ВІДГУК
офіційного опонента на дисертаційну роботу
Чуйкова Артема Сергійовича
"Фрактальний аналіз функцій зі складною локальною будовою, визначених у термінах ланцюгових дробів",
подану на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук
зі спеціальності 01.01.01 — математичний аналіз

1. Актуальність теми дослідження. Дисертаційна робота присвячена дослідженню функцій зі складною локальною будовою, визначених у термінах ланцюгових дробів.

У дисертаційному дослідженні застосовується науковий інструментарій різних галузей сучасної математики. Однією із них є відносно молодий і швидко прогресуючий фрактальний аналіз, який засобами теорії мір дробових порядків, метричних розмірностей, операторів дробового інтегрування та диференціювання вивчає властивості математичних об'єктів зі складною локальною будовою (геометричних фігур; сингулярних мір і розподілів ймовірностей; перетворень простору, що зберігають фрактальну розмірність; неперервних в жодній точці недиференційовних функцій тощо). Іншою, із більш, ніж двохстолітньою історією, є теорія ланцюгових дробів — один із найбільш інтригуючих розділів класичного аналізу, що тісно пов'язаний із теорією чисел. Значний внесок до теорії ланцюгових дробів було зроблено такими визначними математиками, як Леонард Ойлер, Карл Фрідріх Гаус, Адрієн-Марі Лежандр, Карл Густав Якобі, Бернхард Ріман, Томас Стілтьєс, Пафнутій Чебишов та багато інших.

Фрактальний аналіз сьогодні широко використовуються в різних галузях науки, зокрема, в фізиці, хімії, біології, економіці, медицині. Численні вітчизняні і зарубіжні прикладні дослідження виявили тісні зв'язки деяких критичних показників складних систем з їх фрактальними властивостями. Стало зрозумілим, що враховувати мікроструктури і мікрофлуктуації реальних об'єктів, процесів і явищ в їх математичних моделях допомагають фрактали, недиференційовні функції, сингулярні розподіли ймовірностей, нелінійні динамічні системи з хаотичними (фрактальними) аттракторами тощо. Усі ці об'єкти об'єднує спільна проблема — наявності ефективного інструментарію задання і дослідження. Частково подолати названі труднощі дозволяє широке використання різних систем числення і способів зображення чисел. У цьому напрямку вагомі результати отримані Миколою Працьовитим, Григорієм Торбіним, Олегом Лещинським, Юлією Кулибою, Сергієм Дмитренком, Дмитром Кюрчевим, Ярославом Виннишиним та багатьма іншими.

Дисертаційне дослідження Артема Чуйкова є певним продовженням досліджень локально-складних функцій зі фрактальними властивостями, які проводились у роботах Миколи Працьовитого, Наталії Василенко, Андрія Калашнікова, Ольги Свинчук.

З огляду на викладене вище, вважаю тему дисертаційного дослідження обґрунтованою та актуальною.

2. Зміст роботи і новизна отриманих результатів. Дисертація складається зі вступу, п'яти розділів, висновків, списку використаних джерел та додатку, що містить список публікацій за темою дисертації і відомості про апробацію результатів дисертаційного дослідження.

У *першому розділі* наведено необхідний теоретичний матеріал про системи кодування (зображення) дійних чисел і тісно пов'язані з ними функції зі складною локальною поведінкою (структурою). Викладено історичні відомості наукових здобутків щодо зображень чисел, пов'язаних з досліджуваною тематикою. Наведено приклади функцій зі складною локальною структурою, зокрема, сингулярних, ніде не монотонних і ніде не диференційовних функцій.

Другий розділ дисертаційної роботи присвячений дослідженню функцій, які зберігають хвости зображення чисел у вигляді елементарних ланцюгових дробів. У теоремі 2.1.1 доведено, що функція, задана перетворювачем першого елемента зображення чисел, є неперервною і строго зростаючою на кожному циліндрі першого рангу. У підрозділі 2.2 розглянуто оператори лівостороннього і правостороннього зсувів елементів зображення чисел елементарними ланцюговими дробами. За допомогою цих операторів побудовано функцію, яка є неперервним строго спадним перетворенням відрізка $[0;1]$, що зберігає хвости зображення чисел елементарними ланцюговими дробами і фрактальну розмірність Гаусдорфа – Безиковича борелівських множин (теорема 2.3.1). У підрозділі 2.4 наведено приклади функцій, що зберігають хвости елементарного ланцюгового зображення дійсних чисел.

Третій розділ присвячений функціям, які задані перетворювачами цифр елементарного ланцюгового зображення чисел. У підрозділі 3.1 введено функцію, названу квазіінверсором цифр елементарного зображення чисел. Доведено, що множиною значень цієї функції є множина канторівського типу (теорема 3.1.1) і показано, що ця функція є ніде не монотонна та описано множини її рівнів (теорема 3.1.2). У наступному підрозділі введено функцію, означену проєктуванням цифр елементарного ланцюгового зображення чисел у цифри зображення чисел знакозмінними рядами Люрота. Доведено її неперервність і монотонність на півінтервалі $(0;1]$ (лема 3.2.1) та побудовано три системи функціональних рівнянь, яким задовольняє ця функція (теорема 3.2.1), а для однієї з них показано, що її єдиним розв'язком є ця функція (теорема 3.2.2).

Четвертий розділ дисертаційного дослідження присвячено функціям, заданих за допомогою ланцюгових A_2-дробів $[a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]$, де $a_n \in \{1/2, 1\}$. Тут досліджено оператори лівостороннього і правостороннього зсувів цифр ланцюгового A-зображення, зокрема, знайдено інваріантну міру для оператора лівостороннього зсуву (теорема 4.2.1). У підрозділі 4.5 побудовано неперервні перетворення відрізка $[0,5;1]$, що зберігають хвости ланцюгового A-зображення чисел. Доведено (теорема 4.5.1), що множина цих перетворень відносно операції "композиція функцій" утворює нескінченну некомутативну групу. У наступному підрозділі побудовано неперервну ніде не монотонну функцію, задану перетворювачем цифр нега-трійкового зображення чисел у їхнє ланцюгове A-зображення. Доведено її неперервність і ніде не монотонність (теорема 4.6.1) та необмеженість варіації (теорема 4.6.3), а також досліджено автомодельні властивості графіка цієї функці (теорема 4.6.4). У підрозділі 4.9 в теоремі 4.9.1 отримано оцінки наближень дійсних чисел відрізка $[0,5;1]$ ланцюговими A_2-дробами.

Останній *п'ятий розділ* присвячений зображенню чисел ланцюговими A_3-дробами $[a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]$, де $a_n \in \{s_1, s_2, s_3\}$, s_1, s_2, s_3 — додатні дійсні числа, такі, що $s_1 < s_2 < s_3$. У теоремі 5.3.3 доведено, що за умов $s_0 s_2 = 4/3$ і $s_1 = (s_0 + s_2)/2$ кожна точка відрізку $[\beta_1, \beta_2]$, де $\beta_1 = [(s_2, s_0)]$ і $\beta_2 = [(s_0, s_2)]$, має не більше двох A_3-зображень, при цьому множина точок, що мають два зображення, є зліченною, а отже, система кодування чисел засобами трисимвольного алфавіту, що ґрунтується на розкладах чисел у ці ланцюгові дроби, має нульову надлишковість. Наостанок, у підрозділі 5.4 вивчено деякі властивості хвостових множин (теорема 5.4.1).

3. Обґрунтованість і достовірність отримані результатів. Усі отримані у дисертаційній роботі результати є новими, достовірними і строго обґрунтованими, що забезпечено наявністю чітких, повних і правильних доведень для всіх наведених у цій роботі тверджень.

4. Апробація результатів і публікації. Результати дисертації досить повно висвітлені в шести статтях, опублікованих у фахових виданнях із фізико-математичних наук, дві з них проіндексовано у наукометричних базах даних Scopus та/або Web of Science Core Collection. Результати дисертаційної роботи доповідалися та обговорювалися на численних конференціях і фахових семінарах.

Автореферат повністю відображає зміст дисертації.

5. Практичне значення результатів дисертації. Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Отримані результати можуть мати перспективи подальшого застосування в теорії функцій дійсної змінної, а також можуть бути корисними в дослідженнях з теорії кодування і стиснення інформації.

6. Зауваження. До дисертаційної роботи є такі зауваження:

1. У формулюванні теореми 2.1.2 на с. 58, 2-ий рядок зверху, вжито позначення $\varphi(i)$, а його пояснення дано на наступній сторінці в останньому реченні доведення цієї теореми.

2. На с. 87, 3-ий рядок зверху, неправильне співвідношення.

3. На с. 101, 12-ий рядок зверху, замість $f(x_1) < f(x_2) > f(x_3)$ $(f(x_1) > f(x_2) < f(x_3))$ має бути $f(x_1) < f(x_2)$ і $f(x_2) > f(x_3)$ $(f(x_1) > f(x_2)$ і $f(x_2) < f(x_3))$. Те саме стосується цих нерівностей на с. 102, 9-ий рядок зверху (с. 102, 8-ий рядок знизу).

4. На с. 103, 9-ий рядок зверху, замість $f(x_0) = \Delta^A_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_{n-1}\beta}(1-\beta_n, \beta_n)$ має бути $f(x_0) = \Delta^A_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_{n-1}\beta(1-\beta_n,\beta_n)}$.

5. На с. 115 наведено теорему 4.8.2, проте не зроблено посилання на джерело.

6. На с. 123, 10-ий рядок, наведене твердження без посилання на джерело.

7. На початку підрозділу 5.2 повторюються наведені раніше на с. 36 відомості про підхідні дроби ланцюгового дробу.

Вказані вище зауваження не є суттєвими і не впливають на загальну високу оцінку дисертаційної роботи.

7. Висновки. Вважаю, що дисертаційна робота "Фрактальний аналіз функцій зі складною локальною будовою, визначених у термінах ланцюгових дробів" є завершеною науковою працею, що містить нові, важливі наукові результати, і відповідає вимоги пп. 9, 11–14 “Порядку присудження наукових ступенів” (Постанова Кабінету Міністрів України № 567 від 24 липня 2013 р.), щодо кандидатських дисертацій, а її автор, Чуйков Артем Сергійович, заслуговує на присудження наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук зі спеціальності 01.01.01 — математичний аналіз.

Офіційний опонент
доктор фізико-математичних наук,
доцент, професор кафедри
математичного і функціонального аналізу
ДВНЗ “Прикарпатський національний
університет імені Василя Стефаника” Р. І. Дмитришин

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Державний вищий навчальний заклад
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника
і.к. 02125266

Підпис Р. І. Дмитришина засвідчую
Начальник відділу кадрів
Державного вищого навчального закладу
Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника
код 02125266
«31» 01 2020 р.