}^{\tilde{L}}$;
 $\inf \Delta_{c_1 c_2 \dots c_{2m} i}^{\tilde{L}} = \sup \Delta_{c_1 c_2 \dots c_{2m} (i+1)}^{\tilde{L}}$.
3. Циліндр $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^{\tilde{L}}$ є півінтервалом $(l_1, l_2]$, якщо n – непарне, або піввідрізком $[l_2, l_1)$, якщо n – парне.
4. $|\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^{\tilde{L}}| = \frac{1}{c_1(c_1+1) \cdots c_n(c_n+1)} \leq \frac{1}{2^n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$.
5. Основне метричне відношення

$$\frac{|\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n i}^{\tilde{L}}|}{|\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^{\tilde{L}}|} = \frac{1}{i(i+1)} \leq \frac{1}{2}.$$

Детальне дослідження знакозмінних рядів Люрота (метричні властивості та геометрія зображення, властивості розподілу випадкової неповної суми тощо) представлені у роботах М. В. Працьовитого і Ю. В. Хворостіни (напр., [58, 59, 100]).

1.1.5. s -кова та нега- s -кова системи числення. Відомо, що будь-яке дійсне число $x \in [0; 1]$ однозначно розкладається в ряд

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{s^k} = \frac{\alpha_1}{s} + \frac{\alpha_2}{s^2} + \dots + \frac{\alpha_k}{s^k} + \dots \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \dots}^s, \quad (1.12)$$

де $\alpha_k \in A_s \equiv \{0, 1, \dots, s-1\}$, $s \geq 2$, який називається s -ковим дробом числа x . Число α_k називається k -ою s -ковою цифрою числа x .

Зліченна множина чисел з $[0; 1]$ розкладається в ряд (1.12) неоднозначно:

$$\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k(0)}^s = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots [\alpha_k-1](s-1)}^s,$$

де круглі дужки означають період. Такі числа називаються s -ково раціональними. Для уникнення неоднозначності часто домовляються не використовувати розклад, який, наприклад, містить період $(s-1)$. Після цього між числами з відрізка $[0; 1]$ і нескінченними наборами з символів $0, 1, \dots, s-1$ встановлюється бієкція.

s -ковим циліндром рангу m з основою $c_1 c_2 \dots c_m$ називається множина $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^s$ всіх чисел з відрізка $[0; 1]$, які мають перші m s -кові цифри відповідно рівні c_1, c_2, \dots, c_m .

Кожен s -ковий циліндр рангу $m \in$ відрізком, причому

$$\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^s = \left[\sum_{i=1}^m \frac{c_i}{s^i}; \frac{1}{s^m} + \sum_{i=1}^m \frac{c_i}{s^i} \right].$$

s -кові циліндри мають наступні властивості:

1. $|\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^s| = s^{-m}$;
2. $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^s = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m 0}^s \cup \dots \cup \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m [s-1]}^s$;
3. $\bigcap_{m=1}^{\infty} \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^s = x \equiv \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m \dots}^s$ для довільної послідовності $(c_m) \in L \equiv A_s \times A_s \times \dots$;
4. $\frac{|\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m i}^s|}{|\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^s|} = \frac{1}{s}$ — основне метричне відношення.

Відомо, що для довільного числа $x \in [0; 1]$ існує послідовність (ω_n) , $\omega_n \in \{0, 1, \dots, s-1\}$, така що

$$x = \frac{s}{s+1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_n}{(-s)^n} = \frac{s}{s+1} - \frac{\omega_1}{s} + \frac{\omega_2}{s^2} - \frac{\omega_3}{s^3} + \dots \equiv \bar{\Delta}_{\omega_1\omega_2\dots\omega_n\dots}^s.$$

Таке подання числа називається *нега- s -ковим зображенням*.

Лема 1.1.3. Числа $x = \bar{\Delta}_{\omega_1\omega_2\dots\omega_m([s-1]_0)}^s$ і $x' = \bar{\Delta}_{\omega_1\omega_2\dots[\omega_m-1](0[s-1])}^s$ рівні.

Доведення. Розглянемо різницю

$$\begin{aligned} |x-x'| &= \left| \left(\frac{\omega_m}{s^m} - \frac{s-1}{s^{m+1}} + \frac{0}{s^{m+2}} - \dots \right) - \left(\frac{\omega_m-1}{s^m} - \frac{0}{s^{m+1}} + \frac{s-1}{s^{m+2}} - \dots \right) \right| = \\ &= \frac{1}{s^m} \left| \left(\omega_m - \frac{s-1}{s} - \frac{s-1}{s^3} - \dots \right) - \left(\omega_m - 1 + \frac{s-1}{s^2} + \frac{s-1}{s^4} + \dots \right) \right| = \\ &= \frac{1}{s^m} \left| -\frac{s-1}{s} \frac{s^2}{s^2-1} + 1 - \frac{s-1}{s^2} \frac{s^2}{s^2-1} \right| = \\ &= \frac{1}{s^m} \left| \frac{-s + s + 1 - 1}{s+1} \right| = 0. \quad \square \end{aligned}$$

Відомі критерії раціональності числа у s -ковій і нега- s -ковій системі числення: *для того, щоб число $x \in [0; 1]$ було раціональним, необхідно і достатньо, щоб його s -кове (нега- s -кове) зображення було періодичним.*

Зауважимо, що нега- s -кове зображення, як показано в [42], є перекодуванням класичного s -кового зображення чисел. Зв'язок між s -ковим і нега- s -ковим зображеннями числа x має вигляд:

$$\Delta_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\dots}^s = \bar{\Delta}_{[s-1-\alpha_1]\alpha_2[s-1-\alpha_3]\alpha_4\dots}^s.$$

Зокрема відомо, що для довільного $x \in [0; 1]$ існує послідовність (α_n) , $\alpha_n \in A_3 \equiv \{0, 1, 2\}$, така що

$$x = \frac{3}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{(-3)^n} = \frac{3}{4} - \frac{\alpha_1}{3} + \frac{\alpha_2}{3^2} - \frac{\alpha_3}{3^3} + \dots \equiv \bar{\Delta}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\dots}^3.$$

Таке подання числа у вигляді ряду називається *нега-трійковим представленням*, а символічний запис $x = \bar{\Delta}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\dots}^3$ – його нега-трійковим

зображенням. Кожне ірраціональне число має нескінченне неперіодичне зображення, а кожне раціональне можна подати у вигляді нескінченного періодичного нега-трійкового зображення не більш ніж двома способами. Причому, для чисел, які можна подати у вигляді двох нега-трійкових зображень, останні мають вигляд:

$$x \equiv \bar{\Delta}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}\alpha_n}^3(20) = \bar{\Delta}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}[\alpha_n-1](02)}^3 \equiv x', \quad (1.13)$$

де круглі дужки означають період.

Циліндром рангу m з основою $c_1c_2\dots c_m$ нега-трійкового зображення чисел називається множина

$$\bar{\Delta}_{c_1c_2\dots c_m}^3 = \{x | x = \bar{\Delta}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m\alpha_{m+1}\dots}^3, \alpha_i(x) = c_i, i = 1, 2, \dots, m\}.$$

Циліндр є відрізком, а саме:

$$\bar{\Delta}_{c_1c_2\dots c_m}^3 = \begin{cases} \left[\bar{\Delta}_{c_1c_2\dots c_m}^3(20), \bar{\Delta}_{c_1c_2\dots c_m}^3(02) \right], & \text{якщо } m - \text{ парне;} \\ \left[\bar{\Delta}_{c_1c_2\dots c_m}^3(02), \bar{\Delta}_{c_1c_2\dots c_m}^3(20) \right], & \text{якщо } m - \text{ непарне.} \end{cases}$$

Циліндри одного рангу збігаються або не мають спільних внутрішніх точок.

1.2. Фрактальний аналіз функцій

Неперервні функції з фрактальними властивостями — популярний об'єкт у дослідженнях минулих десятиріч. Це функції, які володіють властивостями самоподібності, самоафінності, автомодельності (графіків або рівнів); функції, множини особливостей яких мають неоднорідну локальну тополого-метричну структуру тощо. Значний клас таких функцій утворюють ніде не монотонні, скрізь або майже скрізь недиференційовні функції.

Сьогодні відомо чимало класів неперервних ніде не диференційовних функцій, які належать сім'ї ніде не монотонних функцій [47, 54, 62]. Окремим прикладом такої функції сьогодні мало кого здивуєш. Більш актуальними є методи вивчення їхніх властивостей, схеми дослідження, нові прийоми обґрунтування фактів.

Задання й дослідження функцій зі складними локальними властивостями за допомогою перетворювачів цифр різним систем числення займались М. В. Працьовитий та І. В. Замрій (функції, пов'язані з Q_3 -зображенням), Я. В. Гончаренко та І. М. Лисенко (функції, пов'язані з q_0^∞ -зображенням), М. В. Працьовитий та Н. А. Василенко (функції, пов'язані з Q^* -зображенням), М. В. Працьовитий та Т. М. Ісаєва (функції, пов'язані з Δ^μ -зображенням).

Означення 1.2.1. Відмінна від сталої неперервна функція обмеженої варіації, похідна якої майже скрізь (у розумінні міри Лебега) дорівнює нулю, називається сингулярною.

Одним із найпростіших прикладів строго зростаючої сингулярної функції є функція Салема [106]. Нагадаємо її означення як проектора двійкових цифр.

Нехай $Q_2 \equiv \{q_0, q_1\}$ – фіксована множина, $0 < q_0 < 1$, $q_1 = 1 - q_0$. Відомо [45], що Q_2 -представленням (зображенням) дійсного числа $x \in [0; 1]$ називається його подання у вигляді

$$x = \gamma_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\gamma_{\alpha_k} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j} \right) \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{Q_2},$$

де $\gamma_0 = 0$, $\gamma_1 = q_0$, $\alpha_k \in \{0, 1\}$. Тоді функція $y = f(x)$, аргумент якої подано

у двійковому зображенні $x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^2 \equiv \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2^2} + \dots + \frac{\alpha_m}{2^m} + \dots$, а значення функції подано у Q_2 -зображенні з тими ж самими елементами $y = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{Q_2}$, називається функцією Салема.

Іншим цікавим прикладом неперервної строго зростаючої сингулярної функції є функція Мінковського $\varphi(x)$, побудована ним у 1911 році. А. Denjoy у 1932 році довів її сингулярність [73], а R. Salem у 1943 році показав, що функція $\varphi(x)$ в ірраціональних точках відрізка $[0; 1]$ аналітично виражається рядом

$$\varphi(x) = \varphi([0; a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]) = 2^{1-a_1} - 2^{1-(a_1+a_2)+\dots+(-1)^{n-1}2^{1-a_1+\dots+a_n}} + \dots,$$

де $a_n \in \mathbb{N}$, а у раціональних точках відрізка $[0; 1]$ – скінченною сумою.

Означення 1.2.2. Функція називається ніде не монотонною, якщо вона не має жодного, як завгодно малого, проміжку монотонності.

Неперервними ніде не монотонними функціями в останній час займались М. В. Працьовитий, А. В. Калашніков, Н. А. Василенко. Так, у роботі [15] досліджуються диференціальні, самоафінні, фрактальні та інші властивості скінченнопараметричної сім'ї функцій, які пов'язані з Q -зображенням дійсних чисел і які мають континуальну множину особливостей. У [47] означається й досліджується континуальна сім'я неперервних на $[0; 1]$ ніде не монотонних функцій.

Означення 1.2.3. Неперервна функція називається ніде не диференційовною, якщо вона не має скінченної похідної в жодній точці області визначення.

У 1903 році Такагі [109] побудував приклад неперервної ніде не диференційовної функції:

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi(2^n x)}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \varphi_0(2^n x),$$

де $\varphi_0(x)$ – відстань від точки x до найближчої цілочисельної точки, тобто є періодичною функцією з періодом 1, яка на відріжку $[0; 1]$ визначається рівністю

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} x & \text{при } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}; \\ 1 - x & \text{при } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Ще одним прикладом неперервної ніде не диференційовної функції є Трибін-функція, яка введена М. В. Працьовитим у [39], і пізніше вивчалась у роботах В. В. Ковалю [19], О. Б. Панасенка [35, 36] та ін.

Нехай $\bar{q} = (q_0, q_1, q_2)$ і (g_0, g_1) – додатні стохастичні вектори ($q_i > 0, q_0 +$

$$q_1 + q_2 = 1, 0 < g_0 < 1, g_1 = 1 - g_0);$$

$$x = \beta_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\beta_{\alpha_k} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j} \right) = \Delta_{\alpha_1(x)\dots\alpha_n(x)\dots}^{Q_3},$$

$$\text{де } \beta_0 = 0, \beta_{\alpha_k} = \sum_{i=0}^{\alpha_k-1} q_i, k \in N, (\alpha_k) \in L_3,$$

$$y = \delta_{a_1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\delta_{a_k} \prod_{j=1}^{k-1} g_{a_j} \right) = \Delta_{a_1(y)\dots a_n(y)\dots}^{G_2},$$

$$\text{де } \delta_0 = 0, \delta_{a_k} = \sum_{i=0}^{a_k-1} g_i, k \in N, (a_k) \in L_2.$$

Трибін-функцією називається функція, означена рівністю

$$y = f(\Delta_{\alpha_1(x)\dots\alpha_n(x)\dots}^{Q_3}) = \Delta_{a_1(y)\dots a_n(y)\dots}^{G_2},$$

де

$$a_1 = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \alpha_1(x) = 0; \\ 1, & \text{якщо } \alpha_1(x) \neq 0; \end{cases} \quad a_k = \begin{cases} a_{k-1}, & \text{якщо } \alpha_k(x) = \alpha_{k-1}(x); \\ 1 - \alpha_{k-1}, & \text{якщо } \alpha_k(x) \neq \alpha_{k-1}(x), k > 1. \end{cases}$$

Теорема 1.2.1. Трибін-функція має наступні властивості:

1. є неперервною на відрізку $[0; 1]$;
2. є ніде не диференційовною;
3. для кожного $x \in [0; 1]$ виконується рівність $f\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{1}{2}f(x)$;
4. фрактальна клітинкова розмірність графіка функції Γ_f дорівнює

$$2 - \log_3 2 \approx 1,36907;$$

5. розмірність Гаусдорфа-Безиковича графіка функції дорівнює

$$\alpha_0(\Gamma_f) = \log_2(1 + 2^{\log_3 2}) \approx 1,34968;$$

6. для інтеграла Лебега має місце рівність

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{4}{7}.$$

Висновки до розділу 1

Цей розділ має вступний характер. У ньому розглядаються деякі системи кодування дійсних чисел зі скінченним (s -кова й не s -кова системи числення, ланцюгові дроби Данжуа, ланцюгові A_2 -дроби) і нескінченним (елементарні ланцюгові дроби, ряди Люрота) алфавітами. Подані критерії раціональності чисел, властивості циліндрів вказаних зображень і сформульовані інші необхідні факти, які будуть використовуватись у наступних розділах. Проведено огляд літератури з тематики дослідження.

Функції зі складними локальними властивостями є базовим поняттям даного дослідження, тож у розділі 1 наведені означення таких понять, як сингулярна функція, ніде не монотонна функція, ніде не диференційовна функція і відомі приклади таких функцій.

Цей розділ не містить результатів, які виносяться на захист.

РОЗДІЛ 2

ФУНКЦІЇ І ПЕРЕТВОРЕННЯ, ЩО ЗБЕРІГАЮТЬ ХВОСТИ ЗОБРАЖЕННЯ ЧИСЕЛ ЕЛЕМЕНТАРНИМИ ЛАНЦЮГОВИМИ ДРОБАМИ

У цьому розділі основним засобом зображення чисел є елементарний ланцюговий дріб і нескінченний алфавіт, а об'єктами дослідження є функції, які зберігають хвости зображення чисел. Геометрія такого зображення чисел не є самоподібною, що створює технічні і змістовні труднощі при розв'язуванні задач метричного характеру, але це суттєво збагачує теорію об'єктами, прийомами, методами, схемами дослідження. Заради коректності означень об'єктів дослідження домовимось використовувати те зображення раціональних чисел, останній елемент якого відмінний від одиниці.

2.1. Функції, задані перетворювачами першого елемента зображення чисел

Нехай i – довільне фіксоване натуральне число, $\varphi_i(j)$ – задана натуральна функція натуральної змінної j , залежна від параметра i . Розглядається функція f_{φ_i} , означена рівністю

$$y = f_{\varphi_i}(x) = [\varphi_i(a_1), a_2, \dots, a_n, \dots], \quad \text{де } x = [a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]. \quad (2.1)$$

Зауважимо, що значення функції, яка задається виразом (2.1), є різними для різних зображень раціонального числа.

У точці $x = 1$ довизначимо функцію $f_{\varphi_i}(x)$ по неперервності:

$$f_{\varphi_i}(1) := \lim_{x \rightarrow 1} f_{\varphi_i}(x) = [\varphi_i(1)].$$

Теорема 2.1.1. Функція f_{φ_i} на кожному циліндрі першого рангу є неперервною й строго зростаючою функцією, причому на $\Delta_{a_1}^{c.f.}$ виражається формулою:

$$f_{\varphi_i}(x) = \frac{x}{(\varphi_i(a_1) - a_1)x + 1}.$$

Доведення. На кожному циліндрі першого рангу $\Delta_{a_1}^{c.f.}$ значення $a_1 = const$, отже, для кожного $i \in \mathbb{N}$ $\varphi_i(a_1) = const$. Тоді

$$f_{\varphi_i}(x) = \frac{1}{\varphi_i(a_1) + \frac{1}{a_2 + \dots}} = \frac{1}{\varphi_i(a_1) + \frac{1}{x} - a_1} = \frac{x}{(\varphi_i(a_1) - a_1)x + 1}.$$

Припустимо, що $(\varphi_i(a_1) - a_1)x + 1 = 0$. Тоді

$$x = \frac{1}{a_1 - \varphi_i(a_1)} \notin \Delta_{a_1}^{c.f.} = \left[\frac{1}{a_1 + 1}; \frac{1}{a_1} \right].$$

Дійсно, якщо $\varphi_i(a_1) > a_1$, то $x < 0$, якщо $\varphi_i(a_1) < a_1$, то

$\frac{1}{a_1 - \varphi_i(a_1)} > \frac{1}{a_1} = \max \Delta_{a_1}^{c.f.}$. Отже, $(\varphi_i(a_1) - a_1)x + 1 \neq 0$, що й доводить неперервність функції на циліндрі першого рангу.

Нехай $x_1 = [a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]$, $x_2 = [a_1, a'_2, \dots, a'_n, \dots]$.

Якщо $\Delta_{a_1}^{c.f.} \ni x_1 < x_2 \in \Delta_{a_1}^{c.f.}$, то $\exists n \in \mathbb{N}$ таке, що

$$\left[\begin{cases} a_i = a'_i, i = 1, \dots, n, \\ a_{2n+1} > a'_{2n+1}, \\ a_i = a'_i, i = 1, \dots, 2n-1, \\ a_{2n} < a'_{2n}. \end{cases} \right.$$

Така сукупність означає, що

$$[\varphi_i(a_1), a_2, \dots, a_n, \dots] < [\varphi_i(a_1), a'_2, \dots, a'_n, \dots],$$

тобто $f_{\varphi_i}(x_1) < f_{\varphi_i}(x_2)$, що й доводить строге зростання функції $f_{\varphi_i}(x)$ на кожному циліндрі першого рангу. \square

Теорема 2.1.2. Функція f_{φ_i} є неперервною на півінтервалі $(0; 1]$ тоді і лише тоді, коли $\varphi_i(a_1) = \varphi(i) + a_1$.

Доведення. Д о с т а т н і с т ь. Нехай $\varphi_i(a_1) = \varphi(i) + a_1$. Тоді

$$f_{\varphi_i}(x) = \frac{1}{\varphi_1(i) + a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}} = \frac{1}{\varphi(i) + \frac{1}{x}} = \frac{x}{\varphi(i)x + 1}.$$

Очевидно, функція неперервна на $(0; 1]$.

Н е о б х і д н і с т ь. Нехай $f_{\varphi_i}(x)$ неперервна на $(0; 1]$. Розглянемо спільний кінець циліндрів $\Delta_n^{c.f.}$ і $\Delta_{n+1}^{c.f.}$, тобто точку $x_0 = \frac{1}{n+1}$. Виберемо дві послідовності: $x_k^{(1)} = [n, 1, k] \rightarrow x_0$ справа при $k \rightarrow \infty$,

$$x_k^{(2)} = [n+1, k] \rightarrow x_0 \text{ зліва при } k \rightarrow \infty, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Тоді

$$A \equiv \lim_{k \rightarrow \infty} f_{\varphi_i}(x_k^{(1)}) = \lim_{k \rightarrow \infty} [\varphi_i(n), 1, k] = [\varphi_i(n), 1],$$

$$B \equiv \lim_{k \rightarrow \infty} f_{\varphi_i}(x_k^{(2)}) = \lim_{k \rightarrow \infty} [\varphi_i(n+1), k] = [\varphi_i(n+1)].$$

З умови неперервності функції в точці x_0 випливає, що

$$A = B = f_{\varphi_i}(x_0).$$

Таким чином, маємо систему функціональних рівнянь:

$$\varphi : N^2 \rightarrow N, \quad \varphi_i(n) + 1 = \varphi_i(n+1).$$

Підставляючи по чергово замість n значення $0, 1, 2, \dots, t$ отримуємо на-

ступню систему рівностей:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_i(1) - \varphi_i(0) = 1, \\ \varphi_i(2) - \varphi_i(1) = 1, \\ \varphi_i(3) - \varphi_i(2) = 1, \\ \dots\dots\dots, \\ \varphi_i(m-1) - \varphi_i(m-2) = 1, \\ \varphi_i(m) - \varphi_i(m-1) = 1. \end{array} \right.$$

Додавши ці рівності, і перепозначивши $\varphi_i(0) = \varphi(i)$ отримуємо вираз для функції $\varphi_i(m)$: $\varphi_i(m) = \varphi(i) + m$. \square

Розглянемо два найпростіші представники класу функцій, означених рівністю (2.1).

Лема 2.1.1. *Функція $v_i(x)$, означена рівностями*

$$v_i([a_1, a_2, \dots, a_n]) = [i + a_1, a_2, \dots, a_n],$$

$$v_i([a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]) = [i + a_1, a_2, \dots, a_n, \dots],$$

має аналітичний вираз

$$v_i(x) = \frac{x}{ix + 1}$$

i є неперервною монотонно зростаючою на $(0; 1]$ функцією, графік якої є опуклий вгору, а інтеграл виражається формулою:

$$\int_0^1 v_i(x) dx = -\frac{\ln(1+i)}{i^2} + \frac{1}{i}.$$

Доведення. Аналітичний вираз функції, її неперервність на $(0; 1]$ і монотонність випливає з теорем 2.1.1 і 2.1.2. Друга похідна

$$v_i''(x) = -2i(ix + 1)^{-3}$$

набуває лише від'ємних значень, тому графік функції є опуклим вгору. \square

Лема 2.1.2. Функція $u_i(x)$, яка для кожного натурального значення параметра i визначається у ірраціональних точках півінтервала $(0; 1]$ рівністю

$$u_i([a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]) = ([ia_1, a_2, \dots, a_n, \dots]),$$

і доозначається у всіх раціональних точках рівністю

$$u_i([a_1, a_2, \dots, a_n]) = ([ia_1, a_2, \dots, a_n])$$

на кожному циліндрі першого рангу є неперервною й строго зростаючою функцією, причому

$$u_i(x) = \frac{x}{n(i-1)x+1}, \quad \text{де } a_1(x) = n,$$

а на кінцях циліндрів має розриви першого роду, причому стрибок функції

$$\text{у точці } x = \frac{1}{n+1} = \max \Delta_{n+1}^{c.f.} \text{ рівний } \frac{i-1}{(in+1)(n+1)i}.$$

Доведення. Нехай $x \in \Delta_n^{c.f.}$, тобто $x = [n, a_2(x), a_3(x), \dots, a_k(x), \dots]$.

Тоді

$$u_i(x) = \frac{1}{in + \frac{1}{a_2 + \dots}} = \frac{1}{in + \frac{1}{x} - n} = \frac{x}{n(i-1)x+1}.$$

Враховуючи те, що знаменник не перетворюється в 0 в точках циліндра, доходимо висновку про неперервність функції на циліндричному інтервалі першого рангу. На кожному циліндрі першого рангу функція $u_i(x)$ є дробово-лінійною функцією, похідна якої

$$u_i'(x) = \frac{1}{(a_1(i-1)x+1)^2}$$

набуває лише додатних значень.

Оскільки

$$B = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{n+1} - 0} u_i(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{n+1}} \frac{x}{(n+1)(i-1)x+1} = \frac{1}{i(n+1)} = u_i([n+1]),$$

то функція $u_i(x)$ є неперервною зліва в точці $\frac{1}{n+1}$. Обчисливши границю

$$A = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{n+1} + 0} u_i(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{n+1}} \frac{x}{n(i-1)x + 1} = \frac{1}{in + 1}$$

отримуємо, що розрив у точці $\frac{1}{n+1}$ складає:

$$\Delta u_i \left(\frac{1}{n+1} \right) = |A - B| = \left| \frac{1}{in + 1} - \frac{1}{i(n+1)} \right| = \frac{i-1}{(in+1)(n+1)i}$$

□

Очевидно, що клас функцій $u_i(x)$ містить лінійну функцію $u_1(x) = x$ і

$$u_i \left(\frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{i(n+1)}, i \in \mathbb{N}.$$

Наслідок 2.1.1. На циліндрі першого рангу визначений інтеграл від функції $u_i(x)$ виражається формулою:

$$\int_{[a_1+1]}^{[a_1]} u_i(x) dx = \frac{i-1 - (a_1+1) \ln \frac{i(a_1+1)}{ia_1+1}}{(i-1)^2(a_1+1)a_1^2}.$$

Лема 2.1.3. Для кожного $x \in (0; 1]$ мають місце співвідношення:

$$u_i(x) > v_i(x) \text{ за умови } i = 1 \vee a_1 = 1;$$

$$u_i(x) = v_i(x) \text{ за умови } i = a_1 = 2;$$

$$u_i(x) < v_i(x) \text{ у всіх інших випадках.}$$

Доведення. Розглянемо різницю $u_i(x) - v_i(x)$:

$$u_i(x) - v_i(x) = \frac{x}{a_1(i-1)x + 1} - \frac{x}{ix + 1} = \frac{x^2(a_1 + i - a_1i)}{(ix + 1)(a_1(i-1)x + 1)}.$$

Для дослідження проміжків знакосталості останнього дробу достатньо розглянути знак виразу $a_1 + i - a_1 i$. При $i = 1$ або $a_1 = 1$ даний вираз набуває значення 1, отже $u_i(x) > v_i(x)$. При $i = a_1 = 2$ вираз $a_1 + i - a_1 i$ перетворюється в 0, отже $u_i(x) = v_i(x)$. В усіх інших випадках вираз $a_1 + i - a_1 i$ набуває лише від'ємних значень, з чого випливає остання нерівність леми. \square

Наслідок 2.1.2. Рівняння

$$u_i(x) = v_i(x) \quad (2.2)$$

має континуальну множину розв'язків при $a_1 = i = 2$ і не має розв'язків у всіх інших випадках.

Іншими словами, при $i = 2$ будь-яке число у формі $[2, a_1, a_2, \dots]$ буде розв'язком рівняння (2.2).

2.2. Оператори лівостороннього та правостороннього зсувів цифр зображення

Розглянемо оператор лівостороннього зсуву цифр $T(x)$, заданий рівністю (1.2), причому доозначимо його по неперервності: $T(1) := 0$.

Лема 2.2.1. *Оператор лівостороннього зсуву цифр $T(x)$ є кусково-неперервною функцією, яка на циліндрах першого рангу аналітично задається формулою:*

$$T(x) = \frac{1}{x} - a_1(x). \quad (2.3)$$

У кожній точці у формі $\frac{1}{i+1}$, $i \in \mathbb{N}$ функція має розрив першого роду зі стрибком 1.

$$\text{Доведення. Дійсно, оскільки } x = \frac{1}{a_1(x) + \frac{1}{a_2(x) + \dots}} = \frac{1}{a_1(x) + T(x)},$$

то $T(x) = \frac{1}{x} - a_1(x)$. Стрибок функції у точках у формі $x = [i + 1]$, $i \in \mathbb{N}$

дорівнює:

$$\begin{aligned} \Delta T([i+1]) &= \left| \lim_{x \rightarrow \frac{1}{i+1}-0} T(x) - \lim_{x \rightarrow \frac{1}{i+1}+0} T(x) \right| = \\ &= \left| \lim_{x \rightarrow \frac{1}{i+1}-0} a_1(x) - \lim_{x \rightarrow \frac{1}{i+1}+0} a_1(x) \right| = (i+1) - i = 1. \quad \square \end{aligned}$$

Зауважимо, що зв'язок між функціями $T(x)$ і $u_i(x)$ виражається формулою:

$$u_i(x) = \frac{1}{ia_1 + T(x)}.$$

Нехай i – натуральний параметр. Оператор, залежний від параметра i , коректно означений на півінтервалі $(0; 1]$ рівностями

$$\delta_i(x) = [i, a_1, a_2, \dots, a_n], \quad \delta_i(x) = [i, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots], \quad i = 1, 2, \dots$$

відповідно і доозначений за неперервністю: $\delta_i(0) := \frac{1}{i}$ називається *оператором правостороннього зсуву елементів* зображення чисел елементарним ланцюговим дробом.

Очевидними є рівності: $T(\delta_i(x)) = x$ і $\delta_{a_1(x)}(T(x)) = x$.

Лема 2.2.2. *Функція $\delta_i(x)$ аналітично виражається формулою*

$$\delta_i(x) = \frac{1}{i+x}$$

i є неперервною і строго спадною на $[0; 1]$, причому множиною її значень є проміжок:

$$\left[\frac{1}{i+1}; \frac{1}{i} \right].$$

Доведення. Дійсно,

$$\delta_i(x) = \frac{1}{i + \frac{1}{a_1 + \dots}} = \frac{1}{i+x}.$$

Неперервність і монотонність легко доводиться засобами математичного аналізу. □

Лема 2.2.3. Якщо i — фіксоване натуральне число, то рівняння

$$\delta_i(x) = T(x) \quad (2.4)$$

має зліченну множину розв'язків:

$$x_n^{(i)} = [n, i, n, i, \dots] = [\overline{n, i}], \quad n \in \mathbb{N},$$

кожен з яких є ірраціональним числом.

Доведення. На множині ірраціональних чисел рівняння (2.4) можна записати у вигляді

$$[i, a_1(x), a_2(x), \dots] = [a_2(x), a_3(x), \dots]. \quad (2.5)$$

З єдиності зображення ірраціонального числа елементарним ланцюговим дробом, маємо одночасне виконання рівностей:

$$i = a_2, \quad a_1 = a_3, \quad a_2 = a_4 = i, \quad a_3 = a_5 = a_1, \quad \dots,$$

система яких рівносильна (2.5). Звідки бачимо, що при довільному натуральному $a_1 = n$ число $x = [\overline{n, i}]$ є розв'язком рівняння (2.4).

Скінченний ланцюговий дріб не може бути розв'язком рівняння (2.4), оскільки неможливою є рівність

$$[i, a_1, a_2, \dots, a_n] = [a_2, \dots, a_n],$$

права частина якої містить на два елементи менше, ніж ліва. □

2.3. Неперервні перетворення, які зберігають хвости елементарного ланцюгового зображення чисел

Лема 2.3.1. Функція

$$f(x) = \begin{cases} \delta_1(x), & \text{якщо } 0 \leq x \leq x_1^{(1)}; \\ T(x), & \text{якщо } x_1^{(1)} \leq x \leq 1, \end{cases} \quad (2.6)$$

є неперервною і строго спадною на $[0; 1]$, причому $f(0) = 1$ і $f(1) = 0$.

Доведення. Це твердження випливає з того, що функція $\delta_1(x)$ є неперервною і строго спадною на відрізку $[0; 1]$, а $T(x)$ є неперервною і строго спадною на циліндрах першого рангу, причому $\delta_1(0) = 1$, $T(1) = 0$ і $x_1^{(1)} \in \Delta_1^{c.f.}$. \square

Означення 2.3.1. Кажуть, що функція $\varphi(x)$, яка визначена на відрізку $[0; 1]$ і набуває значень з $[0; 1]$, зберігає хвости елементарного ланцюгового зображення чисел, якщо для будь-якого $x \in [0; 1]$ існують такі цілі невід'ємні числа $k = k(x)$ і $m = m(x)$, що мають місце рівності $a_{k+j}(x) = a_{m+j}(\varphi(x))$ для кожного $j \in \mathbb{N}$.

Найпростішими функціями, які зберігають хвости елементарного ланцюгового зображення є функції $f(x) = x$, $T(x)$ і $\delta_i(x)$. Для них числа k і m є абсолютними константами, причому для першої з них $k = 0 = m$, для другої $k = 1, m = 0$, для третьої $k = 0, m = 1$.

Нагадаємо, що *перетворенням* непорожньої множини X називається бієктивне відображення цієї множини на себе. Кожне перетворення відрізка $[0; 1]$ є функцією, але не кожна функція є перетворенням. Неперервні перетворення відрізка $[0; 1]$ вичерпуються строго монотонними функціями з множиною значень $[0; 1]$.

Функції $T(x)$ і $\delta_i(x)$ не є перетвореннями відрізка $[0; 1]$, але функція, визначена рівністю (2.6) є неперервним перетворенням $[0; 1]$.

Теорема 2.3.1. *Якщо s – фіксоване натуральне число, (n_1, n_2, \dots, n_s) , (m_1, m_2, \dots, m_s) – задані набори натуральних чисел, що задовольняють умови*

$$1 < n_1 < n_2 < \dots < n_s, \quad m_1 > m_2 > \dots > m_s > 1,$$

то функція

$$f(x) = \begin{cases} \delta_1(x), & 0 \leq x \leq x_{m_1}^{(1)}, \\ T(x), & x_{m_1}^{(1)} < x \leq x_{m_1}^{(n_1)}, \\ \delta_{n_1}(x), & x_{m_1}^{(n_1)} < x \leq x_{m_2}^{(n_1)}, \\ T(x), & x_{m_2}^{(n_1)} < x \leq x_{m_2}^{(n_2)}, \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots, \\ \delta_{n_s}(x), & x_{m_s}^{(n_s)} < x \leq x_1^{(n_s)}, \\ T(x), & x_1^{(n_s)} < x \leq 1; \end{cases} \quad (2.7)$$

є неперервним строго спадним перетворенням $[0; 1]$, що зберігає хвости зображення чисел елементарними ланцюговими дробами і фрактальну розмірність Гаусдорфа-Безиковича борелівських множин.

Доведення. Дане твердження випливає з того, що функція $\delta_i(x)$ є неперервною і строго спадною на відрізку $[0; 1]$, а функція $T(x)$ є неперервною і строго спадною на циліндрах першого рангу. Причому, розв'язком рівняння $\delta_i(x) = T(x)$ на циліндрі рангу m є число $x_m^{(i)}$. Функції $T(x)$ і $\delta_i(x)$ зберігають фрактальну розмірність Гаусдорфа-Безиковича борелівських множин, тобто кожна борелівська підмножина $[0; 1]$ і її образ мають однакову розмірність, що випливає з аналітичних виразів цих функцій і результатів роботи [57]. Тому такою є і функція $f(x)$, яка є «скінченною комбінацією» функцій $T(x)$ і $\delta_i(x)$. \square

Наслідок 2.3.1. *Функція $F(x) = 1 - f(x)$ є абсолютно неперервною функцією розподілу ймовірностей на відрізку $[0; 1]$.*

2.4. Інші функції, які зберігають хвости зображення

Нехай k — деяке фіксоване натуральне число, $f(a_1, a_2, \dots, a_k)$ — натуральна функція натуральних змінних a_1, a_2, \dots, a_k . Простими прикладами таких функцій при $k = 2$ є:

$$f_1(n, m) = n + m, \quad f_2(n, m) = n \cdot m, \quad f_3^i(n, m) = |n - m| + i, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Означимо клас функцій рівністю:

$$\begin{aligned}\tau_f(x) &= \tau_f([a_1(x), a_2(x), a_3(x), \dots]) = \\ &= [f(a_1(x), a_2(x), \dots, a_k(x)), a_{k+1}(x), a_{k+2}(x), \dots)].\end{aligned}$$

Лема 2.4.1. Функція $\tau_f(x)$ задається формулою:

$$\tau_f(x) = \frac{1}{f(a_1, a_2, \dots, a_k) + T^k(x)} \quad (2.8)$$

і є неперервною і монотонно зростаючою (спадною) на кожному із циліндрів k -го рангу при непарному (парному) значенні k , множиною значень якої є півінтервал $\left(\frac{1}{f(a_1, a_2, \dots, a_k) + 1}, \frac{1}{f(a_1, a_2, \dots, a_k)} \right]$.

Доведення. Рівність (2.8) є очевидною. Враховуючи, що функція

$$f(a_1(x), a_2(x), \dots, a_k(x))$$

на кожному із циліндрів k -го рангу є сталою, а функція $T^k(x)$ є зростаючою (спадною) при парному (непарному) k , отримуємо, що функція $\tau_f(x)$ є зростаючою (спадною) при непарному (парному) k . Неперервність функції $\tau_f(x)$ впливає з неперервності оператора зсуву $T^k(x)$. Множина значень впливає з рівностей:

$$T^k([a_1, a_2, \dots, a_k]) = 0, \quad T^k([a_1, a_2, \dots, a_k + 1]) = 1. \quad \square$$

Лема 2.4.2. Якщо f і g — натуральні функції натуральних аргументів $a_1(x), a_2(x), \dots, a_k(x)$, то зв'язок між функціями $\tau_f(x)$ і $\tau_g(x)$ встановлюється рівністю:

$$\tau_f(x) = \frac{\tau_g(x)}{(f(x) - g(x))\tau_g(x) + 1}.$$

Доведення. Оскільки $\tau_g(x) = \frac{1}{g(x) + T^k(x)}$, то $T^k(x) = \frac{1}{\tau_g(x)} - g(x)$.

Тоді

$$\tau_f(x) = \frac{1}{f(x) + \frac{1}{\tau_g(x)} - g(x)} = \frac{\tau_g(x)}{(f(x) - g(x))\tau_g(x) + 1}. \quad \square$$

Лема 2.4.3. Аналітично функції $\tau_{f_1}(x), \tau_{f_2}(x), \tau_{f_3^i}(x)$ задаються формулами:

$$\begin{aligned} \tau_{f_1}(x) &= \frac{1 - x \cdot a_1(x)}{a_1(x) + x(1 - a_1^2(x))}, \\ \tau_{f_2}(x) &= \frac{a_1x - 1}{(a_1^2a_2 - a_1a_2 - 1)x - a_1a_2 + a_2}, \\ \tau_{f_3^i}(x) &= \begin{cases} \frac{1}{i + T^2(x)}, & \text{якщо } a_1 = a_2, \\ \frac{T(x)}{(a_1 - 2a_2 + i)T(x) + 1}, & \text{якщо } a_1 > a_2, \\ \frac{T(x)}{(i - a_1)T(x) + 1}, & \text{якщо } a_1 < a_2. \end{cases} \end{aligned}$$

Доведення. Дійсно, маючи аналітичний вираз оператора $T(x)$, отримуємо

$$\begin{aligned} \tau_{f_1}(x) &= \frac{1}{a_1(x) + a_2(x) + \frac{1}{a_3(x) + \dots}} = \frac{1}{a_1(x) + \frac{1}{T(x)}} = \\ &= \frac{1 - x \cdot a_1(x)}{a_1(x) + x(1 - a_1^2(x))}. \end{aligned}$$

Аналогічно отримується вираз функції $\tau_{f_2}(x)$. Вираз для функції $\tau_{f_3^i}(x)$ отримується в результаті розкриття модуля. \square

Теорема 2.4.1. Функція $\tau_{f_1}(x)$:

1. коректно визначена;
2. неперервна на кожному із циліндрів першого рангу;

3. *спадна на кожному із циліндрів першого рангу;*
4. *опукла вгору на циліндрах першого рангу при $a_1 \neq 1$.*

Доведення. 1. Маємо два зображення числа $x \in \mathbb{Q} \cap [0; 1]$ у вигляді ланцюгового дробу:

$$x_1 = [a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, 1] \equiv [a_1, a_2, \dots, a_{n-1} + 1] = x_2.$$

Значення функції в цих точках

$$\tau_{f_1}(x_1) = [a_1 + a_2, \dots, a_{n-2}, 1],$$

$$\tau_{f_1}(x_2) = [a_1 + a_2, \dots, a_{n-2} + 1]$$

є зображеннями одного й того самого числа, що й т. д.

2. Якщо $x \in \left(\frac{1}{n+1}; \frac{1}{n}\right]$ то $a_1 = n$ і $\tau_{f_1}(x) = \frac{1 - xn}{n + x(1 - n^2)}$. Знаменник функції $\tau_{f_1}(x)$ обертається в нуль при $x = \frac{n}{n^2-1}$, але оскільки $x \in \left(\frac{1}{n+1}; \frac{1}{n}\right]$ і $\frac{n}{n^2-1} > \frac{1}{n}, \forall n \geq 2$, то $x \neq \frac{n}{n^2-1}$.
3. Знайдемо $\tau'_{f_1}(x)$:

$$\begin{aligned} \tau'_{f_1}(x) &= \frac{(1 - xn)'(n + x(1 - n^2)) - (1 - xn)(n + x(1 - n^2))'}{(n + x(1 - n^2))^2} = \\ &= \frac{-n^2 - nx(1 - n^2) - (1 - n^2 - xn + xn^3)}{(n + x(1 - n^2))^2} = \frac{-1}{(n + x(1 - n^2))^2} < 0, \end{aligned}$$

отже, функція $\tau_{f_1}(x)$ – спадна.

Оскільки функція $\tau_{f_1}(x)$ є неперервною і спадною на кожному з півінтервалів $\left(\frac{1}{n+1}; \frac{1}{n}\right]$, то

$$\min_{x \in \left(\frac{1}{n+1}; \frac{1}{n}\right]} \tau_{f_1}(x) = \tau_{f_1}\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1 - \frac{1}{n}n}{n + \frac{1}{n}(1 - n^2)} = 0;$$

$$\sup_{x \in \left(\frac{1}{n+1}; \frac{1}{n}\right]} \tau_{f_1}(x) = \tau_{f_1}\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1 - \frac{n}{n+1}}{n + \frac{1}{n+1}(1 - n^2)} = \frac{1}{n+1}.$$

4. Знайдемо другу похідну функції $\tau_{f_1}(x)$:

$$\begin{aligned}\tau_{f_1}''(x) &= \left(\frac{-1}{(n+x(1-n^2))^2} \right)' = \frac{2(n+x(1-n^2))'}{(n+x(1-n^2))^3} = \\ &= \frac{2(1-n^2)}{(n+x(1-n^2))^3}.\end{aligned}$$

Тут чисельник від'ємний, а знаменник — спадна функція. Її мінімум на півінтервалі $(\frac{1}{n+1}; \frac{1}{n}]$ рівний $\frac{1}{n}$ при $x = \frac{1}{n}$, тому знаменник приймає лише додатні значення. Отже, функція опукла вгору на кожному з вказаних інтервалів. На циліндрі $\Delta_1^{c.f.}$ функція $\tau_{f_1}(x)$ є лінійною. \square

Лема 2.4.4. *Визначений інтеграл від функції $\tau_{f_1}(x)$ має вигляд:*

$$\int_0^1 \tau_{f_1}(x) dx = \frac{1}{8} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1-\ln n}{(n^2-1)^2}.$$

Доведення. Проінтегруємо функцію $\tau_{f_1}(x)$ на півінтервалі $(0; 1]$. На кожному циліндрі першого рангу значення a_1 є фіксованим, і нехай $a_1 = n$. За аддитивною властивістю визначеного інтегралу:

$$\int_0^1 \tau_{f_1}(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{1/(n+1)}^{1/n} \frac{1-xn}{n+x(1-n^2)} dx.$$

Підінтегральний вираз при $n \neq 1$ можна записати таким чином:

$$\frac{1-xn}{n+x(1-n^2)} = \frac{n}{n^2-1} + \frac{1}{1-n^2} \cdot \frac{1}{n+x(1-n^2)}.$$

Тоді, при $n = 1$ маємо:

$$\int_{1/2}^1 \tau_{f_1}(x) dx = \int_{1/2}^1 (1-x) dx = \frac{1}{8},$$

а при $n = 2, 3, \dots$ отримуємо:

$$\int_{1/(n+1)}^{1/n} \left(\frac{n}{n^2-1} + \frac{1}{1-n^2} \cdot \frac{1}{n+x(1-n^2)} \right) dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{1/(n+1)}^{1/n} \frac{ndx}{n^2-1} + \frac{1}{1-n^2} \int_{1/(n+1)}^{1/n} \frac{dx}{n+x(1-n^2)} = \frac{1}{(n^2-1)(n+1)} + \\
&+ \frac{1}{(1-n^2)^2} \left(\ln \left(n + (1-n^2) \frac{1}{n} \right) - \ln \left(n + (1-n^2) \frac{1}{n+1} \right) \right) = \\
&= \frac{1}{(n^2-1)(n+1)} + \frac{-\ln n}{(1-n^2)^2} = \frac{n-1-\ln n}{(n^2-1)^2}.
\end{aligned}$$

Суму цього ряду знайдено наближено:

$$\frac{1}{8} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1-\ln n}{(n^2-1)^2} \approx 0,1952. \quad \square$$

Лема 2.4.5. Зв'язок між функціями $\tau_{f_1}(x)$ і $T(x)$ визначається формулою:

$$\tau_{f_1}(x) = \frac{T(x)}{a_1(x)T(x) + 1}.$$

Доведення. Дійсно,

$$\tau_{f_1}(x) = \frac{1}{a_1(x) + a_2(x) + \frac{1}{a_3(x) + \dots}} = \frac{1}{a_1(x) + \frac{1}{T(x)}} = \frac{T(x)}{a_1(x)T(x) + 1}.$$

□

Лема 2.4.6. Рівняння

$$\tau_{f_1}(x) = \delta_i(x) \tag{2.9}$$

має зліченну кількість розв'язків, загальний вигляд яких:

$$x = [\overline{k, i-k}], \quad k = 1, 2, \dots, i-1.$$

Доведення. На множині ірраціональних чисел рівняння (2.9) переписується так:

$$[a_1(x) + a_2(x), a_3(x), a_4(x), \dots] = [i, a_1(x), a_2(x), \dots]. \tag{2.10}$$

Тоді, з єдиності зображення ірраціонального числа ланцюговим дробом, маємо систему рівностей:

$$\left\{ \begin{array}{l} i = i, \\ a_1 = a_1, \\ a_1 + a_2 = i \Rightarrow a_2 = i - a_1, \\ a_3 = a_1, \\ a_4 = a_2 = i - a_1, \\ \dots\dots\dots, \end{array} \right.$$

яка еквівалентна рівнянню (2.10). Як і у випадку з рівнянням (2.4), скінченний ланцюговий дріб не може бути розв'язком рівняння (2.9). \square

Висновки до розділу 2

Цей розділ присвячений функціям, які зберігають хвости елементарного ланцюгового зображення чисел. Розглянуто найпростіші функції, які задані перетворювачами елементів елементарних ланцюгових дробів, а саме: функції, задані перетворювачами першого елемента елементарного ланцюгового дроби, оператори лівостороннього і правостороннього зсувів цифр елементарного ланцюгового зображення чисел і функції, пов'язані з ними. Побудовано неперервні перетворення відрізка $[0; 1]$, які зберігають хвости елементарного ланцюгового зображення чисел.

Основними результатами цього розділу є доведення фактів, що стосуються:

- неперервності та монотонності заданих функцій;
- побудови неперервних перетворень відрізка $[0; 1]$, які зберігають хвости зображення чисел елементарними ланцюговими дробами і фрактальну розмірність Гаусдорфа-Безиковича борелівських множин.

Основні результати цього розділу опубліковані у роботах $[1^a, 2^a]$ і апробовані на наукових конференціях, про що свідчать тези доповідей $[7^a, 12^a, 13^a]$.

РОЗДІЛ 3

ФУНКЦІЇ, ЗАДАНІ ПЕРЕТВОРЮВАЧАМИ ЦИФР ЕЛЕМЕНТАРНОГО ЛАНЦЮГОВОГО ЗОБРАЖЕННЯ ЧИСЕЛ

Цей розділ присвячено двом функціям, заданим перетворювачами цифр зображень чисел з нескінченними алфавітами. Перша функція є певним аналогом інверсора цифр зображення чисел зі скінченним алфавітом, який для Q_s -зображення, відмінного від s -кового, є сингулярною функцією з фрактальним носієм. Такі інверсори розглядалися у роботах [49, 55]. Друга функція задається проектором цифр елементарного ланцюгового зображення числа у зображення числа знакозмінним рядом Люрота.

3.1. Квазіінверсор цифр зображення чисел

Розглядається функція, означена в ірраціональних точках інтервалу $(0; 1)$ рівністю:

$$f([a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]) = [b_1, b_2, \dots, b_n, \dots],$$

де

$$b_1 = 1, \quad b_n = \varphi(a_n) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } a_n \neq 1; \\ n, & \text{якщо } a_n = 1, n = 2, 3, \dots, \end{cases}$$

і довизначена в усіх раціональних точках півінтервалу $(0; 1]$ рівністю

$$f([a_1, a_2, \dots, a_n]) = [b_1, b_2, \dots, b_n],$$

з домовленістю з двох можливих ланцюгових зображень аргумента використовувати лише те, у якого останній елемент відмінний від 1.

Згідно з означенням функції

$$f(x) = f([a_1(x), a_2(x), \dots, a_k(x), \dots]) = [1, b_2, \dots, b_k, \dots].$$

Зауважимо, що

$$f((0; 1]) \subset \Delta_1^{c.f.} = F_1,$$

тобто множина значень функції $f(x)$ належить циліндру $\Delta_1^{c.f.}$.

Якщо $x \in \Delta_{a_1 a_2}^{c.f.}$, то $f(x) \in \Delta_{1 b_2}^{c.f.}$, де $b_2 = \varphi(a_2) \in \{1, 2\}$.

Лема 3.1.1. *Образ циліндра $\Delta_{a_1 a_2 \dots a_n}^{c.f.}$ при відображенні f належить множині $\Delta_{1 b_2 \dots b_n}^{c.f.}$, якщо $i \neq 1$, $i \in \Delta_{1 b_2 \dots b_n [n+1]}^{c.f.}$, якщо $i = 1$, причому*

$$f(\Delta_{a_1 a_2 \dots a_n}^{c.f.}) \subset \Delta_{1 b_2 \dots b_n}^{c.f.} \cup \Delta_{1 b_2 \dots b_n [n+1]}^{c.f.}$$

Доведення. Справді, якщо $x \in \Delta_{a_1 a_2 \dots a_n}^{c.f.}$, то згідно з означенням функції $f(x) \in \Delta_{1 b_2 \dots b_n [n+1]}^{c.f.}$. Якщо ж $x \in \Delta_{a_1 a_2 \dots a_n}^{c.f.}$, де $i \neq 1$, то $f(x) \in \Delta_{1 b_2 \dots b_n}^{c.f.}$.

Отже, $f(\Delta_{a_1 a_2 \dots a_n}^{c.f.}) = f\left(\bigcup_{i=2}^{\infty} \Delta_{a_1 \dots a_n i}^{c.f.} \cup \Delta_{a_1 \dots a_n 1}^{c.f.}\right) \subset \Delta_{1 b_2 \dots b_n}^{c.f.} \cup \Delta_{1 b_2 \dots b_n [n+1]}^{c.f.}$ □

Теорема 3.1.1. *Множиною значень функції f є множина канторівського типу (ніде не щільна множина нульової міри Лебега)*

$$E_f = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k = \lim_{k \rightarrow \infty} F_k,$$

де

$$F_1 = \Delta_1^{c.f.}, \quad F_k = \bigcup_{b_2 \in \{1,2\}} \bigcup_{b_3 \in \{1,3\}} \dots \bigcup_{b_k \in \{1,k\}} \Delta_{1 b_2 b_3 \dots b_k}^{c.f.}$$

Доведення. Згідно з вище зробленим зауваженням $E_f \subset F_1$. Оскільки півінтервал $(0; 1]$ є об'єднанням всіх циліндрів k -го рангу при кожному натуральному k , то згідно з лемою 3.1.1

$$f((0; 1]) = f\left(\bigcup_{(a_1, \dots, a_k)} \Delta_{a_1 \dots a_k}^{c.f.}\right) \subset F_k.$$

Тому $E_f \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k$. Розглянемо циліндр n -го рангу $\Delta_{1b_2\dots b_n}^{c.f.}$. Він містить циліндри вищих рангів, які не належать множині значень функції f . Це всі циліндри у формі $\Delta_{1b_2\dots b_{nk}}^{c.f.}$, $k \notin \{1, n+1\}$. Тому множина $E(f)$ є ніде не щільною. \square

Теорема 3.1.2. *Функція f є ніде не монотонною. Множина її рівня $y_0 = [1, b_2, \dots, b_n, \dots]$, $b_n \in \{1, n\}$ є:*

- 1) зчисленною, якщо в зображенні числа y_0 кількість одиниць скінченна;
- 2) континуальною, якщо кількість одиниць нескінченна.

Доведення. Розглянемо два значення аргумента, які належать одному циліндру n -го рангу але належать різним циліндрам $(n+1)$ -го рангу:

$$x_1 = [a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots] \quad \text{і} \quad x_2 = [a_1, a_2, \dots, a_n, a'_{n+1}, \dots],$$

причому нехай $x_1 < x_2$. Нехай, окрім того, n – непарне. У такому випадку $a_{n+1}^{(1)} < a_{n+1}^{(2)}$.

Розглянемо тепер відповідні значення функції:

$$f(x_1) = [b_1, b_2, \dots, b_n, b_{n+1}^1, \dots] \quad \text{і} \quad f(x_2) = [b_1, b_2, \dots, b_n, b_{n+1}^2, \dots].$$

Оскільки $a_{n+1}^{(1)} < a_{n+1}^{(2)}$, то $a_{n+1}^{(2)} \neq 1$. Тоді $b_{n+1}^{(2)} = 1$ і $b_{n+1}^{(1)} \in \{1, n+1\}$. Отже, $b_{n+1}^{(1)} \geq b_{n+1}^{(2)}$.

Якщо $b_{n+1}^{(1)} > b_{n+1}^{(2)}$ то $f(x_1) > f(x_2)$.

Якщо $b_{n+1}^{(1)} = b_{n+1}^{(2)}$, то з

$$b_{n+2}^{(1)} > b_{n+2}^{(2)} \Rightarrow f(x_1) < f(x_2),$$

$$b_{n+2}^{(1)} < b_{n+2}^{(2)} \Rightarrow f(x_1) > f(x_2),$$

що й доводить ніде не монотонність функції. У випадку парного n міркування аналогічні. \square

Прообраз x значення функції y_0 має елементи:

a_1 – довільне натуральне число,

a_n – довільне натуральне число, крім 1, якщо $b_n = 1$ і 1, якщо $b_n = n$.

Тому при скінченній кількості 1 у зображенні y_0 множина $\bar{f}(y_0)$ є скінченним об'єднанням злічених множин. Якщо ж 1 у зображенні y_0 нескінченна кількість, то маючи нескінченну кількість місць з альтернативами отримуємо континуальну множину (це доводиться просто через бієкцію з $(0; 1]$ з використанням двійкового зображення чисел).

3.2. Функція, задана перетворювачем елементів елементарного ланцюгового дроби у знакозмінний ряд Люрота

Розглянемо функцію, яка у раціональних і ірраціональних точках півінтервалу $(0; 1]$ означена рівностями

$$g([a_1, a_2, \dots, a_n]) = \Delta_{a_1 a_2 \dots a_n}^{\tilde{L}}, \quad g([a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]) = \Delta_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}^{\tilde{L}}$$

відповідно.

Геометрії зображень чисел ланцюговими дробами і за допомогою знакозмінного ряду Люрота представлено на рис. 3.1 і рис. 3.2 відповідно.

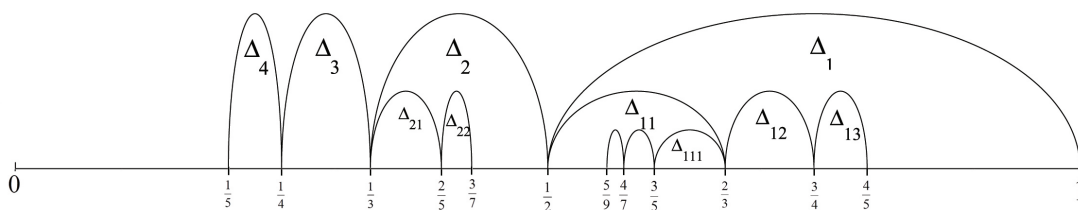


Рис. 3.1. Геометрія зображення чисел ланцюговими дробами

З наведених рисунків бачимо, що розміщення циліндрів вказаних зображень схожі: циліндри непарних рангів розташовуються справа-наліво, а парних — зліва-направо. Циліндри першого рангу збігаються.

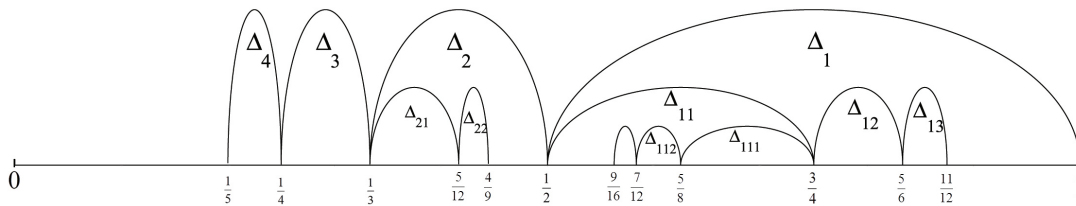


Рис. 3.2. Геометрія зображення чисел знакозмінним рядом Люрота

Перевіримо коректність означення функції $g(x)$. Розглянемо два різні скінченні ланцюгові дроби, які рівні одному й тому ж раціональному числу:

$$x_1 = [a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, 1] \equiv [a_1, a_2, \dots, a_{n-1} + 1] = x_2.$$

Значення функції в цих точках наступні:

$$g(x_1) = \Delta_{a_1 a_2 \dots a_{n-1} 1}^{\tilde{L}}(\emptyset) = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1(a_1 + 1)a_2} + \dots + \frac{(-1)^{n-2}}{a_1(a_1 + 1) \cdots a_{n-2}(a_{n-2} + 1)a_{n-1}} + \frac{(-1)^{n-1}}{a_1(a_1 + 1) \cdots a_{n-1}(a_{n-1} + 1) \cdot 1}.$$

$$g(x_2) = \Delta_{a_1 a_2 \dots [a_{n-1} + 1]}^{\tilde{L}}(\emptyset) = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1(a_1 + 1)a_2} + \dots + \frac{(-1)^{n-2}}{a_1(a_1 + 1) \cdots a_{n-2}(a_{n-2} + 1)(a_{n-1} + 1)}.$$

Розглянемо різницю

$$\begin{aligned} g(x_1) - g(x_2) &= \frac{(-1)^{n-2}(a_{n-1} + 1) + (-1)^{n-1}}{a_1(a_1 + 1) \cdots a_{n-1}(a_{n-1} + 1)} - \\ &= \frac{(-1)^{n-2}}{a_1(a_1 + 1) \cdots a_{n-2}(a_{n-2} + 1)(a_{n-1} + 1)} = \\ &= \frac{(-1)^{n-2}(a_{n-1} + 1) + (-1)^{n-1} - (-1)^{n-2}a_{n-1}}{a_1(a_1 + 1) \cdots a_{n-1}(a_{n-1} + 1)} = 0. \end{aligned}$$

Отже, означення функції g є коректним.

Лема 3.2.1. *Функція g є неперервною і монотонно зростаючою на $(0; 1]$.*

Доведення. 1. Нехай $(0; 1] \ni x_0$ – ірраціональне число. Розглянемо довільну послідовність (x_n) , збіжну до x_0 , яку можна представити у вигляді

$$x_n = [a_1, a_2, \dots, a_m, a_{m+1}(x_n), \dots],$$

де перші m елементів збігаються з елементами числа x_0 і $m \rightarrow \infty$ при $x_n \rightarrow x_0$. Звідси

$$\begin{aligned} g(x_n) - g(x_0) &= \\ &= \frac{1}{a_1} + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{a_1(a_1+1)a_2 \cdots a_{m-1}(a_{m-1}+1)a_m(a_m+1)a_{m+1}(x_n)} - \\ &= \frac{1}{a_1} - \sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{a_1(a_1+1)a_2 \cdots a_{m-1}(a_{m-1}+1)a_m(a_m+1)a_{m+1}} = \\ &= \frac{(-1)^{m-1}}{a_1(a_1+1)a_2 \cdots a_m(a_m+1)} \left(\frac{1}{a_{m+1}(x_n)} - \frac{1}{a_{m+1}} \right) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

при $m \rightarrow \infty$ і функція $g(x)$ неперервна в точці x_0 .

Нехай тепер $x_0 \in \mathbb{Q}$, тобто $x_0 = [a_1, a_2, \dots, a_n]$. Розглянемо систему вкладених циліндрів $\Delta_{a_1}^{c.f.}, \Delta_{a_1 a_2}^{c.f.}, \dots$, які містять x_0 . Тоді відповідні значення функції будуть належати циліндрам $\Delta_{a_1}^{\tilde{L}}, \Delta_{a_1 a_2}^{\tilde{L}}, \dots$. Розглянемо довільну послідовність (x_n) , де $x_n \in \Delta_{a_1 \dots a_n}^{c.f.}$. Тоді $x_n \rightarrow x_0$ і з того, що функція коректно означена й умови $|\Delta_{a_1 \dots a_n}^{\tilde{L}}| \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ отримуємо, що $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = g(x_0)$.

2. Для ланцюгових дробів нерівність $x_1 = [a_1, a_2, \dots] < [b_1, b_2, \dots] = x_2$ означає, що

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} a_i = b_i, i = 1, \dots, n \\ a_{2n+1} > b_{2n+1}, \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} a_i = b_i, i = 1, \dots, 2n-1, \\ a_{2n} < b_{2n}, \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Така ж сукупність означає, що $g(x_1) = \Delta_{a_1 a_2 \dots}^{\tilde{L}} < g(x_2) = \Delta_{b_1 b_2 \dots}^{\tilde{L}}$.

□

Відмітимо також, що значенням функції $g(x)$, де x — квадратична ірраціональність, є раціональним числом.

Теорема 3.2.1. *Монотонно зростаюча функція $g : (0; 1] \rightarrow (0; 1]$, означена рівністю $g([a_1, a_2, \dots]) = \Delta_{a_1 a_2 \dots}^{\tilde{L}}$ задовольняє такі функціональні рівняння:*

$$g\left(\frac{x}{kx+1}\right) = \frac{k+a_1(a_1+1)g(x)}{(a_1+k)(a_1+k+1)}, \forall k \in \mathbb{N};$$

$$g\left(\frac{1}{i+x}\right) = \frac{1}{i} - \frac{1}{i(i+1)}g(x), \forall i \in \mathbb{N};$$

$$g\left(\frac{1}{x} - a_1\right) = (a_1+1)(1 - a_1g(x)).$$

Доведення. 1) Оскільки $[a_1+k, a_2, \dots, \dots] = \frac{x}{kx+1}$, то

$$\begin{aligned} g\left(\frac{x}{kx+1}\right) &= \Delta_{[a_1+k]a_2\dots}^{\tilde{L}} = \\ &= \frac{1}{a_1+k} - \frac{1}{(a_1+k)(a_1+k+1)a_2} + \frac{1}{(a_1+k)(a_1+k+1)a_2(a_2+1)a_3} - \\ &\quad - \dots = \frac{1}{a_1+k} - \frac{a_1(a_1+1)}{(a_1+k)(a_1+k+1)} \times \\ &\quad \times \left(\frac{1}{a_1(a_1+1)a_2} - \frac{1}{a_1(a_1+1)a_2(a_2+1)a_3 + \dots} \right) = \\ &= \frac{1}{a_1+k} - \frac{a_1(a_1+1)}{(a_1+k)(a_1+k+1)} \left[\frac{1}{a_1} - \underbrace{\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1(a_1+1)a_2} + \dots \right)}_{g(x)} \right] = \\ &= \frac{1}{a_1+k} - \frac{(a_1+1)}{(a_1+k)(a_1+k+1)} + \frac{a_1(a_1+1)g(x)}{(a_1+k)(a_1+k+1)} = \\ &= \frac{k+a_1(a_1+1)g(x)}{(a_1+k)(a_1+k+1)}. \end{aligned}$$

2) Оскільки $[i, a_1, a_2, \dots] = \frac{1}{i+x}$, то

$$g\left(\frac{1}{i+x}\right) = \Delta_{ia_1a_2\dots}^{\tilde{L}} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i(i+1)a_1} + \frac{1}{i(i+1)a_1(a_1+1)a_2} - \dots =$$

$$= \frac{1}{i} - \frac{1}{i(i+1)} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1(a_1+1)a_2} + \dots \right) = \frac{1}{i} - \frac{1}{i(i+1)} g(x).$$

3) Оскільки $[a_2, a_3, \dots] = \frac{1}{x} - a_1$, то

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1(a_1+1)a_2} + \frac{1}{a_1(a_1+1)a_2(a_2+1)a_3} - \dots = \\ &= \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1(a_1+1)} \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_2(a_2+1)a_3} + \dots \right) = \\ &= \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1(a_1+1)} g\left(\frac{1}{x} - a_1\right). \quad \square \end{aligned}$$

Теорема 3.2.2. Функція $g([a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]) = \Delta_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}^{\tilde{L}}$ — це єдиний розв'язок системи функціональних рівнянь

$$g\left(\frac{1}{i+x}\right) = \frac{1}{i} - \frac{1}{i(i+1)} g(x), \quad i \in \mathbb{N} \quad (3.1)$$

у класі обмежених на $(0; 1]$ функцій.

Доведення. Оскільки $x = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{x} - a_1}$, то з рівності (3.1) отримаємо

$$g(x) = g\left(\frac{1}{a_1 + \left(\frac{1}{x} - a_1\right)}\right) = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1(a_1+1)} g\left(\frac{1}{x} - a_1\right).$$

Враховуючи, що $\frac{1}{x} - a_1 = \frac{1}{a_2 + \left(\frac{1}{\frac{1}{x} - a_1} - a_2\right)}$ отримуємо

$$g\left(\frac{1}{x} - a_1\right) = f\left(\frac{1}{a_2 + \left(\frac{1}{\frac{1}{x} - a_1} - a_2\right)}\right) = \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_2(a_2+1)} g\left(\frac{1}{\frac{1}{x} - a_1} - a_2\right).$$

Отже,

$$g(x) = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1(a_1+1)a_2} + \frac{1}{a_1(a_1+1)a_2(a_2+1)} g\left(\frac{1}{\frac{1}{x} - a_1} - a_2\right).$$

За n кроків отримуємо:

$$g(x) = \frac{1}{a_1} + \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^{n-1}}{a_1(a_1+1) \dots a_{n-1}(a_{n-1}+1)a_n} + \frac{(-1)^n}{a_1(a_1+1) \dots a_n(a_n+1)} \times$$

$$\times g([a_{n+2}, a_{n+3}, \dots]).$$

Враховуючи обмеженість функції $g : g([a_{n+2}, a_{n+3}, \dots]) \leq 1$ і те, що при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{(-1)^n}{a_1(a_1 + 1) \dots a_n(a_n + 1)} \rightarrow 0,$$

констатуємо збіжність зазначеного процесу:

$$g(x) = \frac{1}{a_1} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{a_1(a_1 + 1) \dots a_{k-1}(a_{k-1} + 1)a_k}. \quad \square$$

Висновки до розділу 3

Введено функцію, названу квазіінверсором цифр елементарного ланцюгового зображення чисел (що є певним аналогом інверсорів цифр скінченно-символьних зображень чисел). Доведено її ніде не монотонність і канторовість множини її значень. Описано множини рівнів цієї функції.

Вивчено властивості функції, яку означено проектуванням цифр елементарного ланцюгового зображення чисел у цифри зображення чисел знакозмінними рядами Люрота. Доведено її неперервність і монотонність, побудовано функціональні рівняння, яким задовольняє ця функція, знайдено систему функціональних рівнянь, єдиним розв'язком якої є ця функція.

Основними результатами цього розділу є теорема 3.1.1 (про множину значень функції f), теорема 3.1.2 (про ніде не монотонність функції f і множини її рівнів), теорема 3.2.2 (про систему функціональних рівнянь, яка визначає функцію g).

Результати цього розділу апробовані на наукових конференціях, про що свідчать тези доповідей [9^a, 14^a].

РОЗДІЛ 4

ЗОБРАЖЕННЯ ЧИСЕЛ ЛАНЦЮГОВИМИ ДРОБАМИ З ДВОСИМВОЛЬНИМ АЛФАВІТОМ

Прийнято вважати, що двосимвольні зображення дійсних чисел мають технічні переваги, а поєднання несамоподібності зображення чисел ланцюговими дробами з двосимвольністю алфавіту дає нові цікаві нетривіальні задачі, що стосуються геометрії зображення і об'єктів з фрактальними властивостями.

4.1. Оператор лівостороннього зсуву цифр ланцюгового A -зображення

Означення 4.1.1. У множині всіх ланцюгових A -зображень дійсних чисел відрізка $[0,5; 1]$ оператор ω лівостороннього зсуву цифр означається рівністю:

$$\omega(\Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\dots}^A) = \Delta_{\alpha_2\alpha_3\dots\alpha_{n+1}\dots}^A.$$

Він породжує функцію $\omega : [0,5; 1] \rightarrow [0,5; 1]$, коректно означену в ірраціональних точках, а також в раціональних точках за умови використання лише одного з двох ланцюгових A -зображень.

Лема 4.1.1. *Функція $\omega(x)$ на кожному циліндрі першого рангу є неперервною, монотонно спадною й опуклою вниз, причому:*

$$\omega(x) = \frac{1}{x} - a_1(x).$$

В точці $x = \frac{2}{3}$ функція має розрив першого роду зі стрибком $\frac{1}{2}$.

Доведення. Дійсно, $x = \frac{1}{a_1(x) + \omega(x)}$, звідси $\omega(x) = \frac{1}{x} - a_1(x)$.

На кожному з циліндрів першого рангу $\omega'(x) < 0, \omega''(x) > 0$.

Дослідимо поведінку функції $\omega(x)$ в околі точки $x_0 = \frac{2}{3}$.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}-0} \omega(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}} \left(\frac{1}{x} - 1 \right) = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}+0} \omega(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2} \right) = 1. \quad \square$$

Нехай

$$\omega^n(x) = \underbrace{\omega(\omega(\dots\omega(x)))}_n = \frac{u_n x + v_n}{c_n x + d_n},$$

$$\text{тоді } \omega^n(x) = \frac{1}{\omega^{n-1}(x)} - a_n(x) = \frac{1 - \omega^{n-1}(x)a_n(x)}{\omega^{n-1}(x)}.$$

Тоді $u_0 = 1, v_0 = 0, c_0 = 0, d_0 = 1$ і при $a_n = \frac{1}{2}$ маємо

$$\frac{u_{n+1}x + v_{n+1}}{c_{n+1}x + d_{n+1}} = \frac{c_n x + d_n}{u_n x + v_n} - \frac{1}{2} = \frac{(2c_n - u_n)x + 2d_n - v_n}{2u_n x + 2v_n},$$

звідки

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2c_n - u_n, \\ v_{n+1} = 2d_n - v_n, \\ c_{n+1} = 2u_n, \\ d_{n+1} = 2v_n. \end{cases}$$

Якщо ж $a_n = 1$, то

$$\frac{u_{n+1}x + v_{n+1}}{c_{n+1}x + d_{n+1}} = \frac{c_n x + d_n}{u_n x + v_n} - 1 = \frac{(c_n - u_n)x + d_n - v_n}{u_n x + v_n}.$$

Маємо

$$\begin{cases} u_{n+1} = c_n - u_n, \\ v_{n+1} = d_n - v_n, \\ c_{n+1} = u_n, \\ d_{n+1} = v_n. \end{cases}$$

Оцінимо зверху величину $|u_n|$.

Теорема 4.1.1. *Виконується нерівність*

$$c_n \leq \frac{1}{\sqrt{17}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{17}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{17}}{2} \right)^n \right), \forall n \in \mathbb{N}.$$

Доведення. Зрозуміло, що $(u_0; v_0; c_0; d_0) = (1; 0; 0; 1)$ і можливими варіантами для $(u_1; v_1; c_1; d_1) \in (-1; 2; 2; 0)$ і $(-1; 1; 1; 0)$ якщо $a_1 = \frac{1}{2}$ або 1 відповідно. Можливі випадки

$$u_{n+1} = 2c_n - u_n = \begin{cases} 2u_{n-1} - u_n, \\ 4u_{n-1} - u_n, \end{cases}$$

та

$$u_{n+1} = c_n - u_n = \begin{cases} 2u_{n-1} - u_n, \\ u_{n-1} - u_n. \end{cases}$$

Отже,

$$u_{n+1} = ku_{n-1} - u_n,$$

де $k \in \{1; 2; 4\}$.

Маємо

$$|u_{n+1}| = |ku_{n-1} - u_n| \leq |ku_{n-1}| + |u_n| \leq 4|u_{n-1}| + |u_n|.$$

Нехай (s_n) — послідовність така, що

$$s_{n+1} = s_n + 4s_{n-1}, \forall n \in \mathbb{N},$$

$$s_0 = 0, s_1 = 1.$$

Індуктивно легко показати, що

$$u_n \leq s_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Оскільки

$$s_n = \frac{1}{\sqrt{17}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{17}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{17}}{2} \right)^n \right),$$

то

$$u_n \leq \frac{1}{\sqrt{17}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{17}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{17}}{2} \right)^n \right), \forall n \in \mathbb{N}.$$

Зрозуміло, що $c_n = ku_n$, де $k \in \{1; \frac{1}{2}\}$, тому

$$c_n \leq u_n \leq \frac{1}{\sqrt{17}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{17}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{17}}{2} \right)^n \right), \forall n \in \mathbb{N}. \quad \square$$

4.2. Інваріантні міри для оператора лівостороннього зсуву

Лема 4.2.1. *Прообразами інтервала $(\alpha; \beta)$ при відображенні ω є два інтервали $(\frac{1}{\frac{1}{2} + \beta}; \frac{1}{\frac{1}{2} + \alpha})$ і $(\frac{1}{1 + \beta}; \frac{1}{1 + \alpha})$, які не перекриваються.*

Доведення. За лемою 4.1.1 $\omega(x) = \frac{1}{x} - a_1$, де $a_1 \in A_2$, тоді існують такі u, v , що

$$\alpha = \frac{1}{u} - a_1(u), \quad \beta = \frac{1}{v} - a_1(v),$$

звідси

$$\begin{cases} u = \frac{1}{\alpha + a_1(u)}; \\ v = \frac{1}{\beta + a_1(v)}. \end{cases}$$

Тоді

$$\omega^{-1}((\alpha; \beta)) = (u_1; v_1) \cup (u_{\frac{1}{2}}; v_{\frac{1}{2}}).$$

Розглянемо різницю

$$u_{\frac{1}{2}} - v_1 = \frac{1}{\alpha + \frac{1}{2}} - \frac{1}{\beta + 1} = \frac{\beta - \alpha + \frac{1}{2}}{(\alpha + \frac{1}{2})(\beta + 1)} > 0.$$

Таким чином, інтервали $(u_1; v_1)$ і $(u_{\frac{1}{2}}; v_{\frac{1}{2}})$ не перекриваються. □

Наслідок 4.2.1. *Прообразами циліндра $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^{A_2}$ при відображенні ω є два циліндри:*

$$\Delta_{1c_1 c_2 \dots c_n}^{A_2} \quad i \quad \Delta_{\frac{1}{2}c_1 c_2 \dots c_n}^{A_2}.$$

Теорема 4.2.1. *Інваріантною мірою відносно оператора лівостороннього зсуву цифр ω ланцюгового A -зображення є ймовірнісна міра $\mu_X(\cdot)$, що відповідає розподілу випадкової величини X , яка представлена ланцюговим A_2 -дробом, цифри якої є незалежними і однаково розподіленими.*

Доведення. Якщо цифри (τ_n) випадкової величини $X = \Delta_{\tau_1\tau_2\dots\tau_n\dots}^A$ є незалежними і однаково розподіленими, а саме:

$$P\{\tau_n = 0\} = p_0, \quad P\{\tau_n = 1\} = p_1,$$

то для ймовірнісної міри μ_X , що відповідає розподілу випадкової величини X , має місце рівність

$$\mu_X(\Delta_{\alpha_1\dots\alpha_n}^A) = P\{X \in \Delta_{\alpha_1\dots\alpha_n}^A\} = p_{\alpha_1}p_{\alpha_2}\dots p_{\alpha_n}.$$

При цьому функція розподілу F_X випадкової величини X має вигляд

$$F_X(x) = \beta_{\alpha_1(x)} + \sum_{m=2}^{\infty} \left(\beta_{\alpha_m(x)} \prod_{i=1}^{m-1} p_{\alpha_i(x)} \right),$$

де

$$\beta_{2k-1} = P\{\tau_{2k-1} > \alpha_{2k-1}(x)\} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \alpha_{2k-1}(x) = 1, \\ p_1, & \text{якщо } \alpha_{2k-1}(x) = 0; \end{cases}$$

$$\beta_{2k} = P\{\tau_{2k} < \alpha_{2k}(x)\} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \alpha_{2k}(x) = 1, \\ p_0, & \text{якщо } \alpha_{2k}(x) = 0. \end{cases}$$

Справді, $F_X(x) = P\{X < x\}$,

$$\{X < x\} = \{\tau_1 > \alpha_1(x)\} \cup \{\tau_1 = \alpha_1(x), \tau_2 < \alpha_2(x)\} \cup \dots$$

$$\dots \cup \{\tau_i = \alpha_i(x), i = \overline{1, 2k-1}, \tau_{2k} < \alpha_{2k}(x)\} \cup \dots$$

$$\dots \cup \{\tau_i = \alpha_i(x), i = \overline{1, 2k}, \tau_{2k+1} > \alpha_{2k+1}(x)\} \cup \dots,$$

причому події, що беруть участь у об'єднанні, є несумісними, а

$$P\{\tau_i = \alpha_i(x), i = \overline{1, m-1}, \tau_m \vee \alpha_n(x)\} = \beta_{\alpha_m(x)} \prod_{i=1}^{m-1} p_{\alpha_i(x)}.$$

Тому для доведення теореми досить показати, що для довільного циліндра $\Delta_{a_1 \dots a_n}^{A_2}$ виконується рівність

$$\mu_X(\omega^{-1}(\Delta_{a_1 \dots a_n}^{A_2})) = \mu_X(\Delta_{a_1 \dots a_n}^{A_2}).$$

Оскільки

$$\omega^{-1}(\Delta_{a_1 \dots a_n}^{A_2}) = \Delta_{1a_1 \dots a_n}^{A_2} \cup \Delta_{\frac{1}{2}a_1 \dots a_n}^{A_2},$$

причому за лемою 4.2.1 останні два циліндри не перекриваються, то

$$\begin{aligned} \mu_X(\omega^{-1}(\Delta_{a_1 \dots a_n}^{A_2})) &= \mu_X(\Delta_{1a_1 \dots a_n}^{A_2}) + \mu_X(\Delta_{\frac{1}{2}a_1 \dots a_n}^{A_2}) = \\ &= p_1 \prod_{j=1}^n p_{a_j} + p_{\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^n p_{a_j} = \prod_{j=1}^n p_{a_j} = \mu_X(\Delta_{a_1 \dots a_n}^{A_2}). \end{aligned}$$

Оскільки $(\alpha; \beta) = \bigcap_n D_n$, де $D_n = \bigcup_{a_1=0}^1 \dots \bigcup_{a_n=0}^1 \tilde{\Delta}_{a_1 \dots a_n}^{A_2}$,

$$\tilde{\Delta}_{a_1 \dots a_n}^{A_2} = \begin{cases} \emptyset, & \text{якщо } (\alpha; \beta) \cap \Delta_{a_1 \dots a_n}^{A_2} = \emptyset; \\ \Delta_{a_1 \dots a_n}^{A_2}, & \text{якщо } (\alpha; \beta) \cap \Delta_{a_1 \dots a_n}^{A_2} \neq \emptyset. \end{cases}$$

Отже, для будь-якого інтервалу $(\alpha; \beta)$ має місце рівність

$$\mu_X(\omega^{-1}(\alpha; \beta)) = \mu_X((\alpha; \beta)),$$

тобто μ_X є інваріантною для відображення ω . □

4.3. Оператор правостороннього зсуву цифр ланцюгового A -зображення

Означення 4.3.1. У множині всіх ланцюгових A -зображень дійсних чисел відрізка $[0,5; 1]$ оператор δ_i з параметром $i \in \{0; 1\}$ правостороннього зсуву цифр означається рівністю:

$$\delta_i(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^A) = \Delta_{i \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^A.$$

Лема 4.3.1. Функція $y = \delta_i(x)$, яка аналітично задається формулою

$$\delta_i(x) = \frac{1}{i+x},$$

є неперервною, строго спадною й опуклою вниз на відрізку $[0,5; 1]$; вона набуває всіх значень із відрізка $[\frac{1}{i+1}; \frac{2}{2i+1}]$.

Доведення. Дійсно,

$$\delta_i(x) = \frac{1}{i + \frac{1}{a_1 + \dots}} = \frac{1}{i+x}.$$

Неперервність, монотонність і опуклість легко доводиться засобами математичного аналізу. \square

Зауваження 4.3.1. Для операторів лівостороннього і правостороннього зсувів цифр мають місце рівності:

$$\omega(\delta_i(x)) = x, \quad \delta_{a_1(x)}(\omega(x)) = x.$$

Лема 4.3.2. Для кожного $i \in \{0, 1\}$ рівняння $\omega(x) = \delta_i(x)$ має два розв'язки у формі $x_{\alpha_1}^i = \Delta_{(\alpha_1 i)}^A$.

Доведення. На множині A_2 -іраціональних чисел рівняння можна переписати у формі

$$\Delta_{\alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \dots \alpha_{n+1} \dots}^A = \Delta_{i \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1} \dots}^A.$$

З єдиності зображення A_2 -іраціональних чисел випливає одночасне виконання рівностей

$$\begin{cases} \alpha_{2n}(x) = i, \\ \alpha_{2n+1}(x) = \alpha_1(x), n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Отже, для кожного $i \in \{0; 1\}$ розв'язками рівняння будуть числа вигляду $x_{\alpha_1}^i = \Delta_{(\alpha_1 i)}^A$.

A_2 -раціональне число не може бути розв'язком рівняння $\omega(x) = \delta_i(x)$, оскільки неможливою є рівність

$$\Delta_{\alpha_2\alpha_3\dots\alpha_n 0(01)}^A = \Delta_{i\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n 0(01)}^A,$$

у якій ланцюгові A -зображення містять різну кількість цифр до періоду. \square

Лема 4.3.3. Для кожного значення $i \in \{0; 1\}$ рівняння $\omega^2(x) = \delta_i(x)$ має 4 розв'язки у формі $x \in \Delta_{(\alpha_1\alpha_2i)}^A$.

Доведення. На множині A_2 -ірраціональних чисел переписемо рівняння у вигляді

$$\Delta_{\alpha_3\alpha_4\alpha_5\dots}^A = \Delta_{i\alpha_1\alpha_2\dots}^A$$

З єдиності зображення A_2 -ірраціональних чисел випливає виконання рівностей

$$\begin{cases} \alpha_{3k}(x) = i, \\ \alpha_{3k+1}(x) = \alpha_1(x), \\ \alpha_{3k+2}(x) = \alpha_2(x), \quad k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Таким чином, розв'язками рівняння є числа вигляду $x = \Delta_{(\alpha_1\alpha_2i)}^A$.

Аналогічно до попередньої леми A_2 -раціональне число не може бути розв'язком даного рівняння. \square

Лема 4.3.4. Розв'язками рівняння $\omega^{2k-1}(x) = \delta_i(x)$ є числа у формі

$$x = \Delta_{(\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{2k-1}i)}^A.$$

Доведення. Переписавши на множині A_2 -ірраціональних чисел рівняння у формі

$$\Delta_{\alpha_{2k}\alpha_{2k+1}\alpha_{2k+2}\dots}^A = \Delta_{i\alpha_1\alpha_2\alpha_3\dots}^A,$$

бачимо, що з нього випливає одночасне виконання рівностей

$$\begin{cases} \alpha_{2k}(x) = i, \\ \alpha_{2k+p}(x) = \alpha_p(x), \quad p = 1, 2, \dots, 2k, k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

отже $x = \Delta_{(\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{2k-1}i)}^A$. Аналогічно до попередньої леми A_2 -раціональне число не може бути розв'язком даного рівняння. \square

Лема 4.3.5. *Функція*

$$\varphi(x) = \begin{cases} \delta_0(x), & 0,5 \leq x < \Delta_{(\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{2k-1}0)}^A, \\ \omega^{2k-1}(x), & \Delta_{(\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{2k-1}0)}^A \leq x < \Delta_{(\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{2k-1}1)}^A, \\ \delta_1(x), & \Delta_{(\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{2k-1}1)}^A \leq x \leq 1; \end{cases}$$

є неперервною і строго спадною на відрізку $[0,5; 1]$.

Доведення. Дійсно, функція $\varphi(x)$ є неперервною в силу леми 4.3.4. Крім того, функції $\delta_0(x)$, $\omega^{2k-1}(x)$, $\delta_1(x)$ є строго спадними функціями, то і функція $\varphi(x)$ є також строго спадною, причому $\varphi(0,5) = \delta_0(0,5) = 1$, $\varphi(1) = \delta_1(1) = 0,5$. \square

Нехай i_1, i_2, \dots, i_n — фіксовані числа з алфавіту A . Розглядається оператор, залежний від параметрів i_1, i_2, \dots, i_n , коректно означений на відрізку $[0,5; 1]$ рівністю $\delta_{i_1i_2\dots i_n}(x) = \delta_{i_1i_2\dots i_n}(\Delta_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\dots}^A) = \Delta_{i_1i_2\dots i_n\alpha_1\alpha_2\dots}^A$.

Лема 4.3.6. *Розв'язками рівняння $\omega^n(x) = \delta_{i_1i_2\dots i_n}(x)$ є числа у формі $x = \Delta_{(\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n i_1 i_2 \dots i_n)}^A$.*

Доведення. Рівняння $\omega^n(x) = \delta_{i_1i_2\dots i_n}(x)$ на множині A_2 -ірраціональних чисел перепишемо у вигляді

$$\Delta_{\alpha_{n+1}\alpha_{n+2}\dots\alpha_{2n}\dots}^A = \Delta_{i_1i_2\dots i_n\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\alpha_{n+1}\dots}^A.$$

З цього випливає одночасне виконання рівностей

$$\begin{cases} \alpha_{n+k}(x) = i_k, k = 1, 2, \dots, n, \\ \alpha_{2n+k}(x) = \alpha_k(x), k = 1, 2, \dots, n, \\ \alpha_{3n+1}(x) = \alpha_{n+1}(x) = i_1, \\ \dots \end{cases}$$

Отже, розв'язками даного рівняння є числа у формі $x = \Delta_{(\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n i_1 i_2 \dots i_n)}^A$. Аналогічно до попередньої леми A_2 -раціональне число не може бути розв'язком даного рівняння. \square

4.4. Функція $z(x)$

Розглядається функція, означена на відрізку $[0,5; 1]$ рівністю

$$y = z(x) = z(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^A) = \Delta_{[1-\alpha_1] \alpha_2 \dots \alpha_n}^A.$$

Теорема 4.4.1. Функція $y = z(x)$ аналітично виражається формулою

$$z(x) = \frac{2x}{(3 - 4a_1(x))x + 2},$$

є неперервною строго зростаючою на обох циліндрах першого рангу, причому:

1. опуклою вниз на циліндрі $\Delta_1^{A_2}$ і опуклою вгору на циліндрі $\Delta_0^{A_2}$;

$$2. \int_{0,5}^1 z(x) dx = \frac{1}{3}.$$

Доведення. Для функції $v(x) = 1,5 - x$ чинне $v(1) = 0,5, v(0,5) = 1$,

тому

$$\begin{aligned} z(x) &= \frac{1}{1,5 - a_1(x) + \frac{1}{a_2(x) + \dots}} = \frac{1}{1,5 - 2a_1(x) + a_1(x) + \frac{1}{a_2(x) + \dots}} = \\ &= \frac{1}{1,5 - 2a_1(x) + \frac{1}{x}} = \frac{2x}{(3 - 4a_1(x))x + 2} = \begin{cases} \frac{2x}{2 - x}, & \text{якщо } x \in \Delta_1^{A_2}; \\ \frac{2x}{2 + x}, & \text{якщо } x \in \Delta_{\frac{1}{2}}^{A_2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Похідна $z'(x) = \frac{4}{((4a_1 - 3)x - 2)^2} > 0$ при $x \in \Delta_{a_1}^{A_2}$, отже функція зростаюча на кожному циліндрі першого рангу. Крім того,

$$\int_{0,5}^1 z(x) dx = \int_{0,5}^{2/3} \frac{2x}{2 - x} dx + \int_{2/3}^1 \frac{2x}{2 + x} dx = \frac{1}{3}. \quad \square$$

Лема 4.4.1. На множині A_2 -іраціональних чисел рівняння

$$\delta_i(x) = z(x) \text{ має єдиний розв'язок } x = \Delta_{(1-i)}^A.$$

Доведення. Рівняння $\delta_1(x) = z(x)$ можна записати у вигляді

$$\Delta_{i\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\dots}^A = \Delta_{[1-\alpha_1]\alpha_2\alpha_3\dots\alpha_n\dots}^A.$$

З єдиності зображення A_2 -іраціональних чисел випливає одночасне виконання рівностей

$$\begin{cases} i = 1 - \alpha_1(x), \\ \alpha_n(x) = \alpha_{n+1}(x), n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

$$\text{Тоді } x = \Delta_{(1-i)}^A = \begin{cases} \frac{\sqrt{17} - 1}{4}, & \text{якщо } i = 1, \\ \frac{\sqrt{5} - 1}{2}, & \text{якщо } i = \frac{1}{2}. \end{cases} \quad \square$$

4.5. Неперервні перетворення відрізка $[0,5; 1]$, що зберігають хвости ланцюгового A -зображення чисел

Стверджуватимемо, що два ланцюгові A -зображення

$$\Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\dots}^A \quad \text{і} \quad \Delta_{\beta_1\beta_2\dots\beta_n\dots}^A$$

мають однаковий хвіст (або перебувають у відношенні \sim), якщо існують натуральні числа m і k , такі, що $\alpha_{m+j} = \beta_{k+j}$ для будь-якого $j \in \mathbb{N}$.

Бінарне відношення мати однаковий хвіст « \sim » на множині L_{A_2} є відношенням еквівалентності (тобто володіє властивостями рефлексивності, симетричності та транзитивності).

Будемо казати, що два числа x і y мають однаковий хвіст ланцюгового A -зображення (або перебувають у відношенні \sim), якщо вони мають A -зображення, які передують у відношенні \sim . Символічно: $x \sim y$.

Казатимемо, що функція f , яка визначена на множині $[0,5; 1]$ і набуває значень із множини $[0,5; 1]$, зберігає хвости ланцюгового A -зображення чисел, якщо для будь-якого $x \in [0,5; 1]$ існують натуральні числа $k = k(x)$ і

$m = m(x)$, такі, що

$$a_{k+n}(x) = a_{m+n}(f(x)) \quad \text{для всіх } n \in \mathbb{N}.$$

Лема 4.5.1. *Нехай $i \in \{0, 1\}$. Функції*

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} \delta_0(x), & \text{якщо } \frac{1}{2} \leq x < \Delta_{(0)}^A, \\ \omega(x), & \text{якщо } \Delta_{(0)}^A \leq x \leq 1; \end{cases}$$

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \omega(x), & \text{якщо } \frac{1}{2} \leq x < \Delta_{(1)}^A, \\ \delta_1(x), & \text{якщо } \Delta_{(1)}^A \leq x \leq 1; \end{cases}$$

є неперервними строго спадними перетвореннями відрізка $[0,5; 1]$, які зберігають хвости ланцюгового A -зображення чисел.

Доведення. Дане твердження випливає з того, що функції $\delta_0(x)$, $\delta_1(x)$ є неперервними і строго спадними на відрізку $[0,5; 1]$, а $\omega(x)$ є неперервною й строго спадною на кожному циліндрі першого рангу, причому $\omega(0,5) = 1$, $\omega(1) = 0,5$, $\delta_1(1) = 0,5$, $\delta_0(0,5) = 1$. \square

Лема 4.5.2. *Функція*

$$f(x) = \begin{cases} \omega^n(x) & \text{при } 0,5 \leq x < \Delta_{\underbrace{(1010 \dots i_1 \dots i_n)}_{n \text{ цифр}}}^A, \\ \delta_{i_1 i_2 \dots i_n}(x) & \text{при } \Delta_{\underbrace{(1010 \dots i_1 \dots i_n)}_{n \text{ цифр}}}^A \leq x < \Delta_{\underbrace{(0101 \dots i_1 \dots i_n)}_{n \text{ цифр}}}^A, \\ \omega^n(x) & \text{при } \Delta_{\underbrace{(0101 \dots i_1 \dots i_n)}_{n \text{ цифр}}}^A \leq x \leq 1; \end{cases}$$

є неперервним (строго зростаючим при парному n і строго спадним при непарному n) перетворенням відрізка $[0,5; 1]$, яке зберігає хвости ланцюгового A -зображення.

Доведення. Дійсно, функція $f(x)$ є неперервною, оскільки функції $\omega^n(x)$ і $\delta_{i_1 i_2 \dots i_n}(x)$ є неперервними на циліндрах n -го рангу і розв'язком рівняння $\omega^n(x) = \delta_{i_1 i_2 \dots i_n}(x)$ на циліндрі $\Delta_{\underbrace{(1010 \dots)}_{n \text{ цифр}}}^A$ за лемою 4.3.6 є число

$\Delta_{(1010 \dots i_1 \dots i_n)}^A$, а на циліндрі $\Delta_{(0101 \dots)}^A$ є число $\Delta_{(0101 \dots i_1 \dots i_n)}^A$. Причому, при парному значенні n $\omega^n(0,5) = 0,5$, $\omega^n(1) = 1$, а при непарному n $\omega^n(0,5) = 1$, $\omega^n(1) = 0,5$. \square

Теорема 4.5.1. *Множина G всіх неперервних перетворень відрізка $[0,5; 1]$, які зберігають хвости ланцюгового A -зображення чисел, відносно операції \circ – «суперпозиція функцій» утворює нескінченну некомутативну групу.*

Доведення. Множина неперервних перетворень $[0,5; 1]$ є підмножиною всіх перетворень $[0,5; 1]$, які, як відомо, утворюють групу. Скористаємось критерієм підгрупи.

Очевидно, що множина G замкнена відносно операції \circ . Функція, обернена до неперервної строго монотонної функції, є неперервною строго монотонною, і якщо перетворення зберігає хвости A -зображення, то і обернене перетворення теж їх зберігає. Тому перетворення, обернене до даного перетворення з множини G теж належить G . Композиція двох перетворень зберігає хвости, отже, теж є перетворенням.

Для кожного перетворення існує обернений елемент – функція, обернена до функції $f(x)$ відносно нейтрального елемента $e(x) = x$. Для доведення некомутативності розглянемо дві функції з множини G :

$$f(x) = \begin{cases} \delta_0(x), & \text{якщо } 0,5 \leq x < \Delta_{(0)}^A, \\ \omega(x), & \text{якщо } \Delta_{(0)}^A \leq x \leq 1; \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \omega^2(x), & \text{якщо } 0,5 \leq x < \Delta_{(1011)}^A, \\ \delta_{11}(x), & \text{якщо } \Delta_{(1011)}^A \leq x < \Delta_{(0111)}^A, \\ \omega^2(x), & \text{якщо } \Delta_{(0111)}^A \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Розглянемо значення функцій $f(g(x_0))$ і $g(f(x_0))$ при $x_0 = \Delta_{(01)}^A$:

$$f(g(x_0)) = f\left(g\left(\Delta_{(01)}^A\right)\right) = f\left(\Delta_{(1101)}^A\right) = \Delta_{(101)}^A,$$

$$g(f(x_0)) = g\left(f\left(\Delta_{0(1)}^A\right)\right) = g\left(\Delta_{(1)}^A\right) = \Delta_{11(1)}^A = \Delta_{(1)}^A.$$

Отже, $f(g(x_0)) \neq g(f(x_0))$, що і потрібно було довести. \square

4.6. Неперервна ніде не монотонна функція, означена в термінах ланцюгових A_2 -дробів та нега-трійкових дробів

Використовуючи нега-трійкове зображення дійсних чисел і ланцюгове A -зображення, ми означаємо аналог неперервної ніде не монотонної недиференційовної функції, яка вивчалась в роботах [19, 35, 39, 46], і досліджуємо її властивості.

4.6.1. Основний об'єкт дослідження та коректність його означення. Розглядається функція $y = f(x)$, аргумент якої має нега-трійкове зображення

$$x = \bar{\Delta}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\dots}^3 \equiv \frac{3}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{(-3)^n}, \quad \alpha_n \in \{0, 1, 2\},$$

а значення функції має ланцюгове A -зображення

$$f(x) = \Delta_{\beta_1\beta_2\dots\beta_n\dots}^A, \quad \beta_n \in \{0, 1\},$$

причому

$$\beta_1 = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \alpha_1 = 2, \\ 0, & \text{якщо } \alpha_1 \neq 2; \end{cases} \quad \beta_{k+1} = \begin{cases} 1 - \beta_k, & \text{якщо } \alpha_{k+1} + \alpha_k = 2, \\ \beta_k, & \text{якщо } \alpha_{k+1} + \alpha_k \neq 2. \end{cases} \quad (4.1)$$

Коректність означення функції у нега-трійково-іраціональних точках не викликає сумнівів. Обґрунтуємо його коректність у нега-трійково-раціональних точках, тобто що для різних нега-трійкових зображень одного й того самого раціонального значення аргумента

$$x \equiv \bar{\Delta}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{k-1}\alpha_k(20)}^3 = \bar{\Delta}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{k-1}[\alpha_k-1](02)}^3 \equiv x'$$

виконується рівність

$$f(\bar{\Delta}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{k-1}\alpha_k}^3(20)) = f(\bar{\Delta}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{k-1}[\alpha_k-1]}^3(02)).$$

Нехай $\Delta_{\beta_1\beta_2\dots\beta_k}^A$ — зображення значення функції для зображення аргумента $\bar{\Delta}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{k-1}\alpha_k}^3$, а $\Delta_{\beta'_1\beta'_2\dots\beta'_k}^A$ — зображення значення функції для зображення аргумента $\bar{\Delta}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{k-1}[\alpha_k-1]}^3$.

Оскільки $\alpha_k \neq 0$, то $[\alpha_k - 1] \in \{0, 1\}$. З означення функції маємо

$$\begin{cases} \beta_i = \beta'_i, & i = 1, 2, \dots, k-1, \\ \beta_{k+j} = 1 - \beta_{k+j-1}, & j = 2, 3, \dots, \\ \beta'_{k+j} = 1 - \beta'_{k+j-1}, & j = 2, 3, \dots \end{cases}$$

Усього існує 3 випадки.

Випадок 1.

$$\begin{cases} \alpha_{k-1} + \alpha_k = 2, \\ \alpha_{k-1} + \alpha_k - 1 \neq 2. \end{cases}$$

Тоді

$$\begin{cases} \beta_k = 1 - \beta_{k-1}, \\ \beta_{k+1} = \beta_k = 1 - \beta_{k-1}, \\ \beta_{k+2} = 1 - \beta_{k+1} = \beta_{k-1}, \\ \dots\dots\dots; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta_k = 1 - \beta_{k-1}, \\ \beta_{k+2j-1} = 1 - \beta_{k-1}, \\ \beta_{k+2j} = \beta_{k-1}, \quad j \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Отже,

$$y = f\left(\bar{\Delta}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{k-1}\alpha_k}^3(20)\right) = \Delta_{\beta_1\beta_2\dots\beta_{k-1}[1-\beta_{k-1}](1-\beta_{k-1},\beta_{k-1})}^A.$$

Аналогічно,

$$\begin{cases} \beta'_k = \beta'_{k-1} = \beta_{k-1}, \\ \beta'_{k+1} = \beta'_k = \beta'_{k-1} = \beta_{k-1}, \\ \beta'_{k+2} = 1 - \beta'_{k+1} = 1 - \beta_{k-1}, \\ \dots\dots\dots; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta'_k = \beta_{k-1}, \\ \beta'_{k+2j-1} = \beta_{k-1}, \\ \beta'_{k+2j} = 1 - \beta_{k-1}, \quad j \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Тоді

$$y' = f\left(\bar{\Delta}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{k-1}[\alpha_k-1]}^3(02)\right) = \Delta_{\beta_1\beta_2\dots\beta_{k-1}\beta_{k-1}(\beta_{k-1},1-\beta_{k-1})}^A.$$

Випадок 2.

$$\begin{cases} \alpha_{k-1} + \alpha_k \neq 2, \\ \alpha_{k-1} + \alpha_k - 1 = 2. \end{cases}$$

Тоді

$$\begin{cases} \beta_k = \beta_{k-1}, \\ \beta_{k+1} = \beta_k = \beta_{k-1}, \\ \beta_{k+2} = 1 - \beta_{k+1} = 1 - \beta_{k-1}, \\ \dots\dots\dots; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta_k = \beta_{k-1}, \\ \beta_{k+2j-1} = \beta_{k-1}, \\ \beta_{k+2j} = 1 - \beta_{k-1}, \quad j \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Тоді

$$y = f\left(\bar{\Delta}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{k-1}\alpha_k}^3(20)\right) = \Delta_{\beta_1\beta_2\dots\beta_{k-1}\beta_{k-1}(\beta_{k-1},1-\beta_{k-1})}^A.$$

Аналогічно,

$$\begin{cases} \beta'_k = 1 - \beta'_{k-1} = 1 - \beta_{k-1}, \\ \beta'_{k+1} = \beta'_k = 1 - \beta'_{k-1} = 1 - \beta_{k-1}, \\ \beta'_{k+2} = 1 - \beta'_{k+1} = \beta_{k-1}, \\ \dots\dots\dots; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta'_k = 1 - \beta_{k-1}, \\ \beta'_{k+2j-1} = 1 - \beta_{k-1}, \\ \beta'_{k+2j} = \beta_{k-1}, \quad j \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Тоді

$$y' = f\left(\bar{\Delta}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{k-1}[\alpha_k-1]}^3(02)\right) = \Delta_{\beta_1\beta_2\dots\beta_{k-1}[1-\beta_{k-1}](1-\beta_{k-1},\beta_{k-1})}^A.$$

Випадок 3.

$$\begin{cases} \alpha_{k-1} + \alpha_k \neq 2, \\ \alpha_{k-1} + \alpha_k - 1 \neq 2. \end{cases}$$

Тоді

$$\begin{cases} \beta_k = \beta_{k-1}, \\ \beta_{k+1} = \beta_k = \beta_{k-1}, \\ \beta_{k+2} = 1 - \beta_{k+1} = 1 - \beta_{k-1}, \\ \dots\dots\dots; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta_k = \beta_{k-1}, \\ \beta_{k+2j-1} = \beta_{k-1}, \\ \beta_{k+2j} = 1 - \beta_{k-1}, \quad j \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Оскільки $2 + \alpha_k \neq 2$, то $\beta_{k+1}(x) = \beta_k(x)$, так само, оскільки $0 + \alpha_k - 1 \neq 2$, то $\beta_{k+1}(x') = \beta_k(x')$.

Залишилось визначити $\beta_k(x)$ і $\beta_k(x')$. Розглянувши три випадки, як і у доведенні коректності, впевнюємось, значення функції від двох різних зображень є одним і тим самим A_2 -раціональним числом. Цим ми довели неперервність функції.

Для доведення ніде не монотонності покажемо, що у кожному циліндрі можна обрати такий підциліндр, у якому можна вказати точки, пов'язані нерівністю

$$x_1 < x_2 < x_3, \quad (4.2)$$

для яких виконується одна з двох нерівностей:

$$f(x_1) < f(x_2) > f(x_3) \quad \text{або} \quad f(x_1) > f(x_2) < f(x_3).$$

На довільному циліндрі парного рангу $\bar{\Delta}_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{2k}}^3$ розглянемо точки:

$$x_1 = \bar{\Delta}_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{2k}}^3(2), \quad x_2 = \bar{\Delta}_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{2k}}^3(1), \quad x_3 = \bar{\Delta}_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{2k}}^3(0).$$

Оскільки

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= \left(\frac{3}{4} - \frac{\alpha_1}{3} + \frac{\alpha_1}{3^2} - \dots + \frac{\alpha_{2k}}{3^{2k}} - \frac{2}{3^{2k+1}} + \dots \right) - \\ &\quad - \left(\frac{3}{4} - \frac{\alpha_1}{3} + \frac{\alpha_1}{3^2} - \dots + \frac{\alpha_{2k}}{3^{2k}} - \frac{1}{3^{2k+1}} + \dots \right) = \\ &= -\frac{1}{3^{2k+1}} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \dots \right) = \frac{-1}{4 \cdot 3^{2k}} < 0, \end{aligned}$$

то $x_1 < x_2$. Аналогічно покажемо, що $x_2 < x_3$. Отже, чинне (4.2).

Розглянемо випадок, коли $\alpha_{2k} = 0$. Тоді:

$$f(x_1) = \Delta_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_{2k}(1-\beta_{2k})}^A,$$

$$f(x_2) = \Delta_{\beta_1\beta_2\dots\beta_{2k}(\beta_{2k}, 1-\beta_{2k})}^A,$$

$$f(x_3) = \Delta_{\beta_1\beta_2\dots\beta_{2k}(\beta_{2k})}^A.$$

Нехай $\beta_{2k} = 0$. Тоді

$$f(x_1) = \Delta_{\beta_1\beta_2\dots\beta_{2k-1}0(1)}^A, \quad f(x_2) = \Delta_{\beta_1\beta_2\dots\beta_{2k-1}0(01)}^A,$$

$$f(x_3) = \Delta_{\beta_1\beta_2\dots\beta_{2k-1}0(0)}^A.$$

З властивостей ланцюгових дробів маємо:

$$\beta_{2k+1}(x_1) > \beta_{2k+1}(x_2) \Rightarrow f(x_1) < f(x_2),$$

$$\beta_{2k+2}(x_2) > \beta_{2k+2}(x_3) \Rightarrow f(x_2) > f(x_3).$$

Отже, $f(x_1) < f(x_2) > f(x_3)$.

Нехай $\beta_{2k} = 1$. Тоді

$$f(x_1) = \Delta_{\beta_1\beta_2\dots\beta_{2k-1}1(0)}^A, \quad f(x_2) = \Delta_{\beta_1\beta_2\dots\beta_{2k-1}1(10)}^A,$$

$$f(x_3) = \Delta_{\beta_1\beta_2\dots\beta_{2k-1}1(1)}^A.$$

З властивостей ланцюгових дробів маємо:

$$\beta_{2k+1}(x_1) < \beta_{2k+1}(x_2) \Rightarrow f(x_1) > f(x_2),$$

$$\beta_{2k+2}(x_2) < \beta_{2k+2}(x_3) \Rightarrow f(x_2) < f(x_3).$$

Отже, $f(x_1) > f(x_2) < f(x_3)$. При $\alpha_{2k} \in \{1, 2\}$ висновки аналогічні.

Вказавши для кожного циліндра три значення аргумента, для яких мають місце вище зазначені системи нерівностей, ми довели ніде не монотонність функції. \square

Теорема 4.6.2. *На циліндрі $\bar{\Delta}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}}^3$ найбільше або найменше значення функції досягається у його внутрішній точці $x_0 = \bar{\Delta}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}1(1)}^3$; на циліндрі $\bar{\Delta}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{m-1}\alpha_m}^3$, де $\alpha_m \in \{0; 2\}$ функція набуває свого найбільшого і найменшого значення на кінцях циліндра.*

Доведення. Розглянемо циліндр $\bar{\Delta}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}1}^3$. Його кінцями є точки:

$$x_1 = \bar{\Delta}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}1(02)}^3 \quad \text{та} \quad x_2 = \bar{\Delta}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}1(20)}^3.$$

Функція набуває у цих точках однакових значень:

$$f(x_1) = f(x_2) = \bar{\Delta}_{\beta_1\beta_2\dots\beta_{n-1}\beta_n(\beta_n, 1-\beta_n)}^3.$$

Оскільки функція є неперервною і відмінною від константи, то свого максимального або мінімального значення вона набуде у деякій внутрішній точці.

Нехай $x_0 = \bar{\Delta}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}1(1)}^3$, тоді

$$f(x_0) = \Delta_{\beta_1\beta_2\dots\beta_{n-1}\beta_n}^A(1 - \beta_n, \beta_n).$$

Доведемо, що для всіх інших значень функції з цього циліндра виконується нерівність $f(x) > f(x_0)$ (або $f(x) < f(x_0)$). Нехай спочатку n – парне число; розглянемо можливі випадки.

Випадок 1. Виберемо у циліндрі $\bar{\Delta}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}1}^3$ довільну точку

$x = \bar{\Delta}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}1\alpha_{n+1}\dots}^3$ таку, що $\alpha_{n+1} \in \{0; 2\}$. Тоді

$$f(x) = \Delta_{\beta_1\beta_2\dots\beta_{n-1}00\dots}^A > f(x_0) = \Delta_{\beta_1\beta_2\dots\beta_{n-1}0(10)}^A, \quad \text{якщо } \beta_n = 0,$$

$$f(x) = \Delta_{\beta_1\beta_2\dots\beta_{n-1}11\dots}^A < f(x_0) = \Delta_{\beta_1\beta_2\dots\beta_{n-1}1(01)}^A, \quad \text{якщо } \beta_n = 1.$$

Випадок 2. Виберемо тепер у циліндрі $\bar{\Delta}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}1}^3$ довільну точку

$x = \bar{\Delta}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}1\alpha_{n+1}\dots}^3$ таку, що $\alpha_{n+k-1} = 1, k \in \mathbb{N}$, але $\alpha_{n+k} \neq 1$. Тоді, якщо $n+k$ – парне і $\beta_{n+k} = 0$, то $f(x) > f(x_0)$, якщо ж $\beta_{n+k} = 1$, то $f(x) < f(x_0)$.

Для непарного значення $n+k$ знаки останніх нерівностей змінюватимуться на протилежні.

Для непарного значення n можна дійти аналогічних висновків, причому знаки нерівностей змінюватимуться на протилежні.

Отже, на циліндрах парного рангу точка x_0 – точка мінімуму, якщо $\beta_n = 0$, і точка максимуму, якщо $\beta_n = 1$. На циліндрах непарного рангу x_0 – точка максимуму, якщо $\beta_n = 0$, і точка мінімуму, якщо $\beta_n = 1$.

Розглянемо циліндр $\bar{\Delta}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}0}^3$, і нехай n – парне число. Оскільки образ циліндра $\bar{\Delta}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}0}^3$ є підмножиною циліндра $\Delta_{\beta_1\beta_2\dots\beta_{n-1}\beta_n}^A$, то, за властивостями ланцюгових дробів, максимальне значення функції не перевищуватиме значення

$$f_1 = \Delta_{\beta_1\beta_2\dots\beta_{n-1}\beta_n}^A(01).$$

Доведемо, що це значення функція набуває на кінці циліндра та, можливо, ще у одній внутрішній точці циліндра. Нехай

$$x_{max} = \bar{\Delta}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}0\alpha_{n+1}\alpha_{n+2}\dots}^3,$$

і нехай $\beta_n = 0$, тоді $f(x_{max}) = \Delta_{\beta_1\beta_2\dots\beta_{n-1}0}^A(01)$.

Оскільки $\beta_{n+1}(f(x_{max})) = \beta_n(f(x_{max}))$, то $\alpha_{n+1} + \alpha_n \neq 2$, тобто $\alpha_{n+1}^{(1)}(x_{max}) = 0$ або $\alpha_{n+1}^{(2)}(x_{max}) = 1$. Далі, оскільки $\beta_{n+2}(f(x_{max})) \neq \beta_{n+1}(f(x_{max}))$, то $\alpha_{n+2} + \alpha_{n+1} = 2$, тобто

$$\alpha_{n+2}^{(1)}(x_{max}) = 2 \quad \text{або} \quad \alpha_{n+2}^{(2)}(x_{max}) = 1,$$

і т. д. Отже,

$$x_{max}^{(1)} = \bar{\Delta}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}0}^3(02) \text{ – правий кінець циліндра,}$$

$$x_{max}^{(2)} = \bar{\Delta}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}0}^3(1) \text{ – внутрішня точка циліндра.}$$

Нехай тепер $\beta_n = 1$. Оскільки $\beta_{n+1}(f(x_{max})) \neq \beta_n(f(x_{max}))$, то

$$\alpha_{n+1}(x_{max}) + \alpha_n(x_{max}) = 2,$$

отже, $\alpha_{n+1}(x_{max}) = 2$. Оскільки $\beta_{n+2}(f(x_{max})) \neq \beta_{n+1}(f(x_{max}))$,

то $\alpha_{n+2}(x_{max}) + \alpha_{n+1}(x_{max}) = 2$, тобто $\alpha_{n+2}(x_{max}) = 0$, і т. д. Таким чином,

$$x_{max} = \bar{\Delta}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}0}^3(20) \text{ – лівий кінець циліндра.}$$

Мінімальне значення функції на циліндрі $\bar{\Delta}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}0}^3$ буде не меншим за

$$f_2 = \Delta_{\beta_1\beta_2\dots\beta_{n-1}\beta_n}^A(10).$$

Доведемо, що це значення буде досягатись на одному із кінців циліндра та, можливо, у ще одній внутрішній його точці.

Нехай $x_{min} = \bar{\Delta}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}0\alpha_{n+1}\alpha_{n+2}\dots}^3$, і нехай $\beta_n = 0$. Тоді, повторюючи наведені вище міркування, отримуємо, що

$$x_{min} = \bar{\Delta}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}0(20)}^3 - \text{лівий кінець циліндра.}$$

При $\beta_n = 1$ аналогічним чином робимо висновок, що мінімальне значення функції досягається у двох точках:

$$x_{min}^{(1)} = \bar{\Delta}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}0(02)}^3 - \text{правий кінець циліндра,}$$

$$x_{min}^{(1)} = \bar{\Delta}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}0(1)}^3 - \text{внутрішня точка циліндра.}$$

Для непарного значення n і для $\alpha_n = 2$ доведення аналогічне. □

Множиною значень функції $y = f(x)$ є відрізок $[1/2; 1]$.

4.6.3. Множини рівнів функції. Множиною рівня y_0 функції f називається множина

$$f^{-1}(y_0) = \{x : f(x) = y_0\}.$$

- Лема 4.6.1.**
1. Якщо ланцюгове A -зображення точки y_0 має вигляд $\Delta_{(01)}^A$, то множина $f^{-1}(y_0)$ складається з двох точок.
 2. Якщо ланцюгове A -зображення точки y_0 має вигляд $\Delta_{(10)}^A$, то множина $f^{-1}(y_0)$ складається з однієї точки.
 3. Якщо в ланцюговому A -зображенні точки y_0 всі цифри дорівнюють 0, то множина $f^{-1}(y_0)$ є зліченною множиною.

Доведення. 1. Нехай $y_0 = \Delta_{(01)}^A$. Оскільки $\beta_1 = 0$, то, виходячи з означення функції, $\alpha_1 \in \{0; 1\}$. Оскільки $\beta_2 = 1 = 1 - \beta_1$, то $\alpha_2 + \alpha_1 = 2$, тобто $\alpha_2 = 2$, якщо $\alpha_1 = 0$ і $\alpha_2 = 1$, якщо $\alpha_1 = 1$. Аналогічно, оскільки $\beta_3 = 0$, то $\alpha_3 = 0$, якщо $\alpha_2 = 2$ і $\alpha_3 = 1$, якщо $\alpha_2 = 1$, і. т. д. Отже, прообразами точки y_0 є два значення аргумента: $\bar{\Delta}_{(02)}^3$ або $\bar{\Delta}_{(1)}^3$.

2. Нехай $y_0 = \Delta_{(10)}^A$. Оскільки $\beta_1 = 1$, то $\alpha_1 = 2$. Далі, оскільки $\beta_2 = 0 = 1 - \beta_1$, то $\alpha_1 + \alpha_2 = 2$, тобто $\alpha_2 = 0$. Продовжуючи ці міркування робимо висновок, що прообразом точки y_0 є лише точка $\bar{\Delta}_{(20)}^3$.
3. Нехай $y_0 = \Delta_{(0)}^A$. Оскільки $\beta_1 = 0$, то $\alpha_1 \in \{0; 1\}$. Те, що β_{k+1} дорівнює 0, рівносильно тому, що $\alpha_k + \alpha_{k+1} \neq 2$. Отже, кожна наступна цифра аргумента може приймати два значення, і перелік усіх значень аргументів, для яких $\alpha_k + \alpha_{k+1} \neq 2$ легко занумерувати за зростанням відповідних цифр. \square

4.6.4. Варіаційні властивості функції.

Лема 4.6.2. *Амплітуда коливання функції на циліндрі*

$$\delta(\bar{\Delta}_{\alpha_1 \dots \alpha_m}^3) \equiv \max_{x \in \bar{\Delta}_{\alpha_1 \dots \alpha_m}^3} f(x) - \min_{x \in \bar{\Delta}_{\alpha_1 \dots \alpha_m}^3} f(x) = |\Delta_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_m}^A|.$$

Доведення. Нехай m – парне число. Тоді циліндр $\Delta_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_m}^A$ є відрізком з кінцями:

$$\Delta_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_m}^A = [\Delta_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_m}^A(10), \Delta_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_m}^A(01)].$$

Розглянемо циліндр $\bar{\Delta}_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}^3$.

Нехай $\alpha_m = 0$. Тоді числа

$$y_1 \equiv f(\bar{\Delta}_{\alpha_1 \dots \alpha_m}^3(02)) = \Delta_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_m}^A(\beta_m, 1 - \beta_m),$$

$$y_2 \equiv f(\bar{\Delta}_{\alpha_1 \dots \alpha_m}^3(20)) = \Delta_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_m}^A(1 - \beta_m, \beta_m)$$

є кінцями циліндра $\Delta_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_m}^A$.

Нехай $\alpha_m = 1$. Тоді числа

$$y_1 \equiv f(\bar{\Delta}_{\alpha_1 \dots \alpha_m}^3(1)) = \Delta_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_m}^A(1 - \beta_m, \beta_m),$$

$$y_2 \equiv f(\bar{\Delta}_{\alpha_1 \dots \alpha_m}^3(02)) = \Delta_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_m}^A(\beta_m, 1 - \beta_m)$$

є кінцями циліндра $\Delta_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_m}^A$.

Нехай $\alpha_m = 2$. Тоді числа

$$y_1 \equiv f(\bar{\Delta}_{\alpha_1 \dots \alpha_m}^3(02)) = \Delta_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_m}^A(1 - \beta_m, \beta_m),$$

$$y_2 \equiv f(\bar{\Delta}_{\alpha_1 \dots \alpha_m}^3(20)) = \Delta_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_m}^A(\beta_m, 1 - \beta_m)$$

є кінцями циліндра $\Delta_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_m}^A$.

Таким чином, у всіх випадках $|y_1 - y_2| = |\Delta_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_m}^A|$, отже, амплітуда δ коливання функції на циліндрі $\bar{\Delta}_{\alpha_1 \dots \alpha_m}^3$ рівна довжині циліндра $\Delta_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_m}^A$.

При непарному значенні n міркування аналогічні. \square

Лема 4.6.3. *Має місце подвійна нерівність*

$$\frac{3}{8} < \frac{|\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^{A_2}|}{|\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^{A_2}|} < \frac{5}{8}. \quad (4.3)$$

Доведення. Доведемо спочатку першу нерівність. З відомих рівностей

$$\frac{|\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^{A_2}|}{|\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^{A_2}|} = \frac{2 + \frac{q_{n-1}}{q_n}}{3 + 2 \frac{q_{n-1}}{q_n}}, \quad \frac{|\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^{A_2}|}{|\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^{A_2}|} = \frac{1 + \frac{q_{n-1}}{q_n}}{3 + 2 \frac{q_{n-1}}{q_n}},$$

де $\frac{1}{2} < \frac{q_{n-1}}{q_n} < 1$, бачимо, що дріб $\frac{|\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^{A_2}|}{|\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^{A_2}|}$ набуде меншого значення при $i = 1$.

Оскільки функція $f_1(x) = \frac{1+x}{3+2x}$ є зростаючою, то

$$\frac{|\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^{A_2}|}{|\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^{A_2}|} > \inf_{x \in (0,5;1)} f_1(x) = f_1(0,5) = \frac{3}{8}.$$

Доведемо тепер другу нерівність.

Максимального значення дріб $\frac{|\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^{A_2}|}{|\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^{A_2}|}$ набуде при $i = 2^{-1}$.

Оскільки функція $f_2(x) = \frac{2+x}{3+2x}$ є спадною, то

$$\frac{|\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^{A_2}|}{|\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^{A_2}|} < \sup_{x \in (0,5;1)} f_2(x) = f_2(0,5) = \frac{5}{8}. \quad \square$$

Наслідок 4.6.1. $|\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n (1-i)}^A| < \frac{5}{3} |\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n i}^A|$.

Доведення. З нерівності (4.3) отримуємо

$$\begin{aligned} |\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^A| < \frac{8}{3} |\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n i}^A| &\Leftrightarrow |\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n i}^A| + |\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n (1-i)}^A| < \frac{8}{3} |\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n i}^A| \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow |\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n (1-i)}^A| < \frac{5}{3} |\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n i}^A|. \quad \square \end{aligned}$$

Теорема 4.6.3. *Функція f є функцією необмеженої варіації.*

Доведення. Оскільки образом циліндра n -го рангу негетрійкового зображення числа при відображенні f є циліндр A_2 -зображення того ж рангу, причому рівно два образи циліндрів $\bar{\Delta}_{\alpha_1 \dots \alpha_n 0}^3, \bar{\Delta}_{\alpha_1 \dots \alpha_n 1}^3, \bar{\Delta}_{\alpha_1 \dots \alpha_n 2}^3$ збігаються, то варіація V функції f є не меншою сумарної довжини образів V_n усіх циліндрів рангу n , тобто

$$V \geq V_n \equiv \sum_{\alpha_1=0}^2 \dots \sum_{\alpha_n=0}^2 |f(\bar{\Delta}_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^3)|.$$

Якщо $\Delta_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n}^A = f(\bar{\Delta}_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^3)$, то

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^2 |f(\bar{\Delta}_{\alpha_1 \dots \alpha_n i}^3)| &= |\Delta_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n 0}^A| + |\Delta_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n 1}^A| + |\Delta_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n c}^A| = \\ &= |\Delta_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n}^A| + |\Delta_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n c}^A|, \quad \text{де } c \in \{0, 1\}. \end{aligned}$$

Оскільки з нерівності (4.3)

$$\frac{3}{8} |\Delta_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n}^A| < |\Delta_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n i}^A| < \frac{5}{8} |\Delta_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n}^A|,$$

то

$$\sum_{i=0}^2 |f(\bar{\Delta}_{\alpha_1 \dots \alpha_n i}^3)| > |\Delta_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n}^A| + \frac{1}{3} |\Delta_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n}^A| = \frac{4}{3} |\Delta_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n}^A|.$$

Отже

$$V_{n+1} \equiv \sum_{\alpha_1=0}^2 \dots \sum_{\alpha_n=0}^2 \sum_{i=0}^2 |f(\bar{\Delta}_{\alpha_1 \dots \alpha_n i}^3)| > \frac{4}{3} \sum_{\alpha_1=0}^2 \dots \sum_{\alpha_n=0}^2 |f(\bar{\Delta}_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^3)| \equiv \frac{4}{3} V_n.$$

Таким чином,

$$V_{n+1} > \frac{4}{3}V_n > \left(\frac{4}{3}\right)^2 V_{n-1} > \dots > \left(\frac{4}{3}\right)^{n+1} \cdot |\Delta| \rightarrow \infty \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

а отже варіація $V \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \infty$. □

4.6.5. Авто модельність графіка функції.

Теорема 4.6.4. 1. *Частина*

$$\Gamma_1 = \{M(x, y) : x = \bar{\Delta}_{1\alpha_2\alpha_3\dots\alpha_n\dots}^3, \quad y = f(x)\}$$

графіка Γ функції f симетрична відносно прямої $x = \bar{\Delta}_{(1)}^3$.

2. *Відображення, яке переводить частину графіка*

$$\Gamma_0 = \{M(x, y) : x = \bar{\Delta}_{0\alpha_2\alpha_3\dots\alpha_n\dots}^3, \quad y = f(x)\}$$

в частину

$$\Gamma_2 = \{M(x, y) : x = \bar{\Delta}_{2\alpha_2\alpha_3\dots\alpha_n\dots}^3, \quad y = f(x)\},$$

здається формулою:

$$\begin{cases} x' = \bar{\Delta}_{[2-\alpha_1][2-\alpha_2]\dots[2-\alpha_n]\dots}^3 \\ y' = \Delta_{[1-\beta_1][1-\beta_2]\dots[1-\beta_n]\dots}^A \end{cases}$$

Доведення. 1. Відомо, що графік функції $y = f(x)$ має вісь симетрії $x = a$ тоді і лише тоді, коли $2a - x \in D(f) \quad \forall x \in D(f)$ і $f(2a - x) = f(x)$.

Візьмемо довільний x_0 з циліндра $\bar{\Delta}_1^3$: $x_0 = \bar{\Delta}_{1\alpha_2\alpha_3\dots\alpha_n\dots}^3$ і нехай $f(x_0) = \Delta_{1\beta_2\beta_3\dots\beta_n\dots}^A$.

Тоді

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 \cdot \bar{\Delta}_{(1)}^3 - x_0 = 2 \cdot \bar{\Delta}_{(1)}^3 - \bar{\Delta}_{1\alpha_2\alpha_3\dots\alpha_n\dots}^3 = \\ &= 2 \cdot \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \dots \right) - \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{3} + \frac{\alpha_2}{3^2} - \frac{\alpha_3}{3^3} + \dots \right) = \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{3} + \frac{2 - \alpha_2}{3^2} - \frac{2 - \alpha_3}{3^3} + \dots \right) = \bar{\Delta}_{1[2-\alpha_2][2-\alpha_3]\dots[2-\alpha_n]\dots}^3.$$

Якщо $\alpha_2 + 1 = 2$, то $[2 - \alpha_2] + 1 = 4 - (\alpha_2 + 1) = 2$.

Якщо $\alpha_{k+1} + \alpha_k = 2$, то $[2 - \alpha_{k+1}] + [2 - \alpha_k] = 4 - (\alpha_{k+1} + \alpha_k) = 2$, $k = 2, 3, \dots$, це означає, що $f(x_1) = \Delta_{1\beta_2\beta_3\dots\beta_n\dots}^A$.

Отримали, що $f\left(2 \cdot \bar{\Delta}_{(1)}^3 - x_0\right) = f(x_0)$, $\forall x_0 \in \Gamma_1$, тобто частина графіка Γ_1 симетрична відносно прямої $x = \bar{\Delta}_{(1)}^3$.

2. Нехай $M(x, y) \in \Gamma_0$, тобто $x = \bar{\Delta}_{0\alpha_2\alpha_3\dots\alpha_n\dots}^3$, $y = f(x) = \Delta_{0\beta_2\beta_3\dots\beta_n\dots}^A$, тоді $x' = \bar{\Delta}_{[2-\alpha_1][2-\alpha_2]\dots[2-\alpha_n]\dots}^3 = \bar{\Delta}_{2[2-\alpha_2]\dots[2-\alpha_n]\dots}^3$. Звідси

$$\begin{cases} \beta_1 = 0, \beta_2 = \begin{cases} 1 - \beta_1, & \text{якщо } \alpha_2 = 2; \\ \beta_1, & \text{якщо } \alpha_2 \neq 2; \end{cases} \\ \beta_{k+2} = \begin{cases} 1 - \beta_{k+1}, & \text{якщо } \alpha_{k+2} + \alpha_{k+1} = 2; \\ \beta_{k+1}, & \text{якщо } \alpha_{k+2} + \alpha_{k+1} \neq 2, \end{cases} \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}. \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \beta'_1 = 1 = 1 - \beta_1, \\ \beta'_2 = \begin{cases} 1 - \beta'_1, & \text{якщо } [2 - \alpha_2] + 2 = 2; \\ \beta'_1, & \text{якщо } [2 - \alpha_2] + 2 \neq 2; \end{cases} \\ \beta'_{k+2} = \begin{cases} 1 - \beta'_{k+1}, & \text{якщо } [2 - \alpha_{k+2}] + [2 - \alpha_{k+1}] = 2; \\ \beta'_{k+1}, & \text{якщо } [2 - \alpha_{k+2}] + [2 - \alpha_{k+1}] \neq 2, \end{cases} \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Звідси бачимо, що $\beta'_i = 1 - \beta_i$, $i \in \mathbb{N}$, тобто

$$y' = f(x') = \Delta_{[1-\beta_1][1-\beta_2]\dots[1-\beta_n]\dots}^A. \quad \square$$

4.7. Умови раціональності числа за його ланцюговим A_2 -зображенням

Якщо позначити $t = \left[\left(\frac{1}{2}, 1\right)\right]$ тоді з рівності

$$t = \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{1+t}}$$

легко отримати рівняння $0,5t^2 + 0,5t - 1 = 0$ і його розв'язок $t = 1 = [(\frac{1}{2}, 1)]$.

Аналогічно

$$\left[\left(1, \frac{1}{2} \right) \right] = \frac{1}{2}.$$

Лема 4.7.1. *Кожне A_2 -раціональне число має принаймні два різних скінченних ланцюгових A_2 -зображення, а саме:*

$$x = [a_1, \dots, a_m, \frac{1}{2}, 1] = [a_1, \dots, a_m, 1, 1, 1].$$

Доведення. Оскільки

$$\frac{1}{2} = \left[\left(1, \frac{1}{2} \right) \right] \quad \text{і} \quad 1 = \left[\left(\frac{1}{2}, 1 \right) \right],$$

то

$$\begin{aligned} [a_1, \dots, a_m, \frac{1}{2}, (\frac{1}{2}, 1)] &= [a_1, \dots, a_m, \frac{1}{2} + 1] = \\ &= \frac{1}{a_1 + \dots + \frac{1}{a_m + \frac{1}{0,5 + \frac{1}{1}}}} = [a_1, \dots, a_m, \frac{1}{2}, 1], \\ [a_1, \dots, a_m, 1, (1, \frac{1}{2})] &= [a_1, \dots, a_m, 1 + \frac{1}{2}] = \\ &= \frac{1}{a_1 + \dots + \frac{1}{a_m + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}} = [a_1, \dots, a_m, 1, 1, 1]. \end{aligned}$$

Тоді вказані у формулюванні леми рівності є наслідком того, що рівність

$$[a_1, \dots, a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots] = [a_1, \dots, a_n, a'_{n+1}, a'_{n+2}, \dots]$$

має місце тоді і тільки тоді, коли

$$[a_{n+1}, a_{n+2}, \dots] = [a'_{n+1}, a'_{n+2}, \dots].$$

Значення кожного скінченного ланцюгового A_2 -дробу є результатом скінченного числа раціональних дій над раціональними числами. Тому кожне A_2 -раціональне число є раціональним. \square

Теорема 4.7.1. *Кожне A_2 -раціональне число має зліченну множину різних скінченних ланцюгових A_2 -зображень.*

Доведення. Справді, з рівності

$$1 = \frac{1}{1} = \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{1+\frac{1}{1}}} \quad (4.4)$$

маємо $1 = [1] = [\frac{1}{2}, 1, 1] = [\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, 1, 1] = [\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, 1, 1] = \dots$

Тоді $\frac{1}{2} = [1, 1] = [1, \frac{1}{2}, 1, 1] = [1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, 1, 1] = \dots$

Отже,

$$\frac{1}{2} = \left[1, \underbrace{\frac{1}{2}, 1, \dots, \frac{1}{2}, 1, 1}_{2m} \right], \quad 1 = \left[\underbrace{\frac{1}{2}, 1, \dots, \frac{1}{2}, 1, 1}_{2m} \right].$$

Вказані в лемі 4.7.1 зображення A_2 -раціональних чисел містять останній елемент рівний 1, а отже, враховуючи рівність (4.4), таким способом отримуємо зліченну кількість скінченних зображень A_2 -раціонального числа. \square

Цікавим є запитання: чи кожне раціональне число відрізка $[0, 5; 1]$ є A_2 -раціональним? Відповідь на це запитання безпосередньо пов'язане з іншим питанням: чи кожне раціональне число розкладається в скінченний ланцюговий A_2 -дріб? Розглянемо кілька прикладів таких розкладів. Але перед цим наведемо алгоритм розкладу раціонального числа $\frac{a}{b}$ у ланцюговий A_2 -дріб:

1. Перший елемент a_1 розкладу числа $x = \frac{a}{b}$ знаходиться за формулою:

$$a_1 = \varphi \left(\frac{a}{b} \right) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \frac{1}{2} \leq \frac{a}{b} \leq \frac{2}{3}, \\ \frac{1}{2}, & \text{якщо } \frac{2}{3} \leq \frac{a}{b} \leq 1; \end{cases}$$

2. Наступні елементи a_i визначаються з рівностей:

$$x_1 = \frac{1}{x} - \varphi(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\varepsilon_1 = \frac{2b - a\varepsilon_1}{2a},$$

$$x_2 = \frac{1}{x_1} - \varphi(x_1) = \frac{1}{x_1} - \frac{1}{2}\varepsilon_2,$$

...

$$x_{n+1} = \frac{1}{x_n} - \varphi(x_n) = \frac{1}{x_n} - \frac{1}{2}\varepsilon_{n+1},$$

де $a_n = \varphi(x_{n-1}) = \frac{1}{2}\varepsilon_n, \varepsilon_n \in \{1, 2\}$.

3. Процес завершився, якщо x_n дорівнює $1, \frac{1}{2}$ або $\frac{1}{3}$.

— У першому випадку число x має $n + 1$ цифру, причому $a_{n+1}(x) = 1$.

— У другому — $n + 2$ цифри, причому $a_{n+1}(x) = 1, a_{n+2}(x) = 1$.

— У третьому — $n + 2$ цифри, причому $a_{n+1}(x) = 1, a_{n+2}(x) = \frac{1}{2}$.

Мають місце розклади:

$$\frac{2}{3} = [1, 1, 1] = \left[\frac{1}{2}, 1 \right], \quad \frac{3}{4} = \left[1, 1, \frac{1}{2} \right], \quad \frac{4}{5} = \left[\frac{1}{2}, 1, 1, \frac{1}{2} \right],$$

$$\frac{5}{6} = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 1, 1, 1, 1, \frac{1}{2} \right],$$

$$\frac{6}{7} = \left[\frac{1}{2}, 1, 1, 1 \right] = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 \right], \quad \frac{7}{8} = \left[\frac{1}{2}, 1, 1, \frac{1}{2}, 1, 1, \frac{1}{2} \right],$$

$$\frac{8}{9} = \left[\frac{1}{2}, 1, 1, 1, 1, 1 \right], \quad \frac{9}{10} = \left[\frac{1}{2}, 1, 1, 1, 1, 1, \frac{1}{2} \right],$$

Крім того,

$$\frac{5}{6} = \left[\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 1, 1, \frac{1}{2} \right) \right].$$

Примітка. Спростовує гіпотезу про те, що кожне раціональне число є A_2 -раціональним приклад числа $x = \frac{5}{6}$, яке має скінченний розклад і періодичний розклад, який не задовольняє означення A_2 -раціонального числа. Залишається ні доведеною ні спростованою гіпотеза про те, що кожне раціональне число має розклад у скінченний ланцюговий A_2 -дріб.

Лема 4.7.2. *Кожен скінченний ланцюговий A_2 -дріб у формі $[\frac{1}{2}, (1, \frac{1}{2})^n]$ більший за 1, причому $x_n \equiv [\frac{1}{2}, (1, \frac{1}{2})^n] = \frac{2^{2n+2}+2}{2^{2n+2}-1}$, де вираз $(1, \frac{1}{2})^n$ означає, що пара елементів $(1, \frac{1}{2})$ входить n разів.*

Доведення. Скористаємось методом математичної індукції. При $n = 1$ маємо

$$x_1 \equiv \left[\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{1}{2}}}} = \frac{6}{5} = \frac{2^{2 \cdot 1 + 2} + 2}{2^{2 \cdot 1 + 2} - 1} = \frac{18}{15}.$$

Припустимо, що формула має місце при всіх $n \leq k$ і доведемо її для $n = k + 1$.

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \left[\frac{1}{2}, \left(1, \frac{1}{2}\right)^{k+1} \right] = \left[\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, \left(1, \frac{1}{2}\right)^k \right] = \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{2^{2k+2} + 2}{2^{2k+2} - 1}}}} = \\ &= \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{2^{2k+2} - 1}{2^{2k+3} + 1}} = \frac{2^{2k+4} + 2}{2^{2k+4} - 1} = \frac{2^{2(k+1)+2} + 2}{2^{2(k+1)+2} - 1}, \end{aligned}$$

що й потрібно було довести. \square

4.8. Властивості чисел з періодичними ланцюговими A_2 -зображеннями

Теорема 4.8.1. *Якщо число y містить період у своєму ланцюговому A_2 -зображенні, то воно має вигляд $y = \alpha + \sqrt{\gamma}$, де $\alpha, \gamma \in \mathbb{Q}$.*

Доведення. Нехай $y = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, (\beta_1, \dots, \beta_l)]$, тоді маємо

$$[(\beta_1, \dots, \beta_l)] = \omega^k(y) = \frac{u_k y + v_k}{c_k y + d_k},$$

$$[(\beta_1, \dots, \beta_l)] = \omega^l \left(\frac{u_k y + v_k}{c_k y + d_k} \right).$$

Отже,

$$\frac{u_{k+l} y + v_{k+l}}{c_{k+l} y + d_{k+l}} = \frac{u_k y + v_k}{c_k y + d_k},$$

звідки

$$y^2(c_{k+l}u_k - u_{k+l}c_k) + y(u_k c_{k+l} + v_k d_{k+l} - u_{k+l}d_k - v_{k+l}c_k) + v_k d_{k+l} - v_{k+l}d_k = 0,$$

що доводить потрібне. \square

Відомою є наступна теорема.

Теорема 4.8.2. Якщо рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, ($a, b, c \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$) має корінь $x_1 = \alpha + \sqrt{\gamma}$, де $\alpha, \gamma \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{\gamma} \notin \mathbb{Q}$, то воно має корінь $x_2 = \alpha - \sqrt{\gamma}$.

Теорема 4.8.3. Якщо число

$$y = \frac{e}{f} + \sqrt{\frac{g}{h}} \in [0,5; 1],$$

де $e, f, g, h \in \mathbb{N}$, $(g; h) = (f; h) = 1$, $\sqrt{\frac{g}{h}} \notin \mathbb{Q}$, має зображення

$$y = [(\beta_1, \dots, \beta_k)],$$

то виконується нерівність

$$h \leq \frac{1}{\sqrt{17}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{17}}{2} \right)^k - \left(\frac{1 - \sqrt{17}}{2} \right)^k \right).$$

Доведення. Маємо

$$\frac{u_k y + v_k}{c_k y + d_k} = y$$

і відповідно

$$c_k y^2 + (d_k - u_k) y - v_k = 0.$$

За теоремою 4.8.2, останнє рівняння також має корінь

$$\tilde{y} = \frac{e}{f} - \sqrt{\frac{g}{h}},$$

тому

$$-\frac{b_k}{c_k} = y \tilde{y} = \frac{e^2}{f^2} - \frac{g}{h} = \frac{e^2 h - g f^2}{f^2 h}$$

і відповідно

$$-b_k f^2 h = c_k (e^2 h - g f^2).$$

Ліва частина останньої рівності ділиться на h , звідки c_k ділиться на h .

Враховуючи теорему 4.1.1, маємо

$$h \leq |c_k| \leq \frac{1}{\sqrt{17}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{17}}{2} \right)^k - \left(\frac{1 - \sqrt{17}}{2} \right)^k \right).$$

□

4.9. Апроксимація дійсних чисел відрізка $[0,5; 1]$ ланцюговими A_2 -дробами

Нехай $\nu_1(x, n) = \frac{l_n}{n}$, $\nu_{\frac{1}{2}}(x, n) = \frac{k_n}{n}$, де l_n і k_n — це кількість елементів 1 і $\frac{1}{2}$ відповідно серед набору (a_1, \dots, a_n) у ланцюговому A_2 -зображенні числа $x = [a_1, \dots, a_n, \dots]$.

Будемо називати величини $\lim_{n \rightarrow \infty} \nu_{\frac{1}{2}}(x, n) = \nu_{\frac{1}{2}}$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} \nu_1(x, n) = \nu_1$ частотами цифр $\frac{1}{2}$ і 1 відповідно у розкладі числа x у ланцюговий A_2 -дріб, за умови що відповідні границі існують.

Лема 4.9.1. *Нехай B — множина наборів $(\alpha_1, \dots, \alpha_{k+l})$ серед яких l елементів 1 і k елементів $\frac{1}{2}$, $q((\alpha_1, \dots, \alpha_{k+l}))$ — число, яке визначається рекурентно*

$$q_0 = 1, q_1 = \alpha_1, q_n = \alpha_n q_{n-1} + q_{n-2}, n = 2, 3, \dots, k+l,$$

$$q_{k+l} = q((\alpha_1, \dots, \alpha_{k+l})),$$

тоді існують сталі $D_j, \tilde{D}_j (j \in \{1, 2, 3, 4\}) (D_j, \tilde{D}_j > 0)$, які не залежать від k і l , такі, що

$$\min_{(\alpha_1, \dots, \alpha_{k+l}) \in B} q((\alpha_1, \dots, \alpha_{k+l})) = D_1 \delta_1^l \eta_1^k + D_2 \delta_1^l \eta_2^k + D_3 \delta_2^l \eta_1^k + D_4 \delta_2^l \eta_2^k. \quad (4.5)$$

$$\max_{(\alpha_1, \dots, \alpha_{k+l}) \in B} q((\alpha_1, \dots, \alpha_{k+l})) = \tilde{D}_1 \delta_1^l \eta_1^k + \tilde{D}_2 \delta_1^l \eta_2^k + \tilde{D}_3 \delta_2^l \eta_1^k + \tilde{D}_4 \delta_2^l \eta_2^k. \quad (4.6)$$

$$\text{де } \delta_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}, \eta_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{4}.$$

Доведення. Нехай $q_k = \frac{1}{2}q_{k-1} + q_{k-2}$, $q_{k+1} = q_k + q_{k-1}$, тоді

$$q_{k+1} = \frac{1}{2}q_{k-1} + q_{k-2} + q_{k-1} = 1,5q_{k-1} + q_{k-2}.$$

Якщо $q_k = q_{k-1} + q_{k-2}$, $q_{k+1} = \frac{1}{2}q_k + q_{k-1}$, тоді

$$q_{k+1} = \frac{1}{2}q_{k-1} + \frac{1}{2}q_{k-2} + q_{k-1} = 1,5q_{k-1} + 0,5q_{k-2}.$$

Як бачимо, в першому випадку величина q_{k+1} більша, ніж в другому.

Нехай $c_n(\beta_0, \beta_1), d_n(\gamma_0, \gamma_1)$ – послідовності такі, що

$$c_{n+1}(\beta_0, \beta_1) = c_n(\beta_0, \beta_1) + c_{n-1}(\beta_0, \beta_1), \forall n \in \mathbb{N},$$

$$c_0(\beta_0, \beta_1) = \beta_0, c_1(\beta_0, \beta_1) = \beta_1.$$

$$d_{n+1}(\gamma_0, \gamma_1) = \frac{1}{2}d_n(\gamma_0, \gamma_1) + d_{n-1}(\gamma_0, \gamma_1), \forall n \in \mathbb{N},$$

$$d_0(\gamma_0, \gamma_1) = \gamma_0, d_1(\gamma_0, \gamma_1) = \gamma_1.$$

Індукцією по n легко показати, що

$$c_n(\tilde{\beta}_0, \tilde{\beta}_1) > c_n(\beta_0, \beta_1),$$

$$d_n(\tilde{\gamma}_0, \tilde{\gamma}_1) > d_n(\gamma_0, \gamma_1) \forall n \in \mathbb{N},$$

якщо $\tilde{\beta}_j > \beta_j > 0, \tilde{\gamma}_j > \gamma_j > 0, \forall j \in \{0; 1\}$.

Враховуючи усе вище сказане отримуємо, що при заміні сусідніх елементів $(\frac{1}{2}, 1)$ на $(1, \frac{1}{2})$ в наборі $(\alpha_1, \dots, \alpha_{k+l})$ ми зменшимо значення відповідного виразу $q(\alpha_1, \dots, \alpha_{k+l})$. Будемо здійснювати відповідну заміну доти, доки буде можливість. В результаті прийдемо до набору

$$\left(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_l, \underbrace{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}}_k \right).$$

Отже,

$$\min_{(\alpha_1, \dots, \alpha_{k+l}) \in B} q((\alpha_1, \dots, \alpha_{k+l})) = q \left(\underbrace{(1, 1, \dots, 1)}_l, \underbrace{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})}_k \right).$$

Легко бачити, що

$$d_n(\gamma_0; \gamma_1) = \frac{4\gamma_1 + (\sqrt{17}-1)\gamma_0}{2\sqrt{17}} \left(\frac{1+\sqrt{17}}{4} \right)^n + \frac{(\sqrt{17}+1)\gamma_0 - 4\gamma_1}{2\sqrt{17}} \left(\frac{1-\sqrt{17}}{4} \right)^n,$$

$$c_n(\beta_0; \beta_1) = \frac{2\beta_1 + (\sqrt{5}-1)\beta_0}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \frac{(\sqrt{5}+1)\beta_0 - 2\beta_1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Зрозуміло, що $q \left(\left(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_l, \underbrace{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}}_k \right) \right)$ визначається системою рівностей

$$\begin{aligned} q_0 &= 1, q_1 = 1, q_2 = q_1 + q_0, q_3 = q_2 + q_1, \dots, q_l = q_{l-1} + q_{l-2}, \\ q_{l+1} &= \frac{1}{2}q_l + q_{l-1}, q_{l+2} = \frac{1}{2}q_{l+1} + q_l, \dots, q_{k+l} = \frac{1}{2}q_{k+l-1} + q_{k+l-2}. \end{aligned}$$

Маємо

$$\begin{aligned} q_l &= \frac{\sqrt{5} + 1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^l + \frac{\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^l, \\ q_{l-1} &= \frac{\sqrt{5} + 1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{l-1} + \frac{\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{l-1}, \\ q_{k+l} &= \frac{4b_1^* + (\sqrt{17} - 1)b_0^*}{2\sqrt{17}} \left(\frac{1 + \sqrt{17}}{4} \right)^k + \frac{(1 + \sqrt{17})b_0^* - 4b_1^*}{2\sqrt{17}} \left(\frac{1 - \sqrt{17}}{4} \right)^k, \end{aligned}$$

де $b_1^* = q_l, b_0^* = q_{l-1}$.

Аналогічним чином з системи

$$q_0 = 1, q_1 = \frac{1}{2}, q_2 = \frac{1}{2}q_1 + q_0, \dots, q_k = \frac{1}{2}q_{k-1} + q_{k-2},$$

$$q_{k+1} = q_k + q_{k-1}, \dots, q_{k+l} = q_{k+l-1} + q_{k+l-2}$$

маємо

$$b_0^* = E_1\eta_1^k + E_2\eta_2^k, \quad b_1^* = \tilde{E}_1\eta_1^k + \tilde{E}_2\eta_2^k,$$

$$\max_{(\alpha_1, \dots, \alpha_{k+l}) \in B} q((\alpha_1, \dots, \alpha_{k+l})) =$$

$$\frac{2b_1^* + (\sqrt{5} - 1)b_0^*}{2\sqrt{5}} \delta_1^l + \frac{(\sqrt{5} + 1)b_0^* - 2b_1^*}{2\sqrt{5}} \delta_2^l$$

для деяких сталих $E_1, E_2, \tilde{E}_1, \tilde{E}_2$, які легко визначаються, звідки маємо (4.6). □

Лема 4.9.2. Якщо число $x = [a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]$ – A_2 -іраціональне, то

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{q_n}{\delta_1^{l_n} \eta_1^{k_n}} \leq \tilde{D}_1,$$

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{q_n}{\delta_1^{l_n} \eta_1^{k_n}} \geq D_1.$$

Доведення. Зрозуміло, що $\lim_{n \rightarrow \infty} l_n = +\infty$, адже в протилежному випадку $x \in A_2$ -раціональним числом, аналогічне правильно для (k_n) . Маємо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\delta_1^{l_n} \eta_2^{k_n}}{\delta_1^{l_n} \eta_1^{k_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\eta_2}{\eta_1} \right)^{k_n} = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\delta_2^{l_n} \eta_1^{k_n}}{\delta_1^{l_n} \eta_1^{k_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\delta_2}{\delta_1} \right)^{l_n} = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\delta_2^{l_n} \eta_2^{k_n}}{\delta_1^{l_n} \eta_1^{k_n}} \right| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\eta_2|^n}{\eta_1^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{|\eta_2|}{\eta_1} \right)^n = 0.$$

Враховуючи лему 4.9.1 маємо потрібне. \square

Теорема 4.9.1. Якщо для розкладу іраціонального числа x у ланцюговий A_2 -дріб існують частоти цифр $\frac{1}{2}$ і 1, які дорівнюють відповідно $\nu_{\frac{1}{2}}$ й ν_1 , то для довільного $\varepsilon > 0$ існує номер n_0 , такий, що

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{(\delta_1^{\nu_1} \eta_1^{\nu_{\frac{1}{2}}} - \varepsilon)^{2n+1}}, \forall n \geq n_0,$$

зокрема для довільного іраціонального числа $y \in [0, 5; 1]$ існує номер n_1 і стала C , такі, що

$$\left| y - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{C}{\left(\frac{1+\sqrt{17}}{4} \right)^{2n+1}}, \forall n \geq n_1.$$

Доведення. Враховуючи лему 4.9.1, маємо $\sqrt[n]{q_n} \rightarrow \delta_1^{\nu_1} \eta_1^{\nu_{\frac{1}{2}}}$ ($n \rightarrow +\infty$). Тому для довільного достатньо малого $\varepsilon > 0$ маємо $q_n > (\delta_1^{\nu_1} \eta_1^{\nu_{\frac{1}{2}}} - \varepsilon)^n$ починаючи з деякого номера n_0 .

Враховуючи нерівність

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}}$$

маємо потрібне.

Розглянемо функцію $g(x) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^x \left(\frac{1+\sqrt{17}}{4}\right)^{1-x}$ на проміжку $[0; 1]$.

Функція $g(x)$, очевидно, є неперервною на $[0; 1]$. Оскільки функція

$$\ln(g(x)) = x \ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + (1-x) \ln\left(\frac{1+\sqrt{17}}{4}\right) - \text{зростаюча} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} > \frac{1+\sqrt{17}}{4}\right),$$

то і $g(x)$ – зростаюча.

Враховуючи лему 4.9.1 маємо, що

$$q_n \geq D_1(\delta_1^{\nu_1 n} \eta_1^{\frac{\nu_1}{2} n})^n \geq D_1(g(0))^n = D_1\left(\frac{1+\sqrt{17}}{4}\right)^n,$$

починаючи з деякого номера n_1 , звідки і випливає потрібне. □

Висновки до розділу 4

Цей розділ присвячено дослідженню функцій, заданих за допомогою ланцюгових A_2 -дробів. Досліджено оператори лівостороннього і правостороннього зсувів цифр ланцюгового A -зображення, знайдено інваріантну міру для оператора лівостороннього зсуву. Побудовано неперервні перетворення відрізка $[0,5; 1]$, які зберігають хвости ланцюгового A -зображення чисел. Доведено, що множина неперервних перетворень відрізка $[0,5; 1]$, які зберігають хвости ланцюгового A -зображення чисел, відносно операції «суперпозиція функцій» утворює нескінченну некомутативну групу. Побудовано й досліджено неперервну ніде не монотонну функцію f , задану перетворювачем цифр нега-трійкового зображення чисел у їхнє ланцюгове A -зображення. Доведено її неперервність, ніде не монотонність і необмеженість варіації. Розглянуто скінченні ланцюгові A_2 -дроби й вивчено деякі їхні властивості. Вивчено властивості дійсних чисел з періодичними ланцюговими A_2 -зображеннями, отримано оцінки наближень дійсних чисел відрізка $[0,5; 1]$ ланцюговими A_2 -дробами.

Основними результатами цього розділу є теорема 4.2.1 (про інваріантну міру), теорема 4.5.1 (про групу неперервних перетворень відрізка $[0,5; 1]$), теорема 4.6.1 (про неперервність і ніде не монотонність функції f), теорема 4.6.3 (про необмеженість варіації функції f), теорема 4.6.4 (про автотельні властивості графіка функції f), теорема 4.9.1 (про оцінки наближень дійсних чисел ланцюговими A_2 -дробами).

Основні результати цього розділу опубліковано у роботах $[4^a, 5^a, 6^a]$ і апробовані на наукових конференціях, про що свідчать тези доповідей $[8^a, 10^a, 11^a, 15^a, 16^a, 17^a, 18^a]$.

РОЗДІЛ 5
ОСНОВИ МЕТРИЧНОЇ ТЕОРІЇ ЗОБРАЖЕННЯ ЧИСЕЛ
ЛАНЦЮГОВИМИ A_3 -ДРОБАМИ

5.1. Ланцюгові A_3 -дроби

Нехай $A_3 \equiv \{s_0, s_1, s_2\}$ – задана множина додатних дійсних чисел ($s_0 < s_1 < s_2$). Розглядаються всеможливі вирази у формі

$$\frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}} \equiv [a_1, a_2, \dots, a_n, \dots], \quad \text{де } a_i \in A_3, \quad (5.1)$$

які ми називаємо *ланцюговими A_3 -дробами*. Кожен ланцюговий A_3 -дріб є збіжним, оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ для довільної послідовності $(a_n) \in V \equiv A_3 \times A_3 \times \dots \times A_3 \times \dots$ розбігається.

Легко бачити, що значення виразу (5.1) не перевищує числа

$$\beta_2 = [(s_0, s_2)] = \frac{\sqrt{s_0^2 s_2^2 + 4s_0 s_2} - s_0 s_2}{2s_0}$$

(де круглі дужки означають період) і є не меншим за число

$$\beta_1 = [(s_2, s_0)] = \frac{\sqrt{s_0^2 s_2^2 + 4s_0 s_2} - s_0 s_2}{2s_2}.$$

Оскільки

$$\beta_1 = \frac{1}{s_2 + \beta_2}, \quad \beta_2 = \frac{1}{s_0 + \beta_1},$$

то очевидно є рівність

$$\frac{\beta_2}{\beta_1} = \frac{s_2}{s_0}.$$

Позначимо через L_{A_3} множину всіх ланцюгових A_3 -дробів, тобто

$$L_{A_3} = \{x \mid x = [a_1, a_2, \dots, a_n, \dots], (a_n) \in V\}.$$

Тоді очевидно, що $L_{A_3} \subseteq [\beta_1; \beta_2]$.

Зауваження 5.1.1. Якщо A_2 є двоелементною підмножиною A_3 , то множина $L_{A_2} = \{x \mid x = [a_1, \dots, a_n, \dots], a_n \in A_2\}$ є підмножиною L_{A_3} . Тому ланцюгові A_2 -дроби утворюють підмножину ланцюгових A_3 -дробів.

Лема 5.1.1. *Якщо $s_0 s_2 \leq \frac{1}{2}$, то $L_{A_3} = [\beta_1; \beta_2]$.*

Справді, дане твердження є наслідком щойно доведеного факту

$$L_{A_3} \subseteq [\beta_1; \beta_2]$$

і відомого твердження: якщо $A_2 = \{s_0, s_2\}$ і $s_0 s_2 \leq \frac{1}{2}$, то $L_{A_2} = [\beta_1; \beta_2]$.

Більше того, можна довести, що при $s_0 s_2 \leq \frac{1}{2}$ кожне число інтервалу $(\beta_1; \beta_2)$ має континуальну множину різних розвинень в ланцюговий A_3 -дріб.

5.2. Підхідні дроби

Нагадаємо, що підхідним дробом порядку n ланцюгового дробу

$$[a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]$$

називається число $\frac{p_n}{q_n}$, що є значенням ланцюгового дробу $[a_1, a_2, \dots, a_n]$.

Оскільки p_n і q_n залежать від перших n елементів ланцюгового дробу (5.1), то позначатимемо їх також $p(a_1, a_2, \dots, a_n)$ і $q(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Відомий закон утворення підхідних дробів: для довільного натурального $n \geq 2$

$$\begin{cases} p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}, \\ q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}; \end{cases}$$

де $p_0 = 0, q_0 = 1, p_1 = 1, q_1 = a_1$.

Лема 5.2.1. Якщо $s_0 = \frac{2}{3}, s_2 = 2$, то для знаменників підхідних дробів ланцюгових A_3 -дробів мають місце нерівності

$$q_n \geq \frac{3\sqrt{10}}{20} \left(\left(\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{10}}{3} \right)^{n+1} + \left(\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{10}}{3} \right)^{n+1} \right);$$

$$q_n \leq \frac{\sqrt{2}}{4} \left((1 + \sqrt{2})^{n+1} + (1 - \sqrt{2})^{n+1} \right).$$

Доведення. Як відомо з [11], знаменник q_n підхідного дроби порядку n періодичного ланцюгового дроби $[(c)]$ обчислюється за формулою

$$q_n = \frac{1}{\sqrt{c^2 + 4}} \left(\left(\frac{c + \sqrt{c^2 + 4}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{c - \sqrt{c^2 + 4}}{2} \right)^{n+1} \right).$$

Оскільки для кожного $n = 1, 2, \dots$ виконується нерівність

$$q(s_0, s_0, \dots, s_0) \leq q(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq q(s_2, s_2, \dots, s_2),$$

то отримуємо потрібне. \square

5.3. Метричні властивості

Означення 5.3.1. Циліндром рангу n з основою $c_1 c_2 \dots c_n$ називається множина $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^{A_3}$ всіх x , які зображаються ланцюговим A_3 -дробом з першими n елементами, що дорівнюють відповідно c_1, c_2, \dots, c_n , тобто

$$\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^{A_3} = \{x | x = [a_1, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots], a_i(x) = c_i, a_i \in A_3, i = \overline{1, n}\}.$$

Очевидно, що

$$x' \equiv \min \Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^{A_3} = \begin{cases} [c_1, c_2, \dots, c_n + \beta_2] & \text{при непарному } n, \\ [c_1, c_2, \dots, c_n + \beta_1] & \text{при парному } n; \end{cases}$$

$$x'' \equiv \max \Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^{A_3} = \begin{cases} [c_1, c_2, \dots, c_n + \beta_1] & \text{при непарному } n, \\ [c_1, c_2, \dots, c_n + \beta_2] & \text{при парному } n; \end{cases}$$

тобто $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^{A_3} \subset [x'; x'']$.

Наприклад, циліндри першого рангу належать наступним відріzkам:

$$\Delta_{s_0} \subset \left[\frac{1}{s_0 + \beta_2}, \frac{1}{s_0 + \beta_1} \right], \quad \Delta_{s_1} \subset \left[\frac{1}{s_1 + \beta_2}, \frac{1}{s_1 + \beta_1} \right],$$

$$\Delta_{s_2} \subset \left[\frac{1}{s_2 + \beta_2}, \frac{1}{s_2 + \beta_1} \right],$$

які ми називаємо *циліндричними*.

Мають місце наступні властивості циліндрів:

- 1) $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^{A_3} \subset \Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}$.
- 2) $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^{A_3} = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_n s_0}^{A_3} \cup \Delta_{c_1 c_2 \dots c_n s_1}^{A_3} \cup \Delta_{c_1 c_2 \dots c_n s_2}^{A_3}$.
- 3) Діаметр циліндра обчислюється за формулою

$$|\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^{A_3}| = \frac{\beta_2 - \beta_1}{(q_n + \beta_1 q_{n-1})(q_n + \beta_2 q_{n-1})}. \quad (5.2)$$

Доведення. Справді,

$$\begin{aligned} |\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^{A_3}| &= \max \Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^{A_3} - \min \Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^{A_3} = \\ &= |[c_1, c_2, \dots, c_n, \beta_2^{-1}] - [c_1, c_2, \dots, c_n, \beta_1^{-1}]| = \\ &= \left| \frac{\beta_2^{-1} p_n + p_{n-1}}{\beta_2^{-1} q_n + q_{n-1}} - \frac{\beta_1^{-1} p_n + p_{n-1}}{\beta_1^{-1} q_n + q_{n-1}} \right| = \\ &= \left| \frac{p_n + \beta_2 p_{n-1}}{q_n + \beta_2 q_{n-1}} - \frac{p_n + \beta_1 p_{n-1}}{q_n + \beta_1 q_{n-1}} \right| = \\ &= \frac{(\beta_2 - \beta_1) |p_{n-1} q_n - q_{n-1} p_n|}{(q_n + \beta_1 q_{n-1})(q_n + \beta_2 q_{n-1})}. \end{aligned}$$

Враховуючи, що за властивостями підхідних дробів

$p_{n-1} q_n - q_{n-1} p_n = (-1)^n$, отримуємо формулу (5.2). \square

Наслідок 5.3.1. $|\Delta_{c_1 \dots c_k}^{A_3}| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

4) Основне метричне відношення має вигляд

$$\frac{|\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n c}^{A_3}|}{|\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^{A_3}|} = \frac{\left(1 + \beta_1 \frac{q_{n-1}}{q_n}\right) \left(1 + \beta_2 \frac{q_{n-1}}{q_n}\right)}{\left(c + \beta_1 + \frac{q_{n-1}}{q_n}\right) \left(c + \beta_2 + \frac{q_{n-1}}{q_n}\right)}.$$

Доведення. Це відношення виводиться з використанням закону утворення знаменників підхідних дробів і формули (5.2). \square

Наслідок 5.3.2. При $s_0 = \frac{2}{3}$, $s_1 = \frac{4}{3}$, $s_2 = 2$ відрізок $[\beta_1; \beta_2] = [1/3; 1]$, причому мають місце відношення:

$$\frac{|\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n 2}^{A_3}|}{|\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n \frac{4}{3}}^{A_3}|} = \frac{5 + 3 \frac{q_{n-1}}{q_n}}{3 \left(3 + \frac{q_{n-1}}{q_n}\right)}, \quad \frac{|\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n \frac{2}{3}}^{A_3}|}{|\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n \frac{4}{3}}^{A_3}|} = \frac{7 + 3 \frac{q_{n-1}}{q_n}}{3 \left(1 + \frac{q_{n-1}}{q_n}\right)}. \quad (5.3)$$

Доведення. Використовуючи властивість 3 отримуємо:

$$\frac{|\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n 2}^{A_3}|}{|\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^{A_3}|} = \frac{1 + \frac{q_{n-1}}{q_n}}{7 + 3 \frac{q_{n-1}}{q_n}}, \quad \frac{|\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n \frac{2}{3}}^{A_3}|}{|\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^{A_3}|} = \frac{3 + \frac{q_{n-1}}{q_n}}{5 + 3 \frac{q_{n-1}}{q_n}},$$

$$\frac{|\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n \frac{4}{3}}^{A_3}|}{|\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^{A_3}|} = \frac{3 \left(3 + \frac{q_{n-1}}{q_n}\right) \left(1 + \frac{q_{n-1}}{q_n}\right)}{\left(5 + 3 \frac{q_{n-1}}{q_n}\right) \left(7 + 3 \frac{q_{n-1}}{q_n}\right)},$$

а звідси й рівності (5.3). \square

Лема 5.3.1. Умови

$$\begin{cases} \frac{1}{s_2 + \beta_1} = \frac{1}{s_1 + \beta_2}, \\ \frac{1}{s_1 + \beta_1} = \frac{1}{s_0 + \beta_2}; \end{cases} \quad (5.4)$$

рівносильні умовам

$$\begin{cases} s_0 s_2 = \frac{4}{3}, \\ s_1 = \frac{s_0 + s_2}{2}. \end{cases} \quad (5.5)$$

Доведення. Дійсно,

$$\begin{cases} \frac{1}{s_2 + \beta_1} = \frac{1}{s_1 + \beta_2}, \\ \frac{1}{s_1 + \beta_1} = \frac{1}{s_0 + \beta_2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s_2 + \beta_1 = s_1 + \beta_2, \\ s_1 + \beta_1 = s_0 + \beta_2. \end{cases}$$

Виражаючи з другого рівняння s_2 і підставляючи у перше, отримуємо:

$$\begin{aligned} s_2 - s_0 &= 2(\beta_2 - \beta_1); \\ s_2 - s_0 &= 2 \left(\frac{\sqrt{s_0^2 s_2^2 + 4s_0 s_2} - s_0 s_2}{2s_0} - \frac{\sqrt{s_0^2 s_2^2 + 4s_0 s_2} - s_0 s_2}{2s_2} \right); \\ s_2 - s_0 &= \frac{(s_2 - s_0)(\sqrt{s_0^2 s_2^2 + 4s_0 s_2} - s_0 s_2)}{s_0 s_2}; \\ 2s_0 s_2 &= \sqrt{s_0^2 s_2^2 + 4s_0 s_2}; \\ s_0 s_2 &= \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

З системи

$$\begin{cases} s_2 + \beta_1 = s_1 + \beta_2, \\ s_1 + \beta_1 = s_0 + \beta_2; \end{cases}$$

випливає, що $s_2 - s_1 = \beta_2 - \beta_1 = s_1 - s_0$, а отже, $s_0 + s_2 = 2s_1$. \square

Теорема 5.3.1. *За умов 5.5 циліндри одного і того самого рангу не перекриваються.*

Доведення. За лемою 5.3.1

$$\begin{cases} s_0 s_2 = \frac{4}{3}, \\ s_1 = \frac{s_0 + s_2}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s_2 + \beta_1 = s_1 + \beta_2, \\ s_1 + \beta_1 = s_0 + \beta_2. \end{cases}$$

Тоді, при парному n

$$\begin{aligned} \max \Delta_{c_1 c_2 \dots c_n s_2}^{A_3} &= [c_1, \dots, c_n, s_2 + \beta_1] = \\ &= [c_1, \dots, c_n, s_1 + \beta_2] = \min \Delta_{c_1 c_2 \dots c_n s_1}^{A_3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max \Delta_{c_1 c_2 \dots c_n s_1}^{A_3} &= [c_1, \dots, c_n, s_1 + \beta_1] = \\ &= [c_1, \dots, c_n, s_0 + \beta_2] = \min \Delta_{c_1 c_2 \dots c_n s_0}^{A_3}, \end{aligned}$$

при непарному n

$$\begin{aligned} \max \Delta_{c_1 c_2 \dots c_n s_0}^{A_3} &= [c_1, \dots, c_n, s_0 + \beta_2] = \\ &= [c_1, \dots, c_n, s_1 + \beta_1] = \min \Delta_{c_1 c_2 \dots c_n s_1}^{A_3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max \Delta_{c_1 c_2 \dots c_n s_1}^{A_3} &= [c_1, \dots, c_n, s_1 + \beta_2] = \\ &= [c_1, \dots, c_n, s_2 + \beta_1] = \min \Delta_{c_1 c_2 \dots c_n s_2}^{A_3}. \end{aligned}$$

Тобто

$$\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n s_0}^{A_3} \cap \Delta_{c_1 c_2 \dots c_n s_1}^{A_3} = [c_1, \dots, c_n, s_1 + \beta_1] = [c_1, \dots, c_n, s_0 + \beta_2],$$

$$\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n s_1}^{A_3} \cap \Delta_{c_1 c_2 \dots c_n s_2}^{A_3} = [c_1, \dots, c_n, s_2 + \beta_1] = [c_1, \dots, c_n, s_1 + \beta_2]. \square$$

Теорема 5.3.2. Якщо $s_0 s_2 = \frac{4}{3}$ і $s_1 = \frac{s_0 + s_2}{2}$, то $L_{A_3} = [\beta_1; \beta_2]$.

Доведення. Оскільки очевидно, що $L_{A_3} \subseteq [\beta_1; \beta_2]$, то залишається довести, що $[\beta_1; \beta_2] \subseteq L_{A_3}$. Нехай x — довільна точка відрізка $[\beta_1; \beta_2]$. З теореми 5.3.1 випливає, що

$$[\beta_1; \beta_2] = \Delta_{s_0}^{A_3} \cup \Delta_{s_1}^{A_3} \cup \Delta_{s_2}^{A_3}.$$

Тому існує $c_1 \in A_3$ таке, що $x \in \Delta_{c_1}^{A_3}$. Аналогічно,

$$\Delta_{c_1}^{A_3} = \Delta_{c_1 s_0}^{A_3} \cup \Delta_{c_1 s_1}^{A_3} \cup \Delta_{c_1 s_2}^{A_3}.$$

Тому існує $c_2 \in A_3$ таке, що $x \in \Delta_{c_1 c_2}^{A_3}$ і т. д. Якщо $x \in \Delta_{c_1 \dots c_k}^{A_3}$ то з того, що

$$\Delta_{c_1 \dots c_k}^{A_3} = \Delta_{c_1 \dots c_k s_0}^{A_3} \cup \Delta_{c_1 \dots c_k s_1}^{A_3} \cup \Delta_{c_1 \dots c_k s_2}^{A_3},$$

впливає існування $c_{k+1} \in A_3$ такого, що $x \in \Delta_{c_1 \dots c_k c_{k+1}}^{A_3}$ і т. д. Отже, існує нескінченна послідовність (c_k) , $c_k \in A_3$ така, що x належить всім циліндрам

$$\Delta_{c_1}^{A_3}, \Delta_{c_1 c_2}^{A_3}, \dots, \Delta_{c_1 c_2 \dots c_k}^{A_3}, \dots$$

Оскільки, за властивістю $\Delta_{c_1 \dots c_k c_{k+1}}^{A_3} \subset \Delta_{c_1 \dots c_k}^{A_3}$ і згідно з наслідком (5.3.1)

$$|\Delta_{c_1 \dots c_k}^{A_3}| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty,$$

то за аксіомою Кантора існує єдина точка, яка належить всім цим відріzkам, а такою є точка x . Тому

$$x = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Delta_{c_1 \dots c_k}^{A_3} = [c_1, \dots, c_k, \dots] \in L_{A_3},$$

що й потрібно було довести. \square

Отже, якщо

$$x = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}}, \quad a_i \in A_3, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (5.6)$$

то вираз (5.6) будемо називати ланцюговим A_3 -представленням числа x , а формальний запис

$$x = \Delta_{\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_n \dots}^{A_3},$$

де

$$\gamma_i = \begin{cases} 0, & \text{якщо } a_i = s_0, \\ 1, & \text{якщо } a_i = s_1, \\ 2, & \text{якщо } a_i = s_2; \end{cases}$$

називатимемо ланцюговим A_3 -зображенням числа x .

Теорема 5.3.3. Якщо $s_0 s_2 = \frac{4}{3}$ і $s_1 = \frac{s_0 + s_2}{2}$, то зчисленна множина точок $x \in [\beta_1; \beta_2]$ має два ланцюгові A_3 -зображення

$$\Delta_{a_1 a_2 \dots a_{n-1} s_i (s_2 s_0)}^{A_3} = \Delta_{a_1 a_2 \dots a_{n-1} s_{i-1} (s_0 s_2)}^{A_3}, \quad i \in \{1, 2\},$$

решта точок має єдине зображення.

Доведення. Якщо $x = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_n s_i}^{A_3} \cap \Delta_{c_1 c_2 \dots c_n s_{i+1}}^{A_3}$, $i \in \{0, 1\}$, то з теореми 5.3.1 випливає, що x має два ланцюгові A_3 -зображення, а саме

$$x = \Delta_{a_1 a_2 \dots a_{n-1} s_i (s_2 s_0)}^{A_3} = \Delta_{a_1 a_2 \dots a_{n-1} s_{i-1} (s_0 s_2)}^{A_3}, \quad i \in \{1, 2\}.$$

Таких точок є зчисленна множина. Точки, що мають два ланцюгові A_3 -зображення, а також точки β_1, β_2 називатимемо A_3 -раціональними.

Нехай x не є спільною точкою циліндрів

$$\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n s_0}^{A_3} \quad \text{і} \quad \Delta_{c_1 c_2 \dots c_n s_1}^{A_3}.$$

Тоді числа a_k визначаються однозначно, тобто для точки x існує єдина послідовність (a_k) така, що $x = [a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]$. Справді, припустимо, що $x = [a_1, a_2, \dots, a_n, \dots] = [b_1, b_2, \dots, b_n, \dots]$. Якщо $s_0 = a_1 \neq b_1 = s_1$, то $x \in \Delta_{s_0}^{A_3}$ і $x \in \Delta_{s_1}^{A_3}$, що суперечить тому, що циліндричні інтервали ∇_{s_0} і ∇_{s_1} (тобто інтервали, кінці яких збігаються з кінцями циліндрів) не мають спільних точок і $x \notin \Delta_{s_0}^{A_3} \cap \Delta_{s_1}^{A_3}$. Отже, $a_1 = b_1$.

Нехай тепер $a_i = b_i$, $i = 1, \dots, m$ і $a_{m+1} \neq b_{m+1}$. Тоді $x \in \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m s_0}^{A_3}$ і $x \in \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m s_1}^{A_3}$, тобто $x = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m s_0}^{A_3} \cap \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m s_1}^{A_3}$, що суперечить умові

$$\nabla_{c_1 \dots c_m s_0} \cap \nabla_{c_1 \dots c_m s_1} = \emptyset, \quad x \notin \Delta_{c_1 \dots c_m s_0}^{A_3} \cap \Delta_{c_1 \dots c_m s_1}^{A_3}.$$

Отже, для довільного натурального m $a_m \neq b_m$, що й потрібно було довести.

Аналогічно для циліндрів $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n s_1}^{A_3}$ і $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n s_2}^{A_3}$. \square

Якщо точка x не є кінцем жодного циліндра $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^{A_3}$, то таку точку будемо називати A_3 -ірраціональною.

5.4. Хвостові множини

Стверджуватимемо, що два ланцюгові A_3 -зображення

$$\Delta_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}^{A_3} \quad \text{і} \quad \Delta_{b_1 b_2 \dots b_n \dots}^{A_3}$$

мають однаковий хвіст (або перебувають у відношенні \sim), якщо існують натуральні числа m і k , такі, що $a_{m+j} = b_{k+j}$ для будь-якого $j \in \mathbb{N}$.

Лема 5.4.1. *Бінарне відношення мати однаковий хвіст « \sim » на множині L_{A_3} є відношенням еквівалентності.*

Доведення. Рефлексивність і симетричність, очевидно, виконуються:

$$\begin{aligned} \Delta_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}^{A_3} &\sim \Delta_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}^{A_3}, \\ \Delta_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}^{A_3} &\sim \Delta_{a'_1 a'_2 \dots a'_n \dots}^{A_3} \Rightarrow \Delta_{a'_1 a'_2 \dots a'_n \dots}^{A_3} \sim \Delta_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}^{A_3}. \end{aligned}$$

Покажемо, що відношення мати однаковий хвіст володіє властивістю транзитивності, тобто з того, що

$$\Delta_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}^{A_3} \sim \Delta_{a'_1 a'_2 \dots a'_n \dots}^{A_3} \quad \text{і} \quad \Delta_{a'_1 a'_2 \dots a'_n \dots}^{A_3} \sim \Delta_{a''_1 a''_2 \dots a''_n \dots}^{A_3}$$

випливає

$$\Delta_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}^{A_3} \sim \Delta_{a''_1 a''_2 \dots a''_n \dots}^{A_3}.$$

Згідно з означенням відношення « \sim » умова $\Delta_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}^{A_3} \sim \Delta_{a'_1 a'_2 \dots a'_n \dots}^{A_3}$ рівносильна існуванню цілих чисел k_1 і m_1 таких, що

$$a_{k_1+j} = a'_{m_1+j}, \forall j \in \mathbb{N};$$

а умова $\Delta_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}^{A_3} \sim \Delta_{a''_1 a''_2 \dots a''_n \dots}^{A_3}$ – існуванню k_2 і m_2 таких, що

$$a'_{k_2+j} = a''_{m_2+j}, \forall j \in \mathbb{N}.$$

Нехай $k = k_1 + k_2, m = m_2 + m_1$. Тоді $a_{k+j} = a''_{m+j}, \forall j \in \mathbb{N}$, оскільки

$$a_{k+j} = a_{k_1+k_2+j} = a'_{m_1+k_2+j} = a'_{k_2+m_1+j} = a''_{m_2+m_1+j} = a''_{m+j}. \square$$

Відношення \sim , будучи відношенням еквівалентності, розбиває множини, на якій воно задане, на класи еквівалентності. Кожен із класів еквівалентності називатимемо *хвостовою множиною*. Кожна хвостова множина однозначно визначається будь-яким із своїх елементів (представників).

Будемо стверджувати, що два числа x і y мають однаковий хвіст ланцюгового A_3 -зображення (або перебувають у відношенні \sim), якщо вони мають A_3 -зображення, які передують у відношенні \sim . Символічно: $x \sim y$.

Теорема 5.4.1. *Кожна хвостова множина є зліченною і щільною в $[\beta_1; \beta_2]$ множиною, а фактор-множина $G \equiv [\beta_1; \beta_2] / \sim$ є континуальною.*

Доведення. Нехай H – довільний клас еквівалентності, $x_0 = \Delta_{c_1 \dots c_k \dots}^{A_3}$ – його представник. Тоді очевидно, що для довільного $m \in \mathbb{Z}_0$ існує множина

$$H_m = \{x : x = \Delta_{a_1 \dots a_k c_{m+1} c_{m+2} \dots}^{A_3}, a_k \in A_3, k = 0, 1, 2, \dots\}$$

таких чисел x , для яких при деякому $k \in \mathbb{Z}_0$

$$a_{k+j}(x) = c_{m+j} \quad \text{для довільного } j \in \mathbb{N}$$

$$\text{і } H = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}_0} H_m.$$

Множина H , будучи зліченим об'єднанням злічених множин, є множиною зліченною.

Доведемо тепер, що множина H – щільна в $[\beta_1; \beta_2]$. Оскільки належність числа x до множини H не залежить від довільної скінченної кількості перших цифр його A_3 -зображення, то в кожному з циліндрів довільного рангу m існує точка множини H . Отже, H є всюди щільною в $[\beta_1; \beta_2]$ множиною.

Для доведення континуальності фактор-множини G скористаємось методом від супротивного. Припустимо, що G є зліченною. Тоді множина $[\beta_1; \beta_2]$ є зліченим об'єднанням злічених множин. Але, добре відомо, що остання множина є зліченною, а відрізок $[\beta_1; \beta_2]$ є континуальною множиною. Отримана суперечність доводить теорему. \square

Висновки до розділу 5

У цьому розділі вивчається геометрія представлення чисел ланцюговими A_3 -дробами, тобто ланцюговими дробами, елементи яких набувають значення з множини $A_3 \equiv \{s_0, s_1, s_2\}$, де $0 < s_0 < s_1 < s_2, s_i \in \mathbb{R}$. Доведено, що при $s_0 s_2 = \frac{4}{3}$ і $s_1 = (s_0 + s_2)/2$ кожна точка певного відрізка має не більш ніж два A_3 -представлення, причому множина точок, що мають два представлення, є зліченною, а отже, система кодування чисел засобами трисимвольного алфавіту, що ґрунтується на розкладах чисел у такі ланцюгові дроби, має нульову надлишковість.

Основними результатами цього розділу є лема 5.2.1 (про оцінки для знаменників підхідних дробів), теорема 5.3.3 (про умови нульової надлишковості представлення чисел ланцюговими A_3 -дробами), теорема 5.4.1 (про властивості хвостових множин).

Основні результати цього розділу опубліковані у роботі [3^a].

Загальні висновки

Для аналітичного задання і дослідження функцій зі складною локальною будовою застосовуються різні системи кодування дійсних чисел зі скінченним та нескінченним алфавітами, зокрема, зображення чисел ланцюговими дробами.

У дисертаційній роботі отримані такі результати.

1. Побудовано неперервні перетворення відрізка $[0; 1]$, які зберігають хвости зображення чисел елементарними ланцюговими дробами.
2. Доведено, що множина неперервних перетворень відрізка $[0,5; 1]$, які зберігають хвости ланцюгового A -зображення чисел, відносно операції «композиція функцій» утворює нескінченну некомутативну групу.
3. Введено функцію, названу квазіінверсором цифр елементарного ланцюгового зображення чисел (що є певним аналогом інверсорів цифр скінченно-символьних зображень чисел). Доведено її ніде не монотонність і канторовість множини її значень, описано множини рівнів.
4. Вивчено властивості функції, яку означено проектуванням цифр елементарного ланцюгового зображення чисел у цифри зображення чисел знакозмінними рядами Люрота. Доведено її неперервність і монотонність, знайдено систему функціональних рівнянь, єдиним розв'язком якої є ця функція.
5. Сконструйовано функцію, яка є аналогом функцій Буша-Вундерліха і Трибін-функції, чий аргумент розглядається у формі негатрійкового зображення, а значення функції — у формі ланцюгового A -зображення. Доведено, що вона є неперервною на відрізку $[0,5; 1]$ ніде не монотонною функцією і має необмежену варіацію. Описано властивості графіка цієї функції, зокрема автотодельні, і множин її рівнів.

6. Отримано оцінки наближень дійсних чисел відрізка $[0,5; 1]$ ланцюговими A_2 -дробами.
7. Закладено основи тополого-метричної теорії зображення чисел ланцюговими A_3 -дробами. Зокрема, знайдено умови нульової надлишковості зображення чисел ланцюговими A_3 -дробами, описано властивості циліндричних і хвостових множин, з'ясовано геометричний сенс цифр.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Альбеве́ріо С., Кулиба Ю. В., Працьовитий М. В., Торбін Г. М. Про сингулярність та спектральну структуру розподілів випадкових ланцюгових дробів. *Науковий часопис Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова. Серія 1: Фізико-математичні науки*: зб. наук. праць. Київ: Вид-во НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2012. Вип. 13 (1). С. 31-44.
2. Арнольд В. И. Цепные дроби. М.: МЦНМО, 2001. 40 с.
3. Безбородов В. К. Медіантне зображення дійсних чисел. *Студентські фізико-математичні етюди*. 2008. №7. С. 73-81.
4. Безикович А. С. Исследование непрерывных функций в связи с вопросом об их дифференцируемости. *Математический сборник*. 1924. Т. 31, №. 4. С. 529-556.
5. Биллингслей П. Эргодическая теория и информация: Пер. с англ. Москва: Мир, 1969. 240 с.
6. Боднар Д. И. Ветвящиеся цепные дроби. Киев: Наукова думка, 1986. 176 с.
7. Боднарчук П. І., Скоробагатько В. Я. Гіллясті ланцюгові дроби та їх застосування. Київ: Наукова думка, 1974. 272 с.
8. Виннишин Я. Ф. Випадкові ланцюгові дроби, що задаються незалежними елементами, та їх функції розподілу. *Наукові записки НПУ імені М. П. Драгоманова. Фізико-математичні науки*. Київ: НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2001. №2. С. 319-326.
9. Гончаренко Я. В., Працьовитий М. В., Торбін Г. М. Фрактальні властивості множин точок недиференційовності абсолютно неперервної та сингулярної функцій розподілу. *Теорія ймовір. та матем. статист.* 2001. №65. С. 25-32.

10. Джоунс У., Трон В. Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения: Пер. с англ. Москва: Мир, 1985. 416 с.
11. Дмитренко С. О., Кюрчев Д. В., Працьовитий М. В. Ланцюгове A_2 -зображення дійсних чисел та його геометрія. *Укр. мат. журнал.* 61 (2009). № 4. С. 452-463.
12. Дмитришин Р. І. Оцінки похибок наближень для багатовимірного S -дробу з нерівнозначними змінними. *Буковинський мат. журн.* 2018. Т. 6, № 1-2. С. 56-59.
13. Ісаєва Т. М., Працьовитий М. В. Група перетворень $(0, 1]$, які зберігають хвости Δ^μ -зображення чисел. *П'ята всеукр. конф. молодих вчених з математики та фізики, 25-26 квітня 2016.* Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2016. С. 48.
14. Калашніков А. В. Деякі функціональні співвідношення, які задовольняє сингулярна функція Салема. *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки.* 2008. № 9. С. 192-199.
15. Калашніков А. В., Працьовитий М. В. Самоафінні сингулярні та ніде не монотонні функції, пов'язані з Q -зображенням дійсних чисел. *Укр. мат. журн.* 2013. Т. 65, № 3. С. 405-417.
16. Касаткин В. Н. Новое о системах счисления. К.: Вища школа, 1982. 96 с.
17. Касселс Дж. В. С. Введение в геометрию чисел. Издательство «Мир». Москва, 1965. 422 с.
18. Кац М. Статистическая независимость в теории вероятностей, анализе и теории чисел. М.: Издательство иностранной литературы, 1963. 156 с.
19. Коваль В. В. Самоафінні графіки функцій. *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки.* Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. 2004, №5. С. 292-299.
20. Кулиба Ю. В., Торбін Г. М. Нормальні та квазінормальні ланцюгові

- дроби Данжуа. *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки*. Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. 2014, № 16 (1). С. 296-302.
21. Кучмінська Х. Й. Двовимірні неперервні дроби. Львів: Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2010. 218 с.
 22. Кюрчев Д. В. Про аномальну фрактальність одного класу множин ланцюгових дробів із зростаючими елементами. *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки*. Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. 2006, № 7. С. 204-210.
 23. Кюрчев Д. В. Про розмірність Хаусдорфа-Безиковича деяких множин ланцюгових дробів. *Науковий часопис НПУ ім. М. П. Драгоманова. Сер. 1. Фіз.-мат. науки*. 2004. № 4. С. 285-291.
 24. Кюрчев Д. В. Розподіли випадкових ланцюгових A_2 -дробів та їх фрактальні властивості. *Матеріали конференції «Фрактали і сучасна математика»*, 24 грудня 2009 р. Київ: Нац. пед. ун-т імені М. П. Драгоманова, 2009. С. 69-70.
 25. Кюрчев Д. В. Фрактальні властивості сингулярної функції, заданої в термінах ланцюгових дробів. *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки*. 2005. № 6. С. 1-2.
 26. Лещинський О. Л. Канторівські проектори на ланцюгових дробах. *Фрактальний аналіз та суміжні питання*. Київ: Ін-т математики НАН України; Нац. пед. ун-т імені М. П. Драгоманова, 1998. № 1. С. 76–83.
 27. Лещинський О. Л. Розподіли випадкових величин, послідовні двійки елементів ланцюгового представлення яких утворюють однорідний ланцюг Маркова. *Наукові записки НПУ імені М. П. Драгоманова*. Київ: Нац. пед. ун-т імені М. П. Драгоманова, 1999. № 1. С. 166–175.
 28. Лещинський О. Л., Працьовитий М. В. Один клас сингулярних розпо-

- ділів випадкових величин, представлених елементарним ланцюговим дробом з незалежними елементами. *Сучасні фізико-математичні дослідження молодих науковців вузів України: Зб. наук. праць*. Київ: Нац. ун-т ім. Т. Г. Шевченка, 1995. С. 20-30.
29. Лисовик Л. П., Шкаравская О. Ю. О вещественных функциях, задаваемых преобразователями. *Кибернетика и системный анализ*. 1998. № 1. С. 82-93.
 30. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. Москва: Наука, 1974. 480 с.
 31. Нестеренко Ю. В. Теория чисел: учебник для студ. высш. учеб. заведений. М.: Издательский центр «Академия», 2008. 272 с.
 32. Осауленко Р. Ю. Група неперервних перетворень відрізка $[0; 1]$, які зберігають частоти цифр Q_s -зображення числа. *Зб. праць Ін-ту математики НАН України*. 2016. Т. 13, № 3. С. 191-204.
 33. Пагіря М. М. Зображення функцій shz , chz , $sinz$, $cosz$ ланцюговими дробами. *Укр. мат. журн.* 2018. Т. 70, № 5. С. 682-698.
 34. Пагіря М. М. Наближення функцій ланцюговими дробами. Ужгород, Гражда, 2016. 412 с.
 35. Панасенко О. Б. Розмірність Хаусдорфа-Безиковича однієї неперервної ніде не диференційовної функції. *Український математичний журнал*. 2009. Т. 61, № 9. С. 1225-1239.
 36. Панасенко О. Б. *Фрактальні властивості графіків деяких класів неперервних ніде не диференційовних функцій*: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. фіз.-мат. наук: 01.01.01. Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського. Вінниця, 2009. 18 с.
 37. Панасенко О. Б., Томчук І. М. Фрактальні функції як розв'язки систем функціональних рівнянь. *Збірник наукових праць «Сучасні застосування фундаментальних наук у виробничих процесах - 2011»*. Матеріали I регіональної науково-практичної конференції молодих на-

- уковців. Вінниця: ВНАУ, 2011. С. 9-13.
38. Постников А. Г. Арифметическое моделирование случайных процессов, Тр. МИАН СССР, 1960, Т. 57. С. 3-84.
 39. Працевитый Н. В. Непрерывные канторовские проекторы. *Методы исследования алгебраических и топологических структур*. К.: КГПИ, 1989. С. 95-105.
 40. Працевитый Н. В. Случайные величины с независимыми Q_2 -символами. *Асимптотические методы в исследовании стохастических моделей*. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1987. С. 92-102.
 41. Працьовитий М. В. Геометрія класичного двійкового зображення дійсних чисел. Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 2012. 68 с.
 42. Працьовитий М. В. Нега-s-кове зображення як тривіальне перекодування s-кового зображення дійсних чисел. *Всеукраїнська науково-методична конференція «Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі»*, 7-8 жовтня 2016, Київ. С. 60-61.
 43. Працьовитий М. В. Ніде не монотонні сингулярні функції. *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки*. К.: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова. 2011, № 12. С. 24-36.
 44. Працьовитий М. В. Сингулярність розподілів випадкових величин, заданих розподілами елементів свого ланцюгового зображення. *Укр. мат. журн.* 1996. 48, № 8. С. 1086-1095.
 45. Працьовитий М. В. Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. 296 с.
 46. Працьовитий М. В. Фрактальні властивості однієї неперервної ніде недиференційовної функції. *Наукові записки НПУ імені М. П. Драгоманова*. Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 2002. Вип. 3. С. 351-362.
 47. Працьовитий М. В., Василенко Н. А. Одна сім'я неперервних ніде не монотонних функцій з фрактальними властивостями. *Науковий ча-*

- сопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки.* Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. 2013, № 14. С. 176-188.
48. Працьовитий М. В., Василенко Н. А. Одна сім'я неперервних функцій з всюди щільною множиною особливостей. *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки.* К.: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова. 2011, № 12. С. 152-167.
49. Працьовитий М. В., Замрій І. В. Сингулярність інверсора цифр Q_3 -зображення дробової частини дійсного числа, його фрактальні та інтегральні властивості. *Нелінійні коливання.* Т. 18, № 1. 2013. С. 55-70.
50. Працьовитий М. В., Калашніков А. В., Безбородов В. К. Про один клас сингулярних функцій, що містить класичну функцію Мінковського. *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки.* К.: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова. 2010, № 11. С. 207-213.
51. Працьовитий М. В., Кюрчев Д. В. Сингулярність розподілу випадкової величини, зображеної ланцюговим A_2 -дробом з незалежними елементами. *Теорія ймовір. та матем. статист.* 2009. № 81. С. 139-154.
52. Працьовитий М. В., Лещинський О. Л. Фрактальні властивості розподілів випадкових величин, заданих розподілами елементів свого ланцюгового зображення. *Фрактальний аналіз та суміжні питання.* Київ: ІМ НАН України, НПУ імені М. П. Драгоманова. 1998. № 1. С. 73-75.
53. Працьовитий М. В., Свинчук О. В. Про одну сім'ю неперервних немонотонних сингулярних функцій канторівського типу з фрактальними властивостями. *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1: Фізико-математичні науки.* Київ: Вид-во НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2015. № 17 (2). С. 17-28.
54. Працьовитий М. В., Свинчук О. В. Розсіювання значень однієї фрактальної неперервної немонотонної функції канторівського типу. *Не-*

- лінійні коливання*. 2018. Т. 21, № 1. С. 116-130.
55. Працьовитий М. В., Скрипник С. В. Q_2 -зображення дробової частини дійсного числа та інверсор його цифр. *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки*. Київ: Вид-во НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2013. № 15. С. 134-143.
56. Працьовитий М. В., Торбін Г. М. Аналітичне (символьне) представлення неперервних перетворень, що зберігають розмірність Гаусдорфа-Безиковича. *Наукові записки НПУ імені М. П. Драгоманова. Фізико-математичні науки*. Київ: Вид-во НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2003. № 4. С. 207-215.
57. Працьовитий М. В., Торбін Г. М. Фрактальна геометрія та перетворення, що зберігають розмірність Гаусдорфа-Безиковича. *Динамічні системи: Праці Українського математичного конгресу*. 2001. Київ: Ін-т матем. НАН України, 2003. С. 77-93.
58. Працьовитий М. В., Хворостіна Ю. В. Випадкова величина, символи \tilde{L} -зображення якої є випадковими величинами з марковською залежністю. *Теорія ймовірностей та математична статистика*. Вип. 91. 2014. С. 143-153.
59. Працьовитий М. В., Хворостіна Ю. В. Основи метричної теорії зображення дійсних чисел знакозмінними рядами Люрота та найпростіші застосування. *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки*. 2010. № 11. С. 102-118.
60. Синай Я. Г. Введение в эргодическую теорию. Ереван, 1973. 132 с.
61. Скоробагатько В. Я. Теория ветвящихся цепных дробей и ее применение в вычислительной математике. Москва: Наука, 1983. 312 с.
62. Турбин А. Ф., Працевитый Н. В. Фрактальные множества, функции, распределения. Киев: Наук. Думка, 1992. 208 с.
63. Хинчин А. Я. Цепные дроби. М.: Наука, 1978. 116 с.
64. Хованский А. Н. Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа. М.: ГИТТЛ. 1956. 203 с.

65. Albeverio S., Pratsiovytyi M., Torbin G. Fractal probability distributions and transformations preserving the Hausdorff-Besicovitch dimension. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*. 2004. Vol. 24. Pp. 1-16.
66. Anselm M., Weintraub S. H. A generalization of continued fractions. *Journal of Number Theory*. 2011. Vol. 131. Pp. 2442-2460.
67. Besicovitch A. S. On linear sets of points of fractals dimensions. *Math. Ann.* 1929. Vol. 101, no. 1. Pp. 161–193.
68. Brown G., Qingle Y. Metrical theory for farey continued fractions. *Osaka J. Math.* 1996. Vol. 33, no. 2. Pp. 951–970.
69. Bunder M. W., Tognetti K. P., Bates B. Continued Fractions and The Gauss Map. *Academia Paedagogica Nyiregyhaziensis. Acta Mathematica*. 2005. no. 21 (2). Pp. 113-125.
70. Cusick T. W. Hausdorff dimension of sets of continued fractions. *Quan. J. Math. Oxford*. 1990. Vol. 41, no. 2. Pp. 277–286.
71. Dajani K., Kraaikamp C. The mother of all continued fractions. *Colloq. Math.* 84/85 (2000). Part 1. P. 109-123.
72. Denjoy A. Complément à la notice publiée en 1934 sur les travaux scientifiques de M. Arnaud Denjoy, Hermann, Paris, 1942.
73. Denjoy A. Sur une fonction de Minkowski. *C. R. Acad. Sci.* 1932. Vol. 194. Pp. 44-46.
74. Dmytryshyn R. I. Convergence of some branched continued fractions with independent variables. *Mat. Stud.* 2017. Vol. 47, No. 2. P. 150–159.
75. Dmytryshyn R. I. Positive definite branched continued fractions of special form. *Carpathian Math. Publ.* 2013. Vol. 5, № 2. P. 225–230.
76. Dovgoshey O. The Cantor function / O. Dovgoshey, O. Martio, V. Ryazanov, M. Vuorinen. *Expo. Math.* 24 (2006). P. 1-37.
77. Faivre C. On the central limit theorem for random variables related to the continued fraction expansion. *Colloquium mathematicum*. 1996. Vol. 71, № 1. Pp. 153-159.
78. Girgenson R. Constructing singular functions via Farey fractions. *J. Math.*

- Anal. Appl.* 203 (1996). Pp. 127-141.
79. Good J. T. The fractional dimensional theory of continued fractions. *Proc. Cambridge Phil. Soc.* 1941. Vol. 37. Pp. 199–228.
80. Hartono Y., Kraaikamp C., Schweiger F. Algebraic and ergodic properties of a new continued fraction algorithm with non-decreasing partial quotients. *Journal de théorie des nombres de Bordeaux.* 2002. Vol. 14 no. 2. Pp. 497-516.
81. Hensley D. Continued fraction Cantor set, Hausdorff dimension, and functional analysis. *J. Number Theory.* 1992. Vol. 40. no. 3. Pp. 336-358.
82. Hirst K. E. Fractional dimension theory of continued fractions. *Quart. J. Math.* 1970. Vol. 21. Pp. 29–35.
83. Iosifescu M., Kraaikamp C. Metric properties of Denjoy's canonical continued fraction expansion. *Tokyo J. Math.* 2008. Vol. 31, № 2. Pp. 495-510.
84. Iosifescu M., Kraaikamp C. On Denjoy's canonical continued fraction expansion. *Osaka J. Math.* 2003. Vol. 40, № 1. Pp. 235-244.
85. Jarnik V. Zur metrischen theorie der diophantischen approximationen. 1928. Vol. 36. Pp. 91-106.
86. Kalpazidou S., Knopfmacher A., Knopfmacher J. Lüroth-type alternating series representations for real numbers. *Acta Arith.* 1990. Vol. 55. Pp. 311-322.
87. Kalpazidou S. On a problem of Gauss-Kuzmin type for continued fraction with odd partial quotient. *Pacific J. Math.* 1986. Vol. 123, no. 1. Pp. 103-114.
88. Kalpazidou S., Knopfmacher A., Knopfmacher J. Metric properties of alternating Lüroth series. *Portugal. Math.* 1991. Vol. 48, no. 3. Pp. 319–325.
89. Khintchine A. Ya. Metrische Kettenbruchproblemen. *Compositio Math.* 1935. Vol. 1. Pp. 361-382.
90. Komatsu T. Hurwitz and Tasoev continued fractions with long period. *Mathematica Pannonica.* 2006. Vol. 17/1. Pp. 91-110.

91. Kraaikamp C., Wu J. On a new continued fraction expansion with non-decreasing partial quotients. *Monatsh. Math.* 2004. Vol. 143. Pp. 285-298.
92. Lehner J. Semiregular continued fractions whose partial denominators are 1 or 2. *The Mathematical Legacy of Wilhelm Magnus: Groups, Geometry and Special Functions (Brooklyn, NY, 1992)*. Contemp. Math. 169, Amer. Math. Soc., Providence, RI. 1994. Pp. 407-410.
93. Levy P. Sur les lois de probabilité dont dépendent les quotients complets et incomplets d'une fraction continue. *Bull. Soc. Math.* 1929. Vol. 57. Pp. 178-194.
94. Lyons R. Singularity of some random continued fractions. *Journal of Theoretical Probability*. 2000. Vol. 13, no. 2. Pp. 535-545.
95. Mandelbrot B. B. The fractal geometry of nature. New York: Freeman and Co., 1983. 540 pp.
96. Marsalia G. Random variables with independent binary digits. *Ann. Math. Statist.* 1971. Vol. 42, no. 2. Pp. 1922-1929.
97. Minkowski H. *Gesammeine Abhandlungen*. Berlin, 1911. vol 2. Pp. 50-51.
98. Olds C. D. Continued fractions. Random House, New York. 1963. 162 pp.
99. Oppenheim A. The representation of real numbers by infinite series of rationals. *Acta Arith.* 1972. Vol. 21. Pp. 391-398.
100. Pratsiovytyi M., Khvorostina Yu. Topological and metric properties of distributions of random variables represented by the alternating Lüroth series with independent elements. *Random Oper. Stoch. Equ.* 2013. Vol. 21, no. 4. Pp. 385-401.
101. Pratsiovytyi M., Kyurchev D. On A_2 -continued fraction expansion, Voronoi's Impact on Modern Science. Book 4, Vol. 1: Proceedings of the Fourth International Conference on Analytic Number Theory and Spatial Tessellations, Drahomanov National Pedagogical University, Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine. Kyiv, 2008. Pp. 181-190.
102. Pratsiovytyi M., Kyurchev D. On A_s -continued fraction expansion. *Book*

- of abstracts of the International Conference on Algebra dedicated to 100th anniversary of S. M. Chernikov.* Kyiv, 2012. P. 119.
103. Pratsiovytyi M., Kyurchev D. Properties of the distribution of the random variable defined by A_2 -continued fraction with independent elements. *Random Operators and Stochastic Equations.* 2009. Vol. 17, no. 1. Pp. 91–101.
 104. Ramharter G. Some metrical properties of continued fractions. *Mathematika.* 1983. Vol. 30. Pp. 117–132.
 105. Rogers C. A. Some sets of continued fractions. *Proc. London Math. Soc.* 1964. Vol. 14, no. 3. Pp. 29–44.
 106. Salem R. On some singular monotonic functions which are strictly increasing. *Trans. Amer. Math. Soc.* 1943. Vol. 53, no. 3. Pp. 427–439.
 107. Schweiger F. Ergodic theory of fibred systems and metric number theory. Oxford University Press, New York, 1995. 320 pp.
 108. Shallit J. O. Metric theory of Pierce expansions. *Fibonacci Quart.* 1986. Vol. 24, no. 1. Pp. 22–40.
 109. Takagi T. A simple of the continuous function without derivative. *Proc. Phys.-Math. Soc. Japan.* 1903. Vol. 1. Pp. 176-177.
 110. Wall H. S. Analytic theory of continued fractions. New York: Chelsea, 1948. 433 p.
 111. Zamfirescu T. Most monotone functions are singular. *Amer. Math. Mon.* 1981. Vol. 88. Pp. 47-49.
 112. Zhong T. Metrical properties for a class of continued fractions with increasing digits. *Journal of Number Theory.* 2008. Vol. 128. Pp. 1506-1515.

ДОДАТОК

Цей додаток містить список публікацій здобувача на тему дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації.

Наукові праці, у яких опубліковані основні наукові результати дисертації:

- 1^a. Чуйков А. С. Найпростіші неперервні та кусково-неперервні функції, які зберігають хвости елементарного ланцюгового зображення чисел. *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки*. К.: НПУ імені М. П. Драгоманова. 2014, № 16 (2). С. 94-99.
- 2^a. Працьовитий М. В., Чуйков А. С. Найпростіші функції, пов'язані з оператором лівостороннього зсуву елементів ланцюгового зображення чисел. *Зб. праць. Ін-ту математики НАН України*. 2016. Т. 13, № 3. С. 158-173.
- 3^a. Працьовитий М. В., Чуйков А. С., Кюрчев Д. В. Ланцюгові A_3 -дроби: основи метричної теорії. *Зб. праць. Ін-ту математики НАН України*. 2017. Т. 14, № 4. С. 97-110.
- 4^a. Працьовитий М. В., Чуйков А. С. Неперервна ніде не монотонна функція, означена в термінах нега-трійкових і ланцюгових A_2 -дробів. *Зб. праць. Ін-ту математики НАН України*. 2018. Т. 15, № 1. С. 147-161.
- 5^a. Pratsiovytyi M. V., Chuikov A. S. Continuous distributions whose functions preserve tails of a A -continued fraction representation of numbers. *Random Operators and Stochastic Equations*. 2019. Vol. 27 (3). Pp. 199-206.
- 6^a. Pratsiovytyi M. V., Makarchuk O. P., Chuikov A. S. Approximation and estimates in the periodic representation of real numbers of the closed

interval $[0,5; 1]$ by A_2 -continued fractions. *Journal of Numerical & Applied Mathematics*. 2019. № 1 (130). Pp. 71-83.

Тези доповідей на конференціях, які засвідчують апробацію результатів дисертації:

- 7^a. Працьовитий М. В., Чуйков А. С. Властивості однієї функції, заданої у термінах ланцюгових дробів. *П'ятнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука*, 15-17 травня 2014 р. Київ: Т. 2. Алгебра. Геометрія. Математичний аналіз. Київ: НТУУ «КПІ», 2014. С. 155.
- 8^a. Чуйков А. С. Геометрія зображення чисел канонічними ланцюговими дробами та її застосування. *Матеріали Міжнародної науково-методичної конференції «Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі»*, 25-26 червня 2015 р. Київ: НУХТ, 2015 р. С. 99-101.
- 9^a. Chuikov A. S. Functions defined in terms of continued fractions. *International conference «Probability, Reliability And Stochastic Optimization»*, April 7-10, 2015, Kyiv, Ukraine: Conf. materials. P. 18.
- 10^a. Чуйков А. С. Функції – перетворювачі елементів ланцюгового дроби. *Тези доповідей Четвертої всеукраїнської конференції молодих вчених з математики та фізики*, 23-25 квітня 2015 р. Київ: НТУУ «КПІ», 2015. С. 55.
- 11^a. Працьовитий М. В., Дмитренко С. О., Чуйков А. С. Інверсор цифр ланцюгового A_2 -зображення дробової частини числа. *Тези доповідей Четвертої всеукраїнської конференції молодих вчених з математики та фізики*, 23-25 квітня 2015 р. Київ: НТУУ «КПІ», 2015. С. 47.
- 12^a. Чуйков А. С. Про одну неперервну ніде не монотонну функцію, задану за допомогою ланцюгового дроби. *Тези доповідей Міжнародної конференції молодих математиків*, 3-6 червня 2015 р. Київ, Україна: ІМ НАН України, 2015. С. 89.

- 13^a. Працьовитий М. В., Чуйков А. С. Деякі функції, пов'язані з оператором Гауса. *Тези доповідей V Всеукр. наук. конф. молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання», 25-26 квітня 2016 р.* Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2016. С. 42.
- 14^a. Працьовитий М. В., Чуйков А. С. Аналог інверсора цифр для ланцюгового зображення чисел. *Збірник тез Всеукр. наук.-метод. конф. «Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі», присвяченої пам'яті професора С. С. Левіценка, 7-8 жовтня 2016 р.* Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2016. С. 71.
- 15^a. Чуйков А. С., Працьовитий М. В. Аналог Трибін-функції, означеної у термінах ланцюгових та нега-трійкових дробів. *VI Всеукр. конф. молодих вчених з математики та фізики, 21-22 квітня 2017 р.* Київ: НаУКМА, 2017. С. 50.
- 16^a. Чуйков А. С. Про необмеженість варіації однієї ніде не монотонної функції. *Матеріали Міжнар. наук. конф. «Асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь», присвяченої 85-річчю доктора фізико-математичних наук, професора, академіка НАПН України М. І. Шкіля, 13-14 грудня 2017 р.* Київ: НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2017. С. 88-89.
- 17^a. Chukov A. S., Pratsiovytyi M.V. Continuous transformations preserving tails of a A -continued fraction representation of numbers. *Sixth International Conference on Analytic Number Theory and Spatial Tessellations*, Kyiv, 2018. P. 26.
- 18^a. Чуйков А. С. Апроксимація дійсних чисел відрізка $[0, 5; 1]$ ланцюговими A_2 -дробами. *Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання», 23 травня 2019 р.* Київ, 2019. С. 51.