ВІДГУК ОФІЦІЙНОГО ОПОНЕНТА

на дисертаційну роботу Скворцова Сергія Олександровича

«Локальна поведінка відображень з необмеженою характеристикою»,

подану на здобуття наукового ступеня доктора філософії
зі спеціальності 111 Математика
галузі знань 11 Математика та статистика

Актуальність роботи

Відображення зі спеціальною умовою, саме відображення зі скінченним спотворенням, останнім часом активно вивчаються. Вони все більш привертають увагу багатьох відомих математиків. Початком цієї тематики слід вважати роботи М.О. Лаврентьєва, Г. Греч, Ч. Моррі, які у середині минулого століття розробили теорію квазіконформних відображень, що потім були застосовані до класичних проблем про накриваючіріманові поверхні. Згодом поняття квазіконформних відображень було поширено на простори більших розмірностей, а потім узагальнено до квазірегулярних відображень (еквівалентний термін – відображення з обмеженим спотворенням). Ці відображення можна розглядати як просторовий аналог аналітичних функцій, зокрема, вони можуть мати точки розгалуження. Слід відмітити, що такі відображення мають численні застосування в різних розділах математики, в механіці, фізиці. Основні властивості таких відображень вивчалися в роботах Л. Альфорса, К. Андріяи Казаку, Л. Берса, П.П. Белінського, Б.В. Боярського, І.Н. Векуа, С.К. Водоп'янова, К. Вертанена, Л.І. Волковиського, М. Вуорінена, Ю. Вяйсяля, Ф. Герінга, В.М. Гольдштейна, В.Я. Гутлянського, В.А. Зоріча, П. Карамана, С.Л. Крушкаля, М.О. Лаврентьєва, О. Лехто, О. Мартіо, Ч. Моррі, Р.Няккі, І.Н. Песіна, Є.О. Полецького, Ю.Г. Решетняка, С. Ріхмана, Б.В. Шабата та інших.

Одним з головних методів досліджень відображень з обмеженим та скінченним спотворенням є метод модулів та ємностей. Ці методи також використовуються в дисертаційній роботі С. Скворцова.

Відзначимо, що в цій теорії залишилися невивченими деякі питання, зокрема, проблеми, пов'язані з вивченням відображень, які задовольняють обернену модульну нерівність типу Полецького. В цьому контексті не було досліджено такі проблеми, як одностайна неперервність сімей відображень, неперервне продовження в ізольовану особливу точку, продовження на межу області, поведінка відображень у замиканні області. Дуже перспективним здається можливість розповсюдження цих результатів на відображення між довільними метричними просторами. Дослідженню цих задач і присвячена робота С.О. Скворцова.

Опис результатів роботи:

- доведена одностайна неперервність сімей відображень, які є оберненими для Q-гомеоморфізмів та кільцевих Q-гомеоморфізмів за умови інтегровності визначальної функції Q;
- доведена одностайна неперервність сімей відкритих дискретних відображень, що задовольняють обернену нерівність Полецького. Більше того, отримана логарифмічна неперервність за Гельдером вказаних сімей відображень у випадку інтегровної мажоранти Q;
- за умови інтегровності функції Q отримано результат про усувність ізольованої сингулярності відображення, яке є оберненим до кільцевого Q-гомеоморфізма;
- доведена одностайна неперервність сімей кільцевих Q-відображень в замиканні області, за умови, що її образи при відображеннях є змінними, а функція Q має скінченне середнє коливання в кожній точці області;
- за умови інтегровності функції Q встановлені умови, за якими сім'я гомеоморфізмів, обернених до Q-кільцевих, одностайно неперервна в замиканні області в евклідовому сенсі (для «гарних» областей);
- за умови інтегровності функції Q встановлені умови, за якими сім'я гомеоморфізмів, обернених до Q-кільцевих, має неперервне продовження на межу та одностайно неперервна в замиканні області в термінах простих кінців (для «поганих» областей);

Особливо хочу відмітити останній розділ дисертації, де теорія відображень між евклідовими просторами була розвинута до відображень метричних просторів, зокрема:

- доведено, що локально рівномірною границею послідовності відкритих дискретних відображень з оберненою нерівністю Полецького є або стале, або нульвимірне відображення (за умови інтегровності функції Q у визначальній нерівності);
- отримано результати про одностайну неперервність сімей відображень метричних просторів за умови, що один з них задовольняє умову слабкої сферикалізації (по аналогії з розширеним евклідовим простором, у якому роль «сферікалізації» грає хордальна метрика на рімановій сфері);
- отримані теореми про неперервне продовження відображень на межу області метричного простору в термінах простих кінців;
- доведено аналог теореми Сохоцького–Вейерштраса про щільність образу довільного околу істотної особливої точки відкритого дискретного кільцевого Q-відображення.

Усі ці результати є новими. Запозичень мною не знайдено.

Зауваження

- У роботі немає визначення континууму, у той час як я можу навести три істотно різні визначення цього терміну; однак автор чомусь наводить добре відомі визначення відображення, відкритого відображення, замкнутого відображення;
- Визначення 1.4.6. Дещо дивно виглядає визначення одностайної неперервності. Те, що визначає автор, це є одностайна неперервність у кожній точці множини, але не те ж саме, що одностайна неперервність на множині;
- Визначення 1.4.1. помилка – така множина називається лінійно зв'язною;
- є два означення α-регулярності за Альфорсом
  α-регулярність зверху на стор. 34,
  далі на стор.110 використовується просто α-регулярність - це одне і теж?
- мені здається, що потрібно було привести доведення п.3 у Лемі 4.2.1, тому що якраз у цьому пункті пояснюється, як наявність континууму призводить до лінійної зв'язності відповідної множини;
- стор 35, 1 рядок: незрозуміло, про яку оцінку знизу йде мова;
- в лемі 2.1.1 було б зручніше написати «для усіх $p < \infty$», а не «для усіх $p > 0$», тому що тут важливе тільки наявність якогось скінченного p;
- с. 110 що таке $(1, p)$-нерівність Пуанкаре? відповідного означення в дисертації немає,
- мені здається, що в Означенні 1.1.7. замість D' повинно бути $\overline{\mathbb{R}^n}$;
- стор. 23: немає означення класу $C_1^0(U)$ (якщо це класс неперервних функцій з компактним носієм в U, то він позначається як $C_0^0(U)$).

Ці неточності не змінюють моєї високої оцінки дисертації.

Заключна частина і висновки

Я вважаю, що одержаних автором результатів безумовно досить для докторської дисертації. Всі доведення, висновки і рекомендації є обгрунтованими. Більшість результатів має закінчений вигляд. Приклади, наведені автором, доводять природність його результатів.

Автор доповідав свої результати на 7 наукових конференціях, 7 наукових семінарах, результати дисертації представлені в 14 статтях, з яких 10 надруковані в українських фахових виданнях, що входять до бази даних Scopus, 3 у закордонних виданнях, та ще одна є в ArXiv. Результати дисертації повністю викладені в публікаціях, їх достовірність не викликає сумнівів.

Дисертація вносить вагомий вклад в теорію відображень в евклідових та загальних метричних просторах, і буде корисною в багатьох розділах математики. Зокрема, результати дисертації можуть знайти застосування у теорії нелінійних систем рівнянь з частинними похідними та в теорії метричних просторів.

Результати дисертації є цікавими для спеціалістів, що працюють у Львівському, Харківському, Київському, Житомирському університетах, Інституті математики НАН України (м. Київ), Інституті прикладної математики і механіки НАН України (м. Слов'янськ).

Вважаю, що за обсягом та науковим рівнем проведених наукових досліджень, їх актуальністю та значимістю, науковою новизною та завершеністю отриманих результатів, кількістю публікацій дисертаційна робота С. Скворцова повністю задовольняє усі вимоги щодо дисертацій на здобуття наукового ступеня доктора філософії, а її автор заслуговує присудження наукового ступеня доктора філософії зі спеціальності 111 Математика галузі знань 11 Математика та статистика.

Доктор фізико-математичних наук, професор кафедри фундаментальної математики Харківського національного університету імені В.Н.Каразіна

13.12.2021 Сергій ФАВОРОВ

ПІДПИС ЗАСВІДЧУЮ
Начальник відділу
кадрів