

ВІДГУК

офіційного опонента про дисертацію
Скворцова Сергія Олександровича
«Локальна поведінка відображень з необмеженою характеристикою»,
подану до захисту на здобуття наукового ступеня доктор філософії
з галузі знань 11 Математика та статистика
за спеціальністю 111 Математика

1. *Актуальність дослідження і його мета.* Конформні відображення є одним з основних об'єктів комплексного аналізу, оскільки клас таких відображень локально збігається з класом однолистих аналітичних функцій з точністю до симетрії. Проте недоліком теорії конформних відображень є її «двовимірність», клас конформних відображень в \mathbb{R}^n дуже бідний. Цієї вади не мають квазіконформні відображення. Поняття квазіконформного відображення було введено в працях Грьотша, Лаврентьєва і Моррея наприкінці 20-х років минулого століття. Квазіконформні відображення знайшли численні застосування в класичних роботах Л. Альфорса, Л. Волковиського, О. Теймюллера, М. Лавретьєва, Ф. Герінга, Ю. Вайсяли. Зокрема, застосування квазіконформних і квазірегулярних відображень дозволило розв'язати обернену задачу теорії Неванлінни розподілу значень мероморфних функцій. Серед зовсім недавніх застосувань хоча відзначити спростування гіпотези Банка-Лайне про нулі розв'язків диференціального рівняння $f'' + A(z)f = 0$ у комплексній площині О. Єрьоменком і В. Бергвайлером методом «квазіконформної хірургії».

Подальший розвиток теорії призвів до впровадження класу квазірегулярних відображень, які мають багато спільних рис з аналітичними функціями, зокрема не обов'язково ін'єктивні. Теорія цих відображень активно розвивається і в наші дні. Значний вклад в теорії зробили Ю. Решетняк, О. Мартіо, Ю. Вайсяла, С. Рікман. С. Рікман, зокрема, узагальнив теорію Неванлінни на квазірегулярні відображення в багатовимірному просторі. Відображення з обмеженим спотворенням вивчалися також крім згаданих вчених польськими і румунськими математиками Б. Борьяським, Т. Іванцем, А. Казаку, М. Крісті та іншими. У цьому ж напрямку проводили дослідження В. Рязанов та його учні Р. Салімов, Є. Севостьянов та інші в Інституті прикладної математики і механіки НАН України в Донецьку до його окупації.

Введений в працях О. Мартіо, Е. Якубова, В. Рязанова, У. Сребро на початку цього століття клас Q -гомеоморфізмів узагальнює майже усі згадані вище класи відображень. Нехай Γ — сім'я кривих в \mathbb{R}^n , ρ — допустима функція для Γ , D — область в \mathbb{R}^n , а f — неперервне відображення, $Q: D \rightarrow [1, +\infty]$. Нехай $M(\Gamma)$ — модуль сім'ї кривих Γ . Відображення f називається Q -відображенням, якщо

$$M(f(\Gamma)) \leq \int_D Q(x) \rho^n(x) dm(x)$$

для кожної допустимої функції ρ .

Ці відображення активно вивчаються в наш час, і власне є основним об'єктом дослідження в дисертаційній роботі. Властивості функцій з цього класу не так добре вивчені як властивості квазіконформних і квазірегулярних відображень. Зокрема, локальна одностайна неперервність, можливість продовження в ізольовану особливу точку межі

функцій таких класів без додаткових умов на Q окрім природної $Q \in L^1(D)$ раніше не розглядалася. З огляду на зазначене вище, актуальність обраної теми не викликає сумнівів.

2. Наукова новизна результатів дисертаційної роботи. У першому розділі наводяться необхідні означення з теорії відображень і модулів сімей кривих, а також огляд літератури.

У підрозділі 2.1 досліджується одностайна неперервність в кожній точці області сім'ї обернених відображень до Q -гомеоморфізмів. Основним результатом є теорема 2.1.2, яка встановлює одностайну неперервність в кожній точці області сім'ї обернених відображень до кільцевих Q -гомеоморфізмів лише за умов обмеженості області образу і $Q \in L^1$. Приклад 2.4.1 показує, що умова $Q \in L^1$ є істотною.

У підрозділі 2.2 досліджуються відображення, які задовольняють обернену нерівність Полецького. Теорема 2.2.1 встановлює явну оцінку на модуль неперервності для таких відображень.

У монографії [60] встановлено, що на відміну від квазіконформних відображень, ізольовані особливості для Q -гомеоморфізмів не є взагалі кажучи усуненими. З огляду на цей новий ефект для Q -гомеоморфізмів становить інтерес теорема 2.3.1, яка дає достатні умови продовження за неперервністю в ізольовану точку межі відображення, оберненого до кільцевого Q -гомеоморфізму. З іншого боку, як видно з прикладу 2.4.2 висновок теореми 2.3.1 не справджується для прямого відображення.

У розділі 3 встановлено зокрема умови продовжуваності за неперервністю на межу області Q -гомеоморфізмів (підрозділи 3.2–3.4) і обернених до них відображень (підрозділ 3.1). При цьому, зокрема узагальнено деякі результати Є. Севостьянова.

У той час як у розділах 2–3 вивчаються властивості відображень в евклідовому просторі, розділ 4 присвячено дослідженню поведінки відображень між метричними просторами. Результати підрозділу 3.2 узагальнюють на метричні простори результат Є. Севостьянова, отриманий для простору \mathbb{R}^n . Теорема 4.3.2 є певним аналогом теореми Сохоцького-Казоратті.

Усі отримані в дисертаційній роботі результати є новими.

3. Особистий внесок здобувача в отриманні наукових результатів. Дисертаційне дослідження виконано дисертантом самостійно. Основні теоретичні положення та розробки, що характеризують наукову новизну дослідження, теоретичне значення його результатів, одержані дисертантом особисто. Результати досліджень, які наведені у дисертаційній роботі та опубліковані у фахових наукових статтях, належать автору і є його науковим доробком. Порушення академічної доброчесності відсутні.

4. Достовірність та обґрунтованість отриманих результатів та запропонованих автором вирішень, висновків, рекомендацій. Достовірність результатів забезпечується строгими доведеннями теорем, які з достатньою повнотою наведені в дисертації. Основним методом автора є метод модулів і екстремальних довжин, що бере свій початок в працях Л. Альфорса і А. Бюрлінга. Геометричні умови слабкої плоскості, локальної зв'язності межі області та інші є природними для даного кола задач. Автор захищає перелічені вище результати роботи.

5. Повнота викладу результатів роботи в наукових публікаціях, захищених за темою дисертації. Результати дисертаційного дослідження С.О. Скворцова з достатньою повнотою (зокрема, всі основні результати роботи) опубліковані у 12 (з них 1 – одно-

осібно) статтях у фахових виданнях, в яких слід публікувати результати дисертації, зокрема 3 – у закордонних виданнях баз даних SCOPUS і Web Of Science, 1 іншому виданні з бази даних SCOPUS; багатьох тезах конференцій різного рівня.

6. Критичні зауваження.

1. Не всі поняття, використані у дисертації означені, а деякі означення наводяться після використання відповідного поняття. Так компактифікація \mathbb{R}^n означена лише на с.45, а багатократно використовується, починаючи зі с. 20. Хоча зі змісту с. 33 можна здогатися про яку компактифікацію мова. Не означене поняття ємності.

2. У зауваженні 3.3.1 за ε_2 слід взяти хордальну відстань між ∂U і ∂V , а не евклідову.

3. Означення 2.1.4 одностайної неперервності в області відрізняється від класичного означення одностайної неперервності на множині, і є по-суті *локальною* одностайною неперервністю або одностайною неперервністю *всередині* області. Це варто було зазначити в дисертації, щоб уникнути плутанини. Проте поняття, яке розглядається є важливим і активно використовується в теорії функцій.

4. У прикладі 2.4.2 слід писати $x \in \mathbb{B}^n \setminus (\{e_1\} \cup \{0\})$, а не $x \in \mathbb{B}^n \setminus (\{e_1 \cup 0\})$.

5. Термінологія не завжди відповідає стандартам. Замість *пропозиція* слід вживати *твердження*, замість *непересічні криві* — *криві, що не перетинаються*.

6. Абзац перед означенням 1.2.7 повторює частину 2-го абзацу знизу на с.27.

7. У праці багато пропущених тире, наприклад, с. 62⁹, 62₂, 64₅ (двічі), 70₁₀, 71₅.

Наведені зауваження не впливають на високу оцінку дисертації.

7. *Висновки.* З огляду на сказане вище, вважаю, що дисертаційна робота відповідає вимогам «Порядку проведення експерименту з присудження ступеня доктора філософії», затвердженого постановою Кабінету Міністрів України від 6 березня 2019 р. № 167 зі змінами, затвердженими постановою Кабінету Міністрів України від 21 жовтня 2020 р. № 979, а результати дисертаційної роботи відповідають вимогам до наукового рівня її результатів (актуальність, новизна, наукова значущість), є важливим внеском у теорію відображень. Основні результати дисертації, отримані автором дисертації самостійно і опубліковані у 12 (з них 1 – одноосібно) статтях у виданнях, у яких слід публікувати результати дисертації. Його дисертаційна робота є завершеним науковим дослідженням, виконаним на сучасному науковому рівні, результати якого опубліковані та апробовані на наукових семінарах і конференціях, а порушення академічної доброчесності відсутні. Вважаю, що **Скворцов Сергій Олександрович заслуговує** присудження наукового ступеня доктор філософії з галузі знань 11 Математика та статистика за спеціальністю 111 Математика.

Офіційний опонент:

професор, доктор фізико-математичних наук,
професор кафедри теорії функцій і функціонального аналізу
Львівського національного університету ім. І. Франка

Підпис професора І.Е. Чижикова засвідчую:
вчений секретар Львівського національного
університету ім. І. Франка

Надійшов 14.12.2021

