

# ВІДГУК

офіційного опонента на дисертаційну роботу

Чуйкова Артема Сергійовича

## "Фрактальний аналіз функцій зі складною локальною будовою, визначених у термінах ланцюгових дробів"

подану на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук зі спеціальності 01.01.01 — математичний аналіз (111 — математика)

**1. Актуальність теми дослідження.** В дисертаційній роботі А. С. Чуйкова вивчаються структурні, тополого-метричні і фрактальні властивості функцій зі складною локальною поведінкою (структурою). Розглядані функції або неперервні на відрізку, або мають не більш ніж зліченну множину розривів, а множини особливостей (диференціального, варіаційного та іншого характеру) є всюди щільними. Функції такого класу зустрічаються в роботах Г. Мінковського, Р. Салема, В. Серпінського, Т. Тагакі, О. Beaver і Т. Garrity, М. Lamberger та ін.

В задачах теорії функцій, метричній і ймовірнісній теорії чисел, фрактальному аналізу та фрактальній геометрії системи кодування дійсних чисел є зручним знаряддям дослідження математичних об'єктів зі складною локальною тополого-метричною структурою. Відомо, що системи кодування можуть використовувати скінченний, нескінченний або змінний алфавіт. Кодування (зображення, запис) чисел ланцюговими дробами має свою специфіку і різниться від зображення чисел за допомогою "фундаментальних послідовностей" (так званих  $s$ -кових зображень,  $Q$ -зображень, рядів Кантора тощо).

Потрібно також відзначити, що теорія кодування дійсних чисел, фракталів та ланцюгових дробів надають можливість для теоретичного аналізу локально-складних функцій з автономними властивостями. Такі функції є складовими моделей реальних процесів фізики, економіки, інформатики. Часто такі моделі досліджуються засобами фрактального аналізу та теорії ланцюгових дробів. В якості прикладу можна вказати на результати PhD дисертації П. Утаєкумара "Фрактальний аналіз з використанням перенормування та часових рядів", яка захищена в минулому році в університеті імені Бхарат'яра, штат Таміл-Наду, Індія. В одному із розділів дисертації при дослідженні фракталів для електричних мереж використовуються ланцюгові дробі.

Взявши до уваги все вище вказане, можна зробити висновок, що розглянуті в дисертаційній роботі задачі є важливими і актуальними.

**2. Зміст та наукова новизна результатів.** Дисертація складається із вступу, п'яти розділів з висновками, загальних висновків, додатку, списку використаних джерел, що містить 112 найменувань. Загальний обсяг роботи 149 сторінок друкованого тексту.

У *першому розділі* дано огляд літератури та концептуальні засади дослідження. Тут розглянуто властивості деяких зображень дійсних чисел, що використовуються в роботі, зокрема зображення ланцюговими дробами, ланцюгове  $A_2$ -зображення, зображення дробами Данжуа, зображення знакозмінними дробами Люрота,  $s$ -кова та нега- $s$ -кова система числення. Наведені приклади функцій, які мають складну локальну будову.

*Розділ другий* присвячено натурально значним функціям натурального аргументу і перетворенням відрізка  $[0; 1]$ , які зберігають залишки (хвости) так званих "елементарно ланцюгових зображень чисел", тобто ланцюгових дробів, які зображають дійсні числа відрізка  $[0; 1]$ . Розглянуто оператори лівостороннього і правостороннього зсуву цифр. Встановлені умови неперервності, кусково-неперервності та монотонності функцій. Отримано вигляди функцій, які неперервні строго спадні і здійснюють перетворення відрізка  $[0; 1]$ , що зберігають хвости (залишки) зображень чисел відрізка елементарними ланцюговими дробами і фрактальну розмірність Гаусдорфа-Безиковича борелівських множин.

У *третьому розділі* досліджуються дві функції, які здійснюють перетворення цифр в зо-



ображення чисел з нескінченним алфавітом. Перша функція є аналогом інверсора цифр зображення чисел із скінченним алфавітом. Доведено, що множина значень функції є множиною канторівського типу. Функція ніде не монотонна, множина рівня є або зчисленна, якщо кількість одиниць зображення скінченна, або континуальна, якщо кількість одиниць нескінченна. Друга функція, яка досліджується у розділі, задається перетворювачем елементів елементарного ланцюгового дробу у знакозмінний ряд Люрота. Доведено, що функція неперервна і монотонно зростає на  $(0; 1]$ . Знайдено функціональні рівняння, яким задовольняє функція.

*Четвертий розділ* присвячено дослідженню функцій, які задаються ланцюговими  $A_2$ -дробами, де  $A_2 \equiv \{\frac{1}{2}, 1\}$ . Побудовано неперервні перетворення відрізка  $[0, 5; 1]$ , які зберігають хвости (залишки) ланцюгового  $A$ -зображення. У множині всіх ланцюгових  $A$ -зображень чисел відрізка розглянуто оператор лівостороннього зсуву цифр. Показано, що функція породжена оператором є неперервна, монотонно спадна і опукла вниз. Обґрунтована інваріантна міра оператора лівостороннього зсуву. Досліджено оператор правостороннього зсуву цифр ланцюгового  $A$ -зображення. Доведено неперервність, монотонність та опуклість функції. Обґрунтовано, що множина всіх неперервних перетворень відрізка  $[0, 5; 1]$ , які зберігають залишки (хвости) ланцюгового  $A$ -зображення чисел відносно операції "композиції функцій", утворюють нескінченну не комутативну групу. Визначено інваріантну міру для оператора лівостороннього зсуву. Сконструйовано неперервну ніде не монотонну функцію, яка визначається перетворювачем цифр нега-трійкового зображення чисел у їх ланцюгове  $A$ -зображення. Досліджено деякі властивості скінчених ланцюгових  $A_2$ -дробів. Вивчено властивості дійсних чисел з періодичними ланцюговими  $A_2$ -зображеннями, отримано оцінки наближення.

У *п'ятому* розділі вміщено основи метричної теорії зображення чисел ланцюговими  $A_3$ -дробами,  $A_3 \equiv \{s_0, s_1, s_2\}$ ,  $0 < s_0 < s_1 < s_2$  – множина додатних дійсних чисел. Отримана оцінка знаменників підхідних дробів ланцюгових дробів у випадку, коли  $s_0 = \frac{2}{3}$ ,  $s_2 = 2$ . Дається означення циліндра для ланцюгових  $A_3$ -дробів та обґрунтовуються деякі його властивості. Основними результатами цього розділу є теорема про умови нульової надлишковості представлення чисел ланцюговими  $A_3$ -дробами та теорема про властивості хвостових множин.

**3. Обґрунтованість та достовірність результатів дисертації.** Дисертаційна робота Чуйкова Артема Сергійовича є актуальним завершеним самостійним дослідженням і виконана на високому науковому рівні. Результати роботи строго математично обґрунтовані і їх достовірність не викликає сумнівів. Виклад положень дисертації виконано логічно і послідовно з дотриманням всіх стандартів сучасної наукової літератури. У висновках до кожного розділу вказано про публікації результатів, їх апробацію та особистий внесок здобувача у роботах, що увійшли до дисертації і опубліковані у співавторстві.

**4. Публікації та апробація результатів роботи.** Результати дисертації викладено в 18 роботах, з них 6 статей опубліковано у виданнях, що внесені до переліку наукових фахових видань України, серед них 2 надруковано у виданнях, що включені до міжнародних наукометричних баз (Web of Science, Scopus). Результати дисертації також містяться у матеріалах 12 наукових конференцій.

Автореферат належним чином описує основні положення та зміст дисертаційної роботи.

**5. Практичне значення результатів.** Робота має в основному теоретичний характер. Отримані в дисертаційній роботі результати є певним внеском у теорію функцій дійсної змінної, фрактальний аналіз, фрактальну геометрію. Певний вклад отримані результати вносять і в метричну теорію ланцюгових дробів, зокрема в теорію зображення чисел ланцюговими дробами. В деякій мірі отримані результати після подальшого доопрацювання можуть бути застосовані при дослідженні моделей природознавства, економіки, інформатики, електричних мереж.



**6. Зауваження та побажання.** Дисертаційна робота не позбавлена недоліків, про що свідчать наступні зауваження та побажання.

1. В дисертаційній роботі дається означення ланцюгового дробу за книгою А. Я. Хинчина. Доречно було б скористатися означення П. Генрісі і П. Пфлюгера, де ланцюговий дріб визначається як композиція перетворень Мебіуса. Добре відомо, що сукупність таких відображень утворює групу.
2. Огляд літератури можна б доповнити книгами:
  - (a) Schweiger F. Continues fractions and their generalizations: A short history of  $f$ -expansion. Boston, Docent press, 2016.
  - (б) Karpenkov O. Geometry of continued fractions. Springer, 2013.
3. В лемі 2.3.1 напевно варто було б уточнити, що розуміється під  $x_1^{(1)}$ . Аналогічно в теоремі 2.3.1 хотілося б уточнення  $x_{m_1}^{(1)}, x_{m_1}^{(n_1)}, \dots, x_{m_s}^{(n_s)}, x_1^{(n_s)}$
4. Не дуже вдалим вийшов підпис під таблицею 1.1 на сторінці 45. Краще його було вмістити над таблицею.
5. Зустрічаються в тексті роботи описки. Наприклад на сторінках 52 та 74. Невдало виглядає формула на сторінці 82.

**7. Висновки.** Наведені вище зауваження, не знижують загальну оцінку дисертаційної роботи Чуйкова А.С., її актуальність, наукову новизну та практичну цінність. Вважаю, що дисертаційна робота Чуйкова Артема Сергійовича "Фрактальний аналіз функцій зі складною локальною будовою, визначених у термінах ланцюгових дробів" задовольняє вимоги пп. 9, 11–13 "Порядку присудження наукових ступенів", затвердженого Постановою Кабінету Міністрів України № 567 від 24 липня 2013 року (зі змінами і доповненнями, внесеними згідно з постановами КМУ № 656 від 19 серпня 2015 р., № 567 від 27 липня 2016 р. та наказом МОН України від 12 січня 2017 р.) щодо кандидатських дисертацій, а її автор, Чуйков Артем Сергійович, заслуговує на присудження йому наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз (111 – математика).

доцент кафедри машинобудування, природничих  
дисциплін та інформаційних технологій  
Мукачівського державного університету,  
доктор фіз.-мат. наук, доцент

М. М. Пагіря

*Ліцензія Пагіря М.М. застосувано!*

*В.О. Моголош*  
*Відділу кадрів* *М.Ф.* *І.В. Колесніченко*



*Ліцензія Пагіря М.М. застосувано!*  
*Ученний секретар* *О.О. Чорнобиль*

