Національна академія наук України
Інститут математики

Чуйков Артем Сергійович

УДК 517.51

Фрактальний аналіз функцій зі складною локальною будовою, визначених у термінах ланцюгових дробів

01.01.01 — математичний аналіз
(111 — математика)

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ — 2020

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Інституті математики НАН України.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор
Працьовитий Микола Вікторович,
Національний педагогічний університет імені
М. П. Драгоманова, декан фізико-математичного
факультету; Інститут математики НАН України,
завідувач лабораторії фрактального аналізу.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, доцент
Дмитришин Роман Іванович,
Прикарпатський національний університет імені
Василя Стефаника, професор кафедри
математичного і функціонального аналізу;

доктор фізико-математичних наук, доцент
Пагіря Михайло Михайлович,
Мукачівський державний університет, доцент
кафедри машинобудування, природничих дисциплін
та інформаційних технологій.

Захист відбудеться «25» лютого 2020 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.01 Інституту математики НАН України за адресою: 01024, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розісланий «17» січня 2020 р.

Учений секретар
спеціалізованої вченої ради Романюк А. С.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Робота виконана у галузі конструктивної теорії локально-складних функцій зі фрактальними властивостями, означених у термінах ланцюгових дробів.

Актуальність теми. Кажуть, що функція має фрактальні властивості (на взірець самоподібних, самоафінних, автомодельних, розмірнісних), якщо їх має або графік функції, або множина значень функції, або рівні функції, або різноманітні множини особливостей тощо. Фрактальний аналіз таких функцій, окрім вивчення вказаних множин, вивчає питання, як під дією функції трансформуються фрактальні розмірності (на взірець Гаусдорфа-Безиковича, ентропійна, клітинкова) борелівських підмножин області визначення. Традиційними об'єктами дослідження для нього є сингулярні, ніде не монотонні, ніде не диференційовні функції. При цьому поглиблюються індивідуальні теорії відомих і нових функцій (Кантора, Салема, Мінковського, Серпінського, Буша-Вундерліха, Трибін-функції тощо), а також розвивається загальна теорія (у багатих класах функцій, залежних від скінченної або нескінченної кількості параметрів). Вагомим фактором інтересу до локально-складних функцій є теореми про масивність множини таких функцій у певних просторах (теореми Банаха-Мазуркевича, Замфіреску, Козирєва).

Ланцюгові дроби (елементарні, A_2-дроби, дроби Данжуа) використовувалися для конструювання і дослідження функцій і ймовірнісних мір зі фрактальними властивостями у роботах М. В. Працьовитого, О. Л. Лещинського, Г. М. Торбіна, Ю. В. Кулиби, С. О. Дмитренка, Д. В. Кюрчева, Я. Ф. Виннишина та ін. Більшість із цих робіт стосувалась розподілів випадкових величин, до них відповідних функцій розподілу і ймовірнісних мір. Геометрія зображення чисел ланцюговими дробами має непросту метричну складову, що породжує істотні труднощі при вивченні метричних властивостей об'єктів. Водночас поєднання ідей ланцюговості й кодування чисел засобами скінченного алфавіту є багатонадійним.

Цю роботу можна вважати певним продовженням досліджень функцій зі фрактальними властивостями, які проводились у роботах М. В. Працьовитого, Н. А. Василенко, А. В. Калашнікова, О. В. Свинчук.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконана в рамках дослідження математичних об'єктів із локально складною структурою і фрактальними властивостями, що проводиться у відділі динамічних систем та фрактального аналізу Інституту математики НАН України. Дослідження здійснювалося в рамках науково-дослідних тем:

— фрактальний аналіз математичних об'єктів зі складною локальною будовою (№ державної реєстрації 0107U000583);
— фрактальний аналіз неперервних функцій і мір (№ державної реєстрації 0111U000053);
— двійкове кодування дійсних чисел та фрактали (№ державної реєстрації 0110U001279).

Мета і завдання дослідження. *Метою* дисертаційного дослідження є опис властивостей функцій, які задаються перетворювачами цифр ланцюгового зображення чисел ув інші зображення або перекодуванням цифр ланцюгового зображення.

Основними об'єктами дослідження є:
1) ланцюгове A_s-зображення чисел $x = \frac{1}{a_1+\frac{1}{a_2+\dots}} \equiv \Delta^{A_s}_{a_1a_2\dots a_n\dots}$, де a_n- елементи фіксованої впорядкованої за зростанням множини додатних дійсних чисел $A_s \equiv \{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{s-1}\}$, і функції, з ним пов'язані;
2) неперервні функції й перетворення відрізка (бієктивні відображення відрізка на себе), які зберігають хвости ланцюгових зображень чисел із використанням елементарних і A_2-дробів;
3) аналог Трибін-функції, заданої перетворювачем цифр нега-трійкового зображення чисел у ланцюгове A-зображення чисел:

$$x = \bar{\Delta}^3_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\dots} = \frac{3}{4} + \sum_{k=1}^{\infty}(-3)^{-k}\alpha_k \xrightarrow{f} y = \Delta^A_{\beta_1\beta_2\dots\beta_n\dots},$$

де $\beta_1 = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \alpha_1 = 2, \\ 0, & \text{якщо } \alpha_1 \neq 2; \end{cases}$ $\quad \beta_{k+1} = \begin{cases} 1-\beta_k, & \text{якщо } \alpha_{k+1}+\alpha_k = 2, \\ \beta_k, & \text{якщо } \alpha_{k+1}+\alpha_k \neq 2; \end{cases}$

4) функції, визначені перетворювачами цифр зображень чисел із рівнопотужними алфавітами.

Предметом дослідження є геометрія зображення чисел ланцюговими дробами, структурні, варіаційні, диференціальні, автомодельні та фрактальні властивості функцій, тополого-метричні властивості суттєвих для них множин.

Завдання дослідження:

1) поглиблення метричної складової геометрії зображення чисел ланцюговими дробами, вивчення варіаційних, диференціальних властивостей указаних функцій, автомодельних властивостей графіка;

2) вивчення диференціальних та інтегральних властивостей кусково-неперервних функцій, заданих за допомогою перетворювачів елементів елементарного ланцюгового дробу;
3) конструювання й дослідження властивостей функцій, заданих за допомогою ланцюгових A_2-дробів;
4) конструювання й вивчення властивостей функцій, заданих перетворювачами елементів ланцюгового дробу в інше зображення дійсних чисел;
5) побудова основ тополого-метричної теорії зображення чисел ланцюговими A_3-дробами.

Методи дослідження. У роботі використовувались прийоми і методи теорії ланцюгових дробів, математичного аналізу, метричної і ймовірнісної теорії чисел, теорії функцій дійсної змінної, фрактального аналізу і фрактальної геометрії.

Наукова новизна одержаних результатів. Основні наукові результати, що виносяться на захист, такі.

1. Побудовано неперервні перетворення відрізка $[0; 1]$, які зберігають хвости зображення чисел елементарними ланцюговими дробами.
2. Доведено, що множина неперервних перетворень відрізка $[0{,}5; 1]$, які зберігають хвости ланцюгового A-зображення чисел, щодо операції «суперпозиція функцій» утворює нескінченну некомутативну групу.
3. Введено функцію, названу квазіінверсором цифр елементарного ланцюгового зображення чисел, що є певним аналогом інверсорів цифр скінченно-символьних зображень чисел. Доведено її ніде не монотонність і канторовість множини її значень, описано множини рівнів.
4. Вивчено властивості функції, яку означено проектуванням цифр елементарного ланцюгового зображення чисел у цифри зображення чисел знакозмінними рядами Люрота. Доведено її неперервність і монотонність, знайдено систему функціональних рівнянь, єдиним розв'язком якої є ця функція.
5. Сконструйовано функцію, яка є аналогом функції Буша-Вундерліха і Трибін-функції, чий аргумент розглядається у формі негатрійкового зображення, а значення функції — у формі ланцюгового A-зображення. Доведено, що вона є неперервною на відрізку $[0{,}5; 1]$ ніде не монотонною функцією і має необмежену варіацію.

Описано властивості графіка цієї функції, зокрема автомодельні, і множин її рівнів.

6. Отримано оцінки наближень дійсних чисел відрізка $[0{,}5; 1]$ ланцюговими A_2-дробами.
7. Закладено основи тополого-метричної теорії зображення чисел ланцюговими A_3-дробами. Зокрема, знайдено умови нульової надлишковості зображення чисел ланцюговими A_3-дробами, описано властивості циліндричних і хвостових множин, з'ясовано геометричний сенс цифр.

Практичне значення одержаних результатів. Робота має переважно теоретичний характер. Отримані результати є певним внеском у теорію функцій дійсної змінної, фрактальний аналіз і фрактальну геометрію.

Особистий внесок здобувача. У роботах, опублікованих у співавторстві з науковим керівником, Працьовитому М. В. належить загальна постановка задач, ідеї доведення деяких тверджень, редагування і перевірка одержаних результатів.

У роботі, виконаній у співавторстві з Макарчуком О. П., йому належать ідеї доведення теореми 4.1.1 і леми 4.9.1. Доведення цих тверджень належать здобувачеві. У роботі, виконаній спільно з Кюрчевим Д. В., йому належить ідея розгляду трисимвольного ланцюгового зображення чисел.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дослідження доповідалися на таких наукових конференціях і семінарах:

— П'ятнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука, Київ, 15-17 травня 2014 р.

— Міжнародна конференція «Імовірність, надійність та стохастична оптимізація», Київ, 7-10 квітня 2015 р.

— Четверта всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики, Київ, 23-25 квітня 2015 р.

— Міжнародна конференція молодих математиків, Київ, 3-6 червня 2015 р.

— Міжнародна науково-методична конференція «Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі», Київ, 25-26 червня 2015 р.

— П'ята всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методика їх навчання», Київ, 25-26 квітня 2016 р.

— Шоста всеукраїнська конференція молодих вчених з математики та фізики, Київ, 21-22 квітня 2017 р.
— Міжнародна наукова конференція «Асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь, присвячена 85-річчю доктора фізико-математичних наук, професора, академіка НАПН України М. І. Шкіля», Київ, 13-14 грудня 2017 р.
— Шоста міжнародна конференція з аналітичної теорії чисел та просторових мозаїк, Київ, 24-28 вересня 2018 р.
— Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методика їх навчання», Київ, 23 травня 2019 р.
— Семінар відділу фрактального аналізу Інституту математики НАН України та НПУ імені М. П. Драгоманова (керівник — доктор фіз.-мат. наук, професор М. В. Працьовитий).
— Семінар відділу теорії функцій Інституту математики НАН України (керівник — доктор фіз.-мат. наук, професор А. С. Романюк).

Публікації. Основні результати дослідження викладено у 6 наукових статтях [1 – 6], опублікованих у виданнях, що внесені до переліку наукових фахових видань України, з них 2 статті [5, 6] у наукових виданнях, що входять до міжнародних наукометричних баз даних (Scopus, Web of Science), і додатково відображено у матеріалах конференцій [7 – 18].

Структура дисертації. Дисертаційна робота складається з анотації, переліку скорочень і умовних позначень, вступу, п'ятьох розділів, розбитих на підрозділи, висновків до кожного розділу й загальних висновків, списку використаних джерел (112 найменувань) і додатка, який містить список публікацій здобувача на тему дисертації й відомості про апробацію результатів дисертації. Загальний обсяг дисертації становить 149 сторінок.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У *вступі* обґрунтовано актуальність дослідження, визначено об'єкт, предмет, мету і завдання, зазначено наукову новизну одержаних результатів і особистий внесок здобувача.

Перший розділ «Огляд літератури та концептуальні засади дослідження» має вступний характер. У ньому описані властивості деяких зображень дійсних чисел, які використовуються для подальшого конструювання й дослідження функцій, а саме: елементарне ланцюгове зображення, ланцюгове A_2-зображення, зображення дробами Данжуа, зображення знакозмінними дробами Люрота, s-кова й нега-s-кова системи числення. Наведено відомі приклади функцій, які мають складну локальну будову: сингулярних (функції Салема й Мінковського), ніде не монотонних (функції, пов'язані зі Q-зображенням) і ніде не диференційовних (функція Такаґі і Трибін-функція).

Другий розділ «Функції і перетворення, що зберігають хвости зображення чисел елементарними ланцюговими дробами» присвячено функціям і перетворенням відрізка $[0;1]$, які зберігають хвости елементарного ланцюгового зображення дійсних чисел. Для конструювання таких перетворень використовувались оператори лівостороннього і правостороннього зсуву цифр.

Нехай i – довільне фіксоване натуральне число, $\varphi_i(j)$ – задана натуральна функція натуральної змінної j, залежна від параметра i. Розглядається функція f_{φ_i}, означена рівністю $y = f_{\varphi_i}(x) = [\varphi_i(a_1), a_2, \ldots, a_n, \ldots]$,

$$\text{де} \quad x = [a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots] = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_n + \ddots}}}.$$

Теорема 2.1.1. *Функція f_{φ_i} на кожному циліндрі першого рангу є неперервною і строго зростаючою функцією, причому на $\Delta^{c.f.}_{a_1}$ виражається формулою:*

$$f_{\varphi_i}(x) = \frac{x}{(\varphi_i(a_1) - a_1)x + 1}.$$

Теорема 2.1.2. *Функція f_{φ_i} є неперервною на півінтервалі $(0;1]$ тоді і лише тоді, коли $\varphi_i(a_1) = \varphi(i) + a_1$.*

Розглядається оператор лівостороннього зсуву $T(x)$, заданий рівністю

$$T([a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]) = [a_2, a_3, \ldots, a_{n+1}, \ldots].$$

Лема 2.2.1. *Оператор лівостороннього зсуву $T(x)$ є кусково-неперервною функцією, яка на циліндрах першого рангу аналітично задається формулою:*

$$T(x) = \frac{1}{x} - a_1(x).$$

У кожній точці виду $\frac{1}{i+1}, i \in \mathbb{N}$ *функція має розрив першого роду зі стрибком 1.*

Нехай i – натуральний параметр. Означається клас функцій, визначених у раціональних та ірраціональних точках півінтервалу $(0;1]$ рівностями:

$$\delta_i(x) = [i, a_1, a_2, \ldots, a_n], \quad \delta_i(x) = [i, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots], \quad i = 1, 2, \ldots.$$

відповідно, причому за неперервністю нехай $\delta_i(0) := \dfrac{1}{i}$.

Лема 2.2.2. *Функція* $\delta_i(x)$ *аналітично виражається формулою*

$$\delta_i(x) = \frac{1}{i+x}$$

і є неперервною і строго спадною функцією, причому множиною її значень є проміжок: $\left[\frac{1}{i+1}; \frac{1}{i}\right]$.

Лема 2.2.3. *Якщо* i *— фіксоване натуральне число, то рівняння*

$$\delta_i(x) = T(x)$$

має зліченну множину розв'язків:

$$x_n^{(i)} = [n, i, n, i, \ldots] = [\overline{n, i}], \ n \in \mathbb{N},$$

кожен із яких є ірраціональним числом.

Лема 2.3.1. *Функція*

$$f(x) = \begin{cases} \delta_1(x), & \text{якщо } \ 0 \leqslant x \leqslant x_1^{(1)}, \\ T(x), & \text{якщо } \ x_1^{(1)} \leqslant x \leqslant 1; \end{cases} \tag{1}$$

є неперервною та строго спадною на $[0;1]$*, причому* $f(0) = 1$ *і* $f(1) = 0$.

Кажемо, що функція $\varphi(x)$ *зберігає хвости елементарного ланцюгового зображення чисел*, якщо для будь-якого $x \in [0;1]$ існують такі цілі невід'ємні числа $k = k(x)$ і $m = m(x)$, що діють рівності $a_{k+j}(x) = a_{m+j}(\varphi(x))$ для кожного $j \in \mathbb{N}$.

Теорема 2.3.1. *Якщо* s *– фіксоване натуральне число,* $(n_1, n_2, \ldots, n_s), (m_1, m_2, \ldots, m_s)$ *— задані набори натуральних чисел, що задовольняють умови*

$$1 < n_1 < n_2 < \ldots < n_s, \quad m_1 > m_2 > \ldots > m_s > 1,$$

то функція

$$f(x)=\begin{cases}\delta_1(x), & 0\leqslant x\leqslant x^{(1)}_{m_1},\\ T(x), & x^{(1)}_{m_1}<x\leqslant x^{(n_1)}_{m_1},\\ \delta_{n_1}(x), & x^{(n_1)}_{m_1}<x\leqslant x^{(n_1)}_{m_2},\\ T(x), & x^{(n_1)}_{m_2}<x\leqslant x^{(n_2)}_{m_2},\\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\\ \delta_{n_s}(x), & x^{(n_s)}_{m_s}<x\leqslant x^{(n_s)}_{1},\\ T(x), & x^{(n_s)}_{1}<x\leqslant 1;\end{cases}$$

є неперервним строго спадним перетворенням відрізка $[0;1]$*, що зберігає хвости зображення чисел елементарними ланцюговими дробами і фрактальну розмірність Гаусдорфа-Безиковича борелівських множин.*

Нехай k — деяке фіксоване натуральне число, $f(a_1,a_2,\ldots,a_k)$ — натуральна функція натуральних змінних $a_1,a_2,\ldots,a_k$. Означимо клас функцій рівністю:

$$\tau_f(x)=\tau_f\left([a_1(x),a_2(x),a_3(x),\ldots]\right)=$$
$$=[f(a_1(x),a_2(x),\ldots,a_k(x)),a_{k+1}(x),a_{k+2}(x),\ldots].$$

Лема 2.4.1. *Функція* $\tau_f(x)$ *задається формулою:*

$$\tau_f(x)=\frac{1}{f(a_1,a_2,\ldots,a_k)+T^k(x)} \tag{2}$$

і є неперервною й монотонно зростаючою (спадною) на кожному з циліндрів k*-го рангу при непарному (парному) значенні* k*, множиною значень якої є півінтервал* $\left(\frac{1}{f(a_1,a_2,\ldots,a_k)+1},\frac{1}{f(a_1,a_2,\ldots,a_k)}\right]$.

Третій розділ «Функції, задані перетворювачами цифр елементарного ланцюгового зображення чисел» присвячено двом функціям: квазіінверсору цифр елементарного ланцюгового зображення чисел і тривіальному проекторові цифр зображення чисел елементарними ланцюговими дробами у цифри зображення знакозмінними рядами Люрота.

Перша функція означається в ірраціональних точках інтервалу $(0;1)$ рівністю:

$$f([a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots])=[b_1,b_2,\ldots,b_n,\ldots],$$

де

$$b_1=1,\ b_n=\varphi(a_n)=\begin{cases}1, & \text{якщо } a_n\neq 1;\\ n, & \text{якщо } a_n=1, n=2,3,\ldots,\end{cases}$$

і довизначається в усіх раціональних точках півінтервалу $(0;1]$ рівністю

$$f([a_1, a_2, \ldots, a_n]) = [b_1, b_2, \ldots, b_n],$$

з домовленістю зі двох можливих ланцюгових зображень аргумента використовувати лише те, у якого останній елемент відмінний від 1. Основними результатами є такі теореми.

Теорема 3.1.1. *Множиною значень функції f є множина канторівського типу (ніде не щільна множина нульової міри Лебега)*

$$E_f = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k = \lim_{k\to\infty} F_k,$$

де $$F_1 = \Delta_1^{c.f.},\ F_k = \bigcup_{b_2\in\{1,2\}} \bigcup_{b_3\in\{1,3\}} \cdots \bigcup_{b_k\in\{1,k\}} \Delta^{c.f.}_{1b_2b_3\ldots b_k}.$$

Теорема 3.1.2. *Функція f є ніде не монотонною. Множина її рівня $y_0 = [1, b_2, \ldots, b_n, \ldots]$, $b_n \in \{1, n\}$ є:*
1) зчисленною, якщо в зображенні числа y_0 кількість одиниць скінченна;
2) континуальною, якщо кількість одиниць нескінченна.

Другою є функція, яка у раціональних та ірраціональних точках коректно означена рівностями

$$g\left([a_1, a_2, \ldots, a_n]\right) = \Delta^{\widetilde{L}}_{a_1a_2\ldots a_n(\emptyset)}, \quad g\left([a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]\right) = \Delta^{\widetilde{L}}_{a_1a_2\ldots a_n\ldots}$$

відповідно. Доведено, що вона є неперервною й монотонно зростаючою.

Теорема 3.2.1. *Монотонно зростаюча функція $g : (0;1] \to (0;1]$, означена рівністю $g([a_1, a_2, \ldots]) = \Delta^{\widetilde{L}}_{a_1a_2\ldots}$, задовольняє такі функціональні рівняння:*

$$g\left(\frac{x}{kx+1}\right) = \frac{k + a_1(a_1+1)g(x)}{(a_1+k)(a_1+k+1)}, \forall k \in \mathbb{N};$$

$$g\left(\frac{1}{i+x}\right) = \frac{1}{i} - \frac{1}{i(i+1)} g(x), \forall i \in \mathbb{N};$$

$$g\left(\frac{1}{x} - a_1\right) = (a_1+1)(1 - a_1 g(x)).$$

Теорема 3.2.2. (Основний результат). *Функція* $g([a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]) = = \Delta^{\widetilde{L}}_{a_1 a_2 \ldots a_n \ldots}$ *— це єдиний розв'язок системи функціональних рівнянь*

$$g\left(\frac{1}{i+x}\right) = \frac{1}{i} - \frac{1}{i(i+1)} g(x), i \in \mathbb{N}$$

у класі обмежених на $(0; 1]$ *функцій.*

Четвертий розділ «Зображення чисел ланцюговими дробами з двосимвольним алфавітом» присвячено дослідженню функцій, заданих за допомогою ланцюгових A_2-дробів. Побудовано неперервні перетворення відрізка $[0{,}5; 1]$, які зберігають хвости ланцюгового A-зображення чисел: $x = \Delta^{A_2}_{a_1 a_2 \ldots a_k \ldots} = \Delta^{A}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k \ldots}$, де $\alpha_k = 2a_k - 1$, $a_k \in A_2 \equiv \{\frac{1}{2}, 1\}$. Основним результатом цього розділу є конструктивне доведення того, що множина всіх неперервних перетворень відрізка $[0{,}5; 1]$, які зберігають хвости ланцюгового A-зображення чисел щодо операції «композиція (суперпозиція) функцій», утворює нескінченну некомутативну групу. Знайдено інваріантну міру для оператора лівостороннього зсуву. Побудовано й досліджено неперервну ніде не монотонну функцію, задану перетворювачем цифр нега-трійкового зображення чисел у їхнє ланцюгове A-зображення. Розглянуто скінченні ланцюгові дроби.

Означення 4.1.1. *У множині всіх ланцюгових A-зображень дійсних чисел відрізка* $[0{,}5; 1]$ *оператор* ω *лівостороннього зсуву цифр означається рівністю:*

$$\omega(\Delta^{A}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots}) = \Delta^{A}_{\alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_{n+1} \ldots}.$$

Лема 4.1.1. *Функція* $\omega(x)$ *на кожному циліндрі першого рангу є неперервною, монотонно спадною й опуклою вниз, причому:*

$$\omega(x) = \frac{1}{x} - a_1(x).$$

У точці $x = \dfrac{2}{3}$ *функція має розрив першого роду зі стрибком* $\dfrac{1}{2}$.

Нехай

$$\omega^n(x) = \underbrace{\omega(\omega(\ldots\omega}_{n}(x))) = \frac{u_n x + v_n}{c_n x + d_n}.$$

Теорема 4.1.1. *Виконується нерівність*

$$c_n \leqslant \frac{1}{\sqrt{17}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{17}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{17}}{2} \right)^n \right), \forall n \in \mathbb{N}.$$

Теорема 4.2.1. *Інваріантною мірою щодо оператора лівостороннього зсуву цифр ω ланцюгового A-зображення є ймовірнісна міра $\mu_X(\cdot)$, що відповідає розподілу випадкової величини X, яка представлена ланцюговим A_2-дробом, цифри якої є незалежними й однаково розподіленими.*

Означення 4.3.1. *У множині всіх ланцюгових A-зображень дійсних чисел відрізка $[0{,}5; 1]$ оператор δ_i з параметром $i \in \{0; 1\}$ правостороннього зсуву цифр означається рівністю:*

$$\delta_i(\Delta^A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^A_{i\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}.$$

Лема 4.3.1. *Функція $y = \delta_i(x)$, яка аналітично задається формулою*

$$\delta_i(x) = \frac{1}{i+x},$$

є неперервною, строго спадною й опуклою вниз на відрізку $[0{,}5; 1]$; вона набуває всіх значень із відрізка $[\frac{1}{i+1}; \frac{2}{2i+1}]$.

Лема 4.3.4. *Розв'язками рівняння $\omega^{2k-1}(x) = \delta_i(x)$ є числа у формі $x = \Delta^A_{(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{2k-1}i)}, i \in \{0, 1\}$.*

Лема 4.3.5. *Функція*

$$\varphi(x) = \begin{cases} \delta_0(x), & 0{,}5 \leqslant x < \Delta^A_{(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{2k-1}0)}, \\ \omega^{2k-1}(x), & \Delta^A_{(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{2k-1}0)} \leqslant x < \Delta^A_{(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{2k-1}1)}, \\ \delta_1(x), & \Delta^A_{(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{2k-1}1)} \leqslant x \leqslant 1; \end{cases}$$

є неперервною і строго спадною на відрізку $[0{,}5; 1]$.

Лема 4.3.6. *Розв'язками рівняння $\omega^n(x) = \delta_{i_1i_2\ldots i_n}(x)$ є числа у формі $x = \Delta^A_{(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n i_1 i_2\ldots i_n)}$.*

Лема 4.5.2. *Функція*

$$f(x) = \begin{cases} \omega^n(x) & \text{при } 0,5 \leqslant x < \Delta^A_{(\underbrace{1010\ldots}_{n \text{ цифр}} i_1\ldots i_n)}, \\ \delta_{i_1i_2\ldots i_n}(x) & \text{при } \Delta^A_{(\underbrace{1010\ldots}_{n \text{ цифр}} i_1\ldots i_n)} \leqslant x < \Delta^A_{(\underbrace{0101\ldots}_{n \text{ цифр}} i_1\ldots i_n)}, \\ \omega^n(x) & \text{при } \Delta^A_{(\underbrace{0101\ldots}_{n \text{ цифр}} i_1\ldots i_n)} \leqslant x \leqslant 1; \end{cases}$$

є неперервним (строго зростаючим при парному n і строго спадним при непарному n) перетворенням відрізка $[0, 5; 1]$, яке зберігає хвости ланцюгового A-зображення.

Теорема 4.5.1. *Множина G всіх неперервних перетворень відрізка $[0{,}5; 1]$, які зберігають хвости ланцюгового A-зображення чисел, щодо операції «суперпозиція функцій» утворює нескінченну некомутативну групу.*

Розглядається функція $y = f(x)$, аргумент якої має нега-трійкове зображення, а саме:

$$x = \bar{\Delta}^3_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots} \equiv \frac{3}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{(-3)^n}, \quad \alpha_n \in \{0, 1, 2\},$$

а значення функції має ланцюгове A-зображення

$$f(x) = \Delta^A_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n\ldots}, \quad \beta_n \in \{0, 1\},$$

причому

$$\beta_1 = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \alpha_1 = 2, \\ 0, & \text{якщо } \alpha_1 \neq 2; \end{cases} \qquad \beta_{k+1} = \begin{cases} 1 - \beta_k, & \text{якщо } \alpha_{k+1} + \alpha_k = 2, \\ \beta_k, & \text{якщо } \alpha_{k+1} + \alpha_k \neq 2. \end{cases}$$

Теорема 4.6.1. *Функція f є неперервною на $[0;1]$ і ніде не монотонною.*

Теорема 4.6.2. *На циліндрі $\bar{\Delta}^3_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}1}$ найбільше або найменше значення функції досягаєтья у його внутрішній точці $x_0 = \bar{\Delta}^3_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}(1)}$, на циліндрі $\bar{\Delta}^3_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{m-1}\alpha_m}$, де $\alpha_m \in \{0, 2\}$ функція набуває свого найбільшого і найменшого значення на кінцях циліндра.*

Лема 4.6.1.

1. *Якщо ланцюгове A-зображення точки y_0 має форму $\Delta^A_{(01)}$, то множина $f^{-1}(y_0)$ складаєтьcя з двох точок.*
2. *Якщо ланцюгове A-зображення точки y_0 має форму $\Delta^A_{(10)}$, то множина $f^{-1}(y_0)$ складаєтьcя з однієї точки.*
3. *Якщо в ланцюговому A-зображенні точки y_0 всі цифри дорівнюють 0, то множина $f^{-1}(y_0)$ є зліченною множиною.*

Теорема 4.6.3. *Функція f є функцією необмеженої варіації.*

Теорема 4.6.4.

1. *Частина*

$$\Gamma_1 = \{M(x, y) : x = \bar{\Delta}^3_{1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots}, \quad y = f(x)\}$$

графіка Γ функції f симетрична щодо прямої $x = \bar{\Delta}^3_{(1)}$.

2. *Відображення, яке переводить частину графіка*

$$\Gamma_0 = \{M(x,y) : x = \bar{\Delta}^3_{0\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots}, \quad y = f(x)\}$$

у частину

$$\Gamma_2 = \{M(x,y) : x = \bar{\Delta}^3_{2\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots}, \quad y = f(x)\},$$

задається формулою:

$$\begin{cases} x' = \bar{\Delta}^3_{[2-\alpha_1][2-\alpha_2]\ldots[2-\alpha_n]\ldots}, \\ y' = \Delta^A_{[1-\beta_1][1-\beta_2]\ldots[1-\beta_n]\ldots}. \end{cases}$$

Розглянуто скінченні ланцюгові дроби й вивчено їхні властивості.

Теорема 4.7.1. *Кожне A_2-раціональне число має зліченну множину різних скінченних ланцюгових A_2-зображень.*

Розглянуто властивості дійсних чисел із періодичними ланцюговими A_2-зображеннями й отримано оцінки наближення дійсних чисел ланцюговими A_2-дробами. Основними результатами є такі твердження.

Теорема 4.8.3. *Якщо число*

$$y = \frac{e}{f} + \sqrt{\frac{g}{h}} \quad \in [0{,}5; 1],$$

де $e, f, g, h \in \mathbb{N}$, $(g;h) = (f;h) = 1$, $\quad \sqrt{\frac{g}{h}} \notin \mathbb{Q}$, *має зображення*

$$y = [(\beta_1, \ldots, \beta_k)],$$

то виконується нерівність

$$h \leqslant \frac{1}{\sqrt{17}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{17}}{2} \right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{17}}{2} \right)^k \right).$$

Теорема 4.9.1. *Якщо для розкладу ірраціонального числа x у ланцюговий A_2-дріб існують частоти цифр $\frac{1}{2}$ та 1, які дорівнюють відповідно $\nu_{\frac{1}{2}}$ й ν_1, то для довільного $\varepsilon > 0$ існує номер n_0, такий, що*

$$|x - \frac{p_n}{q_n}| < \frac{1}{(\delta_1^{\nu_1} \eta_1^{\nu_{\frac{1}{2}}} - \varepsilon)^{2n+1}}, \forall n \geqslant n_0,$$

зокрема для довільного ірраціонального числа $y \in [0,5;1]$ *існує номер* n_1 *і стала* C*, такі, що*

$$|y - \frac{p_n}{q_n}| < \frac{C}{(\frac{1+\sqrt{17}}{4})^{2n+1}}, \forall n \geqslant n_1.$$

П'ятий розділ «Основи метричної теорії зображення чисел ланцюговими A_3*-дробами»* присвячено властивостям циліндрів ланцюгового A_3-зображення дійсного числа, а також властивостям хвостових множин.

Нехай $A_3 \equiv \{s_0, s_1, s_2\}$ – задана множина додатних дійсних чисел ($s_0 < s_1 < s_2$). Розглядаються всеможливі вирази у формі

$$\cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots}} \equiv [a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots], \quad \text{де} \quad a_i \in A_3,$$

які ми називаємо *ланцюговими* A_3*-дробами*.

Нехай

$$\beta_1 = [(s_2, s_0)] = \frac{\sqrt{s_0^2 s_2^2 + 4s_0 s_2} - s_0 s_2}{2s_2},$$

$$\beta_2 = [(s_0, s_2)] = \frac{\sqrt{s_0^2 s_2^2 + 4s_0 s_2} - s_0 s_2}{2s_0},$$

звідси

$$\frac{\beta_2}{\beta_1} = \frac{s_2}{s_0}.$$

Теорема 5.3.3. *Якщо* $s_0 s_2 = \dfrac{4}{3}$ *і* $s_1 = \dfrac{s_0 + s_2}{2}$*, то зчисленна множина точок* $x \in [\beta_1; \beta_2]$ *має два ланцюгові* A_3*-зображення*

$$\Delta^{A_3}_{a_1 a_2 \ldots a_{n-1} s_i (s_2 s_0)} = \Delta^{A_3}_{a_1 a_2 \ldots a_{n-1} s_{i-1} (s_0 s_2)}, \qquad i \in \{1, 2\},$$

решта точок має єдине зображення.

Стверджуємо, що два ланцюгові A_3-зображення $\Delta^{A_3}_{a_1 a_2 \ldots a_n \ldots}$ і $\Delta^{A_3}_{b_1 b_2 \ldots b_n \ldots}$ мають однаковий хвіст (або перебувають у відношенні $\sim$), якщо існують натуральні числа m і k, такі, що $a_{m+j} = b_{k+j}$ для будь-якого $j \in \mathbb{N}$.

Теорема 5.4.1. *Кожна хвостова множина є зліченною і щільною в* $[\beta_1; \beta_2]$ *множиною, а фактор-множина* $G \equiv [\beta_1; \beta_2]/\sim$ *є континуальною.*

ВИСНОВКИ

1. Побудовано неперервні перетворення відрізка $[0;1]$, які зберігають хвости зображення чисел елементарними ланцюговими дробами.
2. Доведено, що множина неперервних перетворень відрізка [0,5; 1], які зберігають хвости ланцюгового A-зображення чисел, щодо операції «суперпозиція функцій» утворює нескінченну некомутативну групу.
3. Введено функцію, названу квазіінверсором цифр елементарного ланцюгового зображення чисел (що є певним аналогом інверсорів цифр скінченно-символьних зображень чисел). Доведено її ніде не монотонність і канторовість множини її значень, описано множини рівнів.
4. Вивчено властивості функції, яку означено проектуванням цифр елементарного ланцюгового зображення чисел у цифри зображення чисел знакозмінними рядами Люрота. Доведено її неперервність і монотонність, знайдено систему функціональних рівнянь, єдиним розв'язком якої є ця функція.
5. Сконструйовано функцію, яка є аналогом функції Буша-Вундерліха і Трибін-функції, чий аргумент розглядається у формі негатрійкового зображення, а значення функції — у формі ланцюгового A-зображення. Доведено, що вона є неперервною на відрізку $[0,5;1]$ ніде не монотонною функцією і має необмежену варіацію. Описано властивості графіка цієї функції, зокрема автомодельні, і множин її рівнів.
6. Отримано оцінки наближень дійсних чисел відрізка [0,5; 1] ланцюговими A_2-дробами.
7. Закладено основи тополого-метричної теорії зображення чисел ланцюговими A_3-дробами. Зокрема, знайдено умови нульової надлишковості зображення чисел ланцюговими A_3-дробами, описано властивості циліндричних і хвостових множин, з'ясовано геометричний сенс цифр.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ НА ТЕМУ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Чуйков А. С. Найпростіші неперервні та кусково-неперервні функції, які зберігають хвости елементарного ланцюгового зображен-

ня чисел. *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки.* К.: НПУ імені М. П. Драгоманова. 2014, №16 (2). С. 94-99.

2. Працьовитий М. В., Чуйков А. С. Найпростіші функції, пов'язані з оператором лівостороннього зсуву елементів ланцюгового зображення чисел. *Зб. праць. Ін-ту математики НАН України.* 2016. Т. 13, № 3. С. 158-173.
3. Працьовитий М. В., Чуйков А. С., Кюрчев Д. В. Ланцюгові A_3-дроби: основи метричної теорії. *Зб. праць. Ін-ту математики НАН України.* 2017. Т. 14, № 4. С. 97-110.
4. Працьовитий М. В., Чуйков А. С. Неперервна ніде не монотонна функція, означена в термінах нега-трійкових і ланцюгових A_2-дробів. *Зб. праць. Ін-ту математики НАН України.* 2018. Т. 15, № 1. С. 147-161.
5. Pratsiovytyi M. V., Chuikov A. S. Continuous distributions whose functions preserve tails of a A-continued fraction representation of numbers. *Random Operators and Stochastic Equations.* 2019. Vol. 27 (3). Pp. 199-206.
6. Pratsiovytyi M. V., Makarchuk O. P., Chuikov A. S. Approximation and estimates in the periodic representation of real numbers of the closed interval [0,5; 1] by A_2-continued fractions. *Journal of Numerical & Applied Mathematics.* 2019. № 1 (130). Pp. 71-83.
7. Працьовитий М. В., Чуйков А. С. Властивості однієї функції, заданої у термінах ланцюгових дробів. *П'ятнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука*, 15-17 травня 2014 р. Київ: Т. 2. Алгебра. Геометрія. Математичний аналіз. Київ: НТУУ «КПІ», 2014. С. 155.
8. Чуйков А. С. Геометрія зображення чисел канонічними ланцюговими дробами та її застосування. *Матеріали Міжнародної науково-методичної конференції «Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі»*, 25-26 червня 2015 р. Київ: НУХТ, 2015 р. С. 99-101.
9. Chuikov A. S. Functions defined in terms of continued fractions. *International conference «Probability, Reliability And Stochastic Optimization»*, April 7-10, 2015, Kyiv, Ukraine: Conf. materials. P. 18.
10. Чуйков А. С. Функції – перетворювачі елементів ланцюгового дробу. *Тези доповідей Четвертої всеукраїнської конференції молодих вчених з математики та фізики, 23-25 квітня 2015 р.* Київ: НТУУ «КПІ», 2015. С. 55.

11. Працьовитий М. В., Дмитренко С. О., Чуйков А. С. Інверсор цифр ланцюгового A_2-зображення дробової частини числа. *Тези доповідей Четвертої всеукраїнської конференції молодих вчених з математики та фізики, 23-25 квітня 2015 р.* Київ: НТУУ «КПІ», 2015. С. 47.
12. Чуйков А. С. Про одну неперервну ніде не монотонну функцію, задану за допомогою ланцюгового дробу. *Тези доповідей Міжнародної конференції молодих математиків, 3-6 червня 2015 р.* Київ, Україна: ІМ НАН України, 2015. С. 89.
13. Працьовитий М. В., Чуйков А. С. Деякі функції, пов'язані з оператором Гауса. *Тези доповідей V Всеукр. наук. конф. молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання», 25-26 квітня 2016 р.* Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2016. С. 42.
14. Працьовитий М. В., Чуйков А. С. Аналог інферсора цифр для ланцюгового зображення чисел. *Збірник тез Всеукр. наук.-метод. конф. «Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі», присвяченої пам'яті професора С. С. Левіщенка, 7-8 жовтня 2016 р.* Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2016. С. 71.
15. Чуйков А. С., Працьовитий М. В. Аналог Трибін-функції, означеної у термінах ланцюгових та нега-трійкових дробів. *VI Всеукр. конф. молодих вчених з математики та фізики, 21-22 квітня 2017 р.* Київ: НаУКМА, 2017. С. 50.
16. Чуйков А. С. Про необмеженість варіації однієї ніде не монотонної функції. *Матеріали Міжнар. наук. конф. «Асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь», присвяченої 85-річчю доктора фізико-математичних наук, професора, академіка НАПН України М. І. Шкіля, 13-14 грудня 2017 р.* Київ: НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2017. С. 88-89.
17. Chukov A. S., Pratsiovytyi M. V. Continuous transformations preserving tails of a A-continued fraction representation of numbers. *Sixth International Conference on Analytic Number Theory and Spatial Tessellations*, Kyiv, 2018. P. 26.
18. Чуйков А. С. Апроксимація дійсних чисел відрізка $[0,5;1]$ ланцюговими A_2-дробами. *Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання»*, 23 травня 2019 р. Київ, 2019. С. 51.

АНОТАЦІЇ

Чуйков А. С. Фрактальний аналіз функцій зі складною локальною будовою, визначених у термінах ланцюгових дробів. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 — математичний аналіз (111 — математика). – Інститут математики НАН України, Київ, 2020.

Дисертаційне дослідження присвячене вивченню структурних, тополого-метричних і фрактальних властивостей функцій, які задаються в термінах ланцюгових дробів (елементарних і неелементарних). Побудовано неперервні перетворення відрізка, які зберігають хвости ланцюгового A-зображення і хвости зображення чисел елементарними ланцюговими дробами. Доведено, що множина неперервних перетворень відрізка $[0{,}5; 1]$, що зберігають хвости ланцюгового A-зображення чисел, щодо операції «суперпозиція функцій» утворює нескінченну некомутативну групу. Введено й вивчено функцію, названу квазіінверсором цифр елементарного ланцюгового зображення чисел. Сконструйовано аналог неперервної ніде не диференційовної функції Буша-Вундерліха і Трибін-функції, чий аргумент розглядається у формі нега-трійкового зображення, а значення функції — у формі ланцюгового A-зображення. Доведено, що вона є неперервною ніде не монотонною функцією необмеженої варіації. Описано властивості графіка цієї функції і множин її рівнів. Отримано оцінки наближень дійсних чисел відрізка $[0{,}5; 1]$ ланцюговими A_2-дробами. Закладено основи тополого-метричної теорії зображення чисел ланцюговими A_3-дробами.

Ключові слова: ланцюговий дріб, ланцюгове A_s-зображення чисел, нега-трійкове зображення чисел, ряди Люрота, циліндричні множини, перетворення відрізка, що зберігає хвости зображення, неперервна ніде не монотонна функція, автомодельність, множина рівня функції.

Чуйков А. С. Фрактальный анализ функций со сложным локальным строением, определённых в терминах цепных дробей. — Квалификационная научная работа на правах рукописи.

Диссертация на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 — математический анализ (111 — математика). — Институт математики НАН Украины, Киев, 2020.

Диссертационное исследование посвящено изучению структурных, тополого-метрических и фрактальных свойств функций, которые задаются в терминах цепных дробей (элементарных и неэлементарных). Построено непрерывные преобразования отрезка, сохраняющих хвосты изображения чисел элементарными цепными дробями и цепного A-изображения. Доказано, что множество непрерывных преобразований отрезка $[0{,}5; 1]$, которые сохраняют хвосты цепного A-изображения чисел, относительно операции «суперпозиция функций» образует бесконечную некоммутативную группу. Введено и изучено функцию, названную квазиинверсором цифр элементарного цепного изображения чисел. Сконструировано аналог непрерывной нигде не дифференцируемой функции Буша-Вундерлиха и Трибин-функции, чей аргумент рассматривается в форме нега-троичного изображения, а значение функции — в форме цепного A-изображения. Доказано, что она является непрерывной нигде не монотонной функцией неограниченной вариации. Описаны свойства графика этой функции и множеств ее уровней. Получены оценки приближений действительных чисел отрезка $[0{,}5; 1]$ цепными A_2-дробями. Заложены основы тополого-метрической теории изображения чисел цепными A_3-дробями.

Ключевые слова: цепная дробь, цепное A_s-изображение чисел, нега-троичное изображения чисел, ряды Люрота, цилиндрические множества, преобразования отрезка, которое сохраняет хвосты изображения, непрерывная нигде не монотонная функция, автомодельность, множество уровня функции.

Chuikov A. S. Fractal analysis of functions with complex local structure defined in terms of continued fractions. – Manuscript.

Candidate of Physical and Mathematical Sciences Thesis, speciality 01.01.01 — mathematical analysis (111 — mathematics). — Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2020.

The thesis is devoted to the study of structural, topological-metric and fractal properties of functions, that have everywhere dense sets of particular qualities. They are given in terms of continued fractions.

Continuous transformations of closed interval that preserve the tails of representation of numbers by elementary continued fractions and A_2-continued fractions are built. It is proved that the set of all continuous transformations of $[0{,}5; 1]$ that preserve tails of an A-continued fraction representation together with an operation «function composition (superposition)» form an infinite non-commutative group.

A function called the quasi-inversor of the digits of the elementary continued fraction representation of numbers is introduced. Its monotony and cantority of set of its values are proved. Level sets of this function are described.

We introduced the function by the projector of digits of elementary continued fraction representation of numbers into digits of representation of numbers by alternating Lüroth series and studied its properties. Its continuity and monotony are proved. The system of functional equations is found, the only solution to which is this function.

An invariant measure with respect to the left shift operator ω of an A-continued fraction representation is found.

A function whose argument considered in the form of a nega-3-adic representation of numbers and the value of a function considered in the form of a A-continued fraction representation of number is constructed. It is proved that it is continuous on $[0{,}5; 1]$ nowhere monotone function and has unlimited variation. The properties of the function graph, in particular the auto-modeling properties, and the properties of its level sets are described.

Finite A_2-continued fractions are considered and some of their properties are studied. Properties of real numbers with periodic A_2-continued fraction representation are studied. Estimates of the approximation of real numbers of a $[0{,}5; 1]$ by continued fractions are obtained.

The foundations of the topological-metric theory of the representation of numbers by A_3-continued fractions are set. In particular, conditions of zero excess of A_3-continued fraction representations are obtained. The properties of the cylindrical and tail sets are also described. The geometric content of the digits is found out.

Key words: continued fraction, A_s-continued fraction representation of numbers, nega-3-adic representation of numbers, Lüroth series, cylindrical sets, transformation of closed interval, that preserve tails of representation, continuous nowhere monotone function, auto-modeling, level sets of the function.

Підписано до друку 14.01.2020. Формат 60 × 84/16. Папір друк. Офсет. друк. Фіз. друк. арк. 1,25. Умовн. друк. арк. 1,16.
Тираж 100 пр. Зам. 17.

Інститут математики НАН України,
01024, м. Київ-4, вул. Терещенківська, 3.