Міністерство освіти і науки України
Житомирський державний університет імені Івана Франка
Інститут математики
Національна академія наук України

Кваліфікаційна наукова праця
на правах рукопису

Скворцов Сергій Олександрович

УДК 517.5

Дисертація

ЛОКАЛЬНА ПОВЕДІНКА ВІДОБРАЖЕНЬ З НЕОБМЕЖЕНОЮ ХАРАКТЕРИСТИКОЮ

111 — Математика
11 — Математика та статистика

Подається на здобуття наукового ступеня
доктора філософії

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело С. О. Скворцов

Науковий керівник:
доктор фізико–математичних наук,
старший науковий співробітник
Севостьянов Євген Олександрович

Київ — 2021

АНОТАЦІЯ

Скворцов С.О. Локальна поведінка відображень з необмеженою характеристикою. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 – Математика (11 – Математика та статистика). - Інститут математики НАН України, Київ, 2021.

Дисертаційна робота присвячена розвитку теорії відображень, а саме, дослідженню їх локальної, межової та глобальної поведінки. Серед іншого, розглянуті питання, пов'язані з одностайною неперервністю сімей відображень всередині і на межі області, проблема неперервного продовження на межу, проблема усунення ізольованої межової точки, проблеми збіжності відображень тощо. Відображення, що розглядаються, як правило задовольняють або «пряму», або «обернену» нерівність Полецького. Вивчення таких умов пов'язано з тим, що переважна більшість сучасних класів відображень задовольняє верхні та/або нижні оцінки спотворення модуля сімей кривих. Зокрема, модуль сімей кривих є незмінним при конформних відображеннях, при квазіконформних відображеннях він змінюється в скінченну кількість разів, і може змінюватись як певна вагова функція при відображенні зі скінченним спотворенням, де «вага» дорівнює або так званій внутрішній, або зовнішній дилатації відображення. В загальній теорії відображень іноді розглядають і інші ваги, наприклад, дотичну дилатацію, або дилатацію відносно p-модуля тощо. Усі вони є прикладами функції « Q » з означення кільцевих Q-відображень, які вивчаються в дисертації.

Слід зазначити, що в теорії відображень велика увага приділялась дослідженню конформних перетворень. Згодом з'явились квазіконформні відображення як більш широкий клас (М. Лаврентьєв, Ю. Вяйсяля, Ф. Герінг) та їх узагальнення – відображення з обмеженим спотворенням (Ю.Г. Решетняк). У різний час дослідженням властивостей вказаних відображень займались такі відомі вчені як Л. Альфорс, Б. Бояр-

ський, М. Бракалова, В. Гольдштейн, В. Гутлянський, Т. Іванець, А. Казаку, О. Лехто, М. Крісті, О. Мартіо, В. Міклюков, С. Рікман, Б. Шабат, А. Ухлов та інші. Приблизно з початку 2000-х років до вивчення був запропонований клас Q-гомеоморфізмів. Трохи пізніше був запропонований і «найбільш загальний» клас кільцевих Q-гомеоморфізмів, дослідженням якого в евклідовому просторі, а згодом і у метричних просторах, займались О. Афанасьєва, М. Крісті, О. Мартіо, В. Рязанов, Р. Салімов, Є. Севостьянов, У. Сребро, Е. Якубов та інші.

Серед іншого, в дисертації доведена одностайнна неперервність та логарифмічна неперервність за Гельдером відображень з оберненою нерівністю Полецького, можливість їх неперервного межового продовження та одностайна неперервність в межових точках, теореми збіжності. Для відображень з прямою нерівністю Полецького доведений аналог теореми Сохоцького–Касораті–Вейєрштраса у метричних просторах.

Дисертація має теоретичний характер. Отримані результати мають самостійний науковий інтерес і можуть бути використані як для подальших досліджень в теорії відображень, так і при отриманні теорем існування гомеоморфних розв'язків рівнянь Бельтрамі з виродженням.

Дисертаційна робота складається з анотацій українською та англійською мовами, вступу, чотирьох розділів, розбитих на підрозділи, загальних висновків і списку використаних джерел.

У вступі обґрунтовується актуальність теми дослідження, описані об'єкт та предмет дослідження, наводиться зв'язок роботи з науковими програмами та темами. Також зазначені наукова новизна, тема, задачі дослідження, практичне значення, особистий внесок здобувача та інформація про апробацію результатів.

У першому розділі наведені необхідні відомості, означення, а також огляд відомих результатів за темою дослідження.

У другому розділі розглянуті питання, пов'язані з поведінкою відображень областей евклідового простору. Розділ складається з чотирьох підрозділів. У першому підрозділі доведена одностайна неперервність сімей відображень, обернені до яких є кільцевими Q-гомеоморфізмами за умови, що відповідна функція Q є інтегровною. У другому підрозділі доведена теорема про логарифмічну оцінку зверху для відкритих дискретних відображень з оберненою нерівністю Полецького та відповідний наслідок для гомеоморфізмів (так звана логарифмічна неперервність за Гельдером). Третій підрозділ присвячений проблемі продовження відображень в ізольовану точку межі області у випадку, коли обернене відображення є кільцевим Q-відображенням за умови інтегровності функції Q. Останній підрозділ – приклади.

Третій розділ містить чотири підрозділи. Перший підрозділ містить два важливих твердження: можливість з'єднання чотирьох точок у замиканні області непересічними кривими і твердження про те, що образ фіксованого континуума при кільцевому Q-відображенні не може наблизитися до межі області образу, якщо ця область не має невироджених компонент межі, а діаметр образу цього континуума обмежений знизу. У другому підрозділі розглядаються відображення, обернені до яких є кільцевими Q-гомеоморфізмами. Для цього класу відображень доведене твердження про його одностайну неперервність в замиканні області за умов $Q\in L^1(D)$, $\operatorname{diam} f(A)\geqslant\delta$, або $h(f(A)):=\sup\limits_{x,y\in f(A)}h(x,y)\geqslant\delta$, де A – деякий континуум, а $h(x,y)$ – хордальна (сферична) відстань між точками $x,y\in\overline{\mathbb{R}^n}$. У третьому підрозділі досліджена поведінка кільцевих Q-гомеоморфізмів у замиканні області з умовами $h(f(A))\geqslant\delta$ і $h(\overline{\mathbb{R}^n}\setminus f(D))\geqslant\delta$. Окремо отримане аналогічне твердження для випадку відкритих дискретних замкнених кільцевих Q-відображень за умови існування у кожній області континуума $K_f\subset D_f'$ такого, що $h(K_f)\geqslant\delta$ і $h(f^{-1}(K_f),\partial D)\geqslant\delta>0$. У цьому підрозділі також був розглянутий випадок так званих простих кінців. Нарешті, в останньому підрозділі доведені теореми про локальну і межову поведінку гомеоморфізмів з оберненою нерівністю Полецького в термінах простих кінців (випадок складних меж).

Четвертий розділ містить п'ять підрозділів, перший з яких присвячений дослідженню збіжності відображень, які є оберненими до (p, q)-відображень в кожній точці образу. У другому підрозділі йдеться про про одностайну неперевність сім'ї всіх гомеоморфізмів $g : D' \to D$, обернені до яких є Q-гомеоморфізмами за умов, що D' є областю квазіекстремальної довжини (скорочено – QED-областю). Результат доведений за умови існування не менше двох точок межі образу та за умови інтегровності функції Q з означення класу. Аналогічний результат доведений за умови, що $\operatorname{diam} f(A) \geqslant \delta$ при відображенні $f := g^{-1}(A)$. В третьому підрозділі доведена теорема про неперервне продовження кільцевого Q-відображення відносно (p, q)-модуля в ізольовану точку межі області метричного простору. Як наслідок, для цих відображень і широкого класу метричних просторів отриманий аналог класичної теореми Сохоцького–Касораті–Вейєрштрасса. У четвертому підрозділі доведені теореми про неперервне продовження та одностайну неперервність сімей кільцевих Q-відображень метричних просторів відносно (p, q)-модулів по простих кінцях. П'ятий підрозділ містить твердження про одностайну неперервність сім'ї відкритих дискретних відображень за умови, що вихідний простір допускає слабку сферикалізацію, а межа образу містить не менше двох точок. Також у цьому підрозділі наведені деякі приклади, які ілюструють отримані результати.

Ключові слова: квазіконформні відображення, відображення з обмеженим і скінченним спотворенням, модулі сімей кривих, одностайна неперервність, неперервне продовження на межу.

Skvortsov S.O. Local behavior of mappings with unbounded characteristics.

The thesis for obtaining the scientific degree Doctor of Philosophy in speciality 111 – Mathematics(PhD). (11 – Mathematics and Statistics). – Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2021.

The dissertation is devoted to the development of the mapping theory, namely, the study of local, boundary and global behavior of mappings. Among other things, we have considered issues related to the equicontinuity of families of mappings inside and at the boundary of the domain, the problem of continuous extension to the boundary, the problem of removability of an isolated boundary point, the problem of convergence of mappings, and so on. The mappings under consideration, as a rule, satisfy either the «direct» or the «inverse» Poletsky inequality. The study of such conditions due to the fact that most modern classes of mappings satisfy the upper and/or lower estimates of the distortion of the modulus of the families of paths. In particular, the modulus of families of paths is not distorted under conformal mappings, may be distorted in a finite number of times under quasiconformal mappings, and can change as a certain weight function under mappings with a finite distortion, where the weight is equal to either so-called inner or outher dilatation. In general mapping theory, other weights are sometimes considered, such as tangent dilatation, or dilatation with respect to p-modulus, and so on. They are all examples of the function « Q » from the definition of ring Q-maps, which are studied in the dissertation.

Initially, the study of the theory of mappings was primarily concerned with conformal transformations. Later, quasiconformal mappings began to be studied, which were a wider class of mappings in comparison with conformal mappings (M. Lavrentyev, J. Väisälä, F. Gehring). As a result of the further development of the theory of mappings, quasiconformal mappings with branching, or quasiregular mappings, also appeared (Yu. Reshetnyak). The well-

known scientists such as L. Ahlfors, B. Bojarski, M. Brakalova, V. Gol'dshtein, V. Gutlyanskii, T. Iwaniec, A. Cazacu, O. Lehto, M. Cristea, O. Martio, V. Miklyukov, S. Rickman, B. Shabat, A. Ukhlov and others have been studying the properties of such mappings at various times. Around the beginning of the 2000s, the class Q-homeomorphisms was proposed for study. A little later, the «most general» class of ring Q-homeomorphisms was proposed. O. Afanasieva, M. Cristea, O. Mario, V. Ryazanov, R. Salimov, E. Sevost'yanov, U. Srebro, E. Yakubov studied this class both in Euclidean space and later in metric spaces.

Among other things, in our dissertation we proved the equicontinuity and logarithmic Hölder continuity of mappings with the inverse Poletsky inequality, the possibility of their continuous boundary extension and equicontinuity at boundary points, convergence theorems, as well. For mappings with a direct Poletsky inequality, we proved an analogue of the Sokhotsky-Casorati-Weierstrass theorem in metric spaces.

The dissertation has a theoretical character. The obtained results have an independent scientific interest and can be used both for further research in the theory of mappings and in obtaining theorems for the existence of homeomorphic solutions of Beltrami equations with degeneration.

The dissertation consists of annotations in Ukrainian and English, introduction, four sections, divided into subsections, general conclusions and a list of references.

In the introduction we substantiate the relevance of the research topic, describe the object and subject of research, as well as we provide a link to work with research programs and topics. We also indicate the scientific novelty, topic, research objectives, practical significance, personal contribution of the applicant and information on approbation of results.

In the first section we provide the necessary information, definitions, as well as an overview of the known results on the research topic.

In the second section, we consider issues related to the behavior of mappings of domains of the Euclidean space. The section consists of four subsections. In the first subsection we proved the equicontinuity of the families of mappings inverse to which are ring Q-homeomorphisms provided that the corresponding function Q is integrable. The second subsection proves the theorem on the logarithmic upper estimate for open discrete mappings with inverse Poletsky inequality and the corresponding consequence for homeomorphisms (the so-called logarithmic Hölder continuity). The third subsection is devoted to the problem of continuous extension of mappings to an isolated point of the boundary of the domain in the case when the inverse mapping is a ring Q-mapping and a function Q is integrable. The last subsection is devoted to examples.

The third section contains four subsections. The first subsection contains two important statements such as the possibility of joining four points with disjoint paths in the closure of the domain and the statement that the image of a fixed continuum under a ring Q-mapping can not be close to the boundary of the image domain, if this domain does not have nondegenerate boundary components, and the diameter of the image of this continuum is bounded from below. The second subsection considers mappings inverse to which are ring Q-homeomorphisms. For this class of mappings, we have proved its equicontinuity in the closure of a domain under the conditions $Q\in L^1(D)$, $\mathrm{diam}\,f(A)\geqslant \delta,$ or $h(f(A)):=\sup\limits_{x,y\in f(A)}h(x,y)\geqslant \delta,$ where A is some continuum, and $h(x,y)$ is the chordal (spherical) distance between the points $x,y\in \overline{\mathbb{R}^n}.$ The third subsection investigates the behavior of ring Q-homeomorphisms in the closure of a domain with conditions $h(f(A))\geqslant \delta$ and $h(\overline{\mathbb{R}^n}\setminus f(D))\geqslant \delta$. A similar statement was obtained separately for case of open discrete closed ring Q-maps provided that there exists the continuum $K_f\subset D_f^{\,\prime}$ such that $h(K_f)\geqslant \delta$ and $h(f^{\,-1}(K_f), \partial D)\geqslant \delta>0$ for any $D_f^{\,\prime}.$ In this subsection we also considered the case of the so-called prime ends. Finally, in the last subsection we prove theorems on the local and boundary behavior of homeomorphisms with the inverse Poletsky inequality in terms of prime ends (the case of complex boundaries).

The fourth section contains five subsections, the first of which is devoted to the study of the convergence of mappings that are inverse to (p, q)-mappings at each point of the image. The second subsection deals with the equicontinuity of the family of all homeomorphisms $g : D' \to D$, the inverses of which are Q-homeomorphisms under the conditions that D' is a quasiextremal distance domain (abbreviated – QED-domain). We proved this result provided that there are at least two points of the boundary of the image and the function Q is integrable. A similar result is proved under the condition that diam $f(A) \geqslant \delta$ for $f := g^{-1}(A)$. In the third subsection, the theorem on the continuous extension of a ring Q-map with respect to (p, q)-modulus to an isolated point of the boundary of the metric space is proved. As a consequence, for these mappings an analog of the classical Sokhotsky-Casorati-Weierstrass theorem is obtained for a wide class of metric spaces. The fourth subsection proves the theorems on continuous extension and equicontinuity of families of ring Q -maps of metric spaces with respect to (p, q) -modulus by prime ends. The fifth subsection contains statements about the equicontinuity of the family of open discrete mappings provided that the source space allows a weak sphericalization, and the boundary of the image contains at least two points. In this subsection, are also given some examples that illustrate the obtained results.

Key words: quasiconformal mappings, mappings with bounded and finite distortion, modules of curve families, equicontinuity, continuous boundary extension.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Севостьянов Е.А., Скворцов С.А. О сходимости отображений в метрических пространствах с прямыми и обратными модульными условиями. *Укр. мат. журн.* 2018. Т. 70, № 7. С. 952-967; translation On the Convergence of Mappings in Metric Spaces with Direct and Inverse Modulus Conditions. *Ukr. Math. J.* 2018. V. 70, No. 7. P. 1097-1114.

2. Sevost'yanov E.A., Skvortsov S.A., Ilkevych N.S. On boundary behavior of mappings with two normalized conditions. *Mat. Studii.* 2018. Vol. 49, No. 2. P. 150-157.

3. Севостьянов Е.А., Скворцов С.А. О локальном поведении одного класса обратных отображений. *Труды ИПММ НАН Украины.* 2018. Т. 32. С. 115-120.

4. Севостьянов Е.А., Скворцов С.А. О локальном поведении одного класса обратных отображений. *Укр. мат. вестник.* 2018. Т. 15, № 3. С. 399-417; translation On the local behavior of a class of inverse mappings. *J. Math. Sci.* 2019. V. 241, No. 1. P. 77-89.

5. Севостьянов Е.А., Скворцов С.А. О равностепенной непрерывности семейств отображений в случае переменных областей. *Укр. мат. журн.* 2019. Т. 71, № 7. С. 938-951; translation On the equicontinuity of families of mappings in the case of variable domains. *Ukrainian Mathematical Journal.* 2019. V. 71, No. 7. P. 1071-1086.

6. Севостьянов Е.А., Скворцов С.А. О локальном поведении отображений метрических пространств. *Укр. мат. вестник.* 2019. Т. 16, № 2. С. 215–227; transl. Sevost'yanov E.A., Skvortsov S.A. On the local behavior of mappings of metric spaces. *J. Math. Sci.* 2020. Vol. 244, No. 1. P. 47–55.

7. Севостьянов Є.О., Скворцов С.О., Ількевич Н.С. Про поведінку обернених гомеоморфізмів в термінах простих кінців. *Праці ІПММ НАН України.* 2019. Т. 31. С. 188–203.

8. Sevost'yanov E.A., Skvortsov S.A., Ilkevych N.S. On removable sin-

gularities of mappings in uniform spaces. *Mat. Studii.* 2019. Vol. 52, No. 1. P. 24-31.

9. Sevost'yanov E.A., Skvortsov S.A. On mappings whose inverse satisfy the Poletsky inequality. *Ann. Acad. Scie. Fenn. Math.* 2020. Vol. 45. P. 259-277.

10. Скворцов С.О. Локальна поведінка відображень метричних просторів з розгалуженням. *Укр. мат. вісн.* 2020. Т. 17, № 4, С. 574-593; translation Local behavior of mappings of metric spaces with branching. *Journal of Mathematical Sciences.* 2021. Vol. 254, P. 425-438.

11. Севостьянов Є.О., Скворцов С.О., Довгоп'ятий О.П. Про негомеоморфні відображення з оберненою нерівністю Полецького. *Укр. мат, вісн.* 2020. Т. 17, № 3, С. 414-436; translation On nonhomeomorphic mappings with the inverse Poletsky inequality. *Journal of Mathematical Sciences.* 2021. V. 252, No. 4, P. 541-557.

12. Ilkevych N.S, Sevost'yanov E.A., Skvortsov S.A. On the global behavior of inverse mappings in terms of prime ends. *Annales Fennici Mathematici.* 2021. V. 46, No. 1, P. 371–388.

13. Sevost'yanov E.O., Skvortsov S.O. Logarithmic Hölder continuous mappings and Beltrami equation. *Anal.Math.Phys.* 2021. V. 11, No. 138. https://doi.org/10.1007/s13324-021-00573-6

14. Севостьянов Є.О., Скворцов С.О. Одностайна неперервність обернених відображень в евклідовому просторі. *Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу*: зб. тез доп. всеукр. наук. конф. с.м.т. Ворохта, 27 лютого - 2 березня 2018 р. Івано-Франківськ, 2018. С. 83-84.

15. Севостьянов Є.О., Скворцов С.О. Одностайна неперервність відображень у замиканні області у випадку, коли образи цієї області є змінними. *Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу*: зб. тез доп. всеукр. наук. конф. с.м.т. Ворохта, 27 лютого - 2 березня 2018 р. Івано-Франківськ, 2018. С. 84-85.

16. Sevost'yanov E.A., Skvortsov S.A. On boundary behavior of mappings with two normalized conditions. *Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу*: зб. тез доп. всеукр. наук. конф. с.м.т. Ворохта, 25 лютого-1 березня 2019 р. Івано-Франківськ, 2019. С. 54-55.

17. Sevost'yanov E.A., Skvortsov S.A. On equicontinuity of families of mappings in a case of variable domains. *Функціональні методи в теорії наближень, диференціальних рівняннях та обчислювальній математиці IV, присвяченій 100-річчю з Дня народження В.К. Дзядика*: зб. тез доп. міжн. наук. конф. с. Світязь, 20-26 червня 2019 р., Волинь, 2019. С. 29-30.

18. Sevost'yanov E.A., Skvortsov S.A. On boundary behavior of mappings with two normalized conditions. *Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу*: зб. тез доп. всеукр. наук. конф. с.м.т. Ворохта, 26 лютого-1 березня 2020 р. Івано-Франківськ, 2020. С. 75-76.

19. Sevost'yanov E.A., Skvortsov S.A., Ilkevych N.S. On removable singularities of mappings in uniform spaces. *Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу*: зб. тез доп. всеукр. наук. конф. с.м.т. Ворохта, 26 лютого-1 березня 2020 р. Івано-Франківськ, 2020. С. 77.

20. Sevost'yanov E.O., Skvortsov S.O., Ilkevych N.S. On equicontinuity of inverse mappings on the boundary in terms of prime ends. *Сучасні проблеми диференціальних рівнянь та їх застосування*: зб. тез доп. міжн. наук. конф. Чернівці, 16-19 вересня 2020 р. Чернівці, 2020. С. 68-69.

21. Sevost'yanov E.O., Skvortsov S.O. On local and boundary behavior of mappings with inverse Poletsky inequality. *Науковий пошук у сфері обробки та аналізу статистичних даних*: зб. тез доп. міжн. наук.-практ. конф. Житомир, 15 грудня 2020 р. Житомир, 2020. С. 3-6.

22. Sevost'yanov E.A., Skvortsov S.A. Logarithmic Hölder continuous mappings and Beltrami equation. *Комплексний та функціональний аналіз*: зб. тез доп. міжн. наук. конф. ім. Б. Вінницького, м. Дрогобич, 13-16 вересня 2021 р. Львів, 2021 С. 40.

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми. Головним об'єктом дослідження є відображення зі спеціальними умовами модульно-ємнісного характеру, так звані відображення зі скінченним спотворенням, що активно вивчаються останнім часом в роботах багатьох відомих математиків, див. напр., [6], [16], [43], [44], [52], [53], [59], [60] та інших. Ця тематика бере свій початок у роботах академіка М.О. Лаврентьєва (дослідження квазіконформних відображень), роботах О. Мартіо, Е. Якубова, В. Рязанова та У. Сребро ($Q-$ гомеоморфізми, а пізніше $Q-$ відображення), роботах В.Гутлянського, Ф. Герінга, Є. Полецького, Ю. Вяйсяля, Ю. Решетняка, М. Вуорінена і В. Зоріча та інших. Слід зауважити, що клас відображень з розгалуженням є більш широким, відносно попередників, що дозволяє подивитись а вже відомі та досліджені класи відображень дещо з іншого боку. Метод модулів та ємностей, використаний в роботі – один із головних способів дослідження відображень з обмеженим та скінченним спотворенням. Для більшості класів просторових відображень добре відомі оцінки спотворення модуля сімей кривих. Довільне відображення з обмеженим спотворенням можна визначити як відкрите, дискретне відображення, що спотворює модуль сімей кривих не більше ніж у скінченну кількість разів, див. [56].

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертація виконана в Житомирському державному університеті імені Івана Франка в рамках наукової теми "Геометричні і топологічні проблеми сучасної теорії відображень № реєстрації: 0118U000098.

Об'єктом дослідження є відображення зі скінченним спотворенням.

Предметом дослідження є локальна і глобальна поведінка сімей відображень в евклідовому просторі та метричних просторах.

Мета і задачі дослідження. Дисертація присвячена розвитку теорії просторових відображень, а саме дослідженню властивостей відображень, що задовольняють нерівності спеціального виду. Мета дослідження включає в себе доведення аналогів відомих теорем про одностайну неперервність сімей відображень з модульними умовами та їх продовження в точки межі для випадків евклідового простору та метричних просторів. Однією із основних задач дисертаційної роботи було визначення межових і топологічних властивостей відображень, які задовольняють модульні нерівності спеціального виду.

Наукова новизна. Наукову новизну являють собою наступні результати дисертації:

1. У випадку відображень евклідовго простору доведені теореми про одностайну неперевність всередині області 2.1.1, 2.1.2, 2.2.1; неперервне продовження в ізольовану точку межі: 2.3.1; поведінку відображень в замиканні області: 3.2.1, 3.2.2, 3.3.1, 3.3.2; поведінку відображень в термінах простих кінців: 3.3.3, 3.3.4, 3.4.1, 3.4.2.

2. У випадку метричних просторів були доведені теореми про нульвимірність 4.1.1; одностайну неперервність всередині області 4.2.1, 4.2.3, 4.5.1; одностайну неперервність в замиканні області 4.2.2, 4.2.4; істотну особливість 4.3.2 та продовження в ізольовану точку межі 4.3.1; поведінку відображень в термінах простих кінців 4.4.1, 4.4.2.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота має теоретичний характер. Одержані результати і розроблені в ній методи можуть бути застосовані до вивчення різних класів відображень, наприклад класів Соболєва та їх підкласів. Результати, викладені в дисертаційній роботі є гарним доповненням теорії відображень, що розширює погляд на відносно нові та дозволяє подивитись на вже відомі та досліджені класи відображень під новим кутом.

Особистий внесок здобувача. Дисертація є самостійним дослідженням. Усі результати які виносяться до захисту, отримані здобувачем самостійно. В дисертації використані матеріали досліджень, проведених здобувачем [34], а також спільно з Є.О. Севостьяновим [28], [29], [30], [31], [32], [73], [75], О. Довгоп'ятим [27], Н. Ількевич [33], [76], [77], [78].

Апробація результатів. Результати роботи апробовані на конференціях:

- всеукраїнській конференції "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта, 2018);
- всеукраїнській конференції "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта, 2019);
- міжнародній науковій конференції "Функціональні методи в теорії наближень, диференціальних рівняннях та обчислювальній математиці IV" (Світязь, 2019);
- всеукраїнській конференції "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта, 2020);
- міжнародній науковій конференції "Сучасні проблеми диференціальних рівнянь та їх застосування" (Чернівці, 2020);
- міжнародній науково-практичній конференції "Науковий пошук у сфері обробки та аналізу статистичних даних" (Житомир, 2020);
- міжнародній наукова конференція "Комплексний та функціональний аналіз" (Дрогобич, 2021);

і на семінарах:

- загальноінститутський семінар Інституту прикладної математики і механіки НАН України;
- семінарі кафедри математичного аналізу Житомирського державного університету імені Івана Франка (керівник: доктор фіз.-мат. наук, с.н.с. Севостьянов Є.О.);
- семінарі відділу теорії функцій Інституту прикладної математики і механіки НАН України (керівник: доктор фіз.-мат. наук Рязанов В.І.);

– семінарі відділу комплексного аналізу і теорії потенціалу Інституту математики НАН України (керівник: доктор фіз.-мат. наук, професор Плакса С.А.);
– міському семінарі з теорії функцій Харківського національного університету (керівник доктор фіз.-мат. наук, професор Фаворов С.Ю.);

– семінарі кафедри математичного аналізу і теорії функцій ДНУ ім. О. Гончара (керівник: доктор фіз.-мат. наук, член-кор. НАН України, професор Моторний В.П.);
– Львівському міському семінарі з теорії аналітичних функцій (керівники проф. Заболоцький М.В., проф. Скасків О.Б., проф. Філевич П.В., проф. Чижиков І.Е.).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковані в 13 роботах [27–34, 73, 75–78] (1 - без співавторів), серед яких 10 статей [27, 29–32, 34, 73, 75–77] прореферовані наукометричною базою Scopus.

Подяки. Висловлюю щиру подяку науковому керівнику Севостьянову Є.О. за постановку задач, корисні поради і постійну увагу до моєї роботи.

РОЗДІЛ 1

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

У цьому розділі ми згадаємо про попередні дослідження, пов'язані безпосередньо з темою дисертації. Також тут будуть наведені відомості стосовно розвитку геометричного підходу дослідження просторових відображень, що базується на понятті модуля сімей кривих. Особлива увага приділяється розвитку класів, що розглядаються, починаючи з квазіконформних відображень і дотепер. Нижче наводяться означення і позначення необхідні нам далі у тексті.

1.1 Деякі відомості з теорії відображень. Поняття модуля сімей кривих

Розпочнемо з означень, що будуть використовуватися далі в тексті дисертації.

Простір $\mathbb{R}^n$ визначимо наступним чином

$$\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots, n.$$

Означення 1.1.1. *Множину A в $\mathbb{R}^n$ будемо називати* **лінійно зв'язною***, якщо будь-які дві точки $x_1, x_2 \in A$ можна з'єднати кривою, що лежить в A (див. розд. 13.2 в [60]).*

Означення 1.1.2. Областю D *в* $\mathbb{R}^n$ *називається відкрита лінійно зв'язна множина в $\mathbb{R}^n$, іншими словами, D – область в $\mathbb{R}^n$ тоді і тільки тоді, коли D відкрита і, крім того, будь-які дві точки $x_1, x_2 \in D$ можна з'єднати кривою γ, що цілком лежить в D.*

Введемо наступні позначення: нехай D – область в $\mathbb{R}^n, n \geq 2$;

$$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < r\};$$

$$S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = r\};$$

$$A(r_1, r_2, x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : r_1 < |x - x_0| < r_2\};$$

Евклідову відстань між множинами A та B будемо позначати $dist(A, B), A, B \in \mathbb{R}^n$, а символом $d(A)$ – евклідовий діаметр множини $A \in \mathbb{R}^n$. Також околом множини A будемо називати довільну множину B таку, що $A \subset \mathrm{Int}\ B$, де $\mathrm{Int}\, B$ позначає множину всіх внутрішніх точок множини B.

Означення 1.1.3. Відображенням $f : D \to \mathbb{R}^n$, *називається перетворення, яке кожному елементу* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$ *ставить у відповідність деякий елемент* $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$ *(єдиним чином). Надалі, ми будемо розглядати лише неперервні відображення.*

Наступні означення можна знайти, напр., в [82, розд. 3]).

Означення 1.1.4. *Відображення* $f : D \to \mathbb{R}^n$ *(відповідно* $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$*) називається* **відкритим**, *якщо образ будь-якої відкритої множини* $U \subset D$ *є відкритою множиною в* $\mathbb{R}^n$ *(відповідно в* $\overline{\mathbb{R}^n}$*)*

Означення 1.1.5. *Відображення* $f : D \to \mathbb{R}^n$ *(відповідно* $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$*) називається* **дискретним**, *якщо прообраз* $\{f^{-1}(y)\}$ *кожної точки* $y \in \mathbb{R}^n$ *(відповідно кожної точки* $y \in \overline{\mathbb{R}^n}$*) складається з ізольованих точок.*

Означення 1.1.6. *Відображення* f *області* D *на* D' *називається* **замкненим**, *якщо* $f(E)$ *є замкненою в* D' *для будь-якої замкненої множини* $E \subset D$.

Означення 1.1.7. *Відображення* $f : D \to \mathbb{R}^n$ *(відповідно* $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ *) називається* **замкненим**, *якщо* $f(E)$ *є замкненою в* D' *для будь-якої замкненої множини* $E \subset D$ *.*

Означення 1.1.8. *Відображення* $f : D \to \mathbb{R}^n$ *(відповідно* $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ *) називається* **нульвимірним**, *якщо кожна компонента зв'язності* $f^{-1}(y)$ *вироджується в точку для будь-якого* $y \in \mathbb{R}^n$ *(відповідно будь-якого* $y \in \overline{\mathbb{R}^n}$ *).*

З означення випливає, що з дискретності слідує нульвимірність відображення, однак навпаки, взагалі кажучи, невірно.

Означення 1.1.9. *Відображення* $f : D \to \mathbb{R}^n$ *називається* **гомеоморфізмом**, *якщо* f *неперервне і має обернене відображення* $f^{-1} : D \to \mathbb{R}^n$, *яке є також неперервним.*

Далі, наведемо деякі означення, стосовно сімей кривих, та модуля сімей кривих в $\mathbb{R}^n$.

Означення 1.1.10. Кривою γ *в* $\mathbb{R}^n$ *називається неперервне відображення* $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$, *де* $I = [a, b], (a, b), [a, b)$ *або* $(a, b]$.

Означення 1.1.11. Довжина кривої $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *визначається рівністю*

$$l(\gamma) := \sup \sum_{i=1}^{n} |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| \, ,$$

де $\sup$ *береться по всіх можливих розбиттях* $a = t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_n := b$.

Означення 1.1.12. *Якщо* $l(\gamma) < \infty$, *то крива називається* **спрямлюваною** *і, отже, коректно визначена функція довжини* $s_\gamma(t)$, *що позначає довжину кривої* $\gamma|_{[a,t]}$, $t \in [a, b]$.

У цьому випадку має місце зображення

$$\gamma(t) = \gamma^0 \circ s_\gamma(t),$$

де γ^0 *називається* **нормальним представленням** *кривої* γ, *див. [50, розділ 7].*

Інтегралом від борелевої функції $\rho : X \to [0,\infty]$ *по спрямлюваній кривій* γ *називається величина*

$$\int\limits_{\gamma} \rho(x)\,|dx| = \int\limits_{0}^{l(\gamma)} \rho(\gamma^0(t))\,dt\,.$$

Означення 1.1.13. Носієм (образом) *кривої* α *в* $\mathbb{R}^n$ *будемо називати множину* $|\alpha| = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists\, t \in [a,b] : \alpha(t) = x\}$.

Будемо говорити, що криві γ_1 і γ_2 не перетинаються, якщо не перетинаються їхні образи, як множини в $\mathbb{R}^n$.

Означення 1.1.14. *Крива* $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ *називається* **Жордановою дугою,** *якщо* γ *гомеоморфізм множини* I *на* $|\gamma|$.

Означення 1.1.15. Сім'єю кривих Γ *називається довільна множина кривих* γ.

Означення 1.1.16. *Борелева функція* $\rho : \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ *називається* **допустимою** *для сім'ї* Γ *кривих* γ *в* X, *якщо* $\int\limits_{\gamma} \rho(x)|dx| \geqslant 1$ *для всіх (локально спрямлюваних) кривих* $\gamma \in \Gamma$. *Якщо* ρ *допустима для* Γ, *то ми пишемо* $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma$.

Означення 1.1.17. Модулем *сім'ї кривих* Γ *порядку* $p \geqslant 1$ *називається величина*

$$M_p(\Gamma) = \inf_{\rho \in \operatorname{adm}\Gamma} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho^p(x)\,dm(x)\,. \tag{1.1}$$

Якщо $\operatorname{adm}\Gamma = \varnothing$, покладемо: $M_p(\Gamma) = \infty$. Для випадку, коли в означенні $p = n$, пишемо M.

Означення 1.1.18. *Сім'я кривих* Γ_1 *в* X *називається мінорованою сім'єю кривих* Γ_2 *в* X, *пишемо* $\Gamma_1 > \Gamma_2$, *якщо, для кожної кривої*

$\gamma_1 \in \Gamma_1$, *існує крива* $\gamma_2 \in \Gamma_1$ *така, що* γ_2 *є підкривою* γ_1. *Як відомо, див., наприклад [45, теорема 1(c)],*

$$\Gamma_1 > \Gamma_2 \quad \Rightarrow \quad M_p(\Gamma_1) \ \leq \ M_p(\Gamma_2) \ . \tag{1.2}$$

Для множин $A, B \subset \mathbb{R}^n$ покладемо, як зазвичай,

$$\operatorname{diam} A = \sup_{x,y \in A} |x-y| \,, \quad \operatorname{dist}(A,B) = \inf_{x \in A, y \in B} |x-y| \,.$$

Для заданих множин E і F, що лежать в області D в $\mathbb{R}^n$, позначимо через $\Gamma(E,F,D)$ сім'ю всіх кривих $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ таких, що $\gamma(a) \in E$, $\gamma(b) \in F$ і $\gamma(t) \in D$ при всіх $t \in (a,b)$.

Означення 1.1.19. *Нехай* U *— відкрита множина,* $U \subset \mathbb{R}^n$, $u \colon U \to \mathbb{R}$ *— деяка функція,* $u \in L^1_{loc}(U)$. *Тут і далі* $dm(x)$ *позначає елемент об'єму в* $\mathbb{R}^n$, *що відповідає мірі Лебега* m. *Припустимо, що знайдеться функція* $v \in L^1_{loc}(U)$, *така що* $\int\limits_U \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) u(x) dm(x) = -\int\limits_U \varphi(x) v(x) dm(x)$ *для будь-якої функції* $\varphi \in C^0_1(U)$. *Тоді будемо говорити, що функція* v *є* **узагальненою похідною першого порядку функції** u **по змінній** x_i, *і позначати символом:* $\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) := v$.

Функція $u \in W^{1,1}_{loc}(U)$, *якщо* u *має узагальнені похідні першого порядку по кожній із змінних в* U.

Означення 1.1.20. *Нехай* G *— відкрита множина в* $\mathbb{R}^n$. *Відображення* $f \colon G \to \mathbb{R}^n$ *належить* **класу Соболєва** $W^{1,1}_{loc}(G)$, *пишуть* $f \in W^{1,1}_{loc}(G)$, *якщо всі координатні функції* $f = (f_1, \ldots, f_n)$ *мають узагальнені частинні похідні першого порядку, які локально інтегровні в* G *в першому степені. Якщо додатково* $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \in L^p_{loc}(G)$, $p \geqslant 1$, $i,j = 1,2,\ldots,n$, *то кажуть, що* $f \in W^{1,p}_{loc}(G)$.

Зауваження 1.1.1. Зауважимо, що частинні похідні $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x), 1 \leq i,j \leq n$ можуть розумітися двояко: з одного боку як звичайні похідні відповідної кооринатної функції f_i по змінній x_j, а з іншого боку, як узагальнена похідна по Соболєву, якщо $f \in W^{1,1}_{loc}(U)$. Тому, слід зазначити, що обидва варіанти збігаються майже скрізь, див. [12, гл. I, §1.1.3, теорема 1].

1.2 Означення і властивості

У цьому підрозділі ми наведемо деякі факти відомі нам з теорії відображень, що дозволять нам більш глибоко зрозуміти природу тих класів відображень, що розглядається в дисертації.

Означення 1.2.1. *Відображення* $f : D \to \mathbb{R}^n$ *називається* **відображенням з обмеженим спотворенням**, *якщо виконуються наступні умови: 1)* $f \in W^{1,1}_{loc}$ *, 2) якобіан* $J(x,f)$ *відображення* f *в точці* $x \in D$ *зберігає знак майже скрізь, 3)* $||f'(x)||^n \le K \cdot |J(x,f)|$ *при майже всіх* $x \in D$ *і деякій сталій* $K < \infty$*, де* $||f'(x)|| := \sup\limits_{h\in\mathbb{R}^n:|h|=1} |f'(x)h|$ *[14, гл. I, §3] [65, гл. I, означення 2.1].*

Якщо відображення з обмеженим спотворенням допускає нескінченність, то воно називається *квазімероморфним* [57]. При цьому, властивості 1-3 в околі точки $f(x) = \infty$ можна отримати інверсією: $\phi(x) = \frac{x}{|x|^2}$ [57]. Відкритість та дискретність та неперервність відображень з обмеженим спотворенням доведені Ю.Решетняком в [14, гл. II, теореми 6.3 і 6.4] та [15, теорема 1] відповідно. Питання, пов'язані з відображеннями з обмеженим спотворенням досліджувались у роботах [13–15, 47–49, 56–58, 65, 80, 81] та інших.

Розглянемо наступне

Означення 1.2.2. *Відображення* $f : D \to \mathbb{R}^n$ *називається* **квазіконформним**, *якщо* f *є відображенням з обмеженим спотворенням і, крім того, є гомеоморфізмом [14, гл. I, §3]. Слідуючи [79, гл. I, означення 5.5] гомеоморфізм* $f \in C^1(D)$ *називається* **конформним відображенням**, *якщо* $||f'(x)||^n = |J(x,f)|$ *для всіх* $x \in D$*.*

Альтернативним поглядом на поняття квазіконформного відображення є наступне означення, що базується на властивості спотворення модуля сімей кривих і є досить важливим для нас, оскільки на ньому базується більшість подальших результатів.

Перш за все, слід зауважити, що якщо Γ – сім'я кривих в $\mathbb{R}^n$, а f – неперервне відображення, тоді $f(\Gamma)$ також сім'я кривих в $\mathbb{R}^n$. Кажуть, що крива лежить в області, якщо її носій (образ) належить області як підмножина.

Означення 1.2.3. *Нехай $K' < \infty$ – деяка фіксована стала. Відповідно до [79, гл. II, означення 13.1] відображення $f : D \to \overline{\mathbb{R}}^n$ в області $D \subset \mathbb{R}^n, n \geq 2$ є K'–***квазіконформним відображенням***, якщо умова*

$$\frac{1}{K'} \cdot M(\Gamma) \leq M(f(\Gamma)) \leq K' \cdot M(\Gamma) \tag{1.3}$$

для довільної сім'ї кривих Γ в області D.

Кажуть, що гомеоморфізм $f : D \to \overline{\mathbb{R}}^n$ є квазіконформним, якщо він є K'–квазіконформним для деякого $K' < \infty$.

Інакше кажучи, нерівності (1.3) означають, що модуль сім'ї Γ спотворюється не більше ніж у K' разів при відображенні f.

Зауваження 1.2.1. Зауважимо, що для квазіконформності f досить виконання лише правої частини співвідношення (1.3). Тобто, гомеоморфізм f для якого виконується нерівність

$$M(f(\Gamma)) \leq K'' \cdot M(\Gamma) \tag{1.4}$$

для деякого $1 \leq K'' < \infty$ і довільної сім'ї кривих Γ в області D. [79, гл. IV, теорема 34.3].

Умову (1.4) називають нерівністю Полецького, який довів, що будь-яке відображення з обмеженим спотворенням задовольняє (1.4) при деякому K'' [13, §4, теорема 1]. Також слід сказати, що сталі в (1.4) та (1.3) та стала з пункту 3) означення 1.2.1 взагалі кажучи співпадати не мають.

Тепер припустимо, що в означенні класу, співвідношення (1.4) замінимо на

$$M(f(\Gamma)) \leqslant \int\limits_{D} Q(x) \cdot \rho^n(x)\, dm(x) \quad \forall\, \rho \in \operatorname{adm} \Gamma \tag{1.5}$$

$\forall\, \rho \in adm\,\Gamma$, де $Q : D \to [1, \infty]$ – деяка (задана) фіксована функція (див., напр., [61, гл. 4]).

Означення 1.2.4. *Відображення $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ називається Q-відображенням, якщо f задовольняє умову (1.5) для довільної сім'ї кривих Γ в області D і кожної функції $\rho \in adm\,\Gamma$. Також, якщо відображення f є гомеоморфізмом, то таке відображення називається Q-гомеоморфізмом.*

Нерівність (1.5) при $n = 2$ була досліджена Л. Альфорсом та О. Лехто спільно з К. Вертаненом([1, гл. I, §D, теорема 3] та [55, гл. V, §6.3, нерівність (6.6)]). Також, нерівність (1.5) була доведена В. Гутлянським, спільно з О. Мартіо, М. Вуоріненом та К. Бішопом для просторових квазіконформних відображень за певного Q (див. [40]). Слід зауважити, що із співвідношення (1.5) випливає (1.4), коли Q обмежена. Отже, будь-яке відображення з обмеженим спотворенням є Q-відображенням при деякому $Q \equiv K''$. І навпаки, відображення f буде квазіконформним, якщо в нерівності (1.5) функція Q-обмежена, а f є гомеоморфізмом. Також варто зазначити, що якщо відображення f є відкритим і дискретним, то воно є відображенням з обмеженим спотворенням, якщо для нього виконується умова (1.5). Нерівності типу (1.5) встановлені для багатьох відомих класів відображень, див. [6], [43], [53], [59]– [61], [67], [68], [66]. Вцілому, виконання нерівності (1.5) означає, що при відображенні f спотворення сім'ї кривих відбувається певним чином, контрольованим функцією Q, однак цю умову тяжко перевірити. Надалі, будемо розглядати сім'ї кривих, що з'єднують концентричні сфери з центром в деякій фіксованій точці області. Скрізь далі, якщо не сказане протилежне, межа і замикання множини розуміються в сенсі розширеного евклідового простору $\overline{\mathbb{R}^n}$. Нехай $x_0 \in \overline{D}$, $x_0 \neq \infty$,

$$S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = r\}\,, S_i = S(x_0, r_i)\,, \quad i = 1, 2\,,$$

$$A = A(x_0, r_1, r_2) = \{x \in \mathbb{R}^n : r_1 < |x - x_0| < r_2\}\,.$$

Означення 1.2.5. *Нехай* $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *вимірна за Лебегом функція, що задовольняє умову* $Q(x) \equiv 0$ *для* $x \in \mathbb{R}^n \setminus D$. *Відображення* $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ *називається* **кільцевим Q-відображенням у точці** $x_0 \in \overline{D} \setminus \{\infty\}$, *якщо умова*

$$M(f(\Gamma(S_1, S_2, D))) \leqslant \int\limits_{A\cap D} Q(x) \cdot \eta^n(|x - x_0|)\, dm(x) \qquad (1.6)$$

виконується для всіх $0 < r_1 < r_2 < d_0 := \sup\limits_{x\in D} |x - x_0|$ *і всіх вимірних за Лебегом функцій* $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$ *таких, що*

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r) dr \geqslant 1\,. \qquad (1.7)$$

Відображення f *називається* **кільцевим Q-відображенням в** D, *якщо умова (1.6) виконується в кожній точці* $x_0 \in D$, *і* **кільцевим Q-відображенням в** $\overline{D}$, *якщо умова (1.6) виконується в кожній точці* $x_0 \in \overline{D}$.

В означенні «кільцеве» вказує на зовнішній вигляд сім'ї кривих $\Gamma(S_1, S_2, D)$ в лівій частині умови (1.6), а Q-відображення – вказує на дійснозначну функцію в правій частині нерівності (1.6). Властивості таких відображень можна знайти в [61] та [68].

Слід зазначити також, що Q-відображення є кільцевим Q-відображенням в будь-якій точці x_0 області D. Оцінки виду (1.6) мають широкий спектр застосувань і нерівності цього типу беруть свій початок у [80] для квазіконформних і у [13] для квазірегулярних відображень. Нерівність (1.6) можна також застосувати до відображень з необмеженою характеристикою, див. [53, теорема 4.1] та [59, теореми 4.6 і 6.10].

Вперше назва «Q-відображення» з'явилась у роботі [59] (В. Рязанов, О. Мартіо, У. Сребро та Е. Якубов), правда дещо в іншому вигляді: передбачалось виконання двох нерівностей, одна з яких мала вигляд (1.6), а самі відображення були гомеоморфізмами.

Означення 1.2.6. *Нехай* $x_0 \in D$. *Відображення* $f : D \setminus \{x_0\} \to \overline{\mathbb{R}^n}$ *є* **кільцевим** Q**-відображенням в точці** $x_0 \in D$, *якщо виконується співвідношення (1.6). Саме відображення визначене лише у проколотому околі точки* x_0.

Варто зауважити також, що при $Q \equiv 1$ довільне конформне відображення $f : D \to \mathbb{R}^n$ є Q-відображенням, оскільки за [79, гл. I, теорема 8.1] для конформних відображень для будь-якої сім'ї кривих Γ в D виконується умова $M(f(\Gamma)) = M(\Gamma)$. Квазіконформні відображення та відображення з обмеженим спотворенням при $K = const$ є Q-відображеннями. Довільне відкрите дискретне відображення $f \in W^{1,n}_{loc}(D)$ є Q-відображенням з $Q = K_O(x, f)$, за умови, що міра множини точок розгалуження дорівнює нуль і $K^{-1}_O(x, f) \in L^1_{loc}(D)$ (де $K_O(x, f)$ – зовнішня дилатація відображення f в точці x), що було доведено в [19, теорема 1 і наслідок 3].

Оцінки виду (1.6) мають широкий спектр застосувань і нерівності цього типу беруть свій початок у [80] для квазіконформних і у [13] для квазірегулярних відображень. Нерівність (1.6) можна також застосувати до відображень з необмеженою характеристикою, див. [59, теореми 4.6 і 6.10] та [53, Theorem 4.1].

Означення 1.2.7. *Нехай* D *— область в* $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. *Покладемо в точках диференційовності* $x \in D$ *відображення* $f\colon D \to \mathbb{R}^n$: $\|f'(x)\| = \max\limits_{h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{|f'(x)h|}{|h|}$, $J(x, f) = \det f'(x)$, *де, як зазвичай,* $f'(x)$ *— матриця Якобі відображення* f *в точці* x. *Відображення* $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ *будемо називати* **відображенням зі скінченним спотворенням**, *якщо* $f \in W^{1,1}_{loc}(D)$ *і для деякої функції* $K(x)\colon D \to [1, \infty)$ *виконується умова*

$$\| f'(x) \|^n \leqslant K(x) \cdot |J(x, f)|$$

при майже всіх $x \in D$ *(див. [52, п. 6.3, ч. VI]).*

У деяких випадках умову $f \in W_{loc}^{1,1}(D)$ замінюють сильнішою вимогою $f \in W_{loc}^{1,n}(D)$. Далі, якщо мова йде про відображення f зі скінченним спотворенням, ми вважаємо, що $f \in W_{loc}^{1,1}$.

1.3 Теорія простих кінців

Нагадаємо також деякі означення, стосовно теорії простих кінців (див., напр., [10]).

Означення 1.3.1. *Нехай* ω *– відкрита множина в* $\mathbb{R}^k$, $k = 1, \ldots, n-1$. *Неперервне відображення* $\sigma\colon \omega \to \mathbb{R}^n$ *називається* k**-вимірною поверхнею** *в* $\mathbb{R}^n$.

Означення 1.3.2. Поверхнею *будемо називати довільну* $(n-1)$*- вимірну поверхню* σ *в* $\mathbb{R}^n$.

Означення 1.3.3. *Поверхня* σ *називається* **жордановою поверхнею**, *якщо* $\sigma(x) \neq \sigma(y)$ *при* $x \neq y$.

Далі ми іноді будемо використовувати σ для позначення всього образу $\sigma(\omega) \subset \mathbb{R}^n$ при відображенні σ, $\overline{\sigma}$ замість $\overline{\sigma(\omega)}$ в $\mathbb{R}^n$ і $\partial\sigma$ замість $\overline{\sigma(\omega)} \setminus \sigma(\omega)$.

Означення 1.3.4. *Жорданова поверхня* $\sigma\colon \omega \to D$ *в області* D *називається* **розрізом** *області* D, *якщо* σ *розділяє* D, *тобто* $D \setminus \sigma$ *має більше однієї компоненти,* $\partial\sigma \cap D = \varnothing$ *і* $\partial\sigma \cap \partial D \neq \varnothing$.

Означення 1.3.5. *Послідовність* $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m, \ldots$ *розрізів області* D *називається* **ланцюгом**, *якщо:*

(i) множина σ_{m+1} *міститься в точності в одній компоненті* d_m *множини* $D \setminus \sigma_m$, *при цьому,* $\sigma_{m-1} \subset D \setminus (\sigma_m \cup d_m)$;

(ii) $\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} d_m = \varnothing$.

Означення 1.3.6. *Два ланцюги розрізів* $\{\sigma_m\}$ *і* $\{\sigma'_k\}$ *називаються* **еквівалентними**, *якщо для кожного* $m = 1, 2, \ldots$ *область* d_m *містить всі області* d'_k *за виключенням скінченної кількості, і для кожного* $k = 1, 2, \ldots$ *область* d'_k *також містить всі області* d_m *за виключенням скінченної кількості.*

Означення 1.3.7. **Кінець** *області* D *— це клас еквівалентних ланцюгів розрізів області* D.

Означення 1.3.8. *Нехай* K *— кінець області* D *в* $\mathbb{R}^n$, *тоді множина* $I(K) = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \overline{d_m}$ *називається* **тілом кінця** K.

Слідуючи [62], будемо говорити, що

Означення 1.3.9. *Кінець* K *є* **простим кінцем**, *якщо* K *містить ланцюг розрізів* $\{\sigma_m\}$, *такий, що* $M(\Gamma(\sigma_m, \sigma_{m+1}, D)) < \infty$ *при всіх* $m \in \mathbb{N}$ *і* $\lim\limits_{m\to\infty} M(\Gamma(C, \sigma_m, D)) = 0$ *для деякого континууму* C *в* D.

Далі використовуються наступні позначення: множина простих кінців, що відповідають області D, позначається символом E_D, а поповнення області D її простими кінцями позначається $\overline{D}_P$.

Означення 1.3.10. *Будемо називати ланцюг розрізів* $\{\sigma_m\}$ **регулярним**, *якщо* $\overline{\sigma_m} \cap \overline{\sigma_{m+1}} = \varnothing$ *при кожному* $m \in \mathbb{N}$ *і, крім того,* $d(\sigma_m) \to 0$ *при* $m \to \infty$. *Якщо кінець* K *містить принаймні один регулярний ланцюг, то* K *будемо називати* **регулярним**.

Означення 1.3.11. *Говоримо, що обмежена область* D *в* $\mathbb{R}^n$ **регулярна**, *якщо* D *можна квазіконформно відобразити на область з локально квазіконформною межею, замикання якої є компактом в* $\mathbb{R}^n$.

Зауважимо, що у просторі $\mathbb{R}^n$ кожний простий кінець регулярної області містить ланцюг розрізів з властивістю $d(\sigma_m) \to 0$ при $m \to \infty$, і навпаки, якщо у кінця є вказана властивість, то він – простий (див. [5, теорема 5.1]).

Замикання $\overline{D}_P$ регулярної області D є **метризовним**, при цьому, якщо $g : D_0 \to D$ – квазіконформне відображення області D_0 з локально квазіконформною межею на область D, то для $x, y \in \overline{D}_P$ покладемо:

$$\rho(x, y) := |g^{-1}(x) - g^{-1}(y)| \,, \tag{1.8}$$

де для $x \in E_D$ елемент $g^{-1}(x)$ розуміється як деяка (єдина) точка межі D_0, коректно визначена з огляду на [5, теорема 4.1].

Означення 1.3.12. *Зокрема, будемо говорити, що послідовність* $x_m \in D$, $m = 1, 2, \ldots$, **збігається до простого кінця** $P \in E_D$ *при* $m \to \infty$, *якщо для будь-якого натурального* $k \in \mathbb{N}$ *всі елементи послідовності* x_m, *крім скінченної кількості, належать області* d_k *(де* d_k, $k = 1, 2, \ldots$ *– послідовність вкладених областей з означення простого кінця* P *).*

Якщо f – гомеоморфізм області D на D', то не важко переконатись, що між кінцями областей D і $D' = f(D)$ є взаємно однозначна відповідність.

1.4 Необхідні відомості з теорії метричних просторів

Скрізь далі (X, d, μ) і (X', d', μ') — довільні метричні простори з метриками d і d', з локально скінченним борелевими мірами μ і μ', і скінченними хаусдорфовими розмірностями $\alpha \geqslant 2$ і $\alpha' \geqslant 2$, відповідно. Далі ми вважаємо відомими означення, пов'язані з кривими в метричному просторі, довжинами дуг, інтегралами, умовами допустимості тощо (див. [60, розд. 13]).

Означення 1.4.1. *Множина* E *називається* **зв'язною** *якщо будь-які дві точки* x_1 *і* x_2 *в* E *можна з'єднати кривою* $\gamma : [0, 1] \to E$, $\gamma(0) = x_1$ *і* $\gamma(1) = x_2$.

Означення 1.4.2. *Простір* X **локально (лінійно) зв'язний** *якщо будь-який окіл точки* $x \in X$ *містить (лінійно) зв'язний окіл.*

Означення 1.4.3. **Область** *в* X *це відкрита зв'язна множина в* X.

Означення 1.4.4. *Нехай* G *– область в метричному просторі* (X, d, μ). *Слідуючи [60, розд. 13.4], будемо говорити, що локальньо інтегровна в* X *функція* $\varphi : G \to \mathbb{R}$ *має* **скінченне середнє коливання в точці** $x_0 \in \overline{G}$, *пишемо* $\varphi \in FMO(x_0)$, *якщо* $\overline{\lim\limits_{\varepsilon \to 0}} \frac{1}{\mu(G(x_0,\varepsilon))} \int\limits_{G(x_0,\varepsilon)} |\varphi(x) - \overline{\varphi}_\varepsilon| \, d\mu(x) < \infty$, *де* $\overline{\varphi}_\varepsilon = \frac{1}{\mu(G(x_0,\varepsilon))} \int\limits_{G(x_0,\varepsilon)} \varphi(x) \, d\mu(x)$ *– середнє інтегральне значення функції* $\varphi(x)$ *над множиною* $G(x_0, \varepsilon) = B(x_0, \varepsilon) \cap G = \{x \in X : d(x, x_0) < \varepsilon\} \cap G$ *відносно міри* μ.

Означення 1.4.5. *Нехай* $p \geqslant 1$, *тоді* p**-модулем** *сім'ї кривих* Γ *в метричному просторі* X *називається величина*

$$M_p(\Gamma) = \inf_{\rho \in \operatorname{adm} \Gamma} \int\limits_X \rho^p(x) \, d\mu(x) \, .$$

Якщо $\operatorname{adm} \Gamma = \varnothing$, *то ми покладемо:* $M_p(\Gamma) = \infty$.

Далі, наведемо означення одностайної неперервності сімей відображень на випадок метричних просторів.

Означення 1.4.6. *Сім'я* $\mathfrak{F}$ *відображень* $f : X \to X'$ *називається* **одностайно неперервною в точці** $x_0 \in X$, *якщо для будь-якого* $\varepsilon > 0$ *знайдеться* $\delta > 0$ *таке, що* $d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ *для всіх* x *таких, що* $d(x, x_0) < \delta$ *і для всіх* $f \in \mathfrak{F}$. *Сім'я є* $\mathfrak{F}$ **одностайно неперервною**, *якщо* $\mathfrak{F}$ *є одностайно неперервною в кожній точці* $x_0 \in X$.

Значна кількість результатів, що відносяться до локальної і межової поведінки, пов'язана з компактністю простору, в який діє це відображення (див., напр., [16, теореми 5.1, 5.2], [35, теореми 1, 2], [60, теореми 13.1, 13.2]). У випадку евклідового простору цю проблему вирішує розширений евклідовий простір, який також можна інтерпретувати як відповідну йому ріманову сферу. В метричних просторах ця ситуація може виявитись значно більш складною. Одноточкові компактифікації можуть виявитись лише топологічними, але не метричними просторами. У зв'язку зі сказаним, розглянемо наступне означення.

Означення 1.4.7. *Покладемо* $\overline{X} := X \cup \{\infty\}$, *і нехай* $h : \overline{X} \times \overline{X} \to \mathbb{R}$ *– деяка метрика. Будемо говорити, що* h *задовольняє умову* **слабкої сферикалізації,** *якщо* $(\overline{X}, h)$ *– компактний метричний простір, при цьому,* h *і* d *породжують однакову топологію на* X *).*

Означення 1.4.8. *Метричний простір* X *називається* **простором, що допускає слабку сферикалізацію***, якщо існує хоча б одна така метрика* $h : \overline{X} \times \overline{X} \to \mathbb{R}$.

Якщо не сказане протилежне, то поняття околу точки, а також множини ∂E і $\overline{E}$, що відносяться до довільного $E \subset X$ (або $E \subset \overline{X}$) за означенням асоційовані з топологією простору $\overline{X}$ в тому випадку, коли X допускає слабку сферикалізацію. Якщо ми говоримо про відображення f між просторами (X, d) і (X', d'), коли X' задовольняє слабку сферикалізацію $\left(\overline{X'}, h\right)$, неперервність f також варто розуміти у сенсі метрик d і h, відповідно.

Для зручності покладемо

$$h(E_1, E_2) = \inf_{x \in E_1, y \in E_2} h(x, y)\,, \qquad E_1, E_2 \subset \overline{X'}\,,$$

$$h(E) = \sup_{x, y \in E} h(x, y)\,, \quad d(F_1, F_2) = \inf_{x \in F_1, y \in F_2} d(x, y)\,,$$

де $E \subset \overline{X'}$ і $F_1, F_2 \subset X$, і $d(F) = \sup\limits_{x, y \in F} d(x, y)$, де $F \subset X$.

Означення 1.4.9. *Простір* X *будемо називати* **слабко плоским** *в точці* $x_0 \in X$, *якщо для будь-якого околу* U *точки* x_0 *і кожного* $P > 0$

знайдеться окіл V цієї точки, що міститься в U, такий, що

$$M_\alpha(\Gamma(E,F,X)) \geqslant P$$

для довільних континуумів $E,F \subset X$, що задовольняють умову $E \cap \partial U = \varnothing \neq E \cap \partial V$ і $F \cap \partial U = \varnothing \neq F \cap \partial V$, див. [60, розд. 13.9]. Простір X будемо називати **слабко плоским**, *якщо вказана властивість виконується для кожного $x_0 \in X$.*

Тут і надалі α позначає хаусдорфову розмірність простору X. Якщо простір X допускає слабку сферикалізацію, то для області $G \subset \overline{X}$ і множин $E,F \subset G$ покладемо

$$M_\alpha(\Gamma(E,F,G)) := M_\alpha(\Gamma(E\setminus\{\infty\}, F\setminus\{\infty\}, G\setminus\{\infty\}))\,.$$

Більше того, для сім'ї кривих Γ на $\overline{X}$ покладемо $M_\alpha(\Gamma) = M_\alpha(\Gamma^*)$, де за означенням Γ^* складається з тих і тільки тих кривих сім'ї Γ, що не проходять через точку ∞. В такому випадку, поняття слабкої плоскості, що відноситься до X, дослівно можна перенести на довільну область $G \subset \overline{X}$, а саме:

Означення 1.4.10. *Простір G будемо називати* **слабко плоским** *в точці $x_0 \in G$, якщо для будь-якого околу U точки x_0 і для будь-якого $P > 0$ знайдеться окіл V цієї точки, що міститься в U, такий, що $M_\alpha(\Gamma(E,F,G)) \geqslant P$ для довільних континуумів $E,F \subset G$, що задовольняють умову $E \cap \partial U = \varnothing \neq E \cap \partial V$ і $F \cap \partial U = \varnothing \neq F \cap \partial V$.*

Відповідно до [60, розділ 13.1], або [16, (1.7)] розглянемо наступне означення.

Означення 1.4.11. *Будемо говорити, що X є* **α-регулярним за Альфорсом зверху в точці** *$x_0 \in X$ якщо існує $r_0 = r_0(x_0) > 0$ і $C = C(x_0) > 0$ таке, що*

$$\mu(B(x_0,r)) \leqslant C \cdot r^\alpha \qquad \forall\, r \in (0,r_0)\,.$$

Це означення відрізняється від загальноприйнятого тим, що оцінка знизу має виконуватись, і сталі r_0 і $C > 0$ не залежать від точки $x_0 \in X$ (див. [50, нерівність (8.10)]).

Означення 1.4.12. *Для заданого числа* $p \geqslant 2$, *простір* $\overline{X}$ *називається* **p-рівномірним** *якщо для кожного* $r > 0$, *існує* $\delta = \delta(r) > 0$ *таке, що* $M_p(\Gamma(F, F^*, \overline{X})) \geqslant \delta$ *коли* F *і* F^* *континууми в* $\overline{X}$ *з умовою* $h(F) \geqslant r$ *і* $h(F^*) \geqslant r$.

Розширений метричний простір є дуже добрим і простим прикладом рівномірного простору, див [60, (7.29)]. У цьому випадку, показник p дорівнює розмірності простору n, див. там же.

Висновки до розділу 1

Отже, модуль сімей кривих є потужним інструментом при дослідженні відображень. Зауважимо, що майже для всіх класів сучасних відображень встановлені оцінки модуля та ємності при них. Саме такі оцінки дають можливість досліджувати окремий клас задач. Найбільш розповсюдженим є використання цих оцінок для вивчення локальної поведінки відображень, їх межової поведінки, задачі про усунення ізольованої сингулярності та поведінки сімей відображень у замиканні області тощо.

РОЗДІЛ 2

ЛОКАЛЬНА ПОВЕДІНКА ПРЯМИХ ТА ОБЕРНЕНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ ЕВКЛІДОВОГО ПРОСТОРУ

У даному розділі досліджується поведінка відображень, що діють між областями евклідового простору.

У розділі міститься 4 підрозділи, у першому з яких йдеться про поведінку гомеоморфізмів з оберненою нерівністю Полецького у внутрішніх точках області. У другому підрозділі мова йде про логарифмічну гельдеревість відкритих дискретних відображень. У третьому підрозділі доведена теорема про неперервне продовження відображень з оберненою нерівністю Полецького в ізольовану точку межі. У четвертому підрозділі наведені деякі приклади.

2.1 Одностайна неперервність сімей кільцевих гомеоморфізмів з оберненою нерівністю Полецького всередині області

Локальна поведінка квазіконформних відображень евклідового простору добре вивчена зараз (див., напр., [57, теорема 3.17], [67, лема 3.12, наслідок 3.22] і [79, теорема 19.2]). Велика кількість робіт присвячених, при цьому, їх поведінці в замиканні заданої області. Зауважимо, наприклад, [63, теорема 3.1] і [64, теорема 3.1], див. також [5], [47] і [48]. Поставимо тепер запитання про те, якою буде локальна поведінка відповідних обернених відображень ?

В рамках класу квазіконформних гомеоморфізмів це питання не змістовне. Справді, квазіконформність прямого відображення f тягне квазіконформність відображення f^{-1} (при цьому, стала квазіконформності відображень одна й та ж, див. напр., [79, наслідок 13.3]; див. також [79, теорема 34.3]). Таким чином, вивчення відображень, обернених до квазіконформних, не дає нам нічого нового.

Ситуація істотно зміниться, якщо замість цього ми розглянемо деякий більш загальний клас гомеоморфізмів. Нагадаємо деякі означення та введемо цей клас до розгляду.

Наступні означення відносяться до умов, які роблять межу нашої області достатньо «гарною».

Означення 2.1.1. *Область D називається* **локально лінійно зв'язною в точці** $x_0 \in \partial D$, *якщо для будь–якого околу U точки x_0 знайдеться окіл $V \subset U$ точки x_0 такий, що множина $V \cap D$ є зв'язною. Зокрема, будемо говорити, що D локально лінійно зв'язна на межі ∂D, якщо D локально лінійно зв'язна в кожній точці $x_0 \in \partial D$. Область називається* **локально зв'язною на** ∂D*, якщо вона є локально зв'язною у кожній точці межі.*

Навіть прості, на перший погляд області, можуть не задовольняти цю умову. Яскравим прикладом є круг із розрізом. При цьому, саме в точках цього розрізу відповідна умова локальної зв'язності порушується.

Означення 2.1.2. *Межа області D називається* **слабко плоскою** *в точці $x_0 \in \partial D$, якщо для кожного $P > 0$ і для будь-якого околу U точки x_0 знайдеться окіл $V \subset U$ цієї ж точки такий, що $M(\Gamma(E, F, D)) > P$ для довільних континуумів $E, F \subset D$, що перетинають ∂U і ∂V. Межа області D називається слабко плоскою, якщо відповідна властивість виконується в кожній точці межі D.*

Наступна лема, доведена в [32, лема 2.2] містить в собі твердження проте, що у вказаних точках властивість «слабкої плоскості» завжди виконується.

Лема 2.1.1. (Лема Вяйсяля про слабку плоскість у внутрішніх точках). *Нехай* $n \geqslant 2$, *a* D *область в* $\overline{\mathbb{R}^n}$, *і нехай* $x_0 \in D$. *Тоді для будь-якого* $P > 0$ *кожного околу* U *точки* x_0 *знайдеться окіл* $V \subset U$ *цієї ж точки, такий, що* $M(\Gamma(E, F, D)) > P$ *для будь-яких континуумів* $E, F \subset D$, *що перетинають* ∂U *і* ∂V.

Доведення. Зафіксуємо окіл U точки x_0. Без обмеження загальності, використовуючи допоміжну інверсію $\varphi(x) = x/|x|^2$, за потреби, ми можемо вважати, що $x_0 \neq \infty$. Оберемо $\varepsilon_0 > 0$ так, щоб $\overline{B(x_0, \varepsilon_0)} \subset D \cap U$. Нехай c_n – додатна стала, визначена в співвідношенні (10.11) в [79], а число $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ досить мале, щоб $c_n \cdot \log \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} > P$. Нехай $V := B(x_0, \varepsilon)$ і E, F – довільні континууми, що перетинають ∂U і ∂V. Тоді також E і F перетинають $S(x_0, \varepsilon_0)$ і ∂V (див. [11, теорема 1.I, гл. 5, § 46]). Необхідний висновок випливає на основі [79, розд. 10.12], оскільки

$$M(\Gamma(E, F, D)) \geqslant c_n \cdot \log \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} > P.$$

$\square$

Означення 2.1.3. *Нехай* $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, *сім'я* $\mathfrak{F}$ *відображень* $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ *називається* **одностайно неперервною** *в точці* $x_0 \in D$ *якщо для довільного* $\varepsilon > 0$, *існує* $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ *таке, що*

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \forall\, f \in \mathfrak{F}, \quad \forall\, x \in D : |x - x_0| < \delta\,. \tag{2.1}$$

Означення 2.1.4. *Сім'я* $\mathfrak{F}$ *є* **одностайно неперервною** *в* D, *якщо* $\mathfrak{F}$ *є одностайно неперервною в кожній точці* $x_0 \in D$.

Граничну множину відображення f у точці x позначимо через

$$C(f, x) := \{y \in \overline{\mathbb{R}^n} : \exists\, x_k \in D : x_k \to x, f(x_k) \to y, k \to \infty\}\,.$$

Теорема, представлена нижче, була опублікована в [28, теорема 1] та [29, теорема 1.1]. Для областей $D, D' \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, і довільної вимірної за

Лебегом функції $Q : \mathbb{R}^n \to [1, \infty]$, $Q(x) \equiv 0$ при $x \notin D$, позначимо через $\mathfrak{R}_Q(D, D')$ сім'ю всіх відображень $g : D' \to D$ таких, що $f = g^{-1}$ – гомеоморфізм області D на D' з умовою (1.5). Виконується наступне твердження.

Теорема 2.1.1. *Припустимо, що* $\overline{D}$ *і* $\overline{D'}$ *– компакти в* $\mathbb{R}^n$. *Якщо* $Q \in L^1(D)$, *то сім'я* $\mathfrak{R}_Q(D, D')$ *одностайно неперервна в* D'.

Доведення. Здійснимо доведення теореми 2.1.1 від супротивного. Припустимо, що сім'я $\mathfrak{R}_Q(D, D')$ не є одностайно неперервною в деякій точці $y_0 \in D'$, іншими словами, знайдуться $y_0 \in D'$ і $\varepsilon_0 > 0$, такі що для будь-якого $m \in \mathbb{N}$ існує елемент $y_m \in D'$, $|y_m - y_0| < 1/m$, і гомеоморфізм $g_m \in \mathfrak{R}_Q(D, D')$, для яких

$$|g_m(y_m) - g_m(y_0)| \geqslant \varepsilon_0 \,. \tag{2.2}$$

Проведемо через точки $g_m(y_m)$ і $g_m(y_0)$ пряму $r = r_m(t) = g_m(y_0) + (g_m(y_m) - g_m(y_0))t$, $-\infty < t < \infty$

Зауважимо, що вказана пряма $r = r_m(t)$ при $t \geqslant 1$ має перетинати межу області D з огляду на [11, теорема 1.I, гл. 5, § 46]), оскільки область D обмежена; таким чином, існує $t_1^m \geqslant 1$ таке, що $r_m(t_1^m) = x_1^m \in \partial D$. Не обмежуючи загальності, можна вважати, що $r_m(t) \in D$ при всіх $t \in [1, t_1^m)$, тоді відрізок $\gamma_1^m(t) = g_m(y_0) + (g_m(y_m) - g_m(y_0))t$, $t \in [1, t_1^m]$, належить D при всіх $t \in [1, t_1^m)$, $\gamma_1^m(t_1^m) = x_1^m \in \partial D$ і $\gamma_1^m(1) = g_m(y_m)$. Міркуючи аналогічно, знайдуться $t_2^m < 0$ і відрізок $\gamma_2^m(t) = g_m(y_0) + (g_m(y_m) - g_m(y_0))t$, $t \in [t_2^m, 0]$, такі, що $\gamma_2^m(t_2^m) = x_2^m \in \partial D$, $\gamma_2^m(0) = g_m(y_0)$ і $\gamma_2^m(t)$ належить D при всіх $t \in (t_2^m, 0]$. Покладемо $f_m := g_m^{-1}$. Так як f_m – гомеоморфізм, то при кожному фіксованому $m \in \mathbb{N}$ граничні множини $C(f_m, x_1^m)$ і $C(f_m, x_2^m)$ відображень f_m у відповідних межових точках $x_1^m, x_2^m \in \partial D$ лежать на $\partial D'$ (див. [60, пропозиція 13.5]). Тоді, знайдеться точка $z_1^m \in D \cap |\gamma_1^m|$ така, що $\mathrm{dist}\,(f_m(z_1^m), \partial D') < 1/m$. Так як $\overline{D'}$ – компакт, то можна вважати, що послідовність $f_m(z_1^m) \to p_1 \in \partial D'$ при $m \to \infty$. Аналогічно, знайдеться послідовність $z_2^m \in D \cap |\gamma_2^m|$ так, що $\mathrm{dist}\,(f_m(z_2^m), \partial D') < 1/m$ і $f_m(z_2^m) \to p_2 \in \partial D'$ при $m \to \infty$.

Нехай P_m – частина відрізка γ_1^m, що знаходиться між точками z_1^m і $g_m(y_m)$, а Q_m – частина відрізка γ_2^m, що знаходиться між точками z_2^m і $g_m(y_0)$. За побудовою і з огляду на (2.2), $\mathrm{dist}\,(P_m, Q_m) \geqslant \varepsilon_0 > 0$. Нехай $\Gamma_m = \Gamma(P_m, Q_m, D)$, тоді функція

$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon_0}, & x \in D, \\ 0, & x \notin D \end{cases}$$

є допустимою для сім'ї Γ_m, оскільки для довільної(локально спрямлюваної) кривої $\gamma \in \Gamma_m$ виконується $\int\limits_{\gamma} \rho(x)|dx| \geqslant \frac{l(\gamma)}{\varepsilon_0} \geqslant 1$ (де $l(\gamma)$ позначає довжину кривої γ). Оскільки за умовою відображення f_m задовольняють (1.5), маємо:

$$M(f_m(\Gamma_m)) \leqslant \frac{1}{\varepsilon_0^n} \int\limits_D Q(x)\,dm(x) := c < \infty\,, \qquad (2.3)$$

т.к. $Q \in L^1(D)$. З іншого боку, $\mathrm{diam}\, f_m(P_m) \geqslant |y_m - f_m(z_1^m)| \geqslant (1/2) \cdot |y_0 - p_1| > 0$ і $\mathrm{diam}\, f_m(Q_m) \geqslant |y_0 - f_m(z_2^m)| \geqslant (1/2) \cdot |y_0 - p_2| > 0$ при великих $m \in \mathbb{N}$, крім того,

$$\mathrm{dist}\,(f_m(P_m), f_m(Q_m)) \leqslant |y_m - y_0| \to 0, \quad m \to \infty\,.$$

Тоді, з огляду на лему 2.1.1

$$M(f_m(\Gamma_m)) = M(f_m(P_m), f_m(Q_m), D') \to \infty\,, \quad m \to \infty\,,$$

що суперечить співвідношенню (2.3). Отримане протиріччя вказує на хибність припущення в (2.2), що і завершує доведення теореми. $\Box$

Зауваження 2.1.1. Твердження теореми 2.1.1 вперше було встановлене в метричних просторах при досить сильних додаткових умовах на області D і D', див. [32, теорема 2]. Особливістю цієї теореми є відсутність якихнебудь умов на ці області, крім їх обмеженості.

Згодом, ми отримали результат з такими ж умовами [75, теорема 1.1] однак для більш загального класу (кільцевих Q-відображень).

Наступна теорема – результат, опублікований в [75, теорема 1.1]. Для заданих областей D і D' в $\overline{\mathbb{R}^n}$ і заданої вимірної за Лебегом функції $Q:\mathbb{R}^n\rightarrow[0,\infty]$, що дорівнює нулю зовні D, позначимо через $\mathfrak{R}_Q(D,D')$ сім'ю всіх гомеоморфізмів g області D' на D таких що відображення $f=g^{-1}$ є кільцевим Q-гомеоморфізмом в D. Виконується наступне твердження.

Теорема 2.1.2. *Нехай $n\geqslant 2$, і D обмежена область в $\mathbb{R}^n$. Якщо $Q\in L^1(D)$, тоді сім'я $\mathfrak{R}_Q(D,D')$ одностайно неперервна в D'.*

Доведення. Здійснимо доведення теореми 2.1.2 від супротивного. Припустимо, що висновок цієї теореми не виконується, тобто, сім'я відображень $\mathfrak{R}_Q(D,D')$ не одностайно неперервна в деякій точці $y_0\in D'$. Тоді знайдеться точка $y_0\in D'$ з наступною властивістю: для кожного $m\in\mathbb{N}$ існує $y_m\in D'$ і гомеоморфізм $g_m\in\mathfrak{R}_Q(D,D')$, такі, що $h(y_m,y_0)<1/m$, і виконується,

$$|g_m(y_m)-g_m(y_0)|\geqslant\varepsilon_0\,. \tag{2.4}$$

Розглянемо пряму

$$r=r_m(t)=g_m(y_0)+(g_m(y_m)-g_m(y_0))t,\quad -\infty<t<\infty,$$

що проходить через точки $g_m(y_m)$ і $g_m(y_0)$. Оскільки область D обмежена, з огляду на [11, теорема 1.I.5.46] вказана пряма $r=r_m(t)$ перетинає ∂D при деякому значенні параметра $t\geqslant 1$. У цьому випадку, знайдеться $t_1^m\geqslant 1$ таке, що $r_m(t_1^m)=x_1^m\in\partial D$. Без обмеження загальності, можна вважати, що $r_m(t)\in D$ для всіх $t\in[1,t_1^m)$. У цьому випадку, відрізок $\gamma_1^m(t)=g_m(y_0)+(g_m(y_m)-g_m(y_0))t$, $t\in[1,t_1^m]$, належить області D для всіх $t\in[1,t_1^m)$, $\gamma_1^m(t_1^m)=x_1^m\in\partial D$ і $\gamma_1^m(1)=g_m(y_m)$. Аналогічно існує параметр $t_2^m<0$ і відрізок $\gamma_2^m(t)=g_m(y_0)+(g_m(y_m)-g_m(y_0))t$, $t\in[t_2^m,0]$, такі, що $\gamma_2^m(t_2^m)=x_2^m\in\partial D$, $\gamma_2^m(0)=g_m(y_0)$ і $\gamma_2^m(t)\in D$ для всіх $t\in(t_2^m,0]$. Позначимо $f_m:=g_m^{-1}$ і зафіксуємо $m\in\mathbb{N}$. Оскільки f_m гомеоморфізм, то гранична множини $C(f_m,x_1^m)$ і $C(f_m,x_2^m)$ належать множині $\partial D'$ (див. [60, пропозиція 13.5]). Тому, знайдеться точка

$z_1^m \in D \cap |\gamma_1^m|$ така, що $h(f_m(z_1^m), \partial D') < 1/m$. Оскільки простір $\overline{\mathbb{R}^n}$ компактний, ми можемо вважати, що $f_m(z_1^m) \to p_1 \in \partial D'$ коли $m \to \infty$. Використовуючи подібні міркування, можна зробити висновок, що знайдеться послідовність $z_2^m \in D \cap |\gamma_2^m|$ така, що $h(f_m(z_2^m), \partial D') < 1/m$ і $f_m(z_2^m) \to p_2 \in \partial D'$ коли $m \to \infty$. Позначимо через P_m частину прямої γ_1^m, розташованої між точками $g_m(y_m)$ і z_1^m, а Q_m відповідну частину прямої γ_2^m, розташованої між точками $g_m(y_0)$ і z_2^m. Покладемо

$$A_m := A(z_1^m, \varepsilon_1^m, \varepsilon_2^m) = \{x \in \mathbb{R}^n : \varepsilon_1^m < |x - z_1^m| < \varepsilon_2^m\}\,,$$

де

$$\varepsilon_1^m := |g_m(y_m) - z_1^m|, \quad \varepsilon_2^m := |g_m(y_0) - z_1^m|\,.$$

Нехай $\Gamma_m = \Gamma(P_m, Q_m, D)$. Покажемо, що

$$\Gamma_m > \Gamma(S(z_1^m, \varepsilon_1^m), S(z_1^m, \varepsilon_2^m), A_m \cap D)\,. \tag{2.5}$$

Дійсно, нехай $\gamma \in \Gamma_m$, іншими словами, $\gamma = \gamma(s) : [0,1] \to \mathbb{R}^n$, $\gamma(0) \in P_m$, $\gamma(1) \in Q_m$ і $\gamma(s) \in D$ для $0 < s < 1$. Нехай $q_m > 1$ число, для якого

$$z_1^m = g_m(y_0) + (g_m(y_m) - g_m(y_0))q_m\,.$$

Оскільки $\gamma(0) \in P_m$, знайдеться $1 \leqslant t_m \leqslant q_m$ таке, що

$$\gamma(0) = g_m(y_0) + (g_m(y_m) - g_m(y_0))t_m\,.$$

Тому,

$$|\gamma(0) - z_1^m| = |(g_m(y_m) - g_m(y_0))(q_m - t_m)| \leqslant$$
$$\leqslant |(g_m(y_m) - g_m(y_0))(q_m - 1)| = |(g_m(y_m) - g_m(y_0))q_m + g_m(y_0) - g_m(y_m))| = \tag{2.6}$$
$$= |g_m(y_m) - z_1^m| = \varepsilon_1^m\,.$$

З іншого боку, оскільки $\gamma(1) \in Q_m$, тоді існує $p_m \leqslant 0$ таке, що

$$\gamma(1) = g_m(y_0) + (g_m(y_m) - g_m(y_0))p_m\,.$$

У цьому випадку, ми отримаємо, що

$$|\gamma(1)-z_1^m| = |(g_m(y_m)-g_m(y_0))(q_m-p_m)| \geqslant$$

$$\geqslant |(g_m(y_m)-g_m(y_0))q_m| = |(g_m(y_m)-g_m(y_0))q_m+g_m(y_0)-g_m(y_0)| = \quad (2.7)$$

$$= |g_m(y_0)-z_1^m| = \varepsilon_2^m\,.$$

Зауважимо, що

$$|g_m(y_0)-g_m(y_m)|+\varepsilon_1^m = |g_m(y_0)-g_m(y_m)|+|g_m(y_m)-z_1^m| = \quad (2.8)$$

$$= |z_1^m-g_m(y_0)| = \varepsilon_2^m\,,$$

і, отже, $\varepsilon_1^m<\varepsilon_2^m$. Тоді із співвідношення (2.7) отримаємо, що

$$|\gamma(1)-z_1^m| > \varepsilon_1^m\,. \quad (2.9)$$

Якщо $\gamma(0)\not\in S(z_1^m,\varepsilon_1^m)$, тоді із співвідношень (2.6) і (2.9) випливає, що $|\gamma|\cap B(z_1^m,\varepsilon_1^m)\neq\varnothing\neq(D\setminus B(z_1^m,\varepsilon_1^m))\cap|\gamma|$. Тоді, з огляду на [11, теорема 1.I.5.46], знайдеться $t_1\in(0,1)$ таке, що $\gamma(t_1)\in S(z_1^m,\varepsilon_1^m)$. Без обмеження загальності, ми можемо вважати, що при $t\in(t_1,1)$ $\gamma(t)\not\in B(z_1^m,\varepsilon_1^m)$. Покладемо $\gamma_1:=\gamma|_{[t_1,1]}$.

З іншого боку, оскільки $\varepsilon_1^m<\varepsilon_2^m$ і $\gamma_1(t_1)\in S(z_1^m,\varepsilon_1^m)$, маємо, що $|\gamma_1|\cap B(z_1^m,\varepsilon_2^m)\neq\varnothing$. За (2.7), маємо $(D\setminus B(z_1^m,\varepsilon_2^m))\cap|\gamma_1|\neq\varnothing$. Тому, із [11, теорема 1.I.5.46] знайдеться $t_2\in[t_1,1)$ таке, що $\gamma_1(t_2)\in S(z_1^m,\varepsilon_2^m)$.

Без обмеження загальності, ми можемо вважати, що $\gamma_1(t)\in B(z_1^m,\varepsilon_2^m)$ для $t\in(t_1,t_2)$. Покладемо $\gamma_2:=\gamma|_{[t_1,t_2]}$. Тоді, маємо, що $\gamma>\gamma_2$ і $\gamma_2\in\Gamma(S(z_1^m,\varepsilon_1^m),S(z_1^m,\varepsilon_2^m),A_m)$. Таким чином, співвідношення (2.5) встановлене.

Покладемо

$$\eta(t)=\begin{cases}\frac{1}{\varepsilon_0}, & t\in[\varepsilon_1^m,\varepsilon_2^m],\\ 0, & t\not\in[\varepsilon_1^m,\varepsilon_2^m]\,.\end{cases}$$

Зауважимо, що η задовольняє співвідношення (1.7) при $r_1=\varepsilon_1^m$ і $r_2=\varepsilon_2^m$. Справді, із (2.4) і (2.8) маємо:

$$r_1-r_2=\varepsilon_2^m-\varepsilon_1^m=|g_m(y_0)-z_1^m|-|g_m(y_m)-z_1^m|=$$

$$= |g_m(y_m) - g_m(y_0)| \geqslant \varepsilon_0 \,.$$

Тоді $\int\limits_{\varepsilon_1^m}^{\varepsilon_2^m} \eta(t)dt = (1/\varepsilon_0)\cdot(\varepsilon_2^m - \varepsilon_1^m) \geqslant 1.$ За означенням відповідного класу відображень у (2.5) у точці $z_1^m,$ маємо:

$$M(f_m(\Gamma_m)) \leqslant M(f_m(\Gamma(S(z_1^m,\varepsilon_1^m), S(z_1^m,\varepsilon_2^m), A_m\cap D))) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\varepsilon_0^n}\int\limits_D Q(x)\,dm(x) := c < \infty\,, \tag{2.10}$$

оскільки $Q\in L^1(D)$.

Співвідношення (2.10) – це рівномірна оцінка відповідного модуля сімей кривих, де "рівномірність"залежить від індексу m зліва; однак, права частина цього співвідношення не залежить від m. Тепер покажемо, що це призводить до суперечності з властивістю слабкої плоскості у внутрішній точці y_0, в якій ми розглядаємо нашу сім'ю відображень $\mathfrak{R}_Q(D,D')$. Дійсно, перш за все, ми маємо

$$h(f_m(P_m)) \geqslant h(y_m, f_m(z_1^m)) \geqslant (1/2)\cdot h(y_0,p_1) > 0$$

і

$$h(f_m(Q_m)) \geqslant h(y_0, f_m(z_2^m)) \geqslant (1/2)\cdot h(y_0,p_2) > 0$$

для великих $m\in\mathbb{N}$. (Нагадаємо, що хордальний діаметр $h(f_m(Q_m))$ множини E визначений співвідношенням (2.14), де, у цьому випадку, $E := f_m(Q_m)$). Більше того, зауважимо, що

$$h(f_m(P_m), f_m(Q_m)) := \inf_{x\in f_m(P_m), y\in f_m(Q_m)} h(x,y) \leqslant h(y_m,y_0)\to 0, \quad m\to\infty\,.$$

Тоді, за лемою 2.1.1, маємо:

$$M(f_m(\Gamma_m)) = M(\Gamma(f_m(P_m), f_m(Q_m), D'))\to\infty\,, \quad m\to\infty\,,$$

що суперечить (2.10) а, отже і (2.4). Отримане протиріччя спростовує припущення зроблене в (2.4). Теорема доведена. $\Box$

2.2 Локальна поведінка відкритих дискретних відображень. Логарифмічна неперервність за Гельдером

Цей підрозділ стосується дослідження відображень з оберненою нерівністю Полецького. Тож наведемо наступні означення.

Якщо $f : D \to \mathbb{R}^n$ – задане відображення, $y_0 \in f(D)$ і $0 < r_1 < r_2 < d_0 = \sup\limits_{y \in f(D)} |y - y_0|$, то через $\Gamma_f(y_0, r_1, r_2)$ ми позначимо сім'ю всіх кривих γ в області D таких, що $f(\gamma) \in \Gamma(S(y_0, r_1), S(y_0, r_2), A(y_0, r_1, r_2))$.

Означення 2.2.1. *Нехай $Q : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ – вимірна за Лебегом функція. Будемо говорити, що f* **задовольняє обернену нерівність Полецького** *в точці $y_0 \in f(D)$, якщо співвідношення*

$$M(\Gamma_f(y_0, r_1, r_2)) \leqslant \int\limits_{A(y_0, r_1, r_2) \cap f(D)} Q(y) \cdot \eta^n(|y - y_0|)\, dm(y) \qquad (2.11)$$

виконується для довільної вимірної за Лебегом функції $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$ такої, що

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)\, dr \geqslant 1\,. \qquad (2.12)$$

З приводу порівняння (2.11) з класичною нерівністю Полецького вкажемо на [13, теорема 1]. Зауважимо, що Севостьяновим Є.О. встановлені відкритість і дискретність відображень виду (2.11) за певних умов на функцію Q, див., напр., [71]. У більш загальному випадку виконання цих властивостей не гарантоване. Зауважимо також, що одностайна неперервність гомеоморфізмів з умовою (2.11) при дещо менш загальних обмеженнях на області і відповідні відображення детально вивчені в [71].

У подальшому, в розширеному просторі $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ використовується **сферична (хордальна) метрика** $h(x, y) = |\pi(x) - \pi(y)|$, де π

– стереографічна проекція $\overline{\mathbb{R}^n}$ на сферу $S^n(\frac{1}{2}e_{n+1}, \frac{1}{2})$ в $\mathbb{R}^{n+1}$, а саме,

$$h(x,\infty)=\frac{1}{\sqrt{1+{|x|}^2}}\,,$$

$$h(x,y)=\frac{|x-y|}{\sqrt{1+{|x|}^2}\sqrt{1+{|y|}^2}}\,, \quad x\ne\infty\ne y \tag{2.13}$$

(див., напр., [79, означення 12.1]). Для множин $A, B\subset \overline{\mathbb{R}^n}$ покладемо

$$h(A,B)=\inf_{x\in A, y\in B} h(x,y)\,, \quad h(A)=\sup_{x,y\in A} h(x,y)\,, \tag{2.14}$$

де h – хордальна відстань, визначена в (2.14). Крім того, для множин $A, B\subset\mathbb{R}^n$ покладемо

$$\mathrm{dist}\,(A,B)=\inf_{x\in A, y\in B}|x-y|\,, \quad \mathrm{diam}(A)=\sup_{x,y\in A}|x-y|\,.$$

Наступне означення відіграє ключову роль під час дослідження відкритих дискретних відображень (відображень без гомеоморфності) , яке можна знайти наприклад в [65, гл. II, п. 3].

Означення 2.2.2. *Крива* $\alpha\colon [a,\,c)\rightarrow D$, $a<c\leqslant b$, *називається* **максимальним підняттям** *кривої* β *при відображенні* f *з початком в точці* x, *якщо* (1) $\alpha(a)=x$; (2) $f\circ\alpha=\beta|_{[a,\,c)}$; (3) *якщо* $c<c'\leqslant b$, *то не існує кривої* $\alpha'\colon [a,\,c')\rightarrow D$, *такої що* $\alpha=\alpha'|_{[a,\,c)}$ *і* $f\circ\alpha=\beta|_{[a,\,c')}$.

Для області $D\subset\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, і вимірної за Лебегом функції $Q:\mathbb{R}^n\rightarrow[0,\infty]$ визначимо через $\mathfrak{F}_Q(D)$ сім'ю всіх відкритих дискретних відображень $f:D\rightarrow\mathbb{R}^n$ таких, що співвідношення (2.11) виконується для кожної точки $y_0\in f(D)$. Виконується наступна теорема, доведена в [27, теорема 1.1]. Доведення цієї теореми у випадку метричних просторів можна знайти в [73].

Теорема 2.2.1. *Нехай* $Q\in L^1(\mathbb{R}^n)$. *Тоді знайдеться стала* $C_n>0$, *яка залежить тільки від розмірності простору* n, *така що для будь-якого* $x_0\in D$ *і будь-якого* $r_0>0$ *такого, що* $0<2r_0<\mathrm{dist}\,(x_0,\partial D)$, *виконується нерівність*

$$|f(x)-f(x_0)|\leqslant \frac{C_n\cdot(\|Q\|_1)^{1/n}}{\log^{1/n}\left(1+\frac{r_0}{|x-x_0|}\right)} \tag{2.15}$$

$$\forall\, x\in B(x_0, r_0)\,,\quad \forall\, f\in \mathfrak{F}_Q(D)\,,$$

де $\|Q\|_1$ *– норма функції* Q *в* $L^1(\mathbb{R}^n)$*. Зокрема, сім'я* $\mathfrak{F}_Q(D)$ *є одностайно неперервною в* D*.*

Доведення. Зафіксуємо $x_0\in D$, $0<2r_0<\mathrm{dist}\,(x_0, \partial D)$ і $f\in\mathfrak{F}_Q(D)$. Розглянемо $x\in B(x_0, r)$ і покладемо

$$|f(x)-f(x_0)|:=\varepsilon_0\,. \tag{2.16}$$

Якщо $\varepsilon_0=0$, доводити нема що. Нехай $\varepsilon_0>0$. Проведемо через точки $f(x)$ і $f(x_0)$ пряму $r=r(t)=f(x_0)+(f(x)-f(x_0))t$, $-\infty<t<\infty$. Нехай $\gamma^1:[1, c)\rightarrow D$, $1<c\leqslant\infty$ – максимальне f-підняття променя $r=r(t)$, $t\geqslant 1$, з початком в точці x, що існує за [58, лема 3.12]. За цією ж лемою

$$h(\gamma^1(t), \partial D)\rightarrow 0 \tag{2.17}$$

при $t\rightarrow c-0$. Аналогічно, нехай $\gamma^2:(d, 0]\rightarrow D$, $-\infty\leqslant d<0$ – максимальне f-підняття променя $r=r(t)$, $t\leqslant 0$, з кінцем в точці x_0, що існує за [58, лема 3.12]. Так само, як і в (2.17) ми маємо, що

$$h(\gamma^2(t), \partial D)\rightarrow 0 \tag{2.18}$$

при $t\rightarrow d-0$. Зі співвідношень (2.17) і (2.18), враховуючи [11, теорема 1.I.5.46], випливає існування чисел $1\leqslant t^1<c$ і $d\leqslant t^2<0$ і елементів $x^1:=\gamma^1(t^1)$ і $x^2:=\gamma^2(t^2)\in S(x_0, 2r_0)$. Без обмеження загальності, можна вважати, що $\gamma^1(t)\in B(x_0, 2r_0)$ при всіх $t\in[1, t^1]$ і $\gamma^2(t)\in B(x_0, 2r_0)$ при всіх $t\in[t^2, 0]$. Нехай

$$\beta^1:=\gamma^1|_{[1,t^1]},\qquad \beta^2:=\gamma^2|_{[t^2,0]},\qquad \Gamma:=(|\beta^1|, |\beta^2|, B(x_0, 2r_0))\,.$$

Тоді з одного боку за [83, лема 4.3]

$$M(\Gamma)\geqslant (1/2)\cdot M(\Gamma(|\beta^1|, |\beta^2|, \mathbb{R}^n))\,, \tag{2.19}$$

а з іншого боку, за [81, лема 7.38]

$$M(\Gamma(|\beta^1|, |\beta^2|, \mathbb{R}^n)) \geqslant c_n \cdot \log\left(1 + \frac{1}{m}\right), \qquad (2.20)$$

де $c_n > 0$ – деяка стала, яка залежить лише від n,

$$m = \frac{\mathrm{dist}(|\beta^1|, |\beta^2|)}{\min\{\mathrm{diam}\,(|\beta^1|), \mathrm{diam}\,(|\beta^2|)\}}\,.$$

Зауважимо, що $\mathrm{diam}\,(|\beta^i|) = \sup\limits_{x,y\in|\beta^i|} |x-y| \geqslant r_0$, $i = 1, 2$. Тоді поєднуючи (2.19) і (2.20) і враховуючи, що $\mathrm{dist}\,(|\beta^1|, |\beta^2|) \leqslant |x - x_0|$, ми отримуємо, що

$$M(\Gamma) \geqslant \widetilde{c_n} \cdot \log\left(1 + \frac{r_0}{\mathrm{dist}(|\beta^1|, |\beta^2|)}\right) \geqslant \widetilde{c_n} \cdot \log\left(1 + \frac{r_0}{|x - x_0|}\right), \qquad (2.21)$$

де $\widetilde{c_n} > 0$ – деяка стала, яка залежить тільки від n.

Встановимо тепер верхню оцінку для $M(\Gamma)$. Нехай P – частина прямої $r(t)$, розташована між точками $f(x)$ і $z^1 := f(x^1) = f(\gamma^1(t^1))$, а Q – частина прямої $r(t)$, розташована між точками $f(x_0)$ і $z^2 := f(x^2) = f(\gamma^2(t^2))$. Покладемо

$$A := A(z^1, \varepsilon^1, \varepsilon^2) = \{x \in \mathbb{R}^n : \varepsilon^1 < |x - z^1| < \varepsilon^2\}\,,$$

де $\varepsilon^1 := |f(x) - z^1|$, $\varepsilon^2 := |f(x_0) - z^1|$. Покажемо, що

$$f(\Gamma) > \Gamma(S(z^1, \varepsilon^1), S(z^1, \varepsilon^2), A)\,. \qquad (2.22)$$

Справді, нехай $\gamma \in \Gamma$. Тоді $f(\gamma) \in f(\Gamma)$, $f(\gamma) = f(\gamma(s)) : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$, $f(\gamma(0)) \in P$, $f(\gamma(1)) \in Q$ і $f(\gamma(s)) \in f(D)$ при $0 < s < 1$. Нехай $q > 1$ – число, таке що

$$z^1 = f(x_0) + (f(x) - f(x_0))\,q.$$

Оскільки $f(\gamma(0)) \in P$, знайдеться $1 \leqslant t \leqslant q$ таке, що $f(\gamma(0)) = f(x_0) + (f(x) - f(x_0))t$. Отже,

$$|f(\gamma(0)) - z^1| = |(f(x) - f(x_0))(q - t)| \leqslant$$

$$\leqslant |(f(x)-f(x_0))(q-1)| = |(f(x)-f(x_0))q + f(x_0) - f(x))| = \tag{2.23}$$
$$= |f(x)-z^1| = \varepsilon^1\,.$$

З іншого боку, оскільки $f(\gamma(1))\in Q$, знайдеться $p\leqslant 0$ таке, що

$$f(\gamma(1)) = f(x_0) + (f(x)-f(x_0))p\,.$$

В такому випадку, ми отримаємо, що

$$|f(\gamma(1))-z^1| = |(f(x)-f(x_0))(q-p)| \geqslant$$
$$\geqslant |(f(x)-f(x_0))q| = |(f(x)-f(x_0))q + f(x_0) - f(x_0)| = \tag{2.24}$$
$$= |f(x_0)-z^1| = \varepsilon^2\,.$$

Зауважимо, що

$$|f(x_0)-f(x)| + \varepsilon^1 =$$
$$= |f(x_0)-f(x)| + |f(x)-z^1| = |z^1 - f(x_0)| = \varepsilon^2\,, \tag{2.25}$$

а, отже, $\varepsilon^1<\varepsilon^2$. Тоді з (2.24) випливає, що

$$|f(\gamma(1))-z^1| > \varepsilon^1\,. \tag{2.26}$$

З (2.23) і (2.26) випливає, що $|f(\gamma)|\cap\overline{B(z^1,\varepsilon^1)}\neq\varnothing\neq(f(D)\setminus\overline{B(z^1,\varepsilon^1)})\cap|f(\gamma)|$. В такому випадку, за [11, теорема 1.I.5.46] знайдеться $t_1\in(0,1)$ таке, що $f(\gamma(t_1))\in S(z^1,\varepsilon^1)$. Без обмеження загальності, ми можемо вважати, що $f(\gamma(t))\notin B(z^1,\varepsilon^1)$ при $t\in(t_1,1)$. Покладемо $\alpha^1:=f(\gamma)|_{[t_1,1]}$.

З іншого боку, оскільки $\varepsilon^1<\varepsilon^2$ і $f(\gamma(t_1))\in S(z^1,\varepsilon^1)$, ми отримаємо, що $|\alpha^1|\cap B(z^1,\varepsilon^2)\neq\varnothing$. Із співвідношення (2.24) ми отримаємо, що $(f(D)\setminus B(z^1,\varepsilon^2))\cap|\alpha^1|\neq\varnothing$. Отже, за [11, теорема 1.I.5.46] існує $t_2\in(t_1,1)$ таке, що $\alpha^1(t_2)\in S(z^1,\varepsilon^2)$. Без обмеження загальності, ми можемо вважати, що $f(\gamma(t))\in B(z^1,\varepsilon^2)$ при $t\in(t_1,t_2)$. Покладемо $\alpha^2:=\alpha^1|_{[t_1,t_2]}$. Тоді $f(\gamma)>\alpha^2$ і $\alpha^2\in\Gamma(S(z^1,\varepsilon^1),S(z^1,\varepsilon^2),A)$. Таким чином, співвідношення (2.22) доведене.

З (2.22) випливає, що $\Gamma > \Gamma_f(z^1, \varepsilon^1, \varepsilon^2)$. Тепер покладемо

$$\eta(t) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon_0}, & t \in [\varepsilon^1, \varepsilon^2], \\ 0, & t \notin [\varepsilon^1, \varepsilon^2]\,. \end{cases}$$

Зауважимо, що η задовольняє співвідношення (2.12) при $r_1 = \varepsilon^1$ і $r_2 = \varepsilon^2$. Справді, з (2.16) і (2.25) випливає, що

$$r_1 - r_2 = \varepsilon^2 - \varepsilon^1 = |f(x_0) - z^1| - |f(x) - z^1| =$$

$$= |f(x) - f(x_0)| = \varepsilon_0\,.$$

Тоді $\int\limits_{\varepsilon^1}^{\varepsilon^2} \eta(t)\,dt = (1/\varepsilon_0)\cdot(\varepsilon^2 - \varepsilon^1) \geqslant 1$. За нерівністю (2.22), а також співвідношенням (2.11), застосованим в точці z^1 і покладеним в основу означення сім'ї $\mathfrak{F}_Q(D)$, ми отримаємо, що

$$M(\Gamma) \leqslant M(\Gamma_f(z^1, \varepsilon^1, \varepsilon^2)) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\varepsilon_0^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} Q(y)\,dm(y) = \frac{\|Q\|_1}{|f(x) - f(x_0)|^n}\,. \tag{2.27}$$

З (2.21) і (2.27) випливає, що

$$\widetilde{c_n} \cdot \log\left(1 + \frac{r_0}{|x - x_0|}\right) \leqslant \frac{\|Q\|_1}{|f(x) - f(x_0)|^n}\,.$$

З останнього співвідношення випливає бажана нерівність (2.15), де $C_n := \widetilde{c_n}^{\,-1/n}$.

$\square$

Зауваження 2.2.1. Стосовно оцінок типу Гельдера щодо квазіконформних відображень і відображень з обмеженим спотворенням див., напр., [14, наслідок 1.II.1], [55, теорема 3.2.II], [57, теорема 3.2] і [79, теорема 18.1, зауваження 18.4]. Для відображень з обмеженим інтегралом Діріхле див., напр., [36, теореми 1.1.V і 2.1.V]

Окремим випадком теореми 2.2.1 є ситуація, коли f є гомеоморфізмом у D. Позначимо в цьому випадку $g := f^{-1}$ і зауважимо, що

$$g(\Gamma(S(y_0, r_1), S(y_0, r_2), f(D))) = \Gamma_f(y_0, r_1, r_2)\,. \tag{2.28}$$

Справді, якщо $\gamma \in g(\Gamma(S(y_0, r_1), S(y_0, r_2), f(D)))$, то $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, де $\gamma = g \circ \alpha$, $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ і $\alpha(a) \in S(y_0, r_1)$, $\alpha(b) \in S(y_0, r_2)$ і $\alpha(t) \in f(D)$ при $a \leqslant t \leqslant b$. Тоді $\gamma(t) \in D$ при $a \leqslant t \leqslant b$ і $f(\gamma) = \alpha \in \Gamma(S(y_0, r_1), S(y_0, r_2), f(D))$, тобто, $\gamma \in \Gamma_f(y_0, r_1, r_2)$. Отже, $g(\Gamma(S(y_0, r_1), S(y_0, r_2), f(D))) \subset \Gamma_f(y_0, r_1, r_2)$. Обернене включення доводиться аналогічно. З теореми 2.2.1, з урахуванням співвідношення (2.28), випливає наступне твердження.

Наслідок 2.2.1. *Нехай $Q \in L^1(\mathbb{R}^n)$ і нехай $f : D \to \mathbb{R}^n$ – гомеоморфізм такий, що для кожного $x_0 \in D$ і всіх $0 < r_1 < r_2 < d_0 = \sup\limits_{x \in D} |x - x_0|$ співвідношення*

$$M(f(\Gamma(S(x_0, r_1), S(x_0, r_2), D))) \leqslant \int\limits_{A(x_0, r_1, r_2) \cap D} Q(x) \cdot \eta^n(|x - x_0|)\, dm(x)$$

виконується для довільної вимірної за Лебегом функції $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$ з умовою (2.12).

Покладемо $g = f^{-1}$. Тоді знайдеться стала $C_n > 0$, яка залежить тільки від розмірності простору n, така що для будь-якого $y_0 \in f(D)$ і будь-якого $0 < 2r_0 < \operatorname{dist}(y_0, \partial f(D))$ виконується нерівність

$$|g(y) - g(y_0)| \leqslant \frac{C_n \cdot (\|Q\|_1)^{1/n}}{\log^{1/n}\left(1 + \frac{r_0}{|y - y_0|}\right)} \quad \forall\, y \in B(y_0, r_0)\,,$$

де $\|Q\|_1$ – норма функції Q в $L^1(\mathbb{R}^n)$.

2.3 Усувність ізольованої сингулярності відображень з оберненою нерівністю Полецького

У цьому підрозділі ми розглядаємо можливість усунення ізольованих сингулярностей відображень, обернені до яких задовольняють (1.6).

Ізольовані сингулярності вивчалися в [16, теорема 6.1], [35, теорема 5] та [61, наслідок 5.23], однак, крім (1.6), ми не припускали жодних додаткових умов на області визначення та їх образи.

Наступне важливе твердження опубліковане в [6, лема 5.3], див. також [60, лема 6.5].

Пропозиція 2.3.1. *Нехай D і D' – області в $\overline{\mathbb{R}^n}$, $n \geqslant 2$, і $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ гомеоморфізм. Тоді існує взаємнооднозначна відповідність між компонентами K і K' меж ∂D і $\partial D'$ такі, що $C(f, K) = K'$ і $C(f^{-1}, K') = K$.*

Твердження наступної теореми доведене в [75, теорема 1.2].

Теорема 2.3.1. *Нехай D і D' – області в $\overline{\mathbb{R}^n}$, $n \geqslant 2$, і нехай g – гомеоморфізм області D' на область D, обернене $f = g^{-1}$ до якого задовольняє умову (1.6) в кожній точці $x_0 \in \partial D$. Якщо $Q \in L^1(D)$ і y_0 ізольована точка межі області D', тоді відображення g має неперервне продовження $\overline{g} : D' \cup \{y_0\} \to \overline{\mathbb{R}^n}$ в точку y_0.*

Доведення. Без обмеження загальності, ми можемо вважати. що $y_0 \neq \infty$. Тут і надалі, як зазвичай, $h(x, y)$ позначає хордальну (сферичну) відстань між точками $x, y \in \overline{\mathbb{R}^n}$, див. (2.14).

Припустимо протилежне, а саме, що g не має границі в точці y_0. Оскільки простір $\overline{\mathbb{R}^n}$ компактний, то $C(g, y_0) \neq \varnothing$. Тоді знайдуться $x_1, x_2 \in \overline{\mathbb{R}^n}$, $x_1 \neq x_2$, і, щонайменше, дві послідовності $y_m, y'_m \to y_0$ коли $m \to \infty$ такі, що $z_m := g(y_m) \to x_1$, $z'_m = g(y'_m) \to x_2$ коли $m \to \infty$. Без обмеження загальності, можемо вважати, що $x_1 \neq \infty$.

Оскільки $y_0 \in \partial D'$ ізольована точка $\partial D'$, $C(g, y_0)$ континуум і, більше того, компонента межі ∂D (див. пропозиція 2.3.1). Покажемо, що існує $\varepsilon_1 > 0$ таке, що

$$B(x_1, \varepsilon_1) \cap K = \varnothing \qquad (2.29)$$

для кожної компоненти K межі ∂D такої, що $C(g, y_0) \neq K$.

Доведемо співвідношення (2.29) від супротивного. Припустимо протилежне, тобто що знайдеться послідовність d_m компонент ∂D, $d_m \neq C(g, y_0)$, $m = 1, 2, \ldots,$ таких, що $B(x_1, 1/m) \cap d_m \neq \varnothing$. За пропозицією 2.3.1, компонента d_m множини ∂D еквівалентна компоненті $d'_m \subset \partial D'$ так, що $C(f, d_m) = d'_m$. Тому, ми можемо обрати $\zeta_m \in B(x_1, 1/m) \cap D$ так, що

$$h(f(\zeta_m), d'_m) = \inf_{p \in d'_m} h(f(\zeta_m), p) < 1/m\,.$$

Оскільки d'_m компактна множина в $\overline{\mathbb{R}^n}$, знайдеться $\xi_m \in d'_m$ така, що $h(f(\zeta_m), d'_m) = h(f(\zeta_m), \xi_m)$. Оскільки $\overline{\mathbb{R}^n}$ компакт, знайдеться послідовність $f(\zeta_{m_k})$, збіжна в $\overline{\mathbb{R}^n}$ коли $k \to \infty$. Оскільки $\zeta_{m_k} \in B(x_1, 1/m_k)$, тоді, за пропозицією 2.3.1 послідовність $f(\zeta_{m_k})$ може збігатись лише до y_0 коли $k \to \infty$. Тоді, за нерівністю трикутника

$$h(y_0, d'_{m_k}) \leqslant h(y_0, \xi_{m_k}) \leqslant h(y_0, f(\zeta_{m_k})) + h(f(\zeta_{m_k}), \xi_{m_k}) \to 0$$

коли $k \to \infty$, що суперечить припущенню, що точка y_0 ізольована точка $\partial D'$.

Ми можемо вважати, що $f(x) \neq \infty$ при $x \in B(x_1, \varepsilon_1) \cap D$. Нехай $B_*(x_2, \varepsilon_2) = B(x_2, \varepsilon_2)$ при $x_2 \neq \infty$ і $B_*(x_2, \varepsilon_2) = \{x \in \overline{\mathbb{R}^n} : h(x, \infty) < \varepsilon_2\}$ при $x_2 = \infty$. Як при доведенні (2.29) знайдеться $\varepsilon_2 > 0$ таке, що

$$B_*(x_2, \varepsilon_2) \cap K = \varnothing$$

для будь-якої компоненти K межі ∂D, що не дорівнює $C(g, y_0) \neq K$. Без обмеження загальності, можна сказати, що $\overline{B(x_1, \varepsilon_1)} \cap \overline{B_*(x_2, \varepsilon_2)} = \varnothing$, $z_m \in B(x_1, \varepsilon_1)$ і $z'_m \in B_*(x_2, \varepsilon_2)$ для всіх $m = 1, 2, \ldots.$ Зауважимо, що множина $B(x_1, \varepsilon_1)$ опукла, і $B_*(x_2, \varepsilon_2)$ лінійно зв'язна. У цьому випадку, точки z_1 і z_m можна з'єднати відрізком $I_m(t) = z_1 + t(z_m - z_1)$, $t \in (0, 1)$, що лежать всередині кулі $B(x_1, \varepsilon_1)$. Аналогічно, точки z'_1 і z'_m можемо з'єднати відрізком $J_m = J_m(t)$, $t \in [0, 1]$, що лежить в "кулі" $B_*(x_2, \varepsilon_2)$.

Зауважимо, що множина $|I_m|$ не лежить всередині області D повністю. Однак, у цьому випадку, знайдеться $t_m \in [0, 1]$ таке, що $|I_m|_{[0, t_m]}| \subset$

D і $h(I_m(t_m), \partial D) < 1/m$. Аналогічно, J_m може не лежати в D повністю, але знайдеться $p_m \in [0,1]$ таке. що $h(J_m(p_m), \partial D) < 1/m$ і $|J_m|_{[0,p_m]}| \subset D$. Якщо $I_m \subset D$ або $J_m \subset D$, тоді покладемо $t_m := 1$ і $p_m := 1$, відповідно. Покладемо $C_m^1 := I_m|_{[0,t_m]}$ і $C_m^2 := J_m|_{[0,p_m]}|$. Розглянемо послідовності $y_m^* := f(I_m(t_m))$ і $y_m^{**} := f(J_m(p_m))$. Оскільки простір $\overline{\mathbb{R}^n}$ компактний, можемо вважати, що всі розглянуті послідовності $I_m(t_m)$, $J_m(p_m)$, y_m^* і y_m^{**} збігаються при $m \to \infty$.

Покажемо, що $y_m^* \to y_0$ і $y_m^{**} \to y_0$ коли $m \to \infty$. Дійсно, нехай $y_m^* \to w_0$ коли $m \to \infty$. Оскільки послідовність $I_m(t_m)$ збігається за припущенням, і, більше того, $h(I_m(t_m), \partial D) < 1/m$, тоді $I_m(t_m)$ збігається до деякої точки $\omega_0 \in \partial D$. Оскільки $I_m(t_m) \in B(x_1, \varepsilon_1)$, і, більше того, за (2.29) куля $B(x_1, \varepsilon_1)$ не містить інших компонент ∂D окрім $C(g, y_0)$, маємо, що $\omega_0 \in C(g, y_0)$. Оскільки $y_m^* = f(I_m(t_m))$ і $y_m^* \to y_0$ коли $m \to \infty$, отримаємо, що $w_0 \in C(f, C(g, y_0))$. Беручи до уваги. що $g = f^{-1}$, за пропозицією 2.3.1 маємо $w_0 = y_0$. Аналогічно міркуючи, можна показати, що $y_m^{**} \to y_0$ коли $m \to \infty$.

Оскільки $\overline{B(x_1, \varepsilon_1)} \cap \overline{B_*(x_2, \varepsilon_2)} = \varnothing$, тоді для деякого $\varepsilon_1^* > \varepsilon_1$ ми також маємо, що $\overline{B(x_1, \varepsilon_1^*)} \cap \overline{B_*(x_2, \varepsilon_2)} = \varnothing$. Можемо вважати, що $f(x) \neq \infty$ при $x \in B(x_1, \varepsilon_1^*) \cap D$. Нехай $\Gamma_m = \Gamma(|C_m^1|, |C_m^2|, D)$. Зауважимо, що

$$\Gamma_m > \Gamma(S(x_1, \varepsilon_1^*), S(x_1, \varepsilon_1), A(x_1, \varepsilon_1, \varepsilon_1^*) \cap D)\,. \tag{2.30}$$

Нарешті, нехай $\gamma \in \Gamma_m$, $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$. Оскільки $\gamma(a) \in |C_m^1| \subset B(x_0, \varepsilon_1)$ і $\gamma(b) \in |C_m^2| \subset \mathbb{R}^n \backslash B(x_0, \varepsilon_1)$, за [11, теорема 1.I.5.46] знайдеться параметр $t_1 \in (a, b)$ такий, що $\gamma(t_1) \in S(x_1, \varepsilon_1)$. Без обмеження загальності, ми можемо вважати, що $|\gamma(t) - x_1| > \varepsilon_1$ при $t > t_1$. Далі, оскільки $\gamma(t_1) \in B(x_1, \varepsilon_1^*)$ і $\gamma(b) \in |C_m^2| \subset \mathbb{R}^n \backslash B(x_0, \varepsilon_1^*)$, за [11, теорема 1.I.5.46] знайдеться $t_2 \in (t_1, b)$ таке, що $\gamma(t_2) \in S(x_1, \varepsilon_1^*)$. Без обмеження загальності, ми можемо вважати, що $|\gamma(t) - x_1| < \varepsilon_1^*$ при $t_1 < t < t_2$. Таким чином, $\gamma|_{[t_1, t_2]}$ це підкрива кривої γ, що належить сім'ї

$$\Gamma(S(x_1, \varepsilon_1^*), S(x_1, \varepsilon_1), A(x_1, \varepsilon_1, \varepsilon_1^*)).$$

Таким чином, співвідношення (2.30) встановлене. Розглянемо функцію

$$\eta(t) \quad = \quad \begin{cases} 1/(\varepsilon_1^* - \varepsilon_1), & t \in [\varepsilon_1, \varepsilon_1^*], \\ 0, & t \in \mathbb{R} \setminus [\varepsilon_1, \varepsilon_1^*]\,. \end{cases}$$

Зауважимо, що функція η задовольняє співвідношення (1.7) при $r_1 = \varepsilon_1$ і $r_2 = \varepsilon_1^*$. За (1.6) в точці $x_0 := x_1$, беручи до уваги, що $Q \in L^1(D)$ та (2.30), маємо:

$$M(f(\Gamma_m)) \leqslant M(f(\Gamma(S(x_1, \varepsilon_1^*), S(x_1, \varepsilon_1), A(x_1, \varepsilon_1, \varepsilon_1^*) \cap D))) \leqslant \qquad (2.31)$$
$$\leqslant \|Q\|/(\varepsilon_1^* - \varepsilon_1)^n < \infty\,,$$

де $\|Q\|$ позначає L^1-норму функції Q в D. Покажемо, що співвідношення (2.31) суперечить умові слабкої плоскості в точці y_0 (див. лема 2.1.1). Справді,

$$\mathrm{diam}\,|f(C_m^1)| \geqslant |f(z_1) - f(I_m(t_m))| = |y_1 - y_m^*| \geqslant (1/2) \cdot |y_1 - y_0| > 0$$

і

$$\mathrm{diam}\,|f(C_m^2)| \geqslant |f(z_1') - f(J_m(p_m))| = |y_1' - y_m^{**}| \geqslant (1/2) \cdot |y_1' - y_0| > 0$$

для великих $m \in \mathbb{N}$, і, також,

$$\mathrm{dist}\,(|f(C_m^1)|, |f(C_m^2)|) \leqslant |y_m^* - y_m^{**}| \to 0$$

при $m \to \infty$. За лемою 2.1.1

$$M(f(\Gamma_m)) = M(\Gamma(|f(C_m^1)|, |f(C_m^2)|, D')) \to \infty$$

коли $m \to \infty$, що суперечить співвідношенню (2.31). □

Теорема 2.3.1 не вказує на можливість усунення ізольованої сингулярності відображення f, див. [60, пропозиція 6.3], хоча для квазіконформних відображень, як у конкретному випадку таких класів, ми все ще можемо стверджувати обгрунтованість теореми 2.3.1 для f і g, див. [79, теорема 17.3]. Як і раніше, межа, замикання, і неперервне продовження відображень розуміється в сенсі розширеного простору $\overline{\mathbb{R}^n}$.

Зауваження 2.3.1. Неважко помітити, що твердження теореми 2.3.1 виконується при більш слабких умовах на відображення f, а саме, достатньо вимагати умову (1.6) лише в кінцевій точці граничної множини $C(g, y_0)$.

Більше того, не так важливо вимагати умову (1.6) в ∂D або в D. Справді, припустимо, що за умов теореми 2.3.1 ми вимагаємо співвідношення (1.6) не на ∂D, а у кожній внутрішній точці $x_0 \in D$. Повторюючи доведення теореми покроково в тому ж порядку, отримаємо (2.30). Тепер нехай $a_k \in D$, $k = 1, 2, \ldots,$ деяка (довільна) послідовність точок, що збігається до x_1 коли $k \to \infty$ така, що $|a_k - x_1| < 1/k$. Зафіксуємо $x \in B(x_1, \varepsilon_1)$. Тоді, за нерівністю трикутника $|x-a_k| \leqslant |x-x_1|+|x_1-a_k| < \varepsilon_1+1/k$ і, тому, $B(x_1, \varepsilon_1) \subset B(a_k, \varepsilon_1+1/k)$. Далі, для $x \in B(a_k, \varepsilon_1+2/k)$ за нерівністю трикутника, маємо:

$$|x - x_1| \leqslant |x - a_k| + |a_k - x_1| < \varepsilon_1 + 3/k\,.$$

Нехай $k_0 \in \mathbb{N}$ досить велике, щоб $\varepsilon_1 + 3/k < \varepsilon_1^*$ при $k > k_0$. Тоді $B(a_k, \varepsilon_1 + 2/k) \subset B(x_1, \varepsilon_1^*)$ при $k > k_0$. Поклавши $\widetilde{\varepsilon_1} := \varepsilon_1 + 1/(k_0 + 1)$ і $\widetilde{\varepsilon_2} := \varepsilon_1 + 2/(k_0 + 1)$, ми отримаємо, що

$$B(x_1, \varepsilon_1) \subset B(a_{k_0+1}, \widetilde{\varepsilon_1}) \subset B(a_{k_0+1}, \widetilde{\varepsilon_2}) \subset B(x_1, \varepsilon_1^*)\,. \qquad (2.32)$$

Аргументуючи аналогічно до доведення формули (2.30), зі співвідношення (2.32) отримаємо

$$\Gamma(S(x_1, \varepsilon_1^*), S(x_1, \varepsilon_1), A(x_1, \varepsilon_1, \varepsilon_1^*) \cap D) >$$

$$> \Gamma(S(a_{k_0+1}, \widetilde{\varepsilon_1}), S(a_{k_0+1}, \widetilde{\varepsilon_2}), A(a_{k_0+1}, \widetilde{\varepsilon_1}, \widetilde{\varepsilon_2}) \cap D)\,, \qquad (2.33)$$

Розглянемо функцію

$$\eta(t) \quad = \quad \begin{cases} 1/(\widetilde{\varepsilon_2} - \widetilde{\varepsilon_1}), & t \in [\widetilde{\varepsilon_1}, \widetilde{\varepsilon_2}], \\ 0, & t \in \mathbb{R} \setminus [\widetilde{\varepsilon_1}, \widetilde{\varepsilon_2}]\,. \end{cases}$$

Зауважимо, що функція η задовольняє умову (1.7) при $r_1 = \widetilde{\varepsilon_1}$ і $r_2 = \widetilde{\varepsilon_2}$.

Тоді за (1.6) в $x_0 := a_{k_0+1}$, беручи до уваги, що $Q \in L^1(D)$ та співвідношення (2.30) і (2.33), маємо:

$$M(f(\Gamma_m)) \leqslant M(f(\Gamma(S(a_{k_0+1}, \widetilde{\varepsilon_1}), S(a_{k_0+1}, \widetilde{\varepsilon_2}), A(a_{k_0+1}, \widetilde{\varepsilon_1}, \widetilde{\varepsilon_2}) \cap D))) \leqslant$$

$$\leqslant \|Q\|/(\widetilde{\varepsilon_2} - \widetilde{\varepsilon_1})^n < \infty\,, \tag{2.34}$$

де $\|Q\|$ позначає L^1-норму Q в D. Отже, замість (2.31) ми маємо співвідношення (2.34). Решта доведення теореми 2.3.1, базується на протиріччі (2.34) умові слабкої плоскості у точці y_0, без змін.

2.4 Деякі приклади

Наведені нижче приклади, використані в [75] для опису теорем 2.1.2 та 2.3.1.

Приклад 2.4.1. Ми вже згадували, що відображення, обернені до заданого класу, можуть виявитись кращими (або гіршими) ніж вихідний клас. Цей випадок можливий для квазіконформних відображень, але цілком реальний для відносно простих відображень з необмеженою характеристикою.

Зафіксуємо номер $p \geqslant 1$ що задовольняє умову $n/p(n-1) < 1$. Покладемо $\alpha \in (0, n/p(n-1))$. Позначимо f_m послідовність відображень одиничної кулі на кулю $B(0,2)$:

$$f_m(x) = \begin{cases} \frac{1+|x|^\alpha}{|x|} \cdot x\,, & 1/m \leqslant |x| \leqslant 1, \\ \frac{1+(1/m)^\alpha}{(1/m)} \cdot x\,, & 0 < |x| < 1/m\,. \end{cases}$$

Зауважимо, що f_m задовольняє умову (1.6) при $Q = \left(\frac{1+|x|^\alpha}{\alpha|x|^\alpha}\right)^{n-1}$ у кожній точці $x_0 \in \overline{\mathbb{B}^n}$, більше того, $Q \in L^p(\mathbb{B}^n)$ див., наприклад, [25, доведення теореми 7.1].

За [83, лема 4.3], куля $B(0,2)$ має слабко плоску межу. Зауважимо, що відображення f_m фіксує скінченну кількість точок одиничної куля при кожному $m \geqslant 2$. За [75, теорема 2], сім'я $\mathfrak{G} = \{g_m\}_{m=1}^{\infty}$, $g_m := f_m^{-1}$, є одностайно неперервною в $\overline{B(0,2)}$.

Зауважимо, що "обернена" сім'я відображень $\mathfrak{F} = \{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ не одностайно неперервна в $\mathbb{B}^n$. Дійсно, $|f_m(x_m) - f_m(0)| = 1 + 1/m \to 1$ коли $m \to \infty$, де $|x_m| = 1/m$. Зокрема, це випливає з того, що сім'я $\mathfrak{G}$ містить скінченну кількість відображень $g_{m_k} := f_{m_k}^{-1}$, $f_{m_k} \in \mathfrak{F}$, що не задовольняють умову (1.6) для будь-якої функції $Q \in L^1$. Дійсно, в іншому випадку, за теоремою 2.1.2, сім'я $\mathfrak{F}$ має бути одностайно неперервною в $\mathbb{B}^n$.

Приклад 2.4.2. Стосовно теореми 2.3.1, ми також можемо побудувати приклад, дуже схожий на той, що був наведений вище. А саме, зазначимо випадок, коли обернене відображення продовжується за неперервністю в ізольовану точку межі області та відповідне пряме відображення вже не має цієї властивості.

Нехай $p \geqslant 1$, $\alpha \in (0, n/p(n-1))$ і $e_1 = (0, 0, \ldots, 0, 1/2)$. Розглянемо відображення f області $D := \mathbb{B}^n \setminus \{e_1 \cup 0\}$ таким чином:

$$f(x) \;=\; \frac{1 + |x|^{\alpha}}{|x|} \cdot x\,, \quad x \in \mathbb{B}^n \setminus \{e_1 \cup 0\}\,.$$

Легко бачити, що відображення f кільцеве Q-відображення $\mathbb{B}^n \setminus \{e_1 \cup 0\}$ на $A := \{1 < |y| < 2\} \setminus \{e_2\}$, де $Q(x) := \left(\frac{1+r^{\alpha}}{\alpha r^{\alpha}}\right)^{n-1}$, $r = |x|$ (див., напр., [60, пропозиція 6.3]). Більше того, $Q \in L^p(\mathbb{B}^n)$. Зауважимо, що $f(e_1) = (0, 0, \ldots, 1 + (1/2)^{\alpha}) := e_2$. Обернене відображення $g := f^{-1}(y) = \frac{y}{|y|}(|y| - 1)^{1/\alpha}$ має неперервне продовження в точку e_2, $\overline{g} := \frac{y}{|y|}(|y| - 1)^{1/\alpha}$, $\overline{g} : \{1 < |y| < 2\} \to \mathbb{B}^n \setminus \{0\}$ (існування цього продовження також випливає з теореми 2.3.1). З іншого боку, відображення $\overline{f} := \overline{g^{-1}}$, $\overline{f} : \mathbb{B}^n \setminus \{0\} \to \{1 < |y| < 2\}$, не має неперервного продовження в точку 0, яка є ізольованою точкою межі області $\mathbb{B}^n \setminus \{0\}$. Остання обставина пов'язана з відсутністю підінтегральної функції $Q^*(y)$, вдіносно відображення $\overline{g}$ в $\{1 < |y| < 2\}$ в контексті нерівності (1.6).

Висновки до розділу 2

У даному розділі розвинута теорія відображень евклідового простору:

1. Була доведена одностайна неперервність сімей відображень у внутрішніх точках відображень, обернені до яких є Q-гомеоморфізмами (теорема 2.1.1) та кільцевими Q-гомеоморфізмами (теорема 2.1.2) за умови, що відповідна функція Q з означень цих класів є інтегровною в D.

2. Доведена теорема про одностайну неперервність (теорема 2.2.1) сім'ї відкритих дискретних відображень, що задовольняють обернену нерівність Полецького у кожній точці образу області за умови виконання логарифмічної нерівності. Також доведений наслідок теореми у випадку, коли f є гомеоморфізмом в D (наслідок 2.2.1).

3. Отримані результати. щодо можливості продовження гомеоморфізмів між областями D' на D евклідового простору, обернені до яких є кільцевими $Q-$ відображеннями в $x_0 \in \partial D$ за умови інтегровності функції Q.

РОЗДІЛ 3

ПОВЕДІНКА ПРЯМИХ ТА ОБЕРНЕНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ ЕВКЛІДОВОГО ПРОСТОРУ НА МЕЖІ ТА В ЗАМИКАННІ ОБЛАСТІ

У даному розділі досліджується поведінка відображень, що діють між областями евклідового простору.

У розділі міститься 4 підрозділи, у першому з яких йдеться про межову поведінку відображень з оберненою нерівністю Полецького. У другому підрозділі була досліджена одностайна неперервність гомеоморфізмів в замиканні області. У третьому підрозділі доведена одностайна неперевність відображень у замиканні області у випадку змінних областей. Нарешті, в останньому підрозділі доведені теореми про локальну і межову поведінку відображень в термінах простих кінців.

3.1 Межова поведінка відображень з оберненою нерівністю Полецького

Результати, що стосуються межової поведінки відображень з оберненою нерівністю Полецького, наведені далі, були опубліковані в [75]. Сформулюємо твердження, необхідні нам для доведення основного результату підрозділу.

Доведення наступної леми можна знайти, наприклад, в [32, пропозиція 1].

Лема 3.1.1. *Нехай $n \geqslant 2$, і D область в $\mathbb{R}^n$ локально зв'язна на своїй межі. Тоді будь-які дві пари точок $a \in D, b \in \overline{D}$ і $c \in D, d \in \overline{D}$, такі,* *що* $a \neq c$ *і* $b \neq d$ *можна з'єднати непересічними кривими* $\gamma_1 : [0,1] \to \overline{D}$ *і* $\gamma_2 : [0,1] \to \overline{D}$ *так, що* $\gamma_i(t) \in D$ *для всіх* $t \in (0,1)$ *і* $i = 1,2$, *та* $\gamma_1(0) = a$, $\gamma_1(1) = b$, $\gamma_2(0) = c$ *і* $\gamma_2(1) = d$.

Ми доводимо одне важливе топологічне твердження про наближення образу континуума до межі області. Зауважимо, що схожі твердження відомі для квазіконформних відображень, див., наприклад, [79, теореми 21.13 і 21.14]. Однак, ми доводимо цей результат для більш загальних класів відображень та за нашою власною схемою доведення, відмінною від [79]. Сенс цього твердження полягає в тому, що образ фіксованого континуума при відображенні, що задовольняє оцінку (1.6) не може наблизитися до межі області образу, якщо ця область має деякі «гарні» властивості і діаметр образу континуума обмежений знизу (див. доведення в [75, лема 4.1]).

Лема 3.1.2. *Нехай* $n \geqslant 2$, *а* D *– область, обмежена в* $\mathbb{R}^n$, *і нехай* D' *деяка область в* $\overline{\mathbb{R}^n}$. *Припустимо, що* D *локально зв'язна на* ∂D, D' *має слабко плоску межу,* $Q \in L^1(D)$ *і, більше того, жодна компонента множини* $\partial D'$ *не вироджується в точку. Нехай* $f_m : D \to D'$ *послідовність гомеоморфізмів області* D *на* D', *що задовольняє співвідношення (1.6) в* D *з однією функцією* Q.

Припустимо також, що існує континуум $A \subset D$ *і число* $\delta > 0$ *таке, що* $h(f_m(A)) \geqslant \delta > 0$ *для всіх* $m = 1,2,\ldots$, *де, як зазвичай,* $h(f_m(A))$ *визначений в (2.14). Тоді існує число* $\delta_1 > 0$ *таке, що*

$$h(f_m(A), \partial D') > \delta_1 > 0 \quad \forall\, m \in \mathbb{N}\,,$$

де $h(f_m(A), \partial D') = \inf\limits_{x \in f_m(A), y \in \partial D'} h(x,y)$.

Доведення. Оскільки D обмежена область і, більше того, $f_m(D) = D'$, $m = 1,2,\ldots$, тоді $\partial D' \neq \varnothing$. Таким чином, відстань $h(f_m(A), \partial D')$ визначена.

Здійснимо доведення від супротивного. Припустимо, що висновок леми не вірний. Тоді для кожного $k\in\mathbb{N}$ існує деякий номер $m=m_k$ такий, що $h(f_{m_k}(A),\partial D')<1/k$. Звичайно, ми можемо припустити, що послідовність m_k зростає по k. Оскільки $\overline{\mathbb{R}^n}$ компакт, тому множина $\partial D'$ є також компактом у розширеному евклідовому просторі. Зауважимо, що множина $f_{m_k}(A)$ є компактом, як неперервний образ компактної множини $A\subset D$ при відображенні f_{m_k}. У цьому випадку, існують елементи $x_k\in f_{m_k}(A)$ і $y_k\in\partial D'$ такі, що $h(f_{m_k}(A),\partial D')=h(x_k,y_k)<1/k$.

Оскільки $\partial D'$ компактна множина, ми можемо зауважити, що $y_k\rightarrow y_0\in\partial D'$ коли $k\rightarrow\infty$; тоді також

$$x_k\rightarrow y_0\in\partial D',\quad k\rightarrow\infty\,.$$

Нехай K_0 – зв'язна компонента множини $\partial D'$, що містить y_0. Очевидно, що K_0 континуум в $\overline{\mathbb{R}^n}$. Оскільки D' має слабко плоску межу, відображення $g_{m_k}:=f_{m_k}^{-1}$ можна продовжити до неперервних відображень $\overline{g}_{m_k}:\overline{D'}\rightarrow\overline{D}$ (див. [35, теорема 3]). Більше того, $\overline{g}_{m_k}$ є рівномірно неперервними на множині $\overline{D'}$ для кожного фіксованого k, оскільки відображення $\overline{g}_{m_k}$ є неперервними на компактній множині $\overline{D'}$. У цьому випадку, для кожного $\varepsilon>0$ існує $\delta_k=\delta_k(\varepsilon)<1/k$ таке, що

$$|\overline{g}_{m_k}(x)-\overline{g}_{m_k}(x_0)|<\varepsilon\quad\forall\ x,x_0\in\overline{D'},\quad h(x,x_0)<\delta_k\,,\quad\delta_k<1/k\,.\qquad(3.1)$$

Оберемо $\varepsilon>0$ так, щоб

$$\varepsilon<(1/2)\cdot{\rm dist}\,(\partial D,A)\,.\qquad(3.2)$$

Позначимо $B_h(x_0,r)=\{x\in\overline{\mathbb{R}^n}:h(x,x_0)<r\}$. Для заданого $k\in\mathbb{N}$, покладемо

$$B_k:=\bigcup\limits_{x_0\in K_0}B_h(x_0,\delta_k)\,,\quad k\in\mathbb{N}\,.$$

Оскільки множина B_k є околом континуума K_0, за [51, лема 2.2] існує окіл U_k множини K_0, такий, що $U_k\subset B_k$ і $U_k\cap D'$ зв'язний. Без обмеження загальності, можна вважати, що U_k відкрита множина, тому $U_k\cap D'$

також лінійно зв'язна (див. [60, пропозиція 13.1]). Нехай $h(K_0) = m_0$. У цьому випадку, існують $z_0, w_0 \in K_0$ такі, що $h(K_0) = h(z_0, w_0) = m_0$. Отже, існують послідовності $\overline{y_k} \in U_k \cap D'$, $z_k \in U_k \cap D'$ і $w_k \in U_k \cap D'$ такі, що $z_k \to z_0$, $\overline{y_k} \to y_0$ і $w_k \to w_0$ коли $k \to \infty$. Ми можемо вважати, що

$$h(z_k, w_k) > m_0/2 \quad \forall\, k \in \mathbb{N}\,. \tag{3.3}$$

Оскільки множина $U_k \cap D'$ є лінійно зв'язною, ми можемо послідовно з'єднати точки z_k, $\overline{y_k}$ і w_k кривими γ_k такими, що $\gamma_k \in U_k \cap D'$. Як зазвичай, позначимо через $|\gamma_k|$ множину точок кривої γ_k в області D'. Тоді $g_{m_k}(|\gamma_k|)$ є компактною множиною в області D. Якщо $x \in |\gamma_k|$, тоді існує точка $x_0 \in K_0$ така. що $x \in B(x_0, \delta_k)$. Покладемо $\omega \in A \subset D$. Оскільки $x \in |\gamma_k|$ і, більше того, x внутрішня точка області D', ми можемо писати тут $g_{m_k}(x)$ замість $\overline{g}_{m_k}(x)$. За співвідношенням (3.1) і (3.2), а також за нерівністю трикутника, для досить великих $k \in \mathbb{N}$ маємо:

$$|g_{m_k}(x) - \omega| \geqslant |\omega - \overline{g}_{m_k}(x_0)| - |\overline{g}_{m_k}(x_0) - g_{m_k}(x)| \geqslant$$
$$\geqslant \operatorname{dist}(\partial D, A) - (1/2) \cdot \operatorname{dist}(\partial D, A) = (1/2) \cdot \operatorname{dist}(\partial D, A) > \varepsilon\,, \tag{3.4}$$

де $\operatorname{dist}(\partial D, A) := \inf\limits_{x \in \partial D, y \in A} |x - y|$. Взявши $\inf$ у співвідношенні (3.4) по всіх $x \in |\gamma_k|$ і $\omega \in A$, отримаємо, що

$$\operatorname{dist}(g_{m_k}(|\gamma_k|), A) := \inf\limits_{x \in g_{m_k}(|\gamma_k|), y \in A} |x - y| > \varepsilon, \quad \forall\, k = 1, 2, \ldots\,. \tag{3.5}$$

Покриємо континуум A кулями $B(x, \varepsilon/4)$, $x \in A$. Оскільки A компактна множина, можна вважати, що $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{M_0} B(x_i, \varepsilon/4)$, $x_i \in A$, $i = 1, 2, \ldots, M_0$, $1 \leqslant M_0 < \infty$. За означенням, M_0 залежить лише від A, зокрема, M_0 не залежить від k. Ми встановили, що

$$\Gamma_k := \Gamma(A, g_{m_k}(|\gamma_k|), D)\,. \tag{3.6}$$

Зауважимо, що

$$\Gamma_k = \bigcup\limits_{i=1}^{M_0} \Gamma_{ki}\,, \tag{3.7}$$

де Γ_{ki} складається з усіх кривих $\gamma : [0,1] \to D$, що належать сім'ї Γ_k, таких, що $\gamma(0) \in B(x_i, \varepsilon/4)$ і $\gamma(1) \in g_{m_k}(|\gamma_k|)$. Зараз ми покажемо, що

$$\Gamma_{ki} > \Gamma(S(x_i, \varepsilon/4), S(x_i, \varepsilon/2), A(x_i, \varepsilon/4, \varepsilon/2)) \,. \tag{3.8}$$

Справді, нехай $\gamma \in \Gamma_{ki}$, іншими словами, $\gamma : [0,1] \to D$, $\gamma(0) \in B(x_i, \varepsilon/4)$ і $\gamma(1) \in g_{m_k}(|\gamma_k|)$. За (3.5), $|\gamma| \cap B(x_i, \varepsilon/4) \neq \varnothing \neq |\gamma| \cap (D \setminus B(x_i, \varepsilon/4))$. Тому, за [11, теорема 1.I.5.46] існує $0 < t_1 < 1$ таке, що $\gamma(t_1) \in S(x_i, \varepsilon/4)$. Можна вважати, що $\gamma(t) \notin B(x_i, \varepsilon/4)$ для $t > t_1$. Покладемо $\gamma_1 := \gamma|_{[t_1, 1]}$. За (3.5), $|\gamma_1| \cap B(x_i, \varepsilon/2) \neq \varnothing \neq |\gamma_1| \cap (D \setminus B(x_i, \varepsilon/2))$. Таким чином, за [11, теорема 1.I.5.46] існує $t_1 < t_2 < 1$, що $\gamma(t_2) \in S(x_i, \varepsilon/2)$. Можемо вважати, що $\gamma(t) \in B(x_i, \varepsilon/2)$ для $t < t_2$. Покладемо $\gamma_2 := \gamma|_{[t_1, t_2]}$. Тоді, крива γ_2 є підкривою кривої γ, що належить сім'ї

$$\Gamma(S(x_i, \varepsilon/4), S(x_i, \varepsilon/2), A(x_i, \varepsilon/4, \varepsilon/2)).$$

Таким чином, співвідношення (3.8) встановлене.

Подальші міркування, як і раніше, базуються успішному виборі допустимої функції η. Покладемо

$$\eta(t) = \begin{cases} 4/\varepsilon, & t \in [\varepsilon/4, \varepsilon/2], \\ 0, & t \notin [\varepsilon/4, \varepsilon/2] \,. \end{cases}$$

Зауважимо, що η задовольняє (1.7) при $r_1 = \varepsilon/4$ і $r_2 = \varepsilon/2$. Тоді, згідно з означенням Q-гомеоморфізма у точці x_i, отримаємо

$$M(f_{m_k}(\Gamma(S(x_i, \varepsilon/4), S(x_i, \varepsilon/2)), A(x_i, \varepsilon/4, \varepsilon/2))) \leqslant (4/\varepsilon)^n \cdot \|Q\|_1 < c < \infty \,, \tag{3.9}$$

де c деяка додатна стала, а $\|Q\|_1$ це L_1-норма функції Q в D. За (3.7), (3.8) і (3.9), використовуючи напівадитивність модуля, отримуємо, що

$$M(f_{m_k}(\Gamma_k)) \leqslant \frac{4^n M_0}{\varepsilon^n} \int\limits_D Q(x)\, dm(x) \leqslant c \cdot M_0 < \infty \,. \tag{3.10}$$

Оцінка (3.10) суперечить слабкій плоскості на межі D'. Дійсно, нехай $P > c \cdot M_0$ і $U = B_h(y_0, r_0) = \{y \in \overline{\mathbb{R}^n} : h(y, y_0) < r_0\}$, де $0 < r_0 <$

$\min\{\delta/4, m_0/4\}$, δ число з умов леми та $h(K_0) = m_0$. Зауважимо, що $|\gamma_k| \cap U \neq \varnothing \neq |\gamma_k| \cap (D' \setminus U)$ для досить великих $k \in \mathbb{N}$, оскільки $h(|\gamma_k|) \geqslant m_0/2 > m_0/4$, $\overline{y_k} \in |\gamma_k|$ і $\overline{y_k} \to y_0$ коли $k \to \infty$. Аналогічно, $f_{m_k}(A) \cap U \neq \varnothing \neq f_{m_k}(A) \cap (D' \setminus U)$. Оскільки $|\gamma_k|$ і $f_{m_k}(A)$ континууми, маємо:

$$f_{m_k}(A) \cap \partial U \neq \varnothing, \quad |\gamma_k| \cap \partial U \neq \varnothing\,, \tag{3.11}$$

див. [11, теорема 1.I.5.46]. Для заданого $P > 0$, нехай $V \subset U$ окіл точки y_0, з означення слабкої плоскості межі. Тоді, маємо, що

$$M(\Gamma(E, F, D')) > P \tag{3.12}$$

для будь-яких континуумів $E, F \subset D'$ що $E \cap \partial U \neq \varnothing \neq E \cap \partial V$ і $F \cap \partial U \neq \varnothing \neq F \cap \partial V$. Зауважимо,що

$$f_{m_k}(A) \cap \partial V \neq \varnothing, \quad |\gamma_k| \cap \partial V \neq \varnothing \tag{3.13}$$

для досить великих $k \in \mathbb{N}$. Дійсно, $\overline{y_k} \in |\gamma_k|$, $x_k \in f_{m_k}(A)$, де $x_k, \overline{y_k} \to y_0 \in V$ коли $k \to \infty$. Тому, $|\gamma_k| \cap V \neq \varnothing \neq f_{m_k}(A) \cap V$ для великих $k \in \mathbb{N}$. Крім того, маємо $h(V) \leqslant h(U) \leqslant 2r_0 < m_0/2$. За (3.3), $h(|\gamma_k|) > m_0/2$, оскільки, $|\gamma_k| \cap (D' \setminus V) \neq \varnothing$. Таким чином, за [11, теорема 1.I.5.46], $|\gamma_k| \cap \partial V \neq \varnothing$. Аналогічно, $h(V) \leqslant h(U) \leqslant 2r_0 < \delta/2$. Оскільки $h(f_{m_k}(A)) > \delta$, отримаємо, що $f_{m_k}(A) \cap (D' \setminus V) \neq \varnothing$. За [11, теорема 1.I.5.46], маємо: $f_{m_k}(A) \cap \partial V \neq \varnothing$. Таким чином, співвідношення (3.13) встановлене.

За (3.11), (3.12) і (3.13), маємо:

$$M(\Gamma(f_{m_k}(A), |\gamma_k|, D')) > P\,. \tag{3.14}$$

Зауважимо, що $\Gamma(f_{m_k}(A), |\gamma_k|, D') = f_{m_k}(\Gamma(A, g_{m_k}(|\gamma_k|), D)) = f_{m_k}(\Gamma_k)$. Таким чином, співвідношення (3.14) можна записати у вигляді

$$M(\Gamma(f_{m_k}(A), |\gamma_k|, D')) = M(f_{m_k}(\Gamma_k)) > P > c \cdot M_0\,. \tag{3.15}$$

У цьому випадку, за (3.10) і (3.15), ми маємо одночасно $M(f_{m_k}(\Gamma_k)) > c \cdot M_0$ і $M(f_{m_k}(\Gamma_k)) \leqslant c \cdot M_0$ для достатньо великих $k \in \mathbb{N}$. Отримане протиріччя вказує на хибність припущення $h(f_{m_k}(A), \partial D') < 1/k$. Лема доведена. $\Box$

3.2 Одностайна неперервність сімей гомеоморфізмів в замиканні області

Доведення наступної теореми, стосовно поведінки в замиканні області відображень, оберенені до яких задовольняють співвідношення (1.5) було представлене в [29, лема 4.1].

Схема доведення леми 3.2.1 поданої нижче повністю повторює схему доведення 3.1.2 і тому не наводиться.

Лема 3.2.1. *Припустимо, що область D локально лінійно зв'язна на $\overline{D}$, $\overline{D}$ і $\overline{D'}$ – компакти в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, D' має слабко плоску межу, $Q \in L^1(D)$ і жодна зв'язна компонента межі $\partial D'$ не вироджується в точку. Нехай $f_m : D \to D'$ – послідовність гомеоморфізмів області D на область D' з умовою (1.5). Нехай також знайдуться континуум $A \subset D$ і число $\delta > 0$ такі, що $\operatorname{diam} f_m(A) \geqslant \delta > 0$ при всіх $m = 1, 2, \ldots$. Тоді знайдеться $\delta_1 > 0$ таке, що*

$$\operatorname{dist}\left(f_m(A), \partial D'\right) > \delta_1 > 0 \quad \forall\, m \in \mathbb{N}\,.$$

Для числа $\delta > 0$, областей $D, D' \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, континуума $A \subset D$ і довільної вимірної за Лебегом функція $Q : \mathbb{R}^n \to [1, \infty]$, $Q(x) \equiv 0$ при $x \notin D$, позначимо через $\mathfrak{S}_{\delta,A,Q}(D, D')$ сім'ю всіх відображень $g : D' \to D$ таких, що $f = g^{-1}$ – гомеоморфізм області D на D' з умовою (1.5), при цьому, $\operatorname{diam} f(A) \geqslant \delta$. Виконується наступне твердження, доведене в [29, теорема 1.2].

Теорема 3.2.1. *Припустимо, що область D локально зв'язна у всіх межових точках, $\overline{D}$ і $\overline{D'}$ – компакти в $\mathbb{R}^n$, а область D' має слабко плоску межу. Припустимо також, що будь-яка компонента зв'язності $\partial D'$ містить невироджений континуум. Якщо $Q \in L^1(D)$, то кожне відображення $g \in \mathfrak{S}_{\delta,A,Q}(D, D')$ продовжується за неперервністю до відображення $\overline{g} : \overline{D'} \to \overline{D}$, $\overline{g}|_{D'} = g$, при цьому, $\overline{g}(\overline{D'}) = \overline{D}$*

і сім'я $\mathfrak{G}_{\delta,A,Q}(\overline{D},\overline{D'})$, *що складається з усіх продовжених відображень* $\overline{g}:\overline{D'}\to\overline{D}$, *є одностайно неперервною в* $\overline{D'}$.

Доведення. Оскільки D' має слабко плоску межу, кожне $g\in\mathfrak{G}_{\delta,A,Q}(D,D')$ продовжується до неперервного відображення $\overline{g}:\overline{D'}\to\overline{D}$ (див. [60, теорема 4.6]).

Перевіримо рівність $\overline{g}(\overline{D'})=\overline{D}$. Справді, за означенням $\overline{g}(\overline{D'})\subset\overline{D}$. Залишилось показати зворотне включення $\overline{D}\subset\overline{g}(\overline{D'})$. Нехай $x_0\in\overline{D}$, тоді покажемо, що $x_0\in\overline{g}(\overline{D'})$. Якщо $x_0\in\overline{D}$, то або $x_0\in D$, або $x_0\in\partial D$. Якщо $x_0\in D$, то доводити немає чого, так як за умовою $\overline{g}(D')=D$. Нехай тепер $x_0\in\partial D$, тоді знайдуться $x_k\in D$ і $y_k\in D'$ такі, що $x_k=\overline{g}(y_k)$ і $x_k\to x_0$ при $k\to\infty$. Оскільки $\overline{D'}$ – компакт, можна вважати, що $y_k\to y_0\in\overline{D'}$ при $k\to\infty$. Так як $f=g^{-1}$ – гомеоморфізм, то $y_0\in\partial D'$. Оскільки $\overline{g}^{-1}$ неперервне в $\overline{D'}$, $\overline{g}(y_k)\to\overline{g}(y_0)$. Однак, в такому випадку, $\overline{g}(y_0)=x_0$, тому, що $\overline{g}(y_k)=x_k$ і $x_k\to x_0$, $k\to\infty$. Отже, $x_0\in\overline{g}(\overline{D'})$. Включення $\overline{D}\subset\overline{g}(\overline{D'})$ доказано і, отже, $\overline{D}=\overline{g}(\overline{D'})$, що і треба було встановити.

Одностайна неперервність сім'ї відображень $\mathfrak{G}_{\delta,A,Q}(\overline{D},\overline{D'})$ у внутрішніх точках D' – результат теореми 2.1.1. Залишилось показати, що ця сім'я одностайно неперервна в межових точках. Здійснимо доведення від супротивного. Припустимо, що знайдеться точка $z_0\in\partial D'$, число $\varepsilon_0>0$ і послідовності $z_m\in\overline{D'}$, $z_m\to z_0$ при $m\to\infty$ і $\overline{g}_m\in\mathfrak{G}_{\delta,A,Q}(\overline{D},\overline{D'})$ такі, що

$$|\overline{g}_m(z_m)-\overline{g}_m(z_0)|\geqslant\varepsilon_0,\quad m=1,2,\ldots.\tag{3.16}$$

Покладемо $g_m:=\overline{g}_m|_{D'}$. Так як g_m за неперервністю продовжується на межу D', можна вважати, що $z_m\in D'$ і, отже, $\overline{g}_m(z_m)=g_m(z_m)$. Крім того, знайдеться ще одна послідовність $z_m'\in D'$, $z_m'\to z_0$ при $m\to\infty$, така, що $|g_m(z_m')-\overline{g}_m(z_0)|\to 0$ при $m\to\infty$. Так як $\overline{D}$ – компакт, ми можемо вважати, що послідовності $g_m(z_m)$ і $\overline{g}_m(z_0)$ збігаються при $m\to\infty$. Нехай $g_m(z_m)\to\overline{x_1}$ і $\overline{g}_m(z_0)\to\overline{x_2}$ при $m\to\infty$. За неперервністю модуля із (3.16) випливає, що $\overline{x_1}\neq\overline{x_2}$, більше того, так як гомеоморфізми зберігають межу, $\overline{x_2} \in \partial D$. Нехай x_1 і x_2 – довільні різні точки континуума A, жодна з яких не збігається з $\overline{x_1}$. За лемою 3.1.1 можна з'єднати точки x_1 і $\overline{x_1}$ кривою $\gamma_1 : [0,1] \to \overline{D}$, а точки x_2 і $\overline{x_2}$ – кривою $\gamma_2 : [0,1] \to \overline{D}$ так, що $|\gamma_1| \cap |\gamma_2| = \varnothing$, $\gamma_i(t) \in D$ при всіх $t \in (0,1)$, $i = 1,2$, $\gamma_1(0) = x_1$, $\gamma_1(1) = \overline{x_1}$, $\gamma_2(0) = x_2$ і $\gamma_2(1) = \overline{x_2}$. Так як D локально зв'язна на своїй межі, знайдуться околи U_1 і U_2 точок $\overline{x_1}$ і $\overline{x_2}$, замикання яких не перетинаються, такі що $W_i := D \cap U_i$ – лінійно зв'язна множина. Зменшуючи околи U_i, за необхідності, ми можемо вважати, що $\overline{U_1} \cap |\gamma_2| = \varnothing = \overline{U_2} \cap |\gamma_1|$. Не обмежуючи загальності, ми можемо вважати, що $g_m(z_m) \in W_1$ і $g_m(z'_m) \in W_2$ при всіх $m \in \mathbb{N}$. Нехай a_1 і a_2 – довільні точки, що належать $|\gamma_1| \cap W_1$ і $|\gamma_2| \cap W_2$. Нехай t_1, t_2 такі, що $\gamma_1(t_1) = a_1$ і $\gamma_2(t_2) = a_2$. З'єднаємо точку a_1 з точкою $g_m(z_m)$ кривою $\alpha_m : [t_1, 1] \to W_1$ такою, що $\alpha_m(t_1) = a_1$ і $\alpha_m(1) = g_m(z_m)$. Аналогічно, з'єднаємо точку a_2 з точкою $g_m(z'_m)$ кривою $\beta_m : [t_2, 1] \to W_2$ такою, що $\beta_m(t_2) = a_2$ і $\beta_m(1) = g_m(z'_m)$.

Покладемо тепер

$$C_m^1(t) = \left\{\begin{array}{ll} \gamma_1(t), & t \in [0, t_1], \\ \alpha_m(t), & t \in [t_1, 1] \end{array}\right., \qquad C_m^2(t) = \left\{\begin{array}{ll} \gamma_2(t), & t \in [0, t_2], \\ \beta_m(t), & t \in [t_2, 1] \end{array}\right. .$$

Нехай, як звичайно, $|C_m^1|$ і $|C_m^2|$ – носії кривих C_m^1 і C_m^2, відповідно. Зауважимо, що за побудовою $|C_m^1|$ і $|C_m^2|$ – два неперетинні континууми в D, причому $\operatorname{dist}(|C_m^1|, |C_m^2|) > l_0 > 0$ при всіх $m = 1, 2, \ldots$. Можна взяти, наприклад,

$$l_0 = \min\{\operatorname{dist}(|\gamma_1|, |\gamma_2|), \operatorname{dist}(|\gamma_1|, U_2), \operatorname{dist}(|\gamma_2|, U_1), \operatorname{dist}(U_1, U_2)\}.$$

Нехай тепер Γ_m – сім'я кривих, що з'єднують $|C_m^1|$ і $|C_m^2|$ в D. Тоді функція

$$\rho(x) = \left\{\begin{array}{ll} \frac{1}{l_0}, & x \in D \\ 0, & x \notin D \end{array}\right.$$

є допустимою для сім'ї Γ_m, оскільки $\int\limits_{\gamma} \rho(x)|dx| \geqslant \frac{l(\gamma)}{l_0} \geqslant 1$ для $\gamma \in \Gamma_m$ (де $l(\gamma)$ позначає довжину кривої γ). За умовою відображення f_m, $f_m =$

g_m^{-1}, задовольняють (1.5) при $Q\in L^1(D)$, з огляду на що маємо:

$$M(f_m(\Gamma_m))\leqslant \frac{1}{l_0^n}\int\limits_D Q(x)\,dm(x):=c=c(l_0,Q)<\infty\,. \tag{3.17}$$

З іншого боку, за лемою 3.2.1 знайдеться число $\delta_1>0$ таке, що виконується $\mathrm{dist}\,(f_m(A),\partial D')>\delta_1>0$, $m=1,2,\ldots$. Звідси отримаємо, що

$$\mathrm{diam}\,f_m(|C_m^1|)\geqslant |z_m-f_m(x_1)|\geqslant (1/2)\cdot \mathrm{dist}\,(f_m(A),\partial D')>\delta_1/2\,,$$

$$\begin{gathered}\mathrm{diam}\,f_m(|C_m^2|)\geqslant |z_m^{\prime}-f_m(x_2)|\geqslant\\ \geqslant (1/2)\cdot \mathrm{dist}\,(f_m(A),\partial D')>\delta_1/2\end{gathered} \tag{3.18}$$

при деякому $M_0\in\mathbb{N}$ і всіх $m\geqslant M_0$.

Оберемо в точці $z_0\in\partial D'$ кулю $U:=B(z_0,r_0)$, де $r_0>0$ і $r_0<\delta_1/4$, де δ_1 – число із співвідношень в (3.18). Зауважимо, що $f_m(|C_m^1|)\cap U\ne\varnothing\ne f_m(|C_m^1|)\cap (D'\setminus U)$ при досить великих $m\in\mathbb{N}$, оскільки $\mathrm{diam}\,f_m(|C_m^1|)\geqslant\delta_1/2$ і $z_m\in f_m(|C_m^1|)$, $z_m\to z_0$ при $m\to\infty$. Аналогічно міркуючи, маємо $f_m(|C_m^2|)\cap U\ne\varnothing\ne f_m(|C_m^2|)\cap(D'\setminus U)$. Так як $f_m(|C_m^1|)$ і $f_m(|C_m^2|)$ – континууми, то

$$f_m(|C_m^1|)\cap\partial U\ne\varnothing,\quad f_m(|C_m^2|)\cap\partial U\ne\varnothing\,, \tag{3.19}$$

див. [11, теорема 1.I, гл. 5, § 46]. Для фіксованого $P>0$, нехай далі $V\subset U$ – окіл точки z_0, з означення слабко плоскої межі, тобто, такий, що для будь-яких континуумів $E,F\subset D'$ з умовою $E\cap\partial U\ne\varnothing\ne E\cap\partial V$ і $F\cap\partial U\ne\varnothing\ne F\cap\partial V$ виконується нерівність

$$M(\Gamma(E,F,D'))>P\,. \tag{3.20}$$

Зауважимо, що при досить великих $m\in\mathbb{N}$

$$f_m(|C_m^1|)\cap\partial V\ne\varnothing,\quad f_m(|C_m^2|)\cap\partial V\ne\varnothing\,. \tag{3.21}$$

Справді, $z_m\in f_m(|C_m^1|)$, $z_m^{\prime}\in f_m(|C_m^2|)$, де $z_m,z_m^{\prime}\to z_0\in V$ при $m\to\infty$, тому $f_m(|C_m^1|)\cap V\ne\varnothing\ne f_m(|C_m^2|)\cap V$ при великих $m\in\mathbb{N}$. Крім того,

$\operatorname{diam} V \leqslant \operatorname{diam} U = 2r_0 < \delta_1/2$ і, оскільки $\operatorname{diam} f_m(|C_m^1|) > \delta_1/2$ з огляду на (3.18), маємо, що $f_m(|C_m^1|) \cap (D' \setminus V) \neq \varnothing$. Тоді $f_m(|C_m^1|) \cap \partial V \neq \varnothing$ (див. [11, теорема 1.I, гл. 5, § 46]). Аналогічно, $\operatorname{diam} V \leqslant \operatorname{diam} U = 2r_0 < \delta_1/2$ і, оскільки $\operatorname{diam} f_m(|C_m^2|) > \delta_1/2$ з огляду на (3.18), маємо, що $f_m(|C_m^2|) \cap (D' \setminus V) \neq \varnothing$. Тоді за [11, теорема 1.I, гл. 5, § 46] маємо: $f_m(|C_m^2|) \cap \partial V \neq \varnothing$. Таким чином, співвідношення (3.21) доведене.

Згідно з (3.20) і враховуючи (3.19) і (3.21), ми маємо, що

$$M(f_m(\Gamma_m)) = M(\Gamma(f_m(|C_m^1|), f_m(|C_m^2|), D')) > P\,,$$

що суперечить нерівності (3.17). Отримане протиріччя вказує на хибність припущення, зробленого в (3.16). Теорема доведена. $\square$

Випадок поведінки кільцевих гомеоморфізмів в замиканні області це один із результатів статті [75, теорема 1.2]. Цілком природно, що в наступній теоремі 3.2.2, більше умов, ніж у теоремі 2.1.2. Дійсно, для того, щоб сім'я відображень була одностайно неперервною на межі області потрібно, принаймні, щоб було неперервне продовження на межу області. Однак, навіть для конформних відображень одиничного круга ця властивість може порушуватись, якщо межа області образу занадто «погана».

Теорема 3.2.2. *Нехай $n \geqslant 2$, і D обмежена область в $\mathbb{R}^n$ локально зв'язна у всіх своїх межових точках. Припустимо, що межа області D' слабко плоска; більше того, жодна компонента $\partial D'$ не вироджується в точку. Якщо $Q \in L^1(D)$, тоді кожне відображення $g \in \mathfrak{S}_{\delta,A,Q}(D,D')$ має неперервне продовження $\overline{g} : \overline{D'} \to \overline{D}$, таке, що $\overline{g}(\overline{D'}) = \overline{D}$, причому сім'я $\mathfrak{S}_{\delta,A,Q}(\overline{D},\overline{D'})$, що складається з усіх продовжених таким чином відображень, є одностайно неперервною в $\overline{D'}$.*

Доведення. Нехай $g \in \mathfrak{S}_{\delta,A,Q}(D,D')$. Оскільки D' має слабко плоску межу, g можна продовжити до неперервного відображення $\overline{g} : \overline{D'} \to \overline{D}$ (див. [35, теорема 3], див також [60, теорема 4.6]).

Тепер перевіримо рівність $\overline{g}(\overline{D'}) = \overline{D}$. Дійсно, за означенням, $\overline{g}(\overline{D'}) \subset \overline{D}$. Залишається показати зворотне включення $\overline{D} \subset \overline{g}(\overline{D'})$. Нехай $x_0 \in \overline{D}$. Тепер, покажемо, що $x_0 \in \overline{g}(\overline{D'})$. Якщо $x_0 \in \overline{D}$, тоді або $x_0 \in D$, або $x_0 \in \partial D$. У випадку, коли $x_0 \in D$ виконання очевидне, оскільки $\overline{g}(D') = D$ за умовами теореми. Тепер розглянемо випадок, коли $x_0 \in \partial D$. Тоді, існують $x_k \in D$ і $y_k \in D'$ такі, що $x_k = \overline{g}(y_k)$ і $x_k \to x_0$ коли $k \to \infty$. Оскільки $\overline{D'}$ компактна множина розширеного евклідового простору, ми можемо вважати, що $y_k \to y_0 \in \overline{D'}$ коли $k \to \infty$. Оскільки $f = g^{-1}$ гомеоморфізм, $y_0 \in \partial D'$. Так як відображення $\overline{g}^{\,-1}$ неперервне в $\overline{D'}$, маємо $\overline{g}(y_k) \to \overline{g}(y_0)$ коли $k \to \infty$. Однак, у цьому випадку, $\overline{g}(y_0) = x_0$, тому, що $\overline{g}(y_k) = x_k$ і $x_k \to x_0$ коли $k \to \infty$. Тому, $x_0 \in \overline{g}(\overline{D'})$. Включення $\overline{D} \subset \overline{g}(\overline{D'})$ доведене. Нарешті, співвідношення $\overline{D} = \overline{g}(\overline{D'})$ також встановлене.

Одностайна неперервність сім'ї $\mathfrak{S}_{\delta,A,Q}(\overline{D},\overline{D'})$ в області D' це твердження теореми 2.1.2. Залишається встановити, що ця сім'я відображень є одностайно неперервною в межових точках області D'.

Здійснимо доведення від супротивного. Припустимо, що твердження вище не вірне. Тоді існують точка $z_0 \in \partial D'$, додатне число $\varepsilon_0 > 0$, послідовність $z_m \in \overline{D'}$, що збігається до точки z_0 і відображення $\overline{g}_m \in \mathfrak{S}_{\delta,A,Q}(\overline{D},\overline{D'})$ такі, що

$$|\overline{g}_m(z_m) - \overline{g}_m(z_0)| \geqslant \varepsilon_0, \quad m = 1, 2, \ldots. \tag{3.22}$$

Покладемо $g_m := \overline{g}_m|_{D'}$. Оскільки відображення g_m мають неперервне продовження в $\partial D'$, ми можемо вважати, що $z_m \in D'$ і, більше того, $\overline{g}_m(z_m) = g_m(z_m)$. Крім того, знайдеться послідовність $z_m' \in D'$ з умовою $z_m' \to z_0$ коли $m \to \infty$, така, що $|g_m(z_m') - \overline{g}_m(z_0)| \to 0$ коли $m \to \infty$. Оскільки область D обмежена, $\overline{D}$ компактна множина. Тому, ми можемо вважати, що $g_m(z_m)$ і $\overline{g}_m(z_0)$ збігаються при $m \to \infty$. Нехай $g_m(z_m) \to \overline{x_1}$ і $\overline{g}_m(z_0) \to \overline{x_2}$ при $m \to \infty$. За неперервністю модуля в (3.22), $\overline{x_1} \neq \overline{x_2}$. Також, оскільки гомеоморфізми зберігають межу області, $\overline{x_2} \in \partial D$. Нехай x_1 та x_2 це різні точки континуума A, жодна з яких не збігається з $\overline{x_1}$. Відповідно до леми 3.1.1 ми можемо з'єднати пари точок x_1, $\overline{x_1}$ та x_2, $\overline{x_2}$ кривими $\gamma_1 : [0,1] \to \overline{D}$ і $\gamma_2 : [0,1] \to \overline{D}$ так, щоб $|\gamma_1| \cap |\gamma_2| = \varnothing$, $\gamma_1(t), \gamma_2(t) \in D$ при $t \in (0,1)$, $\gamma_1(0) = x_1$, $\gamma_1(1) = \overline{x_1}$, $\gamma_2(0) = x_2$ і $\gamma_2(1) = \overline{x_2}$. Оскільки область D є локально зв'язною на ∂D, знайдуться околи U_1 та U_2 точок $\overline{x_1}$ та $\overline{x_2}$, відповідно, замикання яких не перетинаються, і, більше того, множини $W_i := D \cap U_i$ є локально зв'язними. Без обмеження загальності, ми можемо вважати, що $\overline{U_1} \subset B(\overline{x_1}, \delta_0)$ і

$$\overline{B(\overline{x_1}, \delta_0)} \cap |\gamma_2| = \varnothing = \overline{U_2} \cap |\gamma_1|\,, \quad \overline{B(\overline{x_1}, \delta_0)} \cap \overline{U_2} = \varnothing\,. \qquad (3.23)$$

Крім того, ми можемо вважати, що $g_m(z_m) \in W_1$ і $g_m(z_m') \in W_2$ для всіх $m \in \mathbb{N}$. Нехай a_1 і a_2 – довільні точки, що належать $|\gamma_1| \cap W_1$ і $|\gamma_2| \cap W_2$. Нехай $0 < t_1, t_2 < 1$ такі, що $\gamma_1(t_1) = a_1$ і $\gamma_2(t_2) = a_2$. З'єднаємо точки a_1 та $g_m(z_m)$ кривою $\alpha_m : [t_1, 1] \to W_1$ так, що $\alpha_m(t_1) = a_1$ і $\alpha_m(1) = g_m(z_m)$. Аналогічно, з'єднаємо a_2 та $g_m(z_m')$ кривою $\beta_m : [t_2, 1] \to W_2$, $\beta_m(t_2) = a_2$ та $\beta_m(1) = g_m(z_m')$. Покладемо

$$C_m^1(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & t \in [0, t_1], \\ \alpha_m(t), & t \in [t_1, 1] \end{cases}, \qquad C_m^2(t) = \begin{cases} \gamma_2(t), & t \in [0, t_2], \\ \beta_m(t), & t \in [t_2, 1] \end{cases}.$$

Як зазвичай, позначимо через $|C_m^1|$ і $|C_m^2|$ образи (носії) кривих C_m^1 і C_m^2, відповідно. Візьмемо

$$l_0 = \min\{\mathrm{dist}\,(|\gamma_1|, |\gamma_2|), \mathrm{dist}\,(|\gamma_1|, U_2)\}\,,$$

покриття $A_0 := \bigcup\limits_{x \in |\gamma_1|} B(x, l_0/4)$ кулями множину $|\gamma_1|$. Оскільки $|\gamma_1|$ компактна множина, ми можемо взяти скінченну кількість номерів $1 \leqslant N_0 < \infty$ та відповідні точки $x_1, \ldots, x_{N_0} \in |\gamma_1|$ такі, що

$$|\gamma_1| \subset B_0 := \bigcup_{i=1}^{N_0} B(x_i, l_0/4).$$

У цьому випадку,

$$|C_m^1| \subset U_1 \cup |\gamma_1| \subset \overline{B(\overline{x_1}, \delta_0)} \cup \bigcup_{i=1}^{N_0} B(x_i, l_0/4)\,.$$

Нехай Γ_m – сім'я кривих, що з'єднує $|C_m^1|$ та $|C_m^2|$ в області D. Тоді, маємо:

$$\Gamma_m = \bigcup_{i=0}^{N_0} \Gamma_{mi}\,, \tag{3.24}$$

де Γ_{mi} сім'я, що складається з кривих $\gamma : [0,1] \to D$ таких, що $\gamma(0) \in B(x_i, l_0/4) \cap |C_m^1|$ і $\gamma(1) \in |C_2^m|$ для $1 \leqslant i \leqslant N_0$. Аналогічно, позначимо через Γ_{m0} сім'ю, що складається з кривих $\gamma : [0,1] \to D$ таких, що $\gamma(0) \in B(\overline{x_1}, \delta_0) \cap |C_m^1|$ і $\gamma(1) \in |C_2^m|$. За (3.23) знайдуться $\sigma_0 > \delta_0 > 0$ такі, що

$$\overline{B(\overline{x_1}, \sigma_0)} \cap |\gamma_2| = \varnothing = \overline{U_2} \cap |\gamma_1|\,, \quad \overline{B(\overline{x_1}, \sigma_0)} \cap \overline{U_2} = \varnothing\,.$$

Користуючись схемою доведення як в 3.1.2, можна показати, що

$$\Gamma_{m0} > \Gamma(S(\overline{x_1}, \delta_0), S(\overline{x_1}, \sigma_0), A(\overline{x_1}, \delta_0, \sigma_0) \cap D)\,,$$

$$\Gamma_{mi} > \Gamma(S(x_i, l_0/4), S(x_i, l_0/2), A(x_i, l_0/4, l_0/2) \cap D)\,. \tag{3.25}$$

Покладемо

$$\eta(t) = \begin{cases} 4/l_0, & t \in [l_0/4, l_0/2], \\ 0, & t \notin [l_0/4, l_0/2]\,, \end{cases} \qquad \eta_0(t) = \begin{cases} 1/(\sigma_0 - \delta_0), & t \in [\delta_0, \sigma_0], \\ 0, & t \notin [\delta_0, \sigma_0]\,. \end{cases}$$

Нехай $f_m := g_m^{-1}$. Тоді, в силу (1.6), маємо, що

$$M(f_m(\Gamma(S(\overline{x_1}, \delta_0), S(\overline{x_1}, \sigma_0), A(\overline{x_1}, \delta_0, \sigma_0) \cap D))) \leqslant$$

$$\leqslant (1/(\sigma_0 - \delta_0))^n \cdot \|Q\|_1 < c_1 < \infty\,, \tag{3.26}$$

$$M(f_m(\Gamma(S(x_i, l_0/4), S(x_i, l_0/2), A(x_i, l_0/4, l_0/2) \cap D))) \leqslant$$

$$\leqslant (4/(l_0))^n \cdot \|Q\|_1 < c_2 < \infty\,,$$

де c_1 і c_2 деякі додатні сталі, що не залежать від m. Поєднуючи (3.24), (3.25) і (3.26) і враховуючи напівадитивність модуля сімей кривих, маємо:

$$M(f_m(\Gamma_m)) \leqslant (4^n N_0/l_0^n + (1/(\sigma_0 - \delta_0))^n)\|Q\|_1 := c < \infty\,. \tag{3.27}$$

Знову, як і у доведенні леми 3.1.2, покажемо, що співвідношення (3.27) суперечить умові слабкої плоскості області, що відображається. Дійсно, за лемою 3.1.2, знайдеться число $\delta_1 > 0$ таке, що $h(f_m(A), \partial D') > \delta_1 > 0$ для всіх $m = 1, 2, \ldots$. Тому,

$$h(|f_m(C_m^1)|) \geqslant h(z_m, f_m(x_1)) \geqslant (1/2) \cdot h(f_m(A), \partial D') > \delta_1/2\,,$$

$$h(|f_m(C_m^2)|) \geqslant h(z_m', f_m(x_2)) \geqslant (1/2) \cdot h(f_m(A), \partial D') > \delta_1/2 \qquad (3.28)$$

для деякого $M_0 \in \mathbb{N}$ і всіх $m \geqslant M_0$. Покладемо $U := B_h(z_0, r_0) = \{y \in \overline{\mathbb{R}^n} : h(y, z_0) < r_0\}$, де $0 < r_0 < \delta_1/4$ і число δ_1 із співвідношення (3.28). Зауважимо, що $|f_m(C_m^1)| \cap U \neq \varnothing \neq |f_m(C_m^1)| \cap (D' \setminus U)$ для досить великих $m \in \mathbb{N}$, оскільки $h(|f_m(C_m^1)|) \geqslant \delta_1/2$ і $z_m \in |f_m(C_m^1)|$, $z_m \to z_0$ коли $m \to \infty$. Аналогічно, $|f_m(C_m^2)| \cap U \neq \varnothing \neq |f_m(C_m^2)| \cap (D' \setminus U)$. Оскільки $|f_m(C_m^1)|$ і $|f_m(C_m^2)|$ континууми,

$$|f_m(C_m^1)| \cap \partial U \neq \varnothing, \quad |f_m(C_m^2)| \cap \partial U \neq \varnothing\,, \qquad (3.29)$$

див, напр., [11, теорема 1.I.5.46]. Оскільки $\partial D'$ слабко плоска, тоді для заданого числа $P > 0$ існує окіл $V \subset U$ точки z_0 такий, що

$$M(\Gamma(E, F, D')) > P \qquad (3.30)$$

для будь-яких континуумів $E, F \subset D'$ що $E \cap \partial U \neq \varnothing \neq E \cap \partial V$ і $F \cap \partial U \neq \varnothing \neq F \cap \partial V$. Покажемо, що виконується наступне співвідношення:

$$|f_m(C_m^1)| \cap \partial V \neq \varnothing, \quad |f_m(C_m^2)| \cap \partial V \neq \varnothing \qquad (3.31)$$

де номер $m \in \mathbb{N}$ досить великий

Дійсно, нехай $z_m \in |f_m(C_m^1)|$, $z_m' \in |f_m(C_m^2)|$, де $z_m, z_m' \to z_0 \in V$ коли $m \to \infty$. У цьому випадку, $|f_m(C_m^1)| \cap V \neq \varnothing \neq |f_m(C_m^2)| \cap V$ для досить великих $m \in \mathbb{N}$. Також, $h(V) \leqslant h(U) \leqslant 2r_0 < \delta_1/2$. Далі, за (3.28) отримаємо $h(|f_m(C_m^1)|) > \delta_1/2$. Отже, $|f_m(C_m^1)| \cap (D' \setminus V) \neq \varnothing$ і, тому, $|f_m(C_m^1)| \cap \partial V \neq \varnothing$ (див [11, теорема 1.I.5.46]). Аналогічно, $h(V) \leqslant h(U) \leqslant 2r_0 < \delta_1/2$. За (3.28) $h(|f_m(C_m^2)|) > \delta_1/2$, тому $|f_m(C_m^2)| \cap (D' \setminus$

$V) \neq \varnothing$. За [11, теорема 1.I.5.46] маємо $|f_m(C_m^2)| \cap \partial V \neq \varnothing$. Таким чином, співвідношення (3.31) встановлене.

Поєднуючи співвідношення (3.29), (3.30) і (3.31), маємо, що

$$M(f_m(\Gamma_m)) = M(\Gamma(|f_m(C_m^1)|, |f_m(C_m^2)|, D')) > P\,.$$

Останнє співвідношення суперечить нерівності (3.27). Теорема повністю доведена. □

3.3 Одностайна неперервність сімей прямих відображень в замиканні області для змінних областей

Відповідно до [31] було досліджене питання про локальну поведінку відображень в замиканні області евклідового простору. Отримані результати про одностайну неперервність сімей таких відображень у випадку, коли відображена область не є фіксованою.

Введемо до розгляду наступне поняття, що є іншою формою означення класу відображень, поданих у (1.6), див. [60, розд. 7.6].

Означення 3.3.1. *Будемо говорити, що відображення* $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ *є* **кільцевим** Q**-відображенням в точці** $x_0 \in \overline{D}$ **відносно** p**-модуля,** $x_0 \neq \infty$, *якщо для деякого* $r_0 = r(x_0) > 0$, *довільних* $0 < r_1 < r_2 < r_0$ *і континуумів* $E_1 \subset \overline{B(x_0, r_1)} \cap D$, $E_2 \subset \left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus B(x_0, r_2)\right) \cap D$, *відображення* f *задовольняє співвідношення*

$$M_p\left(f\left(\Gamma\left(E_1,\, E_2,\, D\right)\right)\right) \ \leqslant \int\limits_{A} Q(x) \cdot \eta^p(|x - x_0|)\, dm(x)\,, \tag{3.32}$$

для довільної вимірної функції $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$, *з нерівністю*

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)\, dr \ \geqslant \ 1\,. \tag{3.33}$$

Означення 3.3.2. *Аналогічно, будемо говорити, що відображення* $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ *є кільцевим* Q*-відображенням в* $\overline{D} \setminus \{\infty\}$ *відносно* p*-модуля, якщо умова (3.32) виконується в кожній точці* $x_0 \in \overline{D} \setminus \{\infty\}$.

В точці $x_0 = \infty$ це означення можна сформулювати сформулювати за допомогою інверсії: $\varphi(x) = \frac{x}{|x|^2}, \ \infty \mapsto 0$.

Означення 3.3.3. *Нехай* I *– фіксований набір індексів і* $D_i, \ i \in I,$ *– деяка послідовність областей. Слідуючи [63, розд. 2.4], будемо говорити, що сім'я областей* $\{D_i\}_{i \in I}$ *є* **одностайно рівномірною відносно** p**-модуля**, *якщо для кожного* $r > 0$ *існує число* $\delta > 0$ *таке, що нерівність*

$$M_p(\Gamma(F^*, F, D_i)) \geqslant \delta \tag{3.34}$$

виконується для всіх $i \in I$ *і континуумів* $F, F^* \subset D$ *таких, що* $h(F) \geqslant r$ *і* $h(F^*) \geqslant r$.

Зауваження 3.3.1. Зауважимо, що в роботі [63] був розглянутий частинний випадок $p = n$, а нерівність (3.34) тут вимагалась не тільки для континуумів F і F^*, але і для довільних зв'язних множин. Вказана обставина (неістотно) відрізняє наведене вище означення від аналогічного означення Някі і Палка [63].

Покажемо, що для фіксованої області D_i співвідношення (3.34) тягне так звану сильну досяжність її межі відносно цього $i \in I$, точку $x_0 \in \partial D_i$ і деякий її окіл U. Можна вважати, що $x_0 \neq \infty$. Нехай $\varepsilon_1 > 0$ таке, що $V := B(x_0, \varepsilon_1)$ і $\overline{V} \subset U$. Припустимо, що $\partial U \neq \varnothing$ і $\partial V \neq \varnothing$, тоді покладемо $\varepsilon_2 := \operatorname{dist}(\partial U, \partial V) > 0$. Нехай континууми F і G в області D_i такі, що $F \cap \partial U \neq \varnothing \neq F \cap \partial V$ і $G \cap \partial U \neq \varnothing \neq G \cap \partial V$. Із останніх співвідношень випливає, що $h(F) \geqslant \varepsilon_2$ і $h(G) \geqslant \varepsilon_2$. Тоді з умови одностайної рівномірності областей D_i відносно p-модуля знайдеться $\delta = \delta(\varepsilon_2) > 0$ таке, що $M_p(\Gamma(F, G, D_i)) \geqslant \delta > 0$ для континуумів F і G, вказаних вище. Зокрема, *для довільного околу* U *точки* x_0 *знайшовся окіл* V *цієї ж точки, компакт* F *в* D_i *і число* $\delta > 0$ *такі, що*

$M_p(\Gamma(F, G, D_i)) \geqslant \delta > 0$ для довільного континуума $G \subset D_i$ такого, що $G \cap \partial U \neq \varnothing \neq G \cap \partial V$. Ця властивість і називається далі сильною досяжністю ∂D_i в точці x_0 відносно p-модуля, і вона встановлена для будь-якої області D_i, що є елементом деякої одностайно рівномірної сім'ї $\{D_i\}_{i \in I}$.

Тепер введемо до розгляду два класи відображень, поведінку яких плануємо досліджувати. Для $p \geqslant 1$, заданого числа $\delta > 0$, фіксованої області $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, континуума $A \subset D$ і заданої функції $Q : D \to [0, \infty]$ позначимо через $\mathfrak{F}_{Q,A,p,\delta}(D)$ сім'ю всіх кільцевих Q-гомеоморфізмів $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ в $\overline{D}$ відносно p-модуля, що задовольняють умови $h(f(A)) \geqslant \delta$ і $h(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(D)) \geqslant \delta$. Покладемо

$$q_{x_0}(r) := \frac{1}{\omega_{n-1} r^{n-1}} \int\limits_{|x - x_0| = r} Q(x)\, dS\,,$$

де dS – елемент площі поверхні S, і

$$q'_b(r) := \frac{1}{\omega_{n-1} r^{n-1}} \int\limits_{|x - b| = r} Q'(x)\, dS\,,$$

$Q'(x) = \max\{Q(x), 1\}$. Виконується наступне твердження, доведене в [31, теорема 1].

Теорема 3.3.1. *Припустимо, що $p \in (n-1, n]$, область D локально зв'язна в кожній точці $x_0 \in \partial D$ і області $D'_f = f(D)$ є одностайно рівномірними відносно p-модуля по всіх $f \in \mathfrak{F}_{Q,A,p,\delta}(D)$. Якщо функція Q має скінченне середнє коливання в $\overline{D}$, або в кожній точці $x_0 \in \overline{D}$ при деякому $\beta(x_0) > 0$ виконується умова*

$$\int\limits_0^{\beta(x_0)} \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}} q'^{\frac{1}{p-1}}_{x_0}(t)} = \infty\,, \tag{3.35}$$

то кожне з відображень $f \in \mathfrak{F}_{Q,A,p,\delta}(D)$ має неперервне продовження в $\overline{D}$ і сім'я $\mathfrak{F}_{Q,A,p,\delta}(\overline{D})$, що складається з продовжених відображень $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{\mathbb{R}^n}$, є одностайно неперервною в $\overline{D}$.

У випадку відображень з розгалуженням теорема 3.3.1 допускає деяке узагальнення. Для $p \geqslant 1,$ фіксованої області $D \subset \mathbb{R}^n,$ множини $E \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ і числа $\delta > 0$ позначимо через $\mathfrak{R}_{Q,\delta,p,E}(D)$ сім'ю всіх відкритих дискретних замкнених кільцевих Q-відображень $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n} \setminus E$ відносно p-модуля в $\overline{D}$ з наступною умовою: для будь-якої області $D_f' := f(D)$ знайдеться континуум $K_f \subset D_f'$ такий, що $h(K_f) \geqslant \delta$ і $h(f^{-1}(K_f), \partial D) \geqslant \delta > 0,$ відповідно до [31, теорема 2]

Теорема 3.3.2. *Припустимо, що $p \in (n-1, n],$ область D локально зв'язна в кожній точці $x_0 \in \partial D$ і, крім того, області $D_f' = f(D)$ є одностайно рівномірними відносно p-модуля по всіх $\mathfrak{R}_{Q,\delta,p,E}(D).$ Нехай при $p = n$ множина E має додатну ємність, а при $n - 1 < p < n$ є довільною замкненою множиною. Якщо функція Q має скінченне середнє коливання в $\overline{D},$ або в кожній точці $x_0 \in \overline{D}$ при деякому $\beta(x_0) > 0$ виконується умова (3.35), то кожне з відображень $f \in \mathfrak{R}_{Q,\delta,p,E}(D)$ має неперервне продовження в $\overline{D}$ і сім'я $\mathfrak{R}_{Q,\delta,p,E}(\overline{D}),$ що складається з продовжених відображень $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{\mathbb{R}^n},$ є одностайно неперервною в $\overline{D}.$*

Теореми 3.3.1 і 3.3.2 відносяться до випадку локально зв'язних меж, коли межове продовження відображень і одностайна неперервність їх сімей необхідно розуміти у звичайному, «поточковому» сенсі. Випадок більш складних меж відповідає випадку так званих простих кінців, див. [31, теореми 3 та 4].

Всі означення та позначення, пов'язані із простими кінцями див. у підрозділі 1.3.

Теорема 3.3.3. *Припустимо, що $p \in (n-1, n],$ область D регулярна і що області $D_f' = f(D)$ є обмеженими одностайно рівномірними відносно p-модуля по $f \in \mathfrak{F}_{Q,A,p,\delta}(D)$ областями з локально квазіконформною межею. Якщо функція Q має скінченне середнє коливання в $\overline{D},$ або в кожній точці $x_0 \in \overline{D}$ при деякому $\beta(x_0) > 0$ виконується умова (3.35), то кожне з відображень $f \in \mathfrak{F}_{Q,A,p,\delta}(D)$ має неперервне продовження*

$\overline{f} : \overline{D}_P \to \overline{\mathbb{R}^n}$ *в* $\overline{D}_P$ *і сім'я* $\mathfrak{F}_{Q,A,p,\delta}(\overline{D})$, *що складається з усіх, таким чином, продовжених відображень* $\overline{f} : \overline{D}_P \to \overline{\mathbb{R}^n}$, *є одностайно неперервною в* $\overline{D}_P$.

Теорема 3.3.4. *Припустимо, що* $p \in (n-1, n]$, *область* D *регулярна і що області* $D'_f = f(D)$ *є обмеженими одностайно рівномірними відносно* p*-модуля по* $\mathfrak{R}_{Q,\delta,p,E}(D)$ *областями з локально квазіконформною межею. Нехай при* $p = n$ *множина* E *має додатну ємність, а при* $n - 1 < p < n$ *є довільною замкненою множиною. Якщо функція* Q *має скінченне середнє коливання в* $\overline{D}$, *або в кожній точці* $x_0 \in \overline{D}$ *при деякому* $\beta(x_0) > 0$ *виконується умова (3.35), то кожне з відображень* $\mathfrak{R}_{Q,\delta,p,E}(D)$ *має неперервне продовження в* $\overline{D}_P$ *і сім'я* $\mathfrak{R}_{Q,\delta,p,E}(\overline{D})$, *що складається з усіх, таким чином, продовжених відображень* $\overline{f} : \overline{D}_P \to \overline{\mathbb{R}^n}$, *є одностайно неперервною в* $\overline{D}_P$.

Зауваження 3.3.2. В теоремах 3.3.3 і 3.3.4 одностайну неперервність варто розуміти в термінах сімей відображень між метричними просторами (X, d) і (X', d'), де $X = \overline{D}_P$, d – одна з можливих метрик, що відповідають топологічному простору $\overline{D}_P$, $X' = \overline{\mathbb{R}^n}$ і d' – хордальна (сферична) метрика.

Головним інструментом під час доведення теорем 3.3.1 і 3.3.2 є наступні твердження, доведені в [31, лема 1].

Лема 3.3.1. *Припустимо, що область* D *локально зв'язна в кожній точці* $x_0 \in \partial D$, *і що області* $D'_f = f(D)$ *є одностайно рівномірними відносно* p*-модуля по всіх* $f \in \mathfrak{F}_{Q,A,p,\delta}(D)$. *Припустимо також, що для кожної точки* $x_0 \in \overline{D}$ *знайдеться* $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(x_0) > 0$ *і вимірна за Лебегом функція* $\psi : (0, \varepsilon_0) \to [0, \infty]$ *такі, що*

$$I(\varepsilon, \varepsilon_0) := \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)\, dt < \infty \quad \forall\, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)\,, \quad I(\varepsilon, \varepsilon_0) \to \infty \quad \textit{при} \quad \varepsilon \to 0\,, \tag{3.36}$$

і, крім того, при $\varepsilon \to 0$

$$\int\limits_{A(x_0,\varepsilon,\varepsilon_0)} Q(x)\cdot\psi^p(|x-x_0|)\,dm(x) = o(I^p(\varepsilon,\varepsilon_0))\,, \tag{3.37}$$

де, як зазвичай, $A(x_0,\varepsilon,\varepsilon_0)$ *сферичне кільце. Тоді кожне з відображень* $f\in\mathfrak{F}_{Q,A,p,\delta}(D)$ *має неперервне продовження в* $\overline{D}$ *і сім'я* $\mathfrak{F}_{Q,A,p,\delta}(\overline{D})$, *що складається з усіх, таким чином, продовжених відображень* $\overline{f}:\overline{D}\to\overline{\mathbb{R}^n}$, *є одностайно неперервною в* $\overline{D}$.

Доведення. Одностайна неперервність $\mathfrak{F}_{Q,A,p,\delta}(\overline{D})$ всередині області D випливає з [18, лема 3.2.2] у випадку $p=n$ і [46, лема 2.4] при $n-1<p<n$. Можливість продовження кожного елемента $f\in\mathfrak{F}_{Q,A,p,\delta}(D)$ до неперервного відображення в замиканні D є результатом [20, лема 1] при $p=n$ і з урахуванням зауваження 3.3.1 (доведення цього факту у випадку $n-1<p<n$ проводиться аналогічно).

Залишилось показати, що сім'я $\mathfrak{F}_{Q,A,p,\delta}(\overline{D})$ одностайно неперервна в точках ∂D. Припустимо протилежне, тоді знайдеться $x_0\in\partial D$ і число $a>0$ з наступною властивістю: для кожного $m=1,2,\ldots$ існує точка $x_m\in\overline{D}$ і елемент f_m сім'ї $\mathfrak{F}_{Q,A,p,\delta}(\overline{D})$ такі, що $|x_0-x_m|<1/m$ і $h(f_m(x_m),f_m(x_0))\geqslant a$. Оскільки f_m має неперервне продовження в точку x_0, то ми можемо знайти таку послідовність $x_m'\in D$, $x_m'\to x_0$ при $m\to\infty$ таку, що $h(f_m(x_m'),f_m(x_0))\leqslant 1/m$. Таким чином,

$$h(f_m(x_m),f_m(x_m'))\geqslant a/2 \qquad \forall\, m\in\mathbb{N}\,. \tag{3.38}$$

Можна вважати, що $x_0\ne\infty$. З огляду на можливість неперервоного продовження кожного f_m на межі D, ми можемо вважати, що $x_m\in D$.

В силу локальної зв'язності області D в точці x_0 знайдеться послідовність околів V_m точки x_0 з $h(V_m)\to 0$ при $m\to\infty$, такі, що множини $D\cap V_m$ є областями і $D\cap V_m\subset B(x_0,2^{-m})$. Не обмежуючи загальності міркувань, переходячи до підпослідовності, якщо це необхідно, ми можемо вважати, що $x_m,x_m'\in D\cap V_m$. з'єднаємо точки x_m і x_m'

кривою $\gamma_m : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ такою, що $\gamma_m(0) = x_m$, $\gamma_m(1) = x'_m$ і $\gamma_m(t) \in V_m$ при $t \in (0,1)$,. Позначимо через C_m образ кривої $\gamma_m(t)$ при відображенні f_m. Із співвідношення (3.38) випливає, що

$$h(C_m) \geqslant a/2 \qquad \forall\, m \in \mathbb{N}\,, \tag{3.39}$$

де h позначає хордальний діаметр множини.

Не обмежуючи загальності міркувань, можна вважати, що континуум A, що бере участь в означенні класу $\mathfrak{F}_{Q,A,p,\delta}(D)$, лежить зовні куль $B(x_0, 2^{-m})$, $m = 1, 2, \ldots$, і $B(x_0, \varepsilon_0) \cap A = \varnothing$. Нехай Γ_m – сім'я кривих, що з'єднують γ_m і A в D. З означення кільцевого Q-відображення відносно p-модуля в точці x_0 випливає, що

$$M_p(f_m(\Gamma_m)) \leqslant \int\limits_{A(x_0, \frac{1}{2^m}, \varepsilon_0)} Q(x) \cdot \eta^p(|x - x_0|)\; dm(x) \tag{3.40}$$

для кожної вимірної функції $\eta : (\frac{1}{2^m}, \varepsilon_0) \to [0, \infty]$, такої що $\int\limits_{\frac{1}{2^m}}^{\varepsilon_0} \eta(r) dr \geqslant 1$. Зауважимо, що функція

$$\eta(t) = \begin{cases} \psi(t)/I(2^{-m}, \varepsilon_0), & t \in (2^{-m}, \varepsilon_0), \\ 0, & t \in \mathbb{R} \setminus (2^{-m}, \varepsilon_0)\,, \end{cases}$$

де $I(\varepsilon, \varepsilon_0) := \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)\, dt$, задовольняє умову нормування виду (3.33) при $r_1 := 2^{-m}$, $r_2 := \varepsilon_0$, тому з умов (3.37) і (3.40) випливає, що

$$M_p(f_m(\Gamma_m)) \leqslant \alpha(2^{-m}) \to 0 \tag{3.41}$$

при $m \to \infty$, де $\alpha(\varepsilon)$ – деяка невід'ємна функція, що прямує до нуля при $\varepsilon \to 0$, яка існує з огляду на умову (3.37).

З іншого боку, зауважимо, що $f_m(\Gamma_m) = \Gamma(C_m, f_m(A), D'_m)$. За умовами леми $h(f_m(A)) \geqslant \delta$ при всіх $m \in \mathbb{N}$. Отже, з огляду на (3.39) $h(f_m(A)) \geqslant \delta_1$ і $h(C_m) \geqslant \delta_1$, де $\delta_1 := \min\{\delta, a/2\}$. Користуючись тим, що області $D'_m := f_m(D)$ є одностайно рівномірними відносно p-модуля, робимо висновок, що існує $\sigma > 0$ таке, о

$$M_p(f_m(\Gamma_m)) = M_p(\Gamma(C_m, f_m(A), D'_m)) \geqslant \sigma \qquad \forall\, m \in \mathbb{N}\,,$$

що суперечить умові (3.41). отримане протиріччя вказує на те, що припущення про відсутність одностайної неперервності сім'ї $\mathfrak{F}_{Q,A,p,\delta}(\overline{D})$ було невірним. Отримане протиріччя завершує доведення леми. $\Box$

У випадку відображень з розгалуженням, лема 3.3.1 має наступний вигляд [31, лема 2].

Лема 3.3.2. *Припустимо, що $p \in (n-1, n]$, область D локально зв'язна в кожній точці $x_0 \in \partial D$ і що області $D'_f = f(D)$ є одностайно рівномірними відносно p-модуля по всіх $\mathfrak{R}_{Q,\delta,p,E}(D)$. Нехай при $p = n$ множина E має додатну ємність, а при $n-1 < p < n$ є довільною замкненою множиною. Припустимо також, що для кожної точки $x_0 \in \overline{D}$ знайдеться $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(x_0) > 0$ і вимірна за Лебегом функція $\psi : (0, \varepsilon_0) \to [0, \infty]$ з наступною властивістю: для будь-якого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ виконується умова (3.36) і, крім того, при $\varepsilon \to 0$ виконується умова (3.37). Тоді кожне відображення із $f \in \mathfrak{R}_{Q,\delta,p,E}(D)$ має неперервне продовження в $\overline{D}$ і сім'я $\mathfrak{R}_{Q,\delta,p,E}(\overline{D})$, що складається із продовжених відображень $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{\mathbb{R}^n}$, є одностайно неперервною в $\overline{D}$.*

Доведення. Одностайна неперервність всередині області D випливає з [18, лема 3.6.1] у випадку $p = n$ і [46, лема 2.4] при $n-1 < p < n$, а можливість продовження кожного елемента f сім'ї відображень $\mathfrak{R}_{Q,\delta,p,E}(D)$ до неперервного відображення в замиканні D — з [20, лема 1] при $p = n$ (тут необхідно врахувати зауваження 3.3.1; доведення цього факту у випадку $n-1 < p < n$ проводиться аналогічно).

Залишилось показати, що сім'я $\mathfrak{R}_{Q,\delta,p,E}(\overline{D})$ одностайно неперервна в точках ∂D. Припустимо протилежне, тоді знайдеться $x_0 \in \partial D$ і число $a > 0$ з наступною властивістю: для кожного $m = 1, 2, \ldots$ існують точка

$x_m \in \overline{D}$ і елемент f_m сім'ї $\mathfrak{R}_{Q,\delta,p,E}(\overline{D})$ такі, що $|x_0 - x_m| < 1/m$ і виконується умова (3.38). Можна вважати, що $x_0 \neq \infty$. З огляду на можливість неперервного продовження кожного f_m на межу D, ми можемо вважати, що $x_m \in D$. Більше того, з огляду на те, що f_m продовжується за неперервністю в точку x_0, знайдеться послідовність $x'_m \in D$, що збігається до точки x_0 при $m \to \infty$, така, що при деякому $a > 0$ виконуються нерівності в (3.38).

В силу локальної зв'язності області D в точці x_0 знайдеться послідовність околів V_m точки x_0 з $h(V_m) \to 0$ при $m \to \infty$, такі що множини $D \cap V_m$ є областями і $D \cap V_m \subset B(x_0, 2^{-m})$. Не обмежуючи загальності міркувань, переходячи до підпослідовності, якщо це необхідно, ми можемо вважати, що $x_m, x'_m \in D \cap V_m$. З'єднаємо точки x_m і x'_m кривою $\gamma_m : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ такою, що $\gamma_m(0) = x_m$, $\gamma_m(1) = x'_m$ і $\gamma_m(t) \in V_m \cap D$ при $t \in (0,1)$,. Позначимо через C_m образ кривої γ_m при відображенні f_m. Із співвідношення (3.38) випливає, що виконується умова виду (3.39), де h позначає хордальний діаметр множини.

За означенням сім'ї відображень $\mathfrak{R}_{Q,\delta,p,E}(D)$, для будь-якого $f_m \in \mathfrak{R}_{Q,\delta,p,E}(D)$ і будь-якої області $D'_m := f_m(D)$ знайдеться континуум $K_m \subset D'_m$ такий, що $h(K_m) \geqslant \delta$ і $h(f_m^{-1}(K_m), \partial D) \geqslant \delta > 0$. оскільки за умовою леми області D'_m є одностайно рівномірними відносно p-модуля, то з огляду на сказане і враховуючи умову (3.39), ми отримаємо, що при всіх $m = 1, 2, \ldots$ і деякому $b > 0$ виконується нерівність

$$M_p(\Gamma(K_m, C_m, D'_m)) \geqslant b\,. \tag{3.42}$$

Розглянемо сім'ю Γ_m, що складається з усіх кривих $\beta : [0,1) \to D'_m$, де $\beta(0) \in C_m$ і $\beta(t) \to p \in K_m$ при $t \to 1$. Нехай Γ^*_m – сім'я всіх повних підняттів $\alpha : [0,1) \to D$ сім'ї Γ_m при відображенні f_m з початком на γ_m. Така сім'я коректно визначена за [82, теорема 3.7]. З огляду на замкненість відображення f_m маємо: $\alpha(t) \to f_m^{-1}(K_m)$, де $f_m^{-1}(K_m)$ – повний прообраз континуума K_m при відображенні f_m.

Зауважимо, що з огляду на компактність простору $\overline{\mathbb{R}^n}$ при кожному фіксованому $\delta > 0$ множина $C_\delta := \{x \in D : h(x, \partial D) \geqslant \delta\}$ є компактом в D і $f_m^{-1}(K_m) \subset C_\delta$. З огляду на [35, лема 1] множину C_δ можна вкласти в континуум E_δ, що лежить в області D, при цьому, можна вважати, що $\operatorname{dist}(x_0, E_\delta) \geqslant \varepsilon_0$ за рахунок зменшення ε_0, якщо це необхідно. Тоді на основі (3.32) випливає, що

$$M_p(f_m(\Gamma_m^*)) \leqslant M_p(f_m(\Gamma(|\gamma_m|, E_\delta, D))) \leqslant \int\limits_{A(x_0, \frac{1}{2^m}, \varepsilon_0)} Q(x) \cdot \eta^p(|x - x_0|)\, dm(x) \tag{3.43}$$

для кожної вимірної функції $\eta : (\frac{1}{2^m}, \varepsilon_0) \to [0, \infty]$, такої що $\int\limits_{\frac{1}{2^m}}^{\varepsilon_0} \eta(r)dr \geqslant 1$. Зауважимо, що функція

$$\eta(t) = \begin{cases} \psi(t)/I(2^{-m}, \varepsilon_0), & t \in (2^{-m}, \varepsilon_0), \\ 0, & t \in \mathbb{R} \setminus (2^{-m}, \varepsilon_0), \end{cases}$$

де $I(\varepsilon, \varepsilon_0) := \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)\, dt$, задовольняє умову нормування виду (3.33) при $r_1 := 2^{-m}$, $r_2 := \varepsilon_0$, тому із умов (3.37) і (3.43) випливає, що

$$M_p(f_m(\Gamma_m^*)) \leqslant \alpha(2^{-m}) \to 0 \tag{3.44}$$

при $m \to \infty$, де $\alpha(\varepsilon)$ – деяка невід'ємна функція, що прямує до нуля при $\varepsilon \to 0$, яка існує з огляду на умову (3.37). Зауважимо, що крім того, що $f_m(\Gamma_m^*) = \Gamma_m$ і $M_p(\Gamma_m) = M_p(\Gamma(K_m, C_m, D_m'))$ так що

$$M_p(f_m(\Gamma_m^*)) = M_p(\Gamma(K_m, C_m, D_m'))\,. \tag{3.45}$$

Однак, співвідношення (3.44) і (3.45) разом суперечать (3.42). Отримане протиріччя вказує на те, що припущення (3.38) було невірним, і, отже, сім'я відображень $\mathfrak{R}_{Q,\delta,p,E}(\overline{D})$ одностайно неперервна в кожній точці $x_0 \in \partial D$. $\Box$

Здійснимо також доведення тверджень, аналогічних лемі 3.3.1 і 3.3.2 для випадку, коли область D не є локально зв'язною на своїй межі. Виконується наступна (див. [31, лема 3])

Лема 3.3.3. *Припустимо, що* $p \in (n-1, n]$, *область* D *регулярна і що області* $D'_f = f(D)$ *є обмеженими одностайно рівномірними відносно* p*-модуля по* $f \in \mathfrak{F}_{Q,A,p,\delta}(D)$ *областями з локально квазіконформною межею. Припустимо також, що для кожної точки* $x_0 \in \overline{D}$ *знайдеться* $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(x_0) > 0$ *і вимірна за Лебегом функція* $\psi : (0, \varepsilon_0) \to [0, \infty]$ *з наступною властивістю: для будь-якого* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ *виконується умова (3.36) і, крім того, при* $\varepsilon \to 0$ *виконується умова (3.37). Тоді кожне з відображень* $f \in \mathfrak{F}_{Q,A,p,\delta}(D)$ *має неперервне продовження* $\overline{f} : \overline{D}_P \to \overline{\mathbb{R}^n}$ *в* $\overline{D}_P$ *і сім'я* $\mathfrak{F}_{Q,A,p,\delta}(\overline{D})$, *що складається з усіх, таким чином, продовжених відображень* $\overline{f} : \overline{D}_P \to \overline{\mathbb{R}^n}$, *є одностайно неперервною в* $\overline{D}_P$.

Доведення. Одностайна неперервність всередині області D випливає з [18, лема 3.2.2] у випадку $p = n$ і [46, лема 2.4] при $n-1 < p < n$, а можливість продовження кожного елемента f сім'ї відображень $\mathfrak{F}_{Q,A,p,\delta}(D)$ до неперервного відображення в замиканні D — з [21, лема 3]. Зокрема, з зауваження 3.3.1 випливає сильна досяжність межі області в образі при відображенні.

Покажемо одностайну неперервність сім'ї $\mathfrak{F}_{Q,A,p,\delta}(\overline{D})$ в точках E_D, де E_D позначає простір простих кінців, що відповідають області D. Припустимо супротивне, а саме, що сім'я $\mathfrak{F}_{Q,A,p,\delta}(\overline{D})$ не є одностайно неперервною в деякій точці $P_0 \in E_D$. Тоді знайдуться число $a > 0$, послідовність $P_k \in \overline{D}_P$, $k = 1, 2, \ldots$ і елементи $f_k \in \mathfrak{F}_{Q,A,p,\delta}(D)$ такі, що $d(P_k, P_0) < 1/k$ і

$$h(f_k(P_k), f_k(P_0)) \geqslant a \quad \forall \quad k = 1, 2, \ldots, . \tag{3.46}$$

З огляду на можливість неперервного продовження кожного f_k на межу D в термінах простих кінців, для будь-якого $k \in \mathbb{N}$ знайдеться елемент $x_k \in D$ такий, що $d(x_k, P_k) < 1/k$ і $h(f_k(x_k), f_k(P_k)) < 1/k$. Тоді з (3.46) випливає, що

$$h(f_k(x_k), f_k(P_0)) \geqslant a/2 \quad \forall \quad k = 1, 2, \ldots, . \tag{3.47}$$

Аналогічно, в силу неперервного продовження відображення f_k в $\overline{D_P}$ знайдеться послідовність $x_k'\in D$, $x_k'\to P_0$ при $k\to\infty$ така, що $h(f_k(x_k'), f_k(P_0))<1/k$ при $k=1,2,\ldots$. Тоді з (2.31) випливає, що

$$h(f_k(x_k), f_k(x_k'))\geqslant a/4\quad\forall\quad k=1,2,\ldots\,, \tag{3.48}$$

де послідовності x_k і x_k' належать D і збігаються до простого кінця P_0 при $k\to\infty$,. В силу [9, лема 2] простий кінець P_0 регулярної області D в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, містить ланцюг розрізів σ_k, що лежить на сферах S_k з центром в деякій точці $x_0\in\partial D$ і з евклідовими радіусами $r_k\to 0$ при $k\to\infty$. Нехай D_k – області, асоційовані з розрізами σ_k, $k=1,2,\ldots$. Оскільки послідовності x_k і x_k' збігаються до простого кінця P_0 при $k\to\infty$, ми можемо вважати, що точки $x_k, x_k'\in D_k$ при всіх $k=1,2,\ldots,$. З'єднаємо точки x_k і x_k' кривої γ_k, що повністю лежить в D_k. Можна також вважати, що континуум A з означення класу $\mathfrak{F}_{Q,A,p,\delta}(D)$ не перетинається жодною з областей D_k, і що $\mathrm{dist}\,(\partial D, A)>\varepsilon_0$.

Позначимо через C_k образ кривої γ_k при відображенні f_k. Із співвідношення (3.48) випливає, що

$$h(C_k)\geqslant a/4\qquad\forall\,k\in\mathbb{N}\,, \tag{3.49}$$

де h позначає хордальний діаметр множини.

Нехай Γ_k – сім'я кривих, що з'єднують $|\gamma_k|$ і A в D. З означення кільцевого Q-відображення відносно p-модуля в точці x_0 випливає, що

$$M_p(f_k(\Gamma_k))\leqslant\int\limits_{A(x_0,r_k,\varepsilon_0)} Q(x)\cdot\eta^p(|x-x_0|)\;dm(x) \tag{3.50}$$

для кожної вимірної функції $\eta:(r_k,\varepsilon_0)\to[0,\infty]$, такої що $\int\limits_{r_k}^{\varepsilon_0}\eta(r)\,dr\geqslant 1$. Зауважимо, що функція

$$\eta(t)=\left\{\begin{array}{rr}\psi(t)/I(r_k,\varepsilon_0), & t\in(r_k,\varepsilon_0),\\ 0, & t\in\mathbb{R}\setminus(r_k,\varepsilon_0)\,,\end{array}\right.$$

де $I(\varepsilon, \varepsilon_0) := \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)\,dt$, задовольняє умову нормування виду (3.33), тому з умов (3.37) і (3.50) випливає, що

$$M_p(f_k(\Gamma_k)) \leqslant \alpha(r_k) \to 0 \tag{3.51}$$

при $k \to \infty$, де $\alpha(\varepsilon)$ – деяка невід'ємна функція, що прямує до нуля при $\varepsilon \to 0$, яка існує з огляду на умову (3.37).

З іншого боку, зауважимо, що $f_k(\Gamma_k) = \Gamma(C_k, f_k(A), D_k^{\prime})$, де $D_k^{\prime} = f_k(D)$. Оскільки за умовою леми $h(f_k(A)) \geqslant \delta$ при всіх $k \in \mathbb{N}$, з огляду на (3.49) $h(f_k(A)) \geqslant \delta_1$ і $h(C_k) \geqslant \delta_1$, де $\delta_1 := \min\{\delta, a/4\}$. Скориставшись тим, що області $D_k^{\prime}$ є одностайно рівномірними відносно p-модуля, ми робимо висновок, що існує $\sigma > 0$ таке, що

$$M_p(f_k(\Gamma_k)) = M_p(\Gamma(C_k, f_k(A), D_k^{\prime})) \geqslant \sigma \qquad \forall\ k \in \mathbb{N}\,,$$

що суперечить умові (3.51). Отримане протиріччя вказує на те, що припущення про відсутність одностайної неперервності сім'ї $\mathfrak{F}_{Q,A,p,\delta}(\overline{D})$ було невірним. Отримане протиріччя завершує доведення леми. $\Box$

Для відображень з розгалуженням версія леми 3.3.3 має наступний вигляд (див. [31, лема 4]).

Лема 3.3.4. *Припустимо, що $p \in (n-1, n]$, область D регулярна і що області $D_f^{\prime} = f(D)$ є обмеженими одностайно рівномірними відносно p-модуля по $f \in \mathfrak{R}_{Q,\delta,p,E}(D)$ областями з локально квазіконформною межею. Нехай при $p = n$ множина E має додатну ємність, а при $n-1 < p < n$ є довільною замкненою множиною. Припустимо також, що для кожної точки $x_0 \in \overline{D}$ знайдеться $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(x_0) > 0$ і вимірна за Лебегом функція $\psi : (0, \varepsilon_0) \to [0, \infty]$ з наступною властивістю: для будь-якого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ виконується умова (3.36) і, крім того, при $\varepsilon \to 0$ виконується умова (3.37). Тоді кожне відображення $f \in \mathfrak{R}_{Q,\delta,p,E}(D)$ має неперервне продовження в $\overline{D}_P$ і сім'я $\mathfrak{R}_{Q,\delta,p,E}(\overline{D})$, що складається з усіх продовжених таким чином відображень $\overline{f} : \overline{D}_P \to \overline{\mathbb{R}^n}$, є одностайно неперервною в $\overline{D}_P$.*

Доведення. Одностайна неперервність всередині області D випливає з [18, лема 3.6.1] у випадку $p=n$ і [46, лема 2.4] при $n-1<p<n$, а можливість продовження кожного елемента f сім'ї відображень $\mathfrak{R}_{Q,\delta,p,E}(D)$ до неперервного відображення в замиканні D_P — з [21, лема 3]. Сильна досяжність межі відображеної області, як і раніше, випливає із зауваження 3.3.1.

Залишилось показати, що сім'я $\mathfrak{R}_{Q,\delta,p,E}(\overline{D})$ одностайно неперервна в точках $\partial_P D := \overline{D}_P \setminus D$. Припустимо протилежне. Міркуючи, як і при доведенні леми 3.3.3, ми побудуємо дві послідовності x_k і $x_k' \in D$, що збігаються до простого кінця P_0 при $k\to\infty$, для яких виконується співвідношення виду (3.48). З'єднаємо точки x_k і x_k' кривою $\gamma_k:[0,1]\to\mathbb{R}^n$ такою, що $\gamma_k(0)=x_k$, $\gamma_k(1)=x_k'$ і $\gamma_k(t)\in D$ при $t\in(0,1)$. Позначимо через C_k образ кривої γ_k при відображенні f_k. Із співвідношення (3.48) випливає, що

$$h(C_k)\geqslant a/4 \;\forall\; k=1,2,\ldots . \tag{3.52}$$

В силу [9, лема 2] простий кінець P_0 регулярної області D в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, містить ланцюг розрізів σ_k, що лежить на сферах S_k з центром в деякій точці $x_0\in\partial D$ і з евклідовими радіусами $r_k\to 0$ при $k\to\infty$. Нехай D_k – області, асоційовані з розрізами σ_k, $k=1,2,\ldots$. Оскільки послідовності x_k і x_k' збігаються до простого кінця P_0 при $k\to\infty$, ми можемо вважати, що точки $x_k, x_k'\in D_k$ при всіх $k=1,2,\ldots,$.

За означенням сім'ї відображень $\mathfrak{R}_{Q,\delta,p,E}(D)$, для будь-якого $f_k\in\mathfrak{R}_{Q,\delta,p,E}(D)$ і будь-якої області $D_k' := f_k(D)$ знайдеться континуум $K_k\subset D_k'$ такий, що $h(K_k)\geqslant\delta$ і $h(f^{-1}(K_k),\partial D)\geqslant\delta>0$. Оскільки за умовами леми області D_k' є одностайно рівномірними відносно p-модуля, то з огляду на сказане і враховуючи умову (3.52), ми отримаємо, що при всіх $k=1,2,\ldots$ і деякому $b>0$ виконується нерівність

$$M_p(\Gamma(K_k,C_k,D_k'))\geqslant b\,. \tag{3.53}$$

Розглянемо сім'ю Γ_k, що складається з усіх кривих $\beta:[0,1)\to D_k'$, де $\beta(0)\in C_k$ і $\beta(t)\to p\in K_k$ при $t\to 1$. нехай Γ_k^* – сім'я всіх повних підняттів $\alpha : [0,1) \to D$ сім'ї Γ_k при відображенні f_k з початком на γ_k. Така сім'я коректно визначена з огляду на [82, теорема 3.7]. З огляду на замкненість відображення f_k, маємо: $\alpha(t) \to f_k^{-1}(K_k)$ при $t \to 1$, де $f_k^{-1}(K_k)$ – повний прообраз континуума K_k при відображенні f_k.

Зауважимо, що з огляду на компактність простору $\overline{\mathbb{R}^n}$ при кожному фіксованому $\delta > 0$ множина $C_\delta := \{x \in D : h(x, \partial D) \geqslant \delta\}$ є компактом в D і $f_k^{-1}(K_k) \subset C_\delta$. З огляду на [35, лема 1] множину C_δ можна вкласти в континуум E_δ, що лежить в області D, при цьому, можна вважати, що $\mathrm{dist}\,(x_0, E_\delta) \geqslant \varepsilon_0$ за рахунок зменшення ε_0, якщо це необхідно. Тоді на основі (3.32) випливає, що

$$M_p(f_k(\Gamma_k^*)) \leqslant M_p(f_k(\Gamma(|\gamma_k|, E_\delta, D))) \leqslant \int\limits_{A(x_0, r_k, \varepsilon_0)} Q(x) \cdot \eta^p(|x - x_0|)\; dm(x) \tag{3.54}$$

для кожної вимірної функції $\eta : (r_k, \varepsilon_0) \to [0, \infty]$, такої що $\int\limits_{r_k}^{\varepsilon_0} \eta(r)dr \geqslant 1$. Зауважимо, що функція

$$\eta(t) = \begin{cases} \psi(t)/I(r_k, \varepsilon_0), & t \in (r_k, \varepsilon_0), \\ 0, & t \in \mathbb{R} \setminus (r_k, \varepsilon_0)\,, \end{cases}$$

де величина $I(\varepsilon, \varepsilon_0) := \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)\, dt$, задовольняє умову нормування виду (3.33). Тоді з умов (3.37) і (3.54) випливає, що

$$M_p(f_k(\Gamma_k)) \leqslant \alpha(r_k) \to 0 \tag{3.55}$$

при $k \to \infty$, де $\alpha(\varepsilon)$ – деяка невід'ємна функція, що прямує до нуля при $\varepsilon \to 0$, що існує з огляду на умову (3.37). Зауважимо, що крім того, що $f_k(\Gamma_k^*) = \Gamma_k$ і, одночасно, $M_p(\Gamma_k) = M_p(\Gamma(K_k, C_k, D_k'))$. Тоді

$$M_p(f_k(\Gamma_k)) = M_p(\Gamma(K_k, C_k, D_k'))\,. \tag{3.56}$$

Поєднуючи співвідношення (3.55) і (3.56), ми отримуємо суперечність з (3.53). Отримане протиріччя вказує на те, що припущення (3.38) було невірним, і, отже, сім'я відображень $\mathfrak{R}_{Q,\delta,p,E}(\overline{D})$ одностайно неперервне в кожній точці $x_0 \in E_D$. $\Box$

Твердження теорем 3.3.1, 3.3.2, 3.3.3 і 3.3.4 безпосередньо випливає з доведених вище лем 3.3.1–3.3.4 і [21, пропозиція 2 і деталі доведення теореми 2] (див. також [18, лема 2.3.1]).

Зауваження 3.3.3. При $p = n$ відповідні версії теорем 3.3.3 і 3.3.4 отримані Севостьяновим Є.О. для випадку загальних метричних просторів, див. [70]. Тут розглянуті лише скінченно зв'язні на межі області, що є частинним випадком розглянутих тут областей. Означення сімей відображень, що досліджуються в цій роботі також відрізняються від [70].

3.4 Локальна і межова поведінка гомеоморфізмів з оберненою нерівністю Полецького в термінах простих кінців

У цьому підрозділі, відповідно до [33] розглядається ситуація, коли відображення визначені в областях зі складною межею.

В роботах [5] та [10] отримані результати, що стосуються межової поведінки класів Орліча–Соболєва і гомеоморфізмів, визначених шляхом спотворення модуля сімей кривих (поверхонь). Тут розглядалася ситуація, коли відображення визначені в областях зі складною межею. Серед іншого, у вказаних роботах була встановлена можливість неперервного продовження відповідних обернених відображень в межові точки, якщо мажоранта, що відповідає за оцінки модуля, інтегровна (див. [5, теорема 6.1], [10, теорема 1]). Під «межовими точками» слід розуміти прості кінці, оскільки в областях складної структури навіть конформні відображення можуть виявитись розривними на межі в звичайному сенсі. У цій статті ми покажемо, що вказаний клас обернених гомеоморфізмів є одностайно неперервним в замиканні заданої області, яке визначається доданням до неї усіх її простих кінців. Зауважимо, що в [17] були опубліковані деякі частинні випадки наведених нижче тверджень, проте, в цьому розділі ми розглядаємо значно більш загальний випадок.

Пропозиція 3.4.1. *Нехай $D \subset \mathbb{R}^n$ – область з локально квазіконформною межею, тоді межа цієї області є слабко плоскою. Крім того, окіл U в означенні локально квазіконформної межі може бути взятий як завгодно малим, при цьому, в означенні можна вважати $\varphi(x_0) = 0$.*

Наступне твердження (див. [33, лема 2.1]) вказує на можливість «зручного» з'єднання кривими точок регулярної області.

Лема 3.4.1. *Нехай область $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, регулярна, і нехай послідовності $x_m, y_m \in D$, $m = 1, 2, \ldots$, збігаються при $m \to \infty$ до різних елементів $P_1, P_2 \in \overline{D}_P$. Припустимо, що d_m, g_m, $m = 1, 2, \ldots$, – послідовності спадних областей, що відповідають P_1 і P_2, $d_1 \cap g_1 = \varnothing$ і $x_0, y_0 \in D \setminus (d_1 \cup g_1)$. Тоді існують k_0 і $M_0 \in \mathbb{N}$, такі що при всіх $m \geqslant M_0$ виконується наступна умова: знайдуться непересічні криві $\gamma_{i,m} : [0, 1] \to D$, $i = 1, 2$, $\gamma_{1,m}(0) = x_0$, $\gamma_{1,m}(1) = x_m$, $\gamma_{2,m}(0) = y_0$, $\gamma_{2,m}(1) = y_m$, такі що $|\gamma_{1,m}| \cap \overline{g_{k_0}} = \varnothing = |\gamma_{2,m}| \cap \overline{d_{k_0}}$.*

Доведення. Оскільки за умовою D – регулярна область, вона може бути відображена на деяку область D_0 з локально квазіконформною межею за допомогою (деякого) квазіконформного відображення $h : D \to D_0$. Зауважимо, що область D_0 локально зв'язна на своїй межі, що випливає безпосередньо з означення локальної квазіконформності. Крім того, якщо P_1 і P_2 – різні прості кінці в D, то $h(P_1)$ і $h(P_2)$ – прості кінці в D_0, при цьому, тілами цих кінців $I(h(P_1))$ і $I(h(P_2))$ є деякі різні точки a і b межі D_0 (див. [62, теорема 4.1]). Якщо ж P_1 (або P_2) – внутрішні точки D, то $h(P_1)$ (або $h(P_2)$) – внутрішні точки області D_0, які позначимо через a і b, відповідно. Оскільки за умовою $x_0, y_0 \in D \setminus (d_1 \cup g_1)$, то, зокрема, $P_1 \neq x_0 \neq P_2$, $P_1 \neq y_0 \neq P_2$. Звідси випливає, що $a, b, h(x_0), h(y_0)$ – чотири різні точки в $\overline{D_0}$, із яких не менше двох є внутрішніми відносно D_0. За лемою 3.1.1 можна з'єднати точки a і $h(x_0)$ і точки b і $h(y_0)$ непересічними кривими $\alpha : [0, 1] \to \overline{D_0}$ і $\beta : [0, 1] \to \overline{D_0}$ так, що $|\alpha| \cap |\beta| = \varnothing$, $\alpha(t), \beta(t) \in D$ при всіх $t \in (0, 1)$, $\alpha(0) = h(x_0)$, $\alpha(1) = a$, $\beta(0) =$

$h(y_0)$ і $\beta(1) = b$. Так як $\mathbb{R}^n$ є нормальним топологічним простором, образи $|\alpha|$ і $|\beta|$ кривих α і β мають неперетинні відкриті околи

$$U \supset |\alpha|, \quad V \supset |\beta|\,. \tag{3.57}$$

Можливі два випадки: або $h(P_1)$ – простий кінець в E_{D_0}, або точка в D_0. Нехай $h(P_1)$ – простий кінець в E_{D_0}. Оскільки $I(h(P_1)) = a$, то знайдеться номер $k_1 \in \mathbb{N}$ такий, що $\overline{h(d_k)} \subset U$ при $k \geqslant k_1$. Якщо ж $h(P_1)$ – точка області D, то також знайдеться номер $k_1 \in \mathbb{N}$ такий, що $\overline{h(d_k)} \subset U$ при всіх $k \geqslant k_1$, де $d_k := B(P_1, r_k)$, $r_k \to 0$, $k \to \infty$, $r_k > 0$. В обох випадках $\overline{h(d_k)} \subset U$ при $k \geqslant k_1$. Аналогічно, знайдеться номер $k_2 \in \mathbb{N}$ такий, що $\overline{h(g_k)} \subset V$ при всіх $k \geqslant k_2$. Тоді при $k_0 := \max\{k_1, k_2\}$ маємо:

$$\overline{h(d_k)} \subset U\,, \quad \overline{h(g_k)} \subset V\,, \quad U \cap V = \varnothing\,, \quad k \geqslant k_0\,. \tag{3.58}$$

Оскільки послідовність x_m збігається до P_1, то послідовність $h(x_m)$ збігається до a, отже, знайдеться номер $m_1 \in \mathbb{N}$ такий, що $h(x_m) \in h(d_{k_0})$, $m \geqslant m_1$. Аналогічно, оскільки послідовність y_m збігається до кінця P_2, то послідовність $h(y_m)$ збігається до b, отже, знайдеться номер $m_2 \in \mathbb{N}$ такий, що $h(y_m) \in h(g_{k_0})$, $m \geqslant m_2$. Покладемо $M_0 := \max\{m_1, m_2\}$. Покажемо, що

$$|\alpha| \cap h(d_{k_0}) \neq \varnothing, \qquad |\beta| \cap h(g_{k_0}) \neq \varnothing\,. \tag{3.59}$$

Досить встановити перше із цих співвідношень, оскільки друге співвідношення можна довести аналогічно. Якщо $a = h(P_1)$ – внутрішня точка D_0, то дане включення очевидне. Нехай тепер $h(P_1)$ – простий кінець в E_{D_0}. Оскільки область D_0 має локально квазіконформну межу, знайдеться послідовність сфер $S(0, 1/2^k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, спадна послідовність околів U_k точки a і деяке квазіконформне відображення $\varphi : U_0 \to \mathbb{B}^n$, для яких $\varphi(U_k) = B(0, 1/2^k)$, $\varphi(\partial U_k \cap D_0) = S(0, 1/2^k) \cap \mathbb{B}^n_+ = \{x = (x_1, \ldots, x_n) : |x| < 1, x_n > 0\}$ (див. роздуми при доведенні [62, лема 3.5]). Зауважимо, що $U_k \cap D_0$ є областю, так як $U_k \cap D_0 = \varphi^{-1}(B_+(0, 1/2^k))$, $B_+(0, 1/2^k) = \{x = (x_1, \ldots, x_n) : |x| < 1/2^k, x_n > 0\}$, і φ – гомеоморфізм.

Крім того, послідовність областей $U_k\cap D_0$ відповідає деякому простому кінцю, тілом якого є точка a, а відповідними розрізами є множини $\sigma_k:=\partial U_k\cap D_0$. За [62, теорема 4.1] точка $a\in D_0$ відповідає лише одному простому кінцю, отже, будь-яка область $h(d_m)$ містить всі області $U_k\cap D_0$, за виключенням скінченної кількості, і навпаки. Зокрема, знайдеться $s_0\in\mathbb{N}:\ U_k\cap D_0\subset h(d_{k_0})$ при всіх $k\geqslant s_0$. Оскільки $a\in|\alpha|$, знайдеться $t_0\in(0,1)$ таке, що $p:=\alpha(t_0)\in U_{s_0}\cap D_0$. Але тоді також $p\in h(d_{k_0})$, так як $U_{s_0}\cap D_0\subset h(d_{k_0})$. Перше із співвідношень в 3.59 встановлене.

Отже, нехай $p:=\alpha(t_0)\in|\alpha|\cap h(d_{k_0})$. Зафіксуємо $m\geqslant M_0$ і з'єднаємо точку p з точкою $h(x_m)$ кривою $\alpha_m:[t_0,1]\rightarrow h(d_{k_0})$ так, що $\alpha_m(t_0)=p$, $\alpha_m(1)=h(x_m)$, що можливо, тому що $h(d_{k_0})$ – область. Покладемо

$$\gamma^*_{1,m}(t)=\quad\begin{cases}\ \ \alpha(t), & t\in[0,t_0],\\ \alpha_m(t), & t\in[t_0,1]\end{cases}\ . \tag{3.60}$$

Зауважимо, що крива $\gamma^*_{1,m}$ повністю лежить в U.

Аналогічно міркуючи, маємо точку $t_1\in(0,1)$ і точку $q:=\beta(t_1)\in|\beta|\cap h(g_{k_0})$. Зафіксуємо $m\geqslant M_0$ і з'єднаємо точку q з точкою $h(y_m)$ кривою $\beta_m:[t_1,1]\rightarrow h(g_{k_0})$ так, що $\beta_m(t_0)=q$, $\beta_m(1)=h(y_m)$, що можливо, тому що $h(g_{k_0})$ – область. Покладемо

$$\gamma^*_{2,m}(t)=\quad\begin{cases}\ \ \beta(t), & t\in[0,t_1],\\ \beta_m(t), & t\in[t_1,1]\end{cases}\ . \tag{3.61}$$

Зауважимо, що крива $\gamma^*_{2,m}$ повністю лежить в V. Покладемо

$$\gamma_{1,m}:=h^{-1}(\gamma^*_{1,m})\,,\quad \gamma_{2,m}:=h^{-1}(\gamma^*_{2,m})\,. \tag{3.62}$$

Зауважимо, що криві $\gamma_{1,m}$ і $\gamma_{2,m}$ задовольняють всі умови, перераховані в висновку леми 3.4.1, $m\geqslant M_0$. Справді, ці криві за означенням з'єднують точки x_m і x_0, y_m і y_0, відповідно. Криві $\gamma_{1,m}$ і $\gamma_{2,m}$ не перетинаються, оскільки їх образи при відображенні h належать непересічним околам U і V, відповідно. Зауважимо також, що $|\gamma_{1,m}|\cap\overline{g_{k_0}}=\varnothing$ при $m\geqslant M_0$.

Справді, якщо $x \in |\gamma_{1,m}| \cap g_{k_0}$, то $h(x) \in |\gamma^*_{1,m}| \cap h(g_{k_0}) \subset U \cap h(g_{k_0})$, що неможливо з огляду на співвідношення(3.58). Якщо ж $x \in |\gamma_{1,m}| \cap \partial g_{k_0}$, то $h(x) \in \overline{h(g_{k_0})} \cap |\gamma^*_{1,m}|$, що також суперечить(3.58).

Аналогічно, $|\gamma_{2,m}| \cap g_{k_0} = \varnothing$ при $m \geqslant M_0$. Лема доведена. $\Box$

Розглянемо сім'ю кривих, що з'єднують образи кривих $\gamma_{1,m}$ і $\gamma_{2,m}$ з попередньої леми. Наступне твердження містить в собі верхню оцінку модуля перетвореної сім'ї кривих при відображенні f з нерівністю (1.5). Доведення наступного твердження можна знайти, наприклад, в [33, лема 2.2]

Лема 3.4.2. *Нехай $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, – регулярна область в $\mathbb{R}^n$ і $f : D \to \mathbb{R}^n$ – неперервне відображення, що задовольняє оцінку (1.5) з деякою $Q \in L^1(D)$. Тоді в умовах і позначеннях леми 3.4.1 знайдеться стала $0 < N < \infty$, що не залежить від параметру m і відображення f, таке, що $M(f(\Gamma(|\gamma_{1,m}|, |\gamma_{2,m}|, D))) \leqslant N$ при всіх $m \geqslant M_0$, де M_0 – номер із формулювання леми 3.4.1.*

Доведення. Нехай $l(\gamma)$ означає довжину кривої γ, а $|\gamma|$ – носій (образ) кривої γ. Покладемо $\Gamma_m := \Gamma(|\gamma_{1,m}|, |\gamma_{2,m}|, D)$. Покажемо, що знайдеться $L_0 > 0$ такий, що $l(\gamma) > L_0$ для всіх $\gamma \in \Gamma_m$ і всіх $m \geqslant M_0$. Зафіксуємо таке m і криву $\gamma \in \Gamma(|\gamma_{1,m}|, |\gamma_{2,m}|, D)$. Нехай $\gamma : [0, 1] \to D$, $\gamma(0) \in |\gamma_{1,m}|$, $\gamma(1) \in |\gamma_{2,m}|$ і $\gamma(t) \in D$ при $t \in (0, 1)$. Можливі дві ситуації: **1)** $\gamma(0) \in h^{-1}(|\alpha|)$; **2)** $\gamma(0) \in h^{-1}(|\alpha_m|)$, див. співвідношення (3.60) і (3.62).

Розглянемо ситуацію **1).** Нехай $\gamma(0) \in h^{-1}(|\alpha|)$. Можливі два підвипадки: **1.1)** $\gamma(0) \in h^{-1}(|\alpha|)$, $\gamma(1) \in h^{-1}(|\beta|)$; **1.2)** $\gamma(0) \in h^{-1}(|\alpha|)$, $\gamma(1) \in h^{-1}(|\beta_m|)$.

Нехай виконується **1.1)**, тобто, $\gamma(1) \in h^{-1}(|\beta|)$. Тоді, очевидно, що

$$l(\gamma) \geqslant d(h^{-1}(|\alpha|), h^{-1}(|\beta|)) > 0\,, \tag{3.63}$$

оскільки h – гомеоморфізм, криві α і β не перетинаються за побудовою, а крива γ з'єднує $|\alpha|$ і $|\beta|$. Нехай тепер виконується **1.2)**, тобто, $\gamma(1) \in$

$h^{-1}(|\beta_m|)$. Тоді $|\gamma| \cap |g_{k_0}| \neq \varnothing \neq |\gamma| \cap (D \setminus |g_{k_0}|)$, оскільки $\gamma(0) \in h^{-1}(|\alpha|) \subset D \setminus g_{k_0}$ і $\gamma(1) \in h^{-1}(|\beta_m|) \subset h^{-1}(g_{k_0})$. В такому випадку, з огляду на [11, теорема 1.I, розд. 5, § 46] маємо: $|\gamma| \cap \partial g_{k_0} \neq \varnothing$. Зауважимо, що $\partial g_{k_0} \cap h^{-1}(|\alpha|) = \varnothing$ з огляду на (3.57)–(3.58). Таким чином, оскільки γ з'єднує точки множин ∂g_{k_0} і $h^{-1}(|\alpha|)$, то її довжина не менша ніж відстань між ними, тобто,

$$l(\gamma) \geqslant d(\partial g_{k_0}, h^{-1}(|\alpha|)) > 0 \,. \tag{3.64}$$

Розглянемо ситуацію **2)**. Нехай $\gamma(0) \in h^{-1}(|\alpha_m|)$. Як вище, можливі два підвипадки: **2.1)** $\gamma(0) \in h^{-1}(|\alpha_m|)$, $\gamma(1) \in h^{-1}(|\beta|)$; **2.2)** $\gamma(0) \in h^{-1}(|\alpha_m|)$, $\gamma(1) \in h^{-1}(|\beta_m|)$.

Випадок **2.1)** зводиться до випадку **1.2)** заміною $\alpha_m \mapsto \beta_m$, $\alpha \mapsto \beta$ і перепараметризацією кривої γ у вигляді $\overline{\gamma}(t) := \gamma(1-t)$. У цьому випадку ми маємо:

$$l(\gamma) \geqslant d(\partial d_{k_0}, h^{-1}(|\beta|)) > 0 \,. \tag{3.65}$$

Нехай виконується **2.2)**, тоді, оскільки $|\beta_m| \subset h(g_{k_0})$ і $|\alpha_m| \subset h(d_{k_0})$ за побудовою, то $|\gamma| \cap \partial g_{k_0} \neq \varnothing \neq |\gamma| \cap \partial d_{k_0}$ з огляду на [11, теорема 1.I, розд. 5, § 46]. За (3.57)–(3.58) маємо: $d(\partial g_{k_0} \cap D, \partial d_{k_0} \cap D) > 0$. Таким чином,

$$l(\gamma) \geqslant d(\partial g_{k_0} \cap D, \partial d_{k_0} \cap D) > 0 \,. \tag{3.66}$$

Виходячи з розглянутих ситуацій **1)** і **2)**, на основі (3.63), (3.64), (3.65) і (3.66), маємо:

$$l(\gamma) \geqslant S_0 \,, \tag{3.67}$$

$$S_0 := \min\{d(h^{-1}(|\alpha|), h^{-1}(|\beta|)), d(\partial g_{k_0}, h^{-1}(|\alpha|)),$$
$$d(\partial d_{k_0}, h^{-1}(|\beta|)), d(\partial g_{k_0} \cap D, \partial d_{k_0} \cap D)\} \,.$$

З (3.67) випливає, що функція $\rho(x) = 1/S_0$ при $x \in D$ і $\rho(x) = 0$ при $x \notin D$ допустима для Γ_m при $m \geqslant M_0$. Отже, за означенням відображень f в (1.5), маємо:

$$M(f(\Gamma_m)) \leqslant \frac{1}{S_0^n} \int\limits_D Q(x)\, dm(x) = N = N(S_0, Q, D) < \infty \,,$$

оскільки за умовою $Q\in L^1(D)$. Лема доведена. $\Box$

Наступне твердження вказує на те, що для деякого широкого класу відображень, що фіксують по діаметру деякий невироджений континуум, образ цього континууму при цих відображеннях не може наближатись до межі відповідної області (див. [33, лема 2.3]).

Лема 3.4.3. *Припустимо, що область D регулярна, $\overline{D'}$ – компакт в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, D' має локально квазіконформну межу і $Q\in L^1(D)$. Якщо $f_m: D\rightarrow D'$ – послідовність Q-гомеоморфізмів області D на область D', що задовольняють для деякого (фіксованого) континууму $A\subset D$ умову $d(f_m(A))\geqslant \delta>0$ при всіх $m=1,2,\ldots$, то знайдеться $\delta_1>0$ таке, що $d(f_m(A),\partial D')>\delta_1>0$ для всіх $m\in \mathbb{N}$.*

Доведення. Підемо від супротивного, тобто, припустимо, що для кожного $k\in \mathbb{N}$ існує $m=m_k:$ $d(f_{m_k}(A),\partial D')<1/k$, де m_k, $k=1,2,\ldots$ – деяка зростаюча послідовність номерів. За умовою $\overline{D'}$ – компакт, тому і $\partial D'$ також компакт як замкнута підмножина компакту $\overline{D'}$. Крім того, $f_{m_k}(A)$ компакт як неперервний образ компакту A. Тоді знайдуться $x_k\in f_{m_k}(A)$ і $y_k\in \partial D'$ такі, що $d(f_{m_k}(A),\partial D')=|x_k-y_k|<1/k$. Так як $\partial D'$ – компакт, можна вважати, що $y_k\rightarrow y_0\in \partial D'$, $k\rightarrow\infty$; тоді також

$$x_k\rightarrow y_0\in \partial D', \quad k\rightarrow\infty\,. \tag{3.68}$$

Нехай K_0 – зв'язна компонента $\partial D'$, що містить точку y_0. Оскільки D' має локально квазіконформну межу, то K_0 – невироджений континуум в $\mathbb{R}^n$. Зауважимо що, при кожному $k\in \mathbb{N}$ відображення $g_{m_k}:=f_{m_k}^{-1}$ продовжується до неперервного відображення $g_{m_k}:\overline{D'}_P\rightarrow \overline{D}_P$, де $\overline{D'}_P$ і $\overline{D}_P$ – відповідні замикання у просторі простих кінців (див. [5, теорема 6.1] і [17, теорема 2]). З огляду на [62, теорема 4.1] прості кінці області D' можна ототожнювати з точками D', при цьому, для двох простих кінців $P_1,P_2\in E_{D'}$ за означенням маємо: $\rho_*(P_1,P_2):=|p_1-p_2|$, де $p_i:=I(P_i)$, $i=1,2$. Таким чином, далі ми можемо вважати, що $\overline{D'}_P=\overline{D'}$. Зауважимо, що g_{m_k} рівномірно неперервне на $\overline{D'}$, як відображення простору

$\overline{D'}$ на $\overline{D}_P$, неперервне на компакті $\overline{D'}$. Нехай ρ – одна з метрик в E_D, визначена в (1.8). Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться $\delta_k = \delta_k(\varepsilon) < 1/k$ таке, що

$$\rho(g_{m_k}(x), g_{m_k}(x_0)) < \varepsilon \quad \forall\ x, x_0 \in \overline{D'}, \quad |x - x_0| < \delta_k\,, \quad \delta_k < 1/k\,, \quad (3.69)$$

Нехай далі $\varepsilon > 0$ – довільне число з умовою

$$\varepsilon < (1/2)\cdot d(\partial D_0, g^{-1}(A))\,, \qquad (3.70)$$

де A – континуум з умов леми, а $g : D_0 \to D$ – квазіконформне відображення області D_0 з локально квазіконформною межею на область D, що відповідає означенню метрики ρ в (1.8). При кожному фіксованому $k \in \mathbb{N}$ розглянемо множину

$$B_k := \bigcup_{x_0 \in K_0} B(x_0, \delta_k)\,, \quad k \in \mathbb{N}\,.$$

Зауважимо, що B_k – відкрита множина, що містить K_0, іншими словами, B_k – деякий окіл континууму K_0. З огляду на [51, лема 2.2] існує окіл $U_k \subset B_k$ континууму K_0, такий, що $U_k \cap D'$ зв'язний. Не обмежуючи загальності, можна вважати, що U_k – відкрита множина, тоді $U_k \cap D'$ також лінійно зв'язна (див. [60, пропозиція 13.1]). Нехай $d(K_0) = m_0$, тоді знайдуться $z_0, w_0 \in K_0$ такі, що $d(K_0) = |z_0 - w_0|$. Отже, можна вибрати послідовності $\overline{y_k} \in U_k \cap D'$, $z_k \in U_k \cap D'$ і $w_k \in U_k \cap D'$ так, що $z_k \to z_0$, $\overline{y_k} \to y_0$ і $w_k \to w_0$ при $k \to \infty$. Можна вважати, що

$$|z_k - w_k| > m_0/2, \quad \forall\ k \in \mathbb{N}\,. \qquad (3.71)$$

З'єднаємо послідовно точки z_k, $\overline{y_k}$ і w_k кривою γ_k в $U_k \cap D'$ (це можливо, оскільки $U_k \cap D'$ лінійно зв'язна). Нехай $|\gamma_k|$ – як зазвичай, носій (образ) кривої γ_k в D'. Тоді $g_{m_k}(|\gamma_k|)$ – компакт в D. Нехай $x \in |\gamma_k|$, тоді знайдеться $x_0 \in K_0 :\ x \in B(x_0, \delta_k)$. Зафіксуємо $\omega \in A \subset D$. З (3.69) і (3.70), з огляду на нерівність трикутника, маємо:

$$\rho(g_{m_k}(x), \omega) \geqslant \rho(\omega, g_{m_k}(x_0)) - \rho(g_{m_k}(x_0), g_{m_k}(x)) \geqslant$$

$$\geqslant d(\partial D_0, g^{-1}(A)) - (1/2)\cdot d(\partial D_0, g^{-1}(A)) = (1/2)\cdot d(\partial D_0, g^{-1}(A)) > \varepsilon\,. \tag{3.72}$$

Переходячи до inf по всіх $x\in|\gamma_k|$ і $\omega\in A$, з (3.72) отримуємо, що

$$\rho(g_{m_k}(|\gamma_k|), A)\geqslant \varepsilon\,, k=1,2,\ldots\,, \tag{3.73}$$

де, як зазвичай, $\rho(A,B):=\inf\limits_{x\in A, y\in B}\rho(x,y)$ – відстань між множинами $A,B\subset\mathbb{R}^n$ в метриці ρ. Покажемо тепер, що знайдеться $\varepsilon_1>0$ таке, що

$$d(g_{m_k}(|\gamma_k|), A)>\varepsilon_1, \quad \forall\; k=1,2,\ldots\,, \tag{3.74}$$

де $d(A,B)$, як зазвичай, позначає евклідову відстань між множинами $A,B\subset\mathbb{R}^n$. Справді, нехай (3.74) порушується, тоді для числа $\varepsilon_l=1/l$, $l=1,2,\ldots$ знайдуться $\xi_l\in|\gamma_{k_l}|$ і $\zeta_l\in A$ такі, що

$$|g_{m_{k_l}}(\xi_l)-\zeta_l|<1/l\,,\quad l=1,2,\ldots\,. \tag{3.75}$$

Не обмежуючи загальності, можна вважати, що послідовність номерів k_l, $l=1,2,\ldots$, зростаюча. Оскільки A – компакт, то можна вважати, що послідовність ζ_l збігається до $\zeta_0\in A$ при $l\rightarrow\infty$. За нерівністю трикутника і з (3.75) випливає, що

$$|g_{m_{k_l}}(\xi_l)-\zeta_0|\rightarrow 0\,,\quad l\rightarrow\infty\,. \tag{3.76}$$

З іншого боку, нагадаємо, що $\rho(g_{m_k}(x),\omega)=|g^{-1}(g_{m_k}(x))-g^{-1}(\omega)|$, де $g:D_0\rightarrow D$ – деяке квазіконформне відображення області D_0 з локально квазіконформною межею на D (див. (1.8)). Зокрема, g^{-1} – неперервне відображення в D, тому за нерівністю трикутника і з (3.76) маємо:

$$|g^{-1}(g_{m_{k_l}}(\xi_l))-g^{-1}(\zeta_l)|\leqslant$$

$$\leqslant |g^{-1}(g_{m_{k_l}}(\xi_l))-g^{-1}(\zeta_0)|+|g^{-1}(\zeta_0)-g^{-1}(\zeta_l)|\rightarrow 0,\quad l\rightarrow\infty\,. \tag{3.77}$$

Однак, за означенням ρ і з (3.77) випливає, що

$$\rho(g_{m_{k_l}}(|\gamma_{k_l}|), A)\leqslant \rho(g_{m_{k_l}}(\xi_l),\zeta_l)=|g^{-1}(g_{m_{k_l}}(\xi_l))-g^{-1}(\zeta_l)|\rightarrow 0,\quad l\rightarrow\infty\,,$$

що суперечить (3.73). Отримане протиріччя вказує на вірність (3.74).

У такому випадку, довжина довільної кривої, що з'єднує компакти $g_{m_k}(|\gamma_k|)$ і A в D, не менша ніж ε_1. Покладемо $\Gamma_k := \Gamma(g_{m_k}(|\gamma_k|), A, D)$, тоді функція $\rho(x) = 1/l$ при $x \in D$, $\rho(x) = 0$ при $x \notin D$, допустима для Γ_k. За означенням відображень f_{m_k} в (1.5) маємо:

$$M(f_{m_k}(\Gamma_k)) \leqslant \frac{1}{\varepsilon_1^n}\int\limits_D Q(x)\,dm(x) = c = c(\varepsilon_1, Q) < \infty\,, \tag{3.78}$$

оскільки за умовою $Q \in L^1(D)$.

Покажемо тепер, що ми отримали протиріччя з (3.78) з огляду на локальну квазіконформність межі $\partial D'$. Перш за все, зауважимо, що $\partial D'$ – слабко плоска за твердженням 3.4.1. Виберемо в точці $y_0 \in \partial D'$ кулю $U := B(y_0, r_0)$, $0 < r_0 < \min\{\delta/4, m_0/4\}$, де δ – число з умов леми, а $d(K_0) = m_0$. Зауважимо, що $|\gamma_k| \cap U \neq \varnothing \neq |\gamma_k| \cap (D' \setminus U)$ при досить великих $k \in \mathbb{N}$, оскільки $d(|\gamma_k|) \geqslant m_0/2 > m_0/4$ і $\overline{y_k} \in |\gamma_k|$, $\overline{y_k} \to y_0$ при $k \to \infty$. Міркуючи аналогічно, ми отримаємо, що $f_{m_k}(A) \cap U \neq \varnothing \neq f_{m_k}(A) \cap (D' \setminus U)$. Так як $|\gamma_k|$ і $f_{m_k}(A)$ – континууми, то

$$f_{m_k}(A) \cap \partial U \neq \varnothing, \quad |\gamma_k| \cap \partial U \neq \varnothing\,, \tag{3.79}$$

див. [11, теорема 1.I, розд. 5, § 46]. Для фіксованого $P > 0$, нехай далі $V \subset U$ – окіл точки y_0, що відповідає означенню слабко плоскої межі, тобто такий, що для будь-яких континуумів $E, F \subset D'$ з умовою $E \cap \partial U \neq \varnothing \neq E \cap \partial V$ і $F \cap \partial U \neq \varnothing \neq F \cap \partial V$ виконується нерівність

$$M(\Gamma(E, F, D')) > P\,. \tag{3.80}$$

Зауважимо, що при досить великих $k \in \mathbb{N}$

$$f_{m_k}(A) \cap \partial V \neq \varnothing, \quad |\gamma_k| \cap \partial V \neq \varnothing\,. \tag{3.81}$$

Справді, $\overline{y_k} \in |\gamma_k|$, $x_k \in f_{m_k}(A)$, де $x_k, \overline{y_k} \to y_0 \in V$ при $k \to \infty$, тому $|\gamma_k| \cap V \neq \varnothing \neq f_{m_k}(A) \cap V$ при великих $k \in \mathbb{N}$. Крім того, $d(V) \leqslant d(U) = 2r_0 < m_0/2$ і, оскільки $d(|\gamma_k|) > m_0/2$ з огляду на (3.71), то $|\gamma_k| \cap (D' \setminus V) \neq \varnothing$. Тоді $|\gamma_k| \cap \partial V \neq \varnothing$ (див. [11, теорема 1.I, розд. 5, §

46]). Аналогічно, $d(V) \leqslant d(U) = 2r_0 < \delta/2$ і, оскільки $d(f_{m_k}(A)) > \delta$ за умовою леми, то $f_{m_k}(A) \cap (D' \setminus V) \neq \varnothing$. Оскільки, згідно з встановленим вище $f_{m_k}(A) \cap V \neq \varnothing$, то за [11, теорема 1.I, розд. 5, § 46] маємо: $f_{m_k}(A) \cap \partial V \neq \varnothing$. Отже, співвідношення в (3.81) встановлені.

Таким чином, згідно з (3.80) ми маємо, з огляду на (3.79) і (3.81), що

$$M(\Gamma(f_{m_k}(A), |\gamma_k|, D')) > P\,. \tag{3.82}$$

Зауважимо, що $\Gamma(f_{m_k}(A), |\gamma_k|, D') = f_{m_k}(\Gamma(A, g_{m_k}(|\gamma_k|), D)) = f_{m_k}(\Gamma_k)$, так що нерівність (3.82) можна записати у вигляді

$$M(f_{m_k}(\Gamma(A, g_{m_k}(|\gamma_k|), D))) = M(f_{m_k}(\Gamma_k)) > P\,,$$

що суперечить нерівності (3.78). Отримане протиріччя вказує на хибність початкового припущення $d(f_{m_k}(A), \partial D') < 1/k$. Лема доведена. $\Box$

Для числа $\delta > 0$, областей $D, D' \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, континууму $A \subset D$ і довільної вимірної за Лебегом функції $Q : \mathbb{R}^n \to [1, \infty]$, $Q(x) \equiv 0$ при $x \notin D$, позначимо через $\mathfrak{S}_{\delta,A,Q}(D, D')$ сім'ю всіх відображень $h : D' \to D$ таких, що $f = h^{-1}$ – гомеоморфізм області D на D' з умовою (1.5), при цьому, $d(f(A)) \geqslant \delta$. Виконується наступне твердження, див доведення в [33, теорема 1.1].

Теорема 3.4.1. *Нехай області D і $D' \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, регулярні і будь-яка компонента зв'язності $\partial D'$ є невиродженим континуумом. Якщо $Q \in L^1(D)$, то кожне відображення $h \in \mathfrak{S}_{\delta,A,Q}(D, D')$ продовжується за неперервністю до відображення $\overline{h} : \overline{D'}_P \to \overline{D}_P$, $\overline{h}|_{D'} = h$, при цьому, $\overline{h}(\overline{D'}_P) = \overline{D}_P$ і сім'я $\mathfrak{S}_{\delta,A,Q}(\overline{D}_P, \overline{D'}_P)$, що складається із всіх продовжених відображень $\overline{h} : \overline{D'}_P \to \overline{D}_P$, є одностайно неперервною в $\overline{D'}_P$.*

Доведення. Неперервне продовження відображення $h \in \mathfrak{S}_{\delta,A,Q}(D, D')$ на межу області D' встановлене в [5, теорема 6.1] при $n = 2$ і [17, теорема 2] при $n \geqslant 3$. Одностайна неперервність сім'ї відображень $\mathfrak{S}_{\delta,A,Q}(D, D')$ у внутрішніх точках області D' доведена в [30, теорема 1.1]. Рівність

$\overline{h}(\overline{D'}_P) = \overline{D}_P$ для $h \in \mathfrak{S}_{\delta,A,Q}(D, D')$ встановлюється так, як і при доведенні [5, теорема 6.1], тому докладні міркування, пов'язані з цим фактом, не наводяться.

Покажемо одностайну неперервність $\mathfrak{S}_{\delta,A,Q}(D, D')$ на $E_{D'}$. Можна вважати, що D' має локально квазіконформну межу. З огляду на [62, теорема 4.1] ми можемо вважати, що $\overline{D'} = \overline{D'}_P$, зокрема, можна вважати, що $E_{D'} = \partial D'$.

Здійснимо доведення від супротивного. Нехай, знайдеться точка $z_0 \in \partial D'$, число $\varepsilon_0 > 0$ і послідовності $z_m \in \overline{D'}$, $z_m \to z_0$ при $m \to \infty$ і $\overline{h}_m \in \mathfrak{S}_{\delta,A,Q}(\overline{D}, \overline{D'})$ такі, що

$$\rho(\overline{h}_m(z_m), \overline{h}_m(z_0)) \geqslant \varepsilon_0, \quad m = 1, 2, \dots, \tag{3.83}$$

де ρ – одна з метрик в $\overline{D}_P$, визначена формулою (1.8). Так як $\overline{h}_m$ за неперервністю продовжується на межу D', можна вважати, що $z_m \in D$ і, крім того, знайдеться ще одна послідовність $z'_m \in \overline{D'}$, $z'_m \to z_0$ при $m \to \infty$, така, що $\rho(h_m(z_m), \overline{h}_m(z_0)) \to 0$ при $m \to \infty$, де $h_m = \overline{h}_m|_{D'}$. Тоді з (3.83) випливає, що

$$\rho(h_m(z_m), h_m(z'_m)) \geqslant \varepsilon_0/2, \quad m \geqslant m_0\,. \tag{3.84}$$

Так як область D регулярна, то простір $\overline{D}_P$ є компактом. Отже, ми можемо вважати, що послідовності $h_m(z_m)$ і $\overline{h}_m(z_0)$ є збіжними при $m \to \infty$ до деяких елементів $P_1, P_2 \in \overline{D}_P$, $P_1 \neq P_2$. Нехай d_m, g_m – послідовності спадних областей, що відповідають простим кінцям P_1, P_2, відповідно. Виберемо $x_0, y_0 \in A$ так, щоб $x_0 \neq y_0$ і $P_1 \neq x_0 \neq P_2$, $P_1 \neq y_0 \neq P_2$, де континуум $A \subset D$ – з умов теореми 3.4.1. Не обмежуючи загальності можна вважати, що $d_1 \cap g_1 = \varnothing$ і $x_0, y_0 \notin d_1 \cup g_1$. За лемою 3.4.1 існують k_0 і $M_0 \in \mathbb{N}$, такі що при всіх $m \geqslant M_0$ виконується наступна умова: знайдуться непересічні криві $\gamma_{i,m}(t) : [0, 1] \to D$, $i = 1, 2$, $\gamma_{1,m}(0) = x_0$, $\gamma_{1,m}(1) = h_m(z_m)$, $\gamma_{2,m}(0) = y_0$, $\gamma_{2,m}(0) = h_m(z'_m)$, такі що $|\gamma_{1,m}| \cap g_{k_0} = \varnothing = |\gamma_{2,m}| \cap d_{k_0}$. Крім того, за лемою 3.4.2 знайдеться стала

$0 < N < \infty$, що не залежить від параметру m, така що

$$M(f_m(\Gamma_m)) \leqslant N\,, m \geqslant M_0\,, \tag{3.85}$$

де $f_m := h_m^{-1}$, $\Gamma_m := \Gamma(|\gamma_{1,m}|, |\gamma_{2,m}|, D)$. З іншого боку, за лемою 3.4.3 знайдеться число $\delta_1 > 0$ таке, що $d(f_m(A), \partial D') > \delta_1 > 0$, $m = 1, 2, \ldots$. Звідси отримаємо, що

$$d(f_m(|\gamma_{1,m}|)) \geqslant |z_m - f_m(x_0)| \geqslant (1/2)\cdot d(f_m(A), \partial D') > \delta_1/2\,,$$

$$d(f_m(|\gamma_{2,m}|)) \geqslant |z_m' - f_m(y_0)| \geqslant (1/2)\cdot d(f_m(A), \partial D') > \delta_1/2 \tag{3.86}$$

при великих $m = 1, 2, \ldots$. Виберемо в точці $z_0 \in \partial D'$ кулю $U := B(z_0, r_0)$, де $r_0 > 0$ і $r_0 < \delta_1/4$, де δ_1 – число зі співвідношень в (3.86). Зауважимо, що $f_m(|\gamma_{1,m}|)\cap U \ne \varnothing \ne f_m(|\gamma_{1,m}|)\cap(D'\setminus U)$ при досить великих $m \in \mathbb{N}$, оскільки $d(f_m(|\gamma_{1,m}|)) \geqslant \delta_1/2$ і $z_m \in f_m(|\gamma_{1,m}|)$, $z_m \to z_0$ при $m \to \infty$. Аналогічно міркуючи, $f_m(|\gamma_{2,m}|)\cap U \ne \varnothing \ne f_m(|\gamma_{2,m}|)\cap(D'\setminus U)$. Так як $f_m(|\gamma_{1,m}|)$ і $f_m(|\gamma_{2,m}|)$ – континууми, то

$$f_m(|\gamma_{1,m}|) \cap \partial U \ne \varnothing, \quad f_m(|\gamma_{2,m}|) \cap \partial U \ne \varnothing\,, \tag{3.87}$$

див. [11, теорема 1.I, розд. 5, § 46]. Для фіксованого $P > 0$, нехай далі $V \subset U$ – окіл точки z_0, що відповідає означенню слабко плоскої межі, тобто такий, що для будь-яких континуумів $E, F \subset D'$ з умовою $E \cap \partial U \ne \varnothing \ne E \cap \partial V$ і $F \cap \partial U \ne \varnothing \ne F \cap \partial V$ виконується нерівність

$$M(\Gamma(E, F, D')) > P\,. \tag{3.88}$$

Зауважимо, що при досить великих $m \in \mathbb{N}$

$$f_m(|\gamma_{1,m}|) \cap \partial V \ne \varnothing, \quad f_m(|\gamma_{2,m}|) \cap \partial V \ne \varnothing\,. \tag{3.89}$$

Справді, $z_m \in f_m(|\gamma_{1,m}|)$, $z_m' \in f_m(|\gamma_{2,m}|)$, де $z_m, z_m' \to z_0 \in V$ при $m \to \infty$, тому $f_m(|\gamma_{1,m}|) \cap V \ne \varnothing \ne f_m(|\gamma_{2,m}|) \cap V$ при великих $m \in \mathbb{N}$. Крім того, $d(V) \leqslant d(U) = 2r_0 < \delta_1/2$ і, оскільки $d(f_m(|\gamma_{1,m}|)) > \delta_1/2$ з огляду на (3.86), то $f_m(|\gamma_{1,m}|) \cap (D' \setminus V) \ne \varnothing$. Тоді $f_m(|\gamma_{1,m}|) \cap \partial V \ne \varnothing$ (див. [11, теорема 1.I, розд. 5, § 46]). Аналогічно, $d(V) \leqslant d(U) = 2r_0 < \delta_1/2$ і, оскільки $d(f_m(|\gamma_{2,m}|)) > \delta_1/2$ з огляду на (3.86), то $f_m(|\gamma_{2,m}|)\cap(D'\setminus V) \neq \varnothing$. Тоді за [11, теорема 1.I, розд. 5, § 46] маємо: $f_m(|\gamma_{1,m}|)\cap\partial V \neq \varnothing$. Таким чином, співвідношення (3.89) доведені.

Згідно з (3.88) і враховуючи (3.87) і (3.89), ми отримаємо, що

$$M(f_m(\Gamma_m)) = M(\Gamma(f_m(|\gamma_{1,m}|), f_m(|\gamma_{2,m}|), D')) > P\,,$$

що суперечить нерівності (3.85). Отримане протиріччя вказує на хибність початкового припущення, зробленого в (3.83). Теорема доведена.

$\Box$

Зауваження 3.4.1. Зауважимо, що означення простого кінця за Някі (див. розділ 4 в [62] дещо відрізняється від означення, запропонованого вище. Проте, для областей з локально квазіконформними межами (а, отже, і для регулярних областей) ці класи співпадають, див., напр., теорему 4.1 в [62]).

Доведення наступної теореми можна знайти в [78, теорема 1].

Для заданого числа $\delta > 0$, областей $D \subset \mathbb{R}^n$ і $D' \subset \overline{\mathbb{R}^n}$, $n \geqslant 2$, континуума $A \subset D$ і вимірної за Лебегом функції $Q(x) : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ такої, що $Q(x) \equiv 0$ для $x \notin D$, позначимо через $\mathfrak{V}_{\delta,A,Q}(D, D')$ сім'ю всіх гомеоморфізмів g області D' на D таких, що відображення $f = g^{-1}$ задовольняють умову (1.6) в $\overline{D}$, коли $h(f(A)) \geqslant \delta$. Виконується наступне твердження.

Теорема 3.4.2. *Припустимо, що D регулярна, D' має слабко плоску межу, і жодна компонента $\partial D'$ є невиродженим континуумом. Якщо $Q \in L^1(D)$, тоді кожне відображення $g \in \mathfrak{V}_{\delta,A,Q}(D, D')$ має неперервне продовження $\overline{g} : \overline{D'} \to \overline{D}_P$, в додаток, $\overline{g}(D') = \overline{D}_P$, і сім'я $\mathfrak{V}_{\delta,A,Q}(\overline{D}_P, \overline{D'})$, що складається з усіх продовжених відображень $\overline{g} : \overline{D'} \to \overline{D}_P$, є одностайно неперервною в $\overline{D'}$.*

Доведення. Для неперервного відображення $h \in \mathfrak{S}_{\delta,A,Q}(D,D')$ на межу області D', див. зауваження 3.4.2. Одностайна неперервність $\mathfrak{S}_{\delta,A,Q}(D,D')$ у внутрішніх точках D' це результат [75, теорема 1.1]. Покажемо одностайну неперервність $\mathfrak{S}_{\delta,A,Q}(\overline{D}_P,\overline{D'})$ на $\partial D'$.

Здійснимо доведення від супротивного. Припустимо, що знайдеться точка $z_0 \in \partial D'$, число $\varepsilon_0 > 0$, послідовності $z_m \in \overline{D'}$ і $\overline{h}_m \in \mathfrak{S}_{\delta,A,Q}(\overline{D}_P,\overline{D'})$ такі, що $z_m \to z_0$ коли $m \to \infty$ і, в додаток,

$$\rho(\overline{h}_m(z_m),\overline{h}_m(z_0)) \geqslant \varepsilon_0, \quad m = 1,2,\ldots, \tag{3.90}$$

де ρ є однією з метрик в $\overline{D}_P$. Оскільки $h_m = \overline{h}_m|_{D'}$ продовжуються за неперервністю на межу D', ми можемо вважати, що $z_m \in D'$ і, в додаток, знайдеться ще одна послідовність $z_m' \in D'$, $z_m' \to z_0$ коли $m \to \infty$, така, що $\rho(h_m(z_m'),\overline{h}_m(z_0)) \to 0$ коли $m \to \infty$. Тоді, з (3.90) випливає, що

$$\rho(h_m(z_m),h_m(z_m')) \geqslant \varepsilon_0/2, \quad m \geqslant m_0\,. \tag{3.91}$$

Оскільки область D регулярна, простір $\overline{D}_P$ компактний. Тому, ми можемо вважати, що послідовності $h_m(z_m)$ і $\overline{h}_m(z_0)$ збігаються при $m \to \infty$ до деякого елемента $P_1, P_2 \in \overline{D}_P$, $P_1 \neq P_2$. Нехай d_m і g_m послідовність спадних областей, що відповідає простим кінцям P_1 і P_2, відповідно. За [9, лема 1], ми можемо вважати, що криві σ_m, що відповідають областям d_m, $m = 1,2,\ldots$, належать сферам $S(\overline{x_0},r_m)$ так, що $\overline{x_0} \in \partial D$ і $r_m \to 0$ при $m \to \infty$. Оберемо $x_0, y_0 \in A$ так, що $x_0 \neq y_0$ і $x_0 \neq P_1 \neq y_0$, де континуум $A \subset D$ з умов теореми 3.4.2. Без обмеження загальності, ми можемо вважати, що $d_1 \cap g_1 = \varnothing$ і $x_0, y_0 \notin d_1 \cup g_1$.

За лемами 3.4.1 і 3.4.2, знайдуться неперетинні криві $\gamma_{1,m} : [0,1] \to D$ і $\gamma_{2,m} : [0,1] \to D$, число $M_0 > 0$ і число $N > 0$ такі, що $\gamma_{1,m}(0) = x_0$, $\gamma_{1,m}(1) = h_m(z_m)$, $\gamma_{2,m}(0) = y_0$, $\gamma_{2,m}(0) = h_m(z_m')$, де,

$$M(f_m(\Gamma_m)) \leqslant N\,, m \geqslant M_0\,, \tag{3.92}$$

де $f_m := h_m^{-1}$, $\Gamma_m := \Gamma(|\gamma_{1,m}|,|\gamma_{2,m}|,D)\,.$

З іншого іншого боку, за лемою 3.4.3 існує число $\delta_1>0$ таке, що $q(f_m(A),\partial D')>\delta_1>0,\ m=1,2,\ldots$. З цього ми отримаємо, що

$$q(f_m(|\gamma_{1,m}|))\geqslant q(z_m,f_m(x_0))\geqslant(1/2)\cdot q(f_m(A),\partial D')>\delta_1/2\,,$$

$$q(f_m(|\gamma_{2,m}|))\geqslant q(z_m',f_m(y_0))\geqslant(1/2)\cdot q(f_m(A),\partial D')>\delta_1/2 \tag{3.93}$$

для великих $m\in\mathbb{N}$. Оберемо хордальні кулі $U:=B_q(z_0,r_0)$, де $r_0>0$ і $r_0<\delta_1/4$, і δ_1 число з співвідношень (3.93). Зауважимо, що $f_m(|\gamma_{1,m}|)\cap U\neq\varnothing\neq f_m(|\gamma_{1,m}|)\cap(D'\setminus U)$ для досить великих $m\in\mathbb{N}$, тому, що $q(f_m(|\gamma_{1,m}|))\geqslant\delta_1/2$ і $z_m\in f_m(|\gamma_{1,m}|)$, $z_m\to z_0$ коли $m\to\infty$. За тими ж міркуваннями $f_m(|\gamma_{2,m}|)\cap U\neq\varnothing\neq f_m(|\gamma_{2,m}|)\cap(D'\setminus U)$. Оскільки $f_m(|\gamma_{1,m}|)$ і $f_m(|\gamma_{2,m}|)$ континууми, тоді за [11, теорема 1.I.5.46]

$$f_m(|\gamma_{1,m}|)\cap\partial U\neq\varnothing,\quad f_m(|\gamma_{2,m}|)\cap\partial U\neq\varnothing\,. \tag{3.94}$$

Для фіксованого $P:=N>0$, де N з (3.92), нехай $V\subset U$ окіл точки z_0, що відповідає означенню слабкої плоскості, такий, що для будь-яких континуумів $E,F\subset D'$ з $E\cap\partial U\neq\varnothing\neq E\cap\partial V$ і $F\cap\partial U\neq\varnothing\neq F\cap\partial V$ нерівність

$$M(\Gamma(E,F,D'))>N \tag{3.95}$$

виконується. Зауважимо, що для досить великих $m\in\mathbb{N}$

$$f_m(|\gamma_{1,m}|)\cap\partial V\neq\varnothing,\quad f_m(|\gamma_{2,m}|)\cap\partial V\neq\varnothing\,. \tag{3.96}$$

Справді, $z_m\in f_m(|\gamma_{1,m}|)$ і $z_m'\in f_m(|\gamma_{2,m}|)$, де $z_m,z_m'\to z_0\in V$ коли $m\to\infty$ Тому, $f_m(|\gamma_{1,m}|)\cap V\neq\varnothing\neq f_m(|\gamma_{2,m}|)\cap V$ для великих $m\in\mathbb{N}$. В додаток, $q(V)\leqslant q(U)=2r_0<\delta_1/2$ і оскільки за (3.93) $q(f_m(|\gamma_{1,m}|))>\delta_1/2$, тоді $f_m(|\gamma_{1,m}|)\cap(D'\setminus V)\neq\varnothing$. Тоді $f_m(|\gamma_{1,m}|)\cap\partial V\neq\varnothing$ (див. [11, теорема 1.I.5.46]). Аналогічно, $q(V)\leqslant q(U)=2r_0<\delta_1/2$ і, оскільки за (3.93) $q(f_m(|\gamma_{2,m}|))>\delta_1/2$, тоді $f_m(|\gamma_{2,m}|)\cap(D'\setminus V)\neq\varnothing$. Тепер, за [11, теорема 1.I.5.46] ми отримаємо, що $f_m(|\gamma_{1,m}|)\cap\partial V\neq\varnothing$. Таким чином, (3.96) доведене.

Згідно з (3.95) і беручи до уваги (3.94) і (3.96), ми маємо, що

$$M(f_m(\Gamma_m))=M(\Gamma(f_m(|\gamma_{1,m}|),f_m(|\gamma_{2,m}|),D'))>N\,,$$

що суперечить нерівності (3.92). Отримане протиріччя вказує на те, що припущення, зроблене в (3.90) невірне. Теорема доведена.

$\Box$

Зауваження 3.4.2. Можливість неперервного продовження гомеоморфізму $g : D' \to D$ до відображення $\overline{g} : \overline{D'} \to \overline{D}_P$ в теоремі 3.4.2 можна встановити аналогічно до [5, теорема 6.1]; див. також [17, теорема 2].

Висновки до розділу 3

У даному розділі досліджувалась поведінка відображень евклідового простору на межі та в замиканні області:

1. Отримана теорема про неперервне продовження і одностайну неперервність в замиканні області (теорема 3.2.1) сім'ї відображень, обернені до яких $f = g^{-1}$ є Q-гомеоморфізмами за умов $Q \in L^1(D)$, $h(f(A)) := \sup\limits_{x,y \in f(A)} h(x, y) \geqslant \delta$ та $\operatorname{diam} f(A) \geq \delta$ для деякого континуума A.

2. Була досліджена поведінка кільцевих Q-гомеоморфізмів, що задовольняють умови $h(f(A)) \geqslant \delta$ і $h(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(D)) \geqslant \delta$. Доведена можливість їх неперервного продовження та одностайна неперервність в $\overline{D}$, коли $Q \in FMO(\overline{D})$ або за умови розбіжності деякого інтеграла. Для локально зв'язних меж доведена теорема про межове неперервне продовження згаданого класу та його одностайна неперервність в термінах простих кінців. Доведене твердження про одностайну неперерність та межове продовження сім'ї всіх відкритих дискретних замкнених $Q-$відображень при $Q \in FMO(\overline{D})$ або розбіжності інтеграла, згаданого вище та з умовою, що для будь-якої області $D_f' := f(D)$ знайдеться континуум $K_f \subset D_f'$ такий, що $h(K_f) \geqslant \delta$ і $h(f^{-1}(K_f), \partial D) \geqslant \delta > 0$.

3. Доведені теореми 3.4.1 та 3.4.2 про неперервне продовження на межу та одностайну неперервність у замиканні області сімей відображень,

обернені до яких є Q-гомеоморфізмами та кільцевими Q-гомеоморфізмами відповідно, коли фіксований континуум в прообразі не вироджується в точку.

РОЗДІЛ 4

ДЕЯКІ ПИТАННЯ ЛОКАЛЬНОЇ І МЕЖОВОЇ ПОВЕДІНКИ ВІДОБРАЖЕНЬ МЕТРИЧНИХ ПРОСТОРІВ

У даному розділі зібрані результати, стосовно локальної і межової поведінки відображень між метричними просторами.

Розділ містить 5 підрозділів, перший з яких присвячений дослідженню збіжності обернених відображень з умовою невиродженості певного континуума, у другому розділі йдеться про локальну та глобальну поведінку обернених гомеоморфізмів з умовою (4.10). У третьому розділі міститься аналог теореми Сохоцького-Касораті-Вейєрштраса про нульвимірність або сталість відображень з умовою (4.4) у просторах зі сферикалізацією. У четвертому підрозділі були доведені теореми про одностайну неперервність та неперервне продовження дискретних, замкнених і відкритих кільцевих Q-відображень відносно (p, q)-модулів у простір простих кінців за умови сильної досяжності межі. П'ятий підрозділ про одностайну неперервність сім'ї всіх відкритих дискретних відображень зі співвідношенням (4.68) для просторів зі сферикалізацією. Також у цьому підрозділі наведені деякі приклади.

4.1 Теореми збіжності обернених відображень

Як відомо, частиною визначення квазіконформних відображень є нерівність

$$M(\Gamma) \leqslant K \cdot M(f(\Gamma))\,, \tag{4.1}$$

де M – модуль сімей кривих Γ, а K – коефіцієнт квазіконформності (див. [79]). Нерівність (4.1) також виконується для квазіконформних відображень з розгалуженням, які прийнято називати квазірегулярними відображеннями (див. [65]).

Розглянемо наступне питання: чи буде довільне відображення, що задовольняє (4.1), відкритим і дискретним (нульвимірним) ? Позитивна відповідь для простору $\mathbb{R}^n$ була отримана в роботі [22], де розглядається навіть більш загальна умова виду

$$M(\Gamma) \leqslant \int\limits_{D'} Q(y) \cdot \rho_*^n(y)\, d\mu'(y)\,, \tag{4.2}$$

де Q – задана вимірна за Лебегом функція, що задовольняє умову типу FMO (див. [60]), ρ_* – довільна невід'ємна борелева функція така, що $\int\limits_{\gamma_*} \rho_*(y)ds \geqslant 1 \quad \forall \quad \gamma_* \in f(\Gamma)$, область $D' = f(D)$, а M – конформний модуль сім'ї кривих. Більше того, досить, щоб f було границею послідовності відображень, що задовольняють умову (4.2) (див. [24, теорема]), а замість показника n в правій частині (4.2) можна взяти довільне число $p \in (n-1, n]$.

Ми хочемо перенести вказаний результат на метричні простори які є регулярними за Альфорсом, в яких виконується так звана $(1,p)$-нерівність Пуанкаре, $p \in (\alpha-1, \alpha]$ і α – хаусдорфова розмірність метричного простору, що розглядається. Замість нерівності (4.2) можна взяти навіть дещо більш загальне співвідношення.

Нехай D – область в X. Для $y_0 \in f(D)$ і чисел $0 < r_1 < r_2 < \infty$ позначимо

$$A(y_0, r_1, r_2) = \{y \in X' : r_1 < d(y, y_0) < r_2\}\ , \tag{4.3}$$

$$S(y_0, r) = \{y \in X' : d(y, y_0) = r\}\,.$$

Означення 4.1.1. *Нехай G' – область в X' і $Q : G' \to [0, \infty]$ – вимірна відносно міри μ' функція. Якщо $f : G \to G'$ – задане відображення,* *то для фіксованого* $y_0 \in f(G)$ *і довільних* $0 < r_1 < r_2 < \infty$ *позначимо через* $\Gamma(y_0, r_1, r_2)$ *сім'ю всіх кривих* γ *в області* G *таких, що* $f(\gamma) \in \Gamma(S(y_0, r_1), S(y_0, r_2), A(y_0, r_1, r_2))$. *Для заданих* $p, q > 1$ *розглянемо замість (4.1) нерівність*

$$M_p(\Gamma(y_0, r_1, r_2)) \leqslant \int\limits_{G'} Q(y) \cdot \eta^q(d'(y, y_0))d\mu'(y)\,, \tag{4.4}$$

що виконується для будь-якої невід'ємної вимірної за Лебегом функції $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$ *такої, що*

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)dr \geqslant 1\,. \tag{4.5}$$

Означення 4.1.2. *Нехай* (X, d) *і* (X', d') *– метричні простори з метриками* d *і* d', *відповідно. Кажуть, що послідовність відображень* $f_k : X \to X'$, $k = 1, 2\ldots$, *збігається* **локально рівномірно** *до відображення* $f : X \to X'$, *якщо* $\sup\limits_{x \in C} d'\left(f_k(x)\,, f(x)\right) \to 0$ *при* $k \to \infty$ *на будь-якому компакті* $C \subset X$.

Доведення наступної леми наводиться в [32, лема 1].

Лема 4.1.1. *Припустимо, що* $(X,\, d, \mu)$ *і* $(X',\, d', \mu')$ *– метричні простори з метриками* d *і* d', *з локально скінченними борелевими мірами* μ *і* μ', *а* G *і* G' *– області в* X *і* X', *що мають скінченні хаусдорфові розмірності* $\alpha \geqslant 2$ *і* $\alpha' \geqslant 2$, *відповідно. Припустимо, крім того,* G *– локально компактний і локально зв'язний простір,* α*-регулярний за Альфорсом, в якому виконується* $(1; p)$*-нерівність Пуанкаре при деякому* $p \in (\alpha - 1, \alpha]$.

Далі, припустимо, що при деякому $q \in (1, \alpha']$ *і кожного* $y_0 \in f(G)$ *знайдеться* $\varepsilon_0 > 0$, *для якого виконується співвідношення*

$$\int\limits_{A(y_0, \varepsilon, \varepsilon_0)} Q(y) \cdot \psi^q(d'(y, y_0))\; d\mu'(y) \;=\; o\left(I^q(\varepsilon, \varepsilon_0)\right) \tag{4.6}$$

для деякої вимірної за Лебегом функції $\psi(t) : (0,\infty) \to (0,\infty)$, *такої що*

$$0 < I(\varepsilon, \varepsilon_0) := \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)\, dt < \infty$$

при всіх $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, *де* $A(y_0, \varepsilon, \varepsilon_0)$ *визначене в (4.3) при* $r_1 = \varepsilon$, $r_2 = \varepsilon_0$. *Будемо вимагати також, щоб* $I(\varepsilon, \varepsilon_0) \to \infty$ *при* $\varepsilon \to 0$.

Нехай $f_m : G \to G'$, $m = 1, 2, \ldots$ *– послідовність відображень, що збігається локально рівномірно до деякого відображення* $f : G \to G'$. *Тоді, якщо* f_m *при кожному* $m \in \mathbb{N}$ *задовольняє (4.4) в кожній точці* $y_0 \in f(G)$ *при деякому* $q \in (1, \alpha']$ *і будь-якій невід'ємній вимірній за Лебегом функції* $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$ *з умовою (4.5), то* f *або нульвимірне, або стале.*

Доведення. Якщо відображення f стале, доводити нічого. Нехай $f \not\equiv const$. Припустимо протилежне, а саме, що відображення f не нульвимірне. Тоді знайдеться $y_0 \in G'$, таке що множина $\{f^{-1}(y_0)\}$ не є скрізь розривною. Отже, за означенням, існує невироджена зв'язна множина $C \subset \{f^{-1}(y_0)\}$. Оскільки простір X локально компактний, можна вважати, що C – континуум.

Оскільки за припущенням $f \not\equiv y_0$, з огляду на неперервність відображення f знайдеться $x_0 \in G$ і $\delta_0 > 0 :$ $\overline{B(x_0, \delta_0)} \subset G$ і

$$f(x) \neq y_0 \qquad \forall \quad x \in \overline{B(x_0, \delta_0)}\,.$$

З огляду на локальну компактність G можна вважати, що $\overline{B(x_0, \delta_0)}$ – компакт в X. Крім того, з огляду на локальну зв'язність G знайдеться зв'язний окіл $U \subset B(x_0, \delta_0)$. За означенням, U містить деяку кулю $B(x_0, \overline{\delta_0}) \subset U$. Зауважимо, що в силу регулярності за Альфорсом метричного простору X куля $B(x_0, \overline{\delta_0})$ не може бути одноточковою множиною. Тоді $\overline{U}$ – невироджений континуум в G.

В силу [39, пропозиція 4.7], при $p \in (\alpha - 1, \alpha]$ будемо мати:

$$M_p\left(\Gamma\left(C, \overline{U}, G\right)\right) > 0\,. \tag{4.7}$$

При досить великому $m\in\mathbb{N}$ розглянемо сім'ю кривих $f_m\left(\Gamma\left(C,\overline{U},G\right)\right)$. Зауважимо, що в силу локально рівномірної збіжності f_m до f можна побудувати підпослідовність f_{m_k} така, що $d'(f_{m_k}(x),y_0)<1/2^k$ при всіх $k\in\mathbb{N}$ і всіх $x\in C$. З іншого боку, $f(\overline{U})$ – компакт в X' як неперервний образ компакта, тому $d'\left(y_0,f(\overline{U})\right)\geqslant\sigma_0>0$. Оскільки f_m збігається до f локально рівномірно,

$$d'(f_m(x),y_0)\geqslant d'(f(x),y_0)-d'(f_m(x),f(x))\geqslant\sigma_0/2$$

при всіх $x\in\overline{U}$ і всіх $m\geqslant m_0$. У такому випадку, за [60, пропозиція 13.3] кожна крива γ із сім'ї $f_{m_k}\left(\Gamma\left(C,\overline{U},G\right)\right)$ має підкриву $\gamma'\in\Gamma(S(y_0,1/2^k),S(y_0,\sigma_0/2),A(y_0,1/2^k,\sigma_0/2))$ при досить великих $k\geqslant k_0$. Звідси $\Gamma\left(C,\overline{U},G\right)>\Gamma_{f_{m_k}}(y_0,1/2^k,\sigma_0/2)$ і, отже, з огляду на властивість мінорування модуля (див. [45, теорема 1])

$$M_p\left(\Gamma\left(C,\overline{U},G\right)\right)\leqslant M_p(\Gamma_{f_{m_k}}(y_0,1/2^k,\sigma_0/2))\,. \tag{4.8}$$

Розглянемо наступну функцію

$$\eta_k(t)=\begin{cases}\psi(t)/I(1/2^k,\sigma_0/2), & t\in[1/2^k,\sigma_0/2],\\ 0, & t\in\mathbb{R}\setminus[1/2^k,\sigma_0/2]\,,\end{cases}$$

де $I(1/2^k,\sigma_0/2)=\int\limits_{1/2^k}^{\sigma_0/2}\psi(t)dt$. Зауважимо, що функція η_k задовольняє умову виду (4.5) при $r_1=1/2^k$ і $r_2=\sigma_0/2$. Тоді згідно з нерівностями (4.4), (4.6) і (4.8) ми отримаємо, що

$$\begin{aligned}M_p\left(\Gamma\left(C,\overline{U},G\right)\right)&\leqslant\frac{1}{I^q(1/2^k,\sigma_0/2)}\int\limits_{A(y_0,1/2^k,\sigma_0/2)}Q(y)\psi^q(d'(y,y_0))\,d\mu'(y)\ \leqslant\\ &\leqslant\frac{C}{I^q(1/2^k,\varepsilon_0)}\int\limits_{A(y_0,1/2^k,\sigma_0/2)}Q(y)\psi^q(d'(y,y_0))\,d\mu'(y)\to 0\end{aligned} \tag{4.9}$$

при $k\to\infty$. Однак, співвідношення (4.9) суперечить нерівності (4.7). Отримане протиріччя доказує, що відображення f є нульвимірним, що і треба було довести. $\Box$

На основі леми вище, в [32, теорема 1] доводиться наступна теорема.

Теорема 4.1.1. *Припустимо, що* $(X,\, d, \mu)$ *і* $(X',\, d', \mu')$ *– метричні простори з метриками* d *і* d', *з локально скінченними борелевими мірами* μ *і* μ', *а* G *і* G' *– області в* X *і* X', *що мають скінченні хаусдорфові розмірності* $\alpha \geqslant 2$ *і* $\alpha' \geqslant 2$, *відповідно. Припустимо, крім того,* G *– локально компактний і локально зв'язний простір,* α*-регулярний за Альфорсом, в якому виконується* $(1;p)$*-нерівність Пуанкаре при деякому* $p \in (\alpha-1, \alpha]$.

Нехай $f_m : G \to G'$, $m = 1, 2, \ldots$ *– послідовність неперервних відображень, що збігаються локально рівномірно до деякого відображення* $f : G \to G'$. *Тоді, якщо* f_m *при кожному* $m \in \mathbb{N}$ *задовольняє (4.4) в кожній точці* $y_0 \in f(G)$ *при деякому* $q \in (1, \alpha']$ *і будь-якій невід'ємній вимірній за Лебегом функції* $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$, *що задовольняє умову (4.5), і* $Q \in FMO$ *в кожній точці* $y_0 \in f(G)$, *то відображення* f *або нульвимірне, або стале в* G.

Доведення теореми 4.1.1 випливає з леми 4.1.1 і [60, лема 13.2].

4.2 Локальна і глобальна поведінка обернених гомеоморфізмів

Тепер розглянемо питання про збіжність відображень, що задовольняють «обернену» до (4.4) нерівність. Такі результати в просторі $\mathbb{R}^n$ були отримані в роботі [25, теорема 6.1], однак, присутня тут умова фіксації двох точок області нас не зовсім влаштовує (скажімо, серед дробово-лінійних автоморфізмів одиничного круга на себе не більше одного такого відображення). У цій роботі ми відмовляємось від згаданої умови нормування, замінюючи її умовою $\operatorname{diam} f(A) \geqslant \delta > 0$, яку будемо вимагати для всіх відображень f з класу, що розглядається і фіксованого континуума A. Припустимо, що $f : D \to D'$ – фіксоване відображення, α і α' – хаусдорфові розмірності областей $D \subset X$ і $D' \subset X'$, відповідно, і нехай тепер замість умови (4.4) виконується більш сильна умова

$$M_{\alpha'}(f(\Gamma)) \leqslant \int\limits_D Q(x) \cdot \rho^{\alpha}(x)\, d\mu(x)\,, \tag{4.10}$$

де $Q : D \to [1, \infty]$ – фіксована вимірна функція, а $\rho : D \to [0, \infty]$ пробігає клас борелевих функцій, що задовольняють нерівність $\int\limits_{\gamma} \rho(x)|dx| \geqslant 1$. Будемо говорити, що f – Q**-гомеоморфізм** в D, якщо f задовольняє умову (4.10) для будь-якої сім'ї кривих Γ в D і довільної $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma$.

У порівняно недавніх роботах [16] і [35] було вирішене питання про можливість неперервного продовження відображень даного виду в метричних просторах (див. [16, лема 6.1 і теорема 6.1] и [35, лемма 5 і теорема 3]). Одним із завдань цього підрозділу є опис збіжності відображень з умовою (4.10) в метричних просторах.

Нагадаємо деякі означення. Нехай (X, d, μ) – метричний простір з мірою μ.

Означення 4.2.1. *Визначимо* **функцію Льовнера** $\phi_{\alpha} : (0, \infty) \to [0, \infty)$ **на** X *за наступним правилом:*

$$\phi_{\alpha}(t) = \inf\{M_{\alpha}(\Gamma(E, F, X)) : \Delta(E, F) \leqslant t\}\,, \tag{4.11}$$

де $\inf$ *береться по всіх довільних невироджених непересічних континуумах* E, F *в* X, *відносно яких величина* $\Delta(E, F)$ *визначається так:*

$$\Delta(E, F) := \frac{\operatorname{dist}(E, F)}{\min\{\operatorname{diam} E, \operatorname{diam} F\}}\,. \tag{4.12}$$

Означення 4.2.2. *Простір* X *називається* **простором Льовнера,** *якщо функція* $\phi_n(t)$ *додатна при всіх додатних значеннях* t *(див. [60, розд. 2.5] або [50, гл. 8]).*

Означення 4.2.3. *Область* D *в* X *будемо називати* **областю квазіекстремальної довжини відносно** p**-модуля**, *скор.* QED**-областю**, *якщо* $M_{\alpha}(\Gamma(E, F, X)) \leqslant A \cdot M_{\alpha}(\Gamma(E, F, D))$ *для скінченного числа* $A \geqslant 1$ *і всіх континуумів* E *і* F *в* D.

В роботі [32, лема 2] доведене наступне досить важливе твердження.

Лема 4.2.1. *Припустимо, що $D\subset X$ і $D'\subset X'$ – області зі скінченними хаусдорфовими розмірностями $\alpha\geqslant 2$ і $\alpha'\geqslant 2$, відповідно, X' – α'-регулярний за Альфорсом простір Льовнера. Нехай також D' є QED-областю. Тоді:*

1) *в D' виконується властивість континуумів, що зближаються: якщо E_k, F_k – довільні континууми в D' такі, що виконується умова* $\min\{\operatorname{diam} E_k, \operatorname{diam} F_k\}\geqslant\delta$, *де $\delta>0$ – фіксоване число, і* $\operatorname{dist}(E_k, F_k)\to 0$ *при $k\to\infty$, то $M_{\alpha'}(\Gamma(E_k, F_k, D'))\to\infty$ при $k\to\infty$;*

2) *межа області D' є слабко плоскою, тобто яка б не була точка $x_0\in\partial D'$, для кожного $P>0$ і для будь-якого околу U точки x_0 знайдеться окіл $V\subset U$ цієї ж точки такий, що $M_{\alpha'}(\Gamma(E, F, D'))>P$ для довільних континуумів $E, F\subset D'$, що перетинають ∂U і ∂V.*

Припустимо, крім того, що область D локально лінійно зв'язна на $\overline{D}$, тоді

3) *якщо U – окіл континуума $E_0\subset\overline{D}$, то знайдеться окіл $V\subset U$ континуума E_0 такий, що $V\cap D$ – лінійно зв'язна множина.*

Нехай, крім того, $\overline{D}$ і $\overline{D'}$ – компакти в X і X', відповідно, і $Q\in L^1(D)$. Тоді:

4) *якщо $f: D\to D'$ – Q-гомеоморфізм області D на область D', то $g=f^{-1}$ продовжується до неперервного відображення $\overline{g}:\overline{D}\to\overline{D'}$, при цьому, $\overline{g}(\overline{D'})=\overline{D}$.*

5) *якщо жодна зв'язна компонента межі $\partial D'$ не вироджується в точку і $f_m: D\to D'$ – послідовність Q-гомеоморфізмів області D на область D', що задовольняють для деякого (фіксованого) континуума $A\subset D$ умову* $\operatorname{diam} f_m(A)\geqslant\delta>0$ *при всіх $m=1,2,\ldots$, то знайдеться $\delta_1>0$ таке, що* $\operatorname{dist}(f_m(A),\partial D')>\delta_1>0$ *для всіх $m\in\mathbb{N}$.*

Доведення. Встановимо спочатку властивість **1**). Оскільки X' за припущенням є простором Льовнера і, крім того, X' є α'-регулярним за Альфорсом, ми отримаємо: $\phi_{\alpha'}(t) \to \infty$ при $t \to 0$ (див. [50, теорема 8.23]). Візьмемо довільне $\varepsilon > 0$ і для нього знайдемо $t_0 = t_0(\varepsilon)$ таке, що при $t \in (0, t_0)$ виконується $\phi_{\alpha'}(t) > \varepsilon$. Покладемо $\Delta(E_k, F_k) = t$, де $\Delta(E_k, F_k)$ визначене в (4.12). Тоді, з огляду на (4.11)

$$\varepsilon < M_{\alpha'}(\Gamma(E_k, F_k, X')) \tag{4.13}$$

коли $t \in (0, t_0)$ і $\Delta(E_k, F_k) = t$. Зауважимо, що $\Delta(E_k, F_k) \leqslant \frac{1}{\delta}\mathrm{dist}\,(E_k, F_k)$, і якщо $\mathrm{dist}\,(E_k, F_k) \in (0, t_0\delta)$, то $\Delta(E_k, F_k) = t \in (0, t_0)$ і, отже, виконується співвідношення (4.13). Остаточно, для довільного $\varepsilon > 0$ знайшлось $t_0' = t_0\delta$ таке, що при $\mathrm{dist}\,(E_k, F_k) \in (0, t')$, виконується умова (4.13). Із того, що D' є QED-областю (або, відповідно, QED-областю відносно $\overline{D'}$), випливає, що

$$\varepsilon / L < M_{\alpha'}(\Gamma(E_k, F_k, D'))\,,$$

де L – деяка фіксована стала, звідки і випливає, що $M_{\alpha'}(\Gamma(E_k, F_k, D')) \to \infty$ при $\mathrm{dist}\,(E_k, F_k) \to 0$, $k \to \infty$.

Тепер доведемо властивість **2**). Скористаємось встановленою властивістю **1**). Нехай тепер $x_0 \in \partial D'$ – довільна точка. Беремо довільний окіл U точки x_0 і довільне $P > 0$. Для числа $k \in \mathbb{N}$ знайдемо окіл V_k точки x_0, що лежить в кулі $\overline{B(x_0, 2^{-k})}$. Розглянемо континууми E і F, що перетинають ∂U і ∂V_k. Зауважимо, що $\min\{\mathrm{diam\,E}, \mathrm{diam}\,F\} \geqslant \delta > 0$ при досить великих k, оскільки U – фіксований окіл, $\mathrm{dist}\,(\partial V_k, x_0) \to 0$ при $k \to \infty$, а $\mathrm{diam\,E}$ і $\mathrm{diam}\,F$ не менший за відстань між ∂U і ∂V_k. Крім того, $\mathrm{dist}\,(E, F) \leqslant \mathrm{diam}\,\partial V_k \to 0$ при $k \to \infty$. Тоді в силу нерівності **1**) маємо: $M_{\alpha'}(\Gamma(E, F, D')) = \alpha_k \to \infty$ при $k \to \infty$. Підберемо k_0 так, щоб $\alpha_k > P$ при $k \geqslant k_0$ (це число k_0 повністю визначається числом P). Покладемо $V := V_{k_0}$. Тоді отримуємо, що $M_{\alpha'}(\Gamma(E, F, D')) > P$ для довільних континуумів $E, F \subset D'$, що перетинають ∂U і ∂V, що і треба було встановити.

Доведення властивості **3**) дослівно повторює доведення [51, лема 2.2], і тому не наводиться. Властивість **4**), за виключенням рівності $\overline{g}(\overline{D'}) = \overline{D}$, $g := f^{-1} = \overline{g}|_{D'}$, випливає із пункта **2**) і [35, теорема 3]. Рівність $\overline{g}(\overline{D'}) = \overline{D}$ можна встановити аналогічно заключній частині теореми 6.1 в [5], і тому також не наводиться.

Встановимо, нарешті, властивість **5**). Припустимо протилежне, тобто, припустимо, що для кожного $k \in \mathbb{N}$ існує $m = m_k :\ \mathrm{dist}\,(f_{m_k}(A), \partial D') < 1/k$. Без обмеження загальності ми можемо вважати послідовність m_k монотонно зростаючою. За умовою $\overline{D'}$ – компакт, тому і $\partial D'$ також компакт як замкнена підмножина компакта $\overline{D'}$. Крім того, $f_{m_k}(A)$ компакт як неперервний образ компакта A при відображенні f_{m_k}. Тоді знайдуться $x_k \in f_{m_k}(A)$ і $y_k \in \partial D'$ такі, що $\mathrm{dist}\,(f_{m_k}(A), \partial D') = d'(x_k, y_k) < 1/k$. Так як $\partial D'$ – компакт, можна вважати, що $y_k \to y_0 \in \partial D'$, $k \to \infty$. Нехай K_0 – зв'язна компонента $\partial D'$, що містить точку y_0. За умовою K_0 – невироджений континуум в $\partial D'$, такий що $\mathrm{diam}\, K_0 > a_0 > 0$.

Згідно з пунктом **4**), при кожному $k \in \mathbb{N}$ відображення $g_{m_k} := f_{m_k}^{-1}$ продовжуються до неперервного відображення $\overline{g}_{m_k} : \overline{D'} \to \overline{D}$, більше того, $\overline{g}_{m_k}$ одностайно неперервне на $\overline{D'}$. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться $\delta_k = \delta_k(\varepsilon) < 1/k$ таке, що

$$d(\overline{g}_{m_k}(x), \overline{g}_{m_k}(x_0)) < \varepsilon \quad \forall\ x, x_0 \in \overline{D'}, \quad d'(x, x_0) < \delta_k\,, \quad \delta_k < 1/k\,. \tag{4.14}$$

Нехай далі $\varepsilon > 0$ – довільне число з умовою

$$\varepsilon < (1/2) \cdot \mathrm{dist}\,(\partial D, A)\,, \tag{4.15}$$

де A – континуум з умов леми. При кожному фіксованому $k \in \mathbb{N}$ розглянемо множину $B_k := \bigcup\limits_{x_0 \in K_0} B(x_0, \delta_k)\,,\ k \in \mathbb{N}$. Зауважимо, що B_k – відкрита множина, що містить K_0, іншими словами, B_k – деякий окіл континуума K_0. З огляду на пункт **3**), існує окіл $U_k \subset B_k$ континуума K_0, такий, що $U_k \cap D'$ лінійно зв'язний. Нехай $\mathrm{diam}\, K_0 = m_0$, тоді знайдуться $z_0, w_0 \in K_0$ такі, що $\mathrm{diam}\, K_0 = d'(z_0, w_0) = m_0$. Отже, можна вибрати послідовності $\overline{y_k} \in U_k \cap D'$, $z_k \in U_k \cap D'$ і $w_k \in U_k \cap D'$ так, що $z_k \to z_0$, $\overline{y_k} \to y_0$ і $w_k \to w_0$ при $k \to \infty$. Можна вважати, що

$$d(z_k, w_k) > m_0/2, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}\,. \tag{4.16}$$

Послідовно з'єднаємо точки z_k, $\overline{y_k}$ і w_k кривою γ_k в $U_k \cap D'$ (це можливо, оскільки $U_k \cap D'$ лінійно зв'язна). Нехай $|\gamma_k|$ – як зазвичай, носій (образ) кривої γ_k в D'. Тоді $g_{m_k}(|\gamma_k|)$ – компакт в D. Нехай $x \in |\gamma_k|$, тоді знайдеться $x_0 \in K_0 :\ x \in B(x_0, \delta_k)$. Зафіксуємо $\omega \in A \subset D$. Оскільки $x \in |\gamma_k|$, то x – внутрішня точка області D', так що ми можемо писати $g_{m_k}(x)$ замість $\overline{g}_{m_k}(x)$ для вказаних x. Із (4.14) і (4.15), з огляду на нерівність трикутника для досить великих $k \in \mathbb{N}$, отримуємо:

$$d(g_{m_k}(x), \omega) \geqslant d(\omega, \overline{g}_{m_k}(x_0)) - d(\overline{g}_{m_k}(x_0), g_{m_k}(x)) \geqslant$$

$$\geqslant \mathrm{dist}\,(\partial D, A) - (1/2)\cdot \mathrm{dist}\,(\partial D, A) = \mathrm{dist}\,(\partial D, A) > \varepsilon\,. \tag{4.17}$$

Переходячи в (4.17) до $\inf$ по всіх $x \in |\gamma_k|$ і всіх $\omega \in A$, ми отримаємо:

$$\mathrm{dist}\,(g_{m_k}(|\gamma_k|), A) > \varepsilon, \quad \forall\, k = 1, 2, \ldots\,. \tag{4.18}$$

З огляду на (4.18) довжина довільної кривої, що з'єднує компакти $g_{m_k}(|\gamma_k|)$ і A в D, не менша ніж ε. Покладемо $\Gamma_k := \Gamma(g_{m_k}(|\gamma_k|), A, D)$, тоді функція $\rho(x) = 1/\varepsilon$ при $x \in D$ і $\rho(x) = 0$ при $x \notin D$ допустима для Γ_k. За означенням відображень f_{m_k} в (4.10) маємо:

$$M_{\alpha'}(f_{m_k}(\Gamma_k)) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^{\,\alpha}} \int\limits_D Q(x)\, d\mu(x) = c = c(\varepsilon, Q) < \infty\,, \tag{4.19}$$

оскільки за умовою $Q \in L^1(D)$.

Однак, співвідношення (4.19) суперечить пункту **1)**. Справді, оскільки $\Gamma(f_{m_k}(A), |\gamma_k|, D') = f_{m_k}(\Gamma(A, g_{m_k}(|\gamma_k|), D)) = f_{m_k}(\Gamma_k)$, $\mathrm{diam}\, f_{m_k}(A) \geqslant \delta$ за умовою, $\mathrm{diam}\,|\gamma_k| \geqslant d(z_k, w_k) > m_0/2$ з огляду на (4.16), крім того, $\mathrm{dist}\,(f_{m_k}(A), |\gamma_k|) \leqslant d'(x_k, \overline{y_k}) \to 0$ при $k \to \infty$, оскільки кожна із послідовностей x_k і $\overline{y_k}$ збігається при $k \to \infty$ до точки y_0. За пунктом **1)** тоді

$M_{\alpha'}(\Gamma(f_{m_k}(A), |\gamma_k|, D')) = M_{\alpha'}(f_{m_k}(\Gamma_k)) \to \infty$ при $k \to \infty$, що суперечить (4.19). Отримане протиріччя спростовує припущення про нерівність $\mathrm{dist}\,(f_{m_k}(A), \partial D') < 1/k$. Лема доведена. $\Box$

Будемо розглядати далі області $D \subset X$, що задовольняють наступну умову $\mathbf{A}$: будь-які дві пари точок $a \in D, b \in \overline{D}$, і $c \in D, d \in \overline{D}$ можна з'єднати непересічними кривими C_1 і C_2 в області D. Області в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, з локально зв'язною межею завжди задовольняють умову $\mathbf{A}$, за лемою 4.1.1.

Для областей $D \subset X$, $D' \subset X'$ і довільної вимірної за Лебегом функції $Q : X \to [1, \infty]$, $Q(x) \equiv 0$ при $x \notin D$, позначимо через $\mathfrak{R}_Q(D, D')$ сім'ю всіх гомеоморфізмів $g : D' \to D$ області D' на область D таких, що $f = g^{-1}$, $f : D \to D'$ – Q-гомеоморфізм в D. Виконується наступне твердження, доведене в [32, теорема 2].

Теорема 4.2.1. *Припустимо, що $D \subset X$ і $D' \subset X'$ – області зі скінченними хаусдорфовими розмірностями $\alpha \geqslant 2$ і $\alpha' \geqslant 2$, відповідно. Нехай також:*

1) простір X' є α'-регулярним за Альфорсом простором Льовнера,

2) область D локально лінійно зв'язна на $\overline{D}$, $\overline{D}$ і $\overline{D'}$ – компакти в X і X', відповідно, крім того, ∂D містить не менше двох точок,

3) область D' є QED-областю,

4) виконується умова $\boldsymbol{A}$,

5) $Q \in L^1(D)$.

Тоді сім'я $\mathfrak{R}_Q(D, D')$ є одностайно неперервною в D'.

Доведення. Здійснимо доведення теореми від супротивного. Припустимо, що сім'я $\mathfrak{R}_Q(D, D')$ не є одностайно неперервною в деякій точці $y_0 \in D'$, іншими словами, знайдуться $y_0 \in D'$ і $\varepsilon_0 > 0$, такі що для будь-якого $m \in \mathbb{N}$ існує елемент $y_m \in D'$ з умовою $d'(y_m, y_0) < 1/m$ і гомеоморфізм

$g_m \in \mathfrak{R}_Q(D, D')$ такі, що

$$d(g_m(y_m), g_m(y_0)) \geqslant \varepsilon_0 \,. \tag{4.20}$$

Оскільки за умовою $\overline{D}$ є компактом, ми можемо вважати, що послідовності $g_m(y_m)$ і $g_m(y_0)$ сходятся при $m \to \infty$ до точок $\overline{x_1}$ і $\overline{x_2} \in \overline{D}$. В силу нерівності (4.20) за неперервністю метрики $d(\overline{x_1}, \overline{x_2}) \geqslant \varepsilon_0$. З'єднаємо точку $\overline{x_1}$ з точкою $x_1 \in \partial D$, а точку $\overline{x_2}$ – з точкою $x_2 \in \partial D$, $x_1 \neq x_2$, непересічними кривими γ_1 і γ_2, відповідно, так що $\gamma_i(t) \in D$ при $0 < t < 1$, $\gamma_1(0) = \overline{x_1}$, $\gamma_1(1) = x_1$, $\gamma_2(0) = \overline{x_2}$, $\gamma_2(1) = x_2$ (це можливо за умовою теореми).

У випадку, якщо одна із точок $\overline{x_1}$ або $\overline{x_2}$ межова, відрізки γ_1 і γ_2 вироджуються в точку за означенням.

Нехай U_1 і U_2 – непересічні околи точок $\overline{x_i}$, $i = 1, 2$, такі, що $W_i := U_i \cap D$ – зв'язна множина; нехай також P_i – непересічні околи точок x_i, $i = 1, 2$, такі що $L_i := P_i \cap D$ – зв'язна множина (всі такі околи існують, оскільки за умовою D локально зв'язна на ∂D). Якщо $\overline{x_i}$, $i = 1, 2$, – внутрішні точки області D, то можна вибрати околи так, що $\overline{L_i} \cap \overline{W_j} = \varnothing$, $i, j = 1, 2$. Покладемо $f_m := g_m^{-1}$. Побудуємо дві послідовності $z_m^1 \to x_1$ і $z_m^2 \to x_2$ при $m \to \infty$, $m = 1, 2, \ldots$, наступним образом. Так як f_m – гомеоморфізм, то гранична множина $C(f_m, x_1)$ лежить на $\partial D'$ (див. [60, пропозиція 13.5]), тому знайдеться точка $z_m^1 \in D$ така, що $\operatorname{dist}(f_m(z_m^1), \partial D') < 1/m$. Так як $\overline{D'}$ – компакт, то можна вважати, що послідовність $f_m(z_m^1) \to p_1 \in \partial D'$ при $m \to \infty$. Аналогічно будуємо послідовність z_m^2 : можна вважати, що $f_m(z_m^2) \to p_2 \in \partial D'$ при $m \to \infty$. Можна вважати, що $z_m^1 \in L_1$ і $z_m^2 \in L_2$ при всіх $m \in \mathbb{N}$.

Якщо точка $\overline{x_1} \in D$, то послідовність $z_m^1 \in D$ можна вибрати таку, що $z_m^1 \in D \in |\gamma_1|$; в цьому випадку, нехай P_m^1 позначає частину кривої $|\gamma_1|$, що з'єднує точки $\overline{x_1}$ і z_m^1. Покладемо тоді $P_m := P_m^1 \cup \overline{W_1}$. В іншому випадку, якщо $\overline{x_1} \in \partial D$, то нехай P_m – крива, що з'єднує точки z_m^1 і $g_m(y_m)$ в W_1.

Аналогічно, якщо точка $\overline{x_2} \in D$, то послідовність $z_m^2 \in D$ можна вибрати таку, що $z_m^2 \in D \in |\gamma_2|$; в цьому випадку, нехай P_m^2 позначає частину відрізка $|\gamma_2|$, що з'єднує точки $\overline{x_2}$ і z_m^2. Покладемо тоді $Q_m := P_m^2 \cup \overline{W_2}$. В іншому випадку, якщо $\overline{x_2} \in \partial D$, то нехай Q_m – крива, що з'єднує точки z_m^2 і $g_m(y_0)$ в W_2. За побудовою, P_m і Q_m – непересічні континууми в D такі, що $l_m := \mathrm{dist}\,(P_m, Q_m) > l > 0$. Нехай $\Gamma_m = \Gamma(P_m, Q_m, D)$, тоді функція $\rho(x) = \begin{cases} \frac{1}{l}, & x \in D \\ 0, & x \notin D \end{cases}$ є допустимою для сім'ї Γ_m, оскільки для довільної (локально спрямлюваної) кривої $\gamma \in \Gamma_m$ виконується $\int\limits_{\gamma} \rho(x)|dx| \geqslant \frac{l(\gamma)}{l} \geqslant 1$ (де $l(\gamma)$ позначає довжину кривої γ). Оскільки за умовою відображення f_m задовольняють (4.10), отримуємо:

$$M_{\alpha'}(f_m(\Gamma_m)) \leqslant \frac{1}{l^{\alpha}} \int\limits_{D} Q(x)\, d\mu(x) := c < \infty\,, \tag{4.21}$$

оскільки $Q \in L^1(D)$. З іншого боку, $\mathrm{diam}\, f_m(P_m) \geqslant d'(y_m, f_m(z_m^1)) \geqslant (1/2) \cdot d'(y_0, p_1) > 0$ і $\mathrm{diam}\, f_m(Q_m) \geqslant d'(y_0, f_m(z_m^2)) \geqslant (1/2) \cdot d'(y_0, p_2) > 0$, крім того, $\mathrm{dist}\,(f_m(P_m), f_m(Q_m)) \leqslant d'(y_m, y_0) \to 0$, $m \to \infty$. Тоді з огляду на пункт **1)** леми 4.2.1

$$M_{\alpha'}(f_m(\Gamma_m)) = M_{\alpha'}(f_m(P_m), f_m(Q_m), D') \to \infty\,, \quad m \to \infty\,,$$

що суперечить співвідношенню (4.21). Отримане протиріччя вказує на помилковість припущення в (4.20), що і завершує доведення теореми. $\Box$

Для числа $\delta > 0$, областей $D \subset X$, $D' \subset X'$, континуума $A \subset D$ і довільної вимірної за Лебегом функції $Q(x) : X \to [1, \infty]$, $Q(x) \equiv 0$ при $x \notin D$, позначимо через $\mathfrak{H}_{\delta,A,Q}(D, D')$ сім'ю всіх Q-гомеоморфізмів $f : D \to D'$, $f(D) = D'$, таких що $\mathrm{diam}\, f(A) \geqslant \delta$. Виконується наступне твердження, доведене в [32, теорема 3].

Теорема 4.2.2. *В умовах теореми 4.2.1 кожний елемент g сім'ї*

$$\mathfrak{H}_{\delta,A,Q}^{-1}(D, D') := \left\{g = f^{-1} : D' \to D,\ \ f \in \mathfrak{H}_{\delta,A,Q}(D, D')\right\}$$

можна продовжити за неперервністю до відображення $\overline{g} = \overline{f^{-1}} : \overline{D'} \to \overline{D}$, причому $g(\overline{D'}) = \overline{D}$ і сім'я $\mathfrak{H}_{\delta,A,Q}^{-1}(\overline{D}, \overline{D'}) := \{\overline{g} : \overline{D'} \to \overline{D},\ \overline{g}|_{D'} = g,\ g \in \mathfrak{H}_{\delta,A,Q}^{-1}(D, D')\}$ є одностайно неперервною в $\overline{D'}$.

Доведення. Можливість неперервного продовження кожного $\mathfrak{H}_{\delta,A,Q}^{-1}(D,D')$ на межі області D' це твердження леми 4.2.1, пункт **3**), а одностайна неперервність сім'ї в $\mathfrak{H}_{\delta,A,Q}^{-1}(\overline{D},\overline{D'})$ в D' випливає із теореми 4.2.1. Рівність $g(\overline{D'})=\overline{D}$ для $g\in\mathfrak{H}_{\delta,A,Q}^{-1}$ є твердженням пункту **4** леми 4.2.1. Залишилось показати одностайну неперервніть сім'ї $\mathfrak{H}_{\delta,A,Q}^{-1}(\overline{D},\overline{D'})$ на межі області D'.

Припустимо протилежне, а саме, припустимо, що знайдеться точка $z_0\in\partial D'$, число $\varepsilon_0>0$ і посідовності $z_m\in\overline{D'}$, $z_m\to z_0$ при $m\to\infty$ і $\overline{g}_m\in\mathfrak{H}_{\delta,A,Q}^{-1}(\overline{D},\overline{D'})$ такі, що

$$d(\overline{g}_m(z_m),\overline{g}_m(z_0))\geqslant\varepsilon_0,\quad m=1,2,\ldots. \tag{4.22}$$

Покладемо $g_m:=\overline{g}_m|_{D'}$. Так як g_m за неперервністю продовжується на межу D', можна вважати, що $z_m\in D'$ і, отже, $\overline{g}_m(z_m)=g_m(z_m)$. Крім того, знайдеться ще одна послідовність $z_m'\in D'$, $z_m'\to z_0$ при $m\to\infty$, така, що $d(g_m(z_m'),\overline{g}_m(z_0))\to 0$ при $m\to\infty$. Так як $\overline{D}$ – компакт, ми можемо вважати, що послідовності $g_m(z_m)$ і $g_m(z_0)$ є збіжними при $m\to\infty$. Нехай $g_m(z_m)\to\overline{x_1}$ і $\overline{g}_m(z_0)\to\overline{x_2}$ при $m\to\infty$. За неперервністю модуля із (4.22) випливає, що $d(\overline{x_1},\overline{x_2})\geqslant\varepsilon_0$, більше того, так як гомеоморфізми зберігають межу, $\overline{x_2}\in\partial D$. Нехай x_1 і x_2 – довільні різні точки континуума A, жодна з яких не співпадає з $\overline{x_1}$. З огляду на умову **A** можна з'єднати точки x_1 і $\overline{x_1}$ кривою $\gamma_1:[0,1]\to\overline{D}$, а точки x_2 і $\overline{x_2}$ – кривою $\gamma_2:[0,1]\to\overline{D}$ так, що $|\gamma_1|\cap|\gamma_2|=\varnothing$, $\gamma_i(t)\in D$ при всіх $t\in(0,1)$, $i=1,2$, $\gamma_1(0)=x_1$, $\gamma_1(1)=\overline{x_1}$, $\gamma_2(0)=x_2$ і $\gamma_2(1)=\overline{x_2}$. Так як D локально зв'язна на своїй межі, знайдуться непересічні околи U_1 і U_2 точок $\overline{x_1}$ і $\overline{x_2}$, відповідно, такі, що $W_i:=D\cap U_i$ – лінійно зв'язна множина. За рахунок зменшення околів U_i, якщо це необхідно, ми можемо вважати, що $\overline{U_1}\cap\overline{U_2}=\varnothing$ і $\overline{U_1}\cap|\gamma_2|=\varnothing=\overline{U_2}\cap|\gamma_1|$. Ми також можемо вважати, що $g_m(z_m)\in W_1$ і $g_m(z_m')\in W_2$ при всіх $m\in\mathbb{N}$. Нехай a_1 і a_2 – довільні точки, що належать $|\gamma_1|\cap W_1$ і $|\gamma_2|\cap W_2$. Нехай t_1,t_2 такі, що $\gamma_1(t_1)=a_1$ і $\gamma_2(t_2)=a_2$. З'єднаємо точку a_1 з точкою $g_m(z_m)$ кривою $\alpha_m:[t_1,1]\to W_1$ такою, що $\alpha_m(t_1)=a_1$ і $\alpha_m(1)=g_m(z_m)$. Аналогічно, з'єднаємо точку a_2 з точкою $g_m(z_m')$ кривою $\beta_m : [t_2, 1] \to W_2$ такою, що $\beta_m(t_2) = a_2$ і $\beta_m(1) = g_m(z_m')$. Покладемо тепер $C_m^1(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & t \in [0, t_1], \\ \alpha_m(t), & t \in [t_1, 1] \end{cases}$, $C_m^2(t) = \begin{cases} \gamma_2(t), & t \in [0, t_2], \\ \beta_m(t), & t \in [t_2, 1] \end{cases}$. Нехай, як зазвичай, $|C_m^1|$ і $|C_m^2|$ – носії кривих C_m^1 і C_m^2, відповідно. Зауважимо, що за побудовою $|C_m^1|$ і $|C_m^2|$ – два непересічних континуума в D, причому існує $l_0 > 0$ таке, що $\mathrm{dist}\,(|C_m^1|, |C_m^2|) > l_0 > 0$ при всіх $m = 1, 2, \ldots$. Нехай тепер Γ_m – сім'я кривих, що з'єднують $|C_m^1|$ і $|C_m^2|$ в D. Тоді функція $\rho(x) = \begin{cases} \frac{1}{l_0}, & x \in D \\ 0, & x \notin D \end{cases}$ є допустимою для сім'ї Γ_m і, оскільки за умовою відображення f_m, $f_m = g_m^{-1}$, задовольняють (4.10), отримуємо:

$$M_{\alpha'}(f_m(\Gamma_m)) \leqslant \frac{1}{l_0^{\alpha}} \int\limits_D Q(x)\, d\mu(x) := c = c(l_0, Q) < \infty\,,$$

т.к. $Q \in L^1(D)$. З іншого боку, з огляду на пункт **5** леми 4.2.1 знайдеться число $\delta_1 > 0$ таке, що $\mathrm{dist}\,(f_m(A), \partial D') > \delta_1 > 0$, $m = 1, 2, \ldots$. Звідси отримаємо, що знайдеться деякий номер $m_1 > m_0$, $m_0 \in \mathbb{N}$, такий що при всіх $m \geqslant m_1$

$$\mathrm{diam}\, f_m(|C_m^1|) \geqslant d'(z_m, f_m(x_1)) \geqslant (1/2) \cdot \mathrm{dist}\,(f_m(A), \partial D') > \delta_1/2\,,$$

$$\mathrm{diam}\, f_m(|C_m^2|) \geqslant d'(z_m', f_m(x_2)) \geqslant (1/2) \cdot \mathrm{dist}\,(f_m(A), \partial D') > \delta_1/2\,. \quad (4.23)$$

Крім того, $\mathrm{dist}\,(f_m(|C_m^1|, f_m(|C_m^2|) \leqslant d'(z_m, z_m') \to 0$ за вибором z_m і z_m'. Тоді в силу пункта **1** леми 4.2.1 отримаємо, що при $m \to \infty$ виконується $M_{\alpha'}(f_m(\Gamma_m)) = M_{\alpha'}(\Gamma(f_m(|C_m^1|), f_m(|C_m^2|), D')) \to \infty$, однак це суперечить співвідношенню (4.23). Отримане протиріччя вказує на хибність припущення в (4.22), що і доводить теорему. □

Зауважимо, що при $Q(x) = const$ твердження теореми 4.2.2 це послаблений варіант теорем Някі-Палка про одностайну неперервність сім'ї квазіконформних відображень в замиканні області (див. [63, теорема 3.1]).

Скрізь далі

$$B(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}\,, S(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) = r\}\,,$$

$$A(x_0, r_1, r_2) = \{x \in X : r_1 < d(x, x_0) < r_2\} \ . \tag{4.24}$$

Означення 4.2.4. *Згідно з [60, розд. 7] відображення* $f : D \to X'$ *(або* $f : D \to \overline{X'}$ *) будемо називати* **кільцевим Q-відображенням в точці** $x_0 \in \overline{D}$, *якщо для довільних* $0 < r_1 < r_2 < r_0 := \sup\limits_{x \in D} d(x, x_0)$ *і кожної вимірної за Лебегом функції* $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$, *такої що*

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)\, dr \geqslant 1\,, \tag{4.25}$$

виконується нерівність

$$M_{\alpha'}(f(\Gamma(S_1, S_2, D))) \leqslant \int\limits_{A \cap D} Q(x) \cdot \eta^{\alpha}(d(x, x_0))\, d\mu(x)\,, \tag{4.26}$$

де $A = A(x_0, r_1, r_2)$, $S_1 = S(x_0, r_1)$ *і* $S_2 = S(x_0, r_2)$.

Припустимо, що X' допускає слабку сферикалізацію. Тоді для областей $D \subset X$, $D' \subset \overline{X'}$ і довільної вимірної функції $Q : X \to [1, \infty]$, $Q(x) \equiv 0$ при $x \notin D$, позначимо через $\mathfrak{R}_Q(D, D')$ сім'ю всіх гомеоморфізмів g області D' на область D таких, що $f = g^{-1}$ задовольняє умови (4.25)–(4.26) в кожній точці $x_0 \in D$ для довільних $0 < r_1 < r_2 < r_0 := \sup\limits_{x \in D} d(x, x_0)$. Тут гомеоморфність g розуміється в сенсі відображень просторів $(\overline{X'}, h)$ і (X, d). Виконується наступне твердження, доведене в [30, теорема 1.1].

Теорема 4.2.3. *Нехай* (X, d, μ) *і* (X', d', μ') *– метричні простори з хаусдорфовими розмірностями* $2 \leqslant \alpha, \alpha' < \infty$ *при цьому,* X *локально лінійно зв'язний, а* X' *допускає слабку сферикалізацію. Нехай також* D *і* D' *– області в* X *і* $\overline{X'}$, *відповідно, при цьому, простір* D' *є слабко плоским як метричний простір, крім того,* $\overline{D}$ *є компактом в* X, *а множина* ∂D *містить не менше двох точок.*

Якщо область D *задовольняє умову* $\boldsymbol{A}$ *і* $Q \in L^1(D)$, *то сім'я* $\mathfrak{R}_Q(D, D')$ *є одностайно неперервною в* D'.

Доведення. Здійснимо доведення теореми 4.2.3 від супротивного. Припустимо, що сім'я $\mathfrak{R}_Q(D,D')$ не є одностайно неперервною в деякій точці $y_0\in D'$, іншими словами, знайдуться $y_0\in D'$ і $\varepsilon_0>0$ з наступною умовою: для будь-якого $m\in\mathbb{N}$ знайдеться $y_m\in D'$, $h(y_m,y_0)<1/m$, і гомеоморфізм $g_m\in\mathfrak{R}_Q(D,D')$, такі що

$$d(g_m(y_m),g_m(y_0))\geqslant\varepsilon_0\,. \tag{4.27}$$

Оскільки за умовою $\overline{D}$ є компактом, ми можемо вважати, що послідовності $g_m(y_m)$ і $g_m(y_0)$ збігаються при $m\to\infty$ до точок $\overline{x_1}$ і $\overline{x_2}\in\overline{D}$. З нерівності (4.27) за неперервністю метрики d маємо: $d(\overline{x_1},\overline{x_2})\geqslant\varepsilon_0$. З'єднаємо точку $\overline{x_1}$ з точкою $x_1\in\partial D$, а точку $\overline{x_2}$ – з точкою $x_2\in\partial D$, $x_1\ne x_2$, непересічними кривими γ_1^* і γ_2^*, відповідно, так що $\gamma_i^*(t)\in D$ при $0<t<1$, $\gamma_1^*(0)=\overline{x_1}$, $\gamma_1^*(1)=x_1$, $\gamma_2^*(0)=\overline{x_2}$, $\gamma_2^*(1)=x_2$ (це можливо за умовою $\mathbf{A}$). Якщо яка-небудь із точок $\overline{x_1}$ або $\overline{x_2}$ межова, то відповідна крива (γ_1^* або, відповідно, γ_2^*) за означенням вироджується в точку. Зауважимо, що $|\gamma_1^*|$ і $|\gamma_2^*|$ – компакти в X, тому $d(|\gamma_1^*|,|\gamma_2^*|)=l_0>0$. Розглянемо покриття $A_0:=\bigcup\limits_{x\in|\gamma_1^*|}B(x,l_0/4)$ кривої $|\gamma_1^*|$. Оскільки $|\gamma_1^*|$ – компактна множина, можна вибрати скінченну кількість індексів $1\leqslant N_0<\infty$ і відповідні точки $z_1,\ldots,z_{N_0}\in|\gamma_1^*|$ так, що $|\gamma_1^*|\subset B_0:=\bigcup\limits_{i=1}^{N_0}B(z_i,l_0/4)$. Не обмежуючи загальності, можна вважати, що всі точки z_i належать D, так як у випадку необхідності можна замінити кулю $B(x,l_0/4)$ на кулю $B(x^*,l_0^*/4)$ з центром в деякій точці $x^*\in D$, де l_0^* – деяке додатне число, яке можна вибрати так, що $l_0/4<l_0^*/4<l_0/2$. Нехай $l_1=d(\overline{x_1},\overline{x_2})>0$. Оскільки простір X локально лінійно зв'язний, то знайдуться лінійно зв'язні околи $V_i\subset B_0$ точок $\overline{x_i}$, $i=1,2$. З'єднаємо $g_m(y_m)$ кривою α_m з точкою $\overline{x_1}$ всередині V_1, а $g_m(y_0)$ – кривою β_m з точкою $\overline{x_2}$ всередині V_2. Нехай $\widetilde{\gamma_m}:[0,1]\to X$ – крива, яка є об'єднанням кривих α_m і γ_1, а $\widetilde{\Delta_m}:[0,1]\to X$ – крива, яка є об'єднанням кривих β_m і γ_2, де $\alpha_m(0)=g_m(y_m)$ і $\beta_m(0)=g_m(y_0)$.

Нехай

$$t_m = \sup_{t\in[0,1]} \left\{t : \widetilde{\gamma_m}(t) \in D\right\}\ , \quad p_m = \sup_{t\in[0,1]} \left\{t : \widetilde{\Delta_m}(t) \in D\right\}\ .$$

Покладемо

$$\gamma_m = \widetilde{\gamma_m}|_{[0,t_m)}\,, \qquad \Delta_m = \widetilde{\Delta_m}|_{[0,p_m)}\,.$$

Оскільки $C(f, \partial D) \subset \partial D'$ для довільного гомеоморфізму f області D на D' (див. [60, пропозиція 13.5]), то знайдуться послідовності точок $z_m^1 \in |\gamma_m|$ і $z_m^2 \in |\Delta_m|$ таких, що $h(f_m(z_m^1), \partial D') < 1/m$ і $h(f_m(z_m^2), \partial D') < 1/m$. Так як $\overline{X'}$ – компакт, то можна вважати, що $f_m(z_m^1) \to p_1 \in \partial D'$ і $f_m(z_m^2) \to p_2 \in \partial D'$ при $m \to \infty$. Нехай P_m – частина носія кривої γ_m в X, що знаходиться між точками $g_m(y_m)$ і z_m^1, а Q_m – частина носія кривої Δ_m в X, що знаходиться між точками $g_m(y_0)$ і z_m^2.

У цьому випадку,

$$P_m \subset \bigcup_{i=1}^{N_0} B(z_i, l_0/4)\,.$$

Нехай Γ_m – сім'я всіх кривих, що з'єднують P_m і Q_m в D. Тоді ми маємо, що

$$\Gamma_m = \bigcup_{i=1}^{N_0} \Gamma_{mi}\,, \tag{4.28}$$

де Γ_{mi} – сім'я всіх кривих $\gamma : [0, 1] \to D'$ таких, що $\gamma(0) \in B(z_i, l_0/4) \cap P_m$ і $\gamma(1) \in Q_m$ при $1 \leqslant i \leqslant N_0$. Беручи до уваги [11, теорема 1.I.5.46], ми можемо показати, що

$$\Gamma_{mi} > \Gamma(S(z_i, l_0/4), S(z_i, l_0/2), A(z_i, l_0/4, l_0/2))\,. \tag{4.29}$$

Покладемо

$$\eta(t) = \begin{cases} 4/l_0, & t \in [l_0/4, l_0/2], \\ 0, & t \notin [l_0/4, l_0/2]\,. \end{cases}$$

Оскільки відображення f_m задовольняють співвідношення (4.26) в D, то

$$M_{\alpha'}(f_m(\Gamma_m) \leqslant 4N_0/l_0^{\alpha} \cdot \|Q\|_1 := c < \infty\,, \tag{4.30}$$

так як $Q \in L^1(D)$. З іншого боку, $h(f_m(P_m)) \geqslant h(y_m, f_m(z_m^1)) \geqslant (1/2) \cdot h(y_0, p_1) > 0$ і $h(f_m(Q_m)) \geqslant h(y_0, f_m(z_m^2)) \geqslant (1/2) \cdot h(y_0, p_2) > 0$, крім того, $h(f_m(P_m), f_m(Q_m)) \leqslant h(y_m, y_0) \to 0$, $m \to \infty$. Тоді з огляду на слабку плоскість D'

$$M_{\alpha'}(f_m(\Gamma_m)) = M_{\alpha'}(\Gamma(f_m(P_m), f_m(Q_m), D')) \to \infty\,, \quad m \to \infty\,,$$

що суперечить співвідношенню (4.30). Отримане протиріччя вказує на помилковість припущення в (4.27), що завершує доведення теореми. □

Зауваження 4.2.1. У теоремі 4.2.3 одностайна неперервність розуміється в контексті відображень, що діють між просторами $(\overline{X'}, h)$ і (X, d). Іншими словами, $\mathfrak{R}_Q(D, D')$ є одностайно неперервним в D' тоді і тільки тоді, коли для будь-якого $\varepsilon > 0$ і кожного $y_0 \in D'$ знайдеться $\delta = \delta(y_0, \varepsilon) > 0$ таке, що $d(g(y), g(y_0)) < \varepsilon$ при всіх $g \in \mathfrak{R}_Q(D, D')$ і $y \in D'$, що задовольняють умову $h(y, y_0) < \delta$.

Зауважимо також, що якщо f – гомеоморфізм області $D \subset X$ на $D' \subset X'$, розуміється відносно метрик d і d', то також f – гомеоморфізм відносно метрик d і h, так як за пропозицією d' породжують одну і ту ж топологію на X'.

Зауважимо, що без додаткових умов сім'я відображень із теореми 4.2.3 не є одностайно неперервною на межі заданої області навіть в евклідовому випадку і навіть з конформною характеристикою $Q \equiv 1$ (див. [32, приклади 1 і 2]).

Для числа $\delta > 0$, областей $D \subset X$, $D' \subset \overline{X'}$, фіксованого континууму $A \subset D$ і довільної вимірної функції $Q : X \to [1, \infty]$, $Q(x) \equiv 0$ при $x \notin D$, позначимо через $\mathfrak{H}_{\delta, A, Q}(D, D')$ сім'ю всіх гомеоморфізмів g області D' на D таких, що $f = g^{-1}$ задовольняє умови (4.25)–(4.26) в кожній точці $x_0 \in D$ для довільних $0 < r_1 < r_2 < r_0 := \sup\limits_{x \in D} d(x, x_0)$, при цьому, $h(f(A), \partial D') \geqslant \delta > 0$. Виконується наступне твердження, див.

також [75, теорема 1.2] і [76, теорема 1]. Доведення наступної теореми можна знайти в [30, теорема 3.1].

Теорема 4.2.4. *Припустимо, що виконуються всі умови теореми 4.2.3, крім того, межа області D' є слабко плоскою. Тоді кожний елемент g сім'ї $\mathfrak{H}_{\delta,A,Q}(D,D')$ продовжується за неперервністю до відображення $\overline{g}=\overline{f^{-1}}:\overline{D'}\to\overline{D}$, при цьому, $g(\overline{D'})=\overline{D}$ і, крім того, сім'я $\mathfrak{H}_{\delta,A,Q}(\overline{D},\overline{D'})$ всіх продовжених відображень $\overline{g}:\overline{D'}\to\overline{D}$ одностайно неперервна в $\overline{D'}$.*

Доведення. Можливість неперервного продовження кожного $\mathfrak{H}_{\delta,A,Q}(D,D')$ на межу D' можна отримати міркуваннями, аналогічними до доведення [35, теорема 3]. Одностайна неперервність $\mathfrak{H}_{\delta,A,Q}(D,D')$ в D' є твердженням теореми 4.2.3. Рівність $g(\overline{D'})=\overline{D}$ для $g\in\mathfrak{H}_{\delta,A,Q}(D,D')$ перевіряється аналогічно до першої частини доведення теореми 1 в [76]. Залишилось показати одностайну неперервність сім'ї $\mathfrak{H}_{\delta,A,Q}(\overline{D},\overline{D'})$ на межі області D'.

Припустимо супротивне, а саме, що знайдеться точка $z_0\in\partial D'$, число $\varepsilon_0>0$, $z_m\in\overline{D'}$, $z_m\to z_0$ при $m\to\infty$ і $\overline{g}_m\in\mathfrak{H}_{\delta,A,Q}(\overline{D},\overline{D'})$ такі, що

$$d(\overline{g}_m(z_m),\overline{g}_m(z_0))\geqslant\varepsilon_0,\quad m=1,2,\ldots. \tag{4.31}$$

Покладемо $g_m:=\overline{g}_m|_{D'}$. Так як g_m за неперервністю продовжується на межу D', можна вважати, що $z_m\in D'$ і, отже, $\overline{g}_m(z_m)=g_m(z_m)$. Крім того, знайдеться ще одна послідовність $z_m'\in D'$, $z_m'\to z_0$ така, що $d(g_m(z_m'),\overline{g}_m(z_0))\to 0$ при $m\to\infty$. Так як $\overline{D}$ – компакт, ми можемо вважати, що послідовності $g_m(z_m)$ і $g_m(z_0)$ збіжні при $m\to\infty$. Нехай $g_m(z_m)\to\overline{x_1}$ і $\overline{g}_m(z_0)\to\overline{x_2}$ при $m\to\infty$. За неперервністю метрики і із (4.31) слідує, що $d(\overline{x_1},\overline{x_2})\geqslant\varepsilon_0$, більше того, так як гомеоморфізми зберігають межу, $\overline{x_2}\in\partial D$. Нехай x_1 і x_2 – довільні різні точки континуума A, жодна з яких не збігається з $\overline{x_1}$. З огляду на умову **A** можна з'єднати точки x_1 і $\overline{x_1}$ кривою $\gamma_1:[0,1]\to\overline{D}$, а точки x_2 і $\overline{x_2}$ – кривою

$\gamma_2 : [0,1] \to \overline{D}$ так, що $|\gamma_1| \cap |\gamma_2| = \varnothing$, $\gamma_i(t) \in D$ при всіх $t \in (0,1)$, $i = 1,2$, $\gamma_1(0) = x_1$, $\gamma_1(1) = \overline{x_1}$, $\gamma_2(0) = x_2$ і $\gamma_2(1) = \overline{x_2}$.

Поклавши

$$l_0 = d(|\gamma_1|, |\gamma_2|)\,,$$

розглянемо покриття $A_0 := \bigcup\limits_{x \in |\gamma_1|} B(x, l_0/4)$ компакта $|\gamma_1|$. оскільки $|\gamma_1|$ є компактом, оберемо $1 \leqslant N_0 < \infty$ і $x_1, \ldots, x_{N_0} \in |\gamma_1|$ такі, що $|\gamma_1| \subset B_0 := \bigcup\limits_{i=1}^{N_0} B(x_i, l_0/4)$. Зауважимо, шо серед точок x_i може бути лише одна межова точка $\overline{x_1}$ (в тому випадку, якщо вона є межовою). Якщо це так, то замінимо кулю $B(\overline{x_1}, l_0/4)$ на кулю $B(x^*, l_0^*/4)$, де $x^* \in D$ і l_0^* – деяке додатне число, яке можна вибрати так, що $l_0/4 < l_0^*/4 < l_0/2$. Таким чином, можна вважати, що в представленні $B_0 = \bigcup\limits_{i=1}^{N_0} B(x_i, l_0/4)$ всі точки x_i належать D.

Так як D локально зв'язна на своїй межі, знайдуться непересічні околи $U_1 \subset B_0$ і U_2 точок $\overline{x_1}$ і $\overline{x_2}$, відповідно, такі, що $W_i := D \cap U_i$ – лінійно зв'язні множини. Без обмеження загальності, ми можемо вважати, що $g_m(z_m) \in W_1$ і $g_m(z_m^{\prime}) \in W_2$ при всіх $m \in \mathbb{N}$. Нехай a_1 і a_2 – довільні точки, що належать $|\gamma_1| \cap W_1$ і $|\gamma_2| \cap W_2$, відповідно. Нехай t_1, t_2 такі, що $\gamma_1(t_1) = a_1$ і $\gamma_2(t_2) = a_2$. З'єднаємо a_1 і $g_m(z_m)$ кривою $\alpha_m : [t_1, 1] \to W_1$ такою, що $\alpha_m(t_1) = a_1$ і $\alpha_m(1) = g_m(z_m)$. Аналогічно, з'єднаємо a_2 і $g_m(z_m^{\prime})$ кривою $\beta_m : [t_2, 1] \to W_2$ такою, що $\beta_m(t_2) = a_2$ і $\beta_m(1) = g_m(z_m^{\prime})\,$.

Покладемо

$$C_m^1(t) = \left\{\begin{array}{rr} \gamma_1(t), & t \in [0, t_1], \\ \alpha_m(t), & t \in [t_1, 1] \end{array}\right., \qquad C_m^2(t) = \left\{\begin{array}{rr} \gamma_2(t), & t \in [0, t_2], \\ \beta_m(t), & t \in [t_2, 1] \end{array}\right. .$$

Позначимо, як зазвичай, $|C_m^1|$ і $|C_m^2|$ носії кривих C_m^1 і C_m^2, відповідно. Тоді

$$|C_m^1| \subset \bigcup\limits_{i=1}^{N_0} B(x_i, l_0/4)\,.$$

Нехай Γ_m – сім'я кривих, що з'єднують $|C_m^1|$ і $|C_m^2|$ в D. Тоді

$$\Gamma_m = \bigcup_{i=1}^{N_0} \Gamma_{mi}\,, \tag{4.32}$$

де Γ_{mi} визначимо як сім'ю, що складається із кривих $\gamma : [0,1] \to D$ таких, що $\gamma(0) \in B(x_i, l_0/4) \cap |C_m^1|$ і $\gamma(1) \in |C_2^m|$ при $1 \leqslant i \leqslant N_0$. На підставі [11, теорема 1.I.5.46] і за вибором l_0 можна показати, що при $1 \leqslant i \leqslant N_0$

$$\Gamma_{mi} > \Gamma(S(x_i, l_0/4), S(x_i, l_0/2), A(x_i, l_0/4, l_0/2) \cap D)\,. \tag{4.33}$$

Поклавши

$$\eta(t) = \begin{cases} 4/l_0, & t \in [l_0/4, l_0/2], \\ 0, & t \notin [l_0/4, l_0/2] \end{cases}$$

і $f_m := g_m^{-1}$, враховуючи (4.26), ми отримаємо, що

$$M_{\alpha'}(f_m(\Gamma(S(x_i, l_0/4), S(x_i, l_0/2), A(x_i, l_0/4, l_0/2) \cap D))) \leqslant$$
$$\leqslant (4/l_0)^{\alpha} \cdot \|Q\|_1 < c_i < \infty\,, \tag{4.34}$$

де c_i – деяка додатна стала, що не залежить від m, і $\|Q\|_1 = \int\limits_D Q(x)\, d\mu(x)$. На підставі (4.32), (4.33) і (4.34) і враховуючи напівадитивність модуля, робимо висновок, що

$$M_{\alpha'}(f_m(\Gamma_m)) \leqslant (4^{\alpha} N_0 / l_0^{\alpha}) \|Q\|_1 := c < \infty\,, \tag{4.35}$$

так як $Q \in L^1(D)$ за припущенням. З іншого боку, за умовами теореми знайдеться число $\delta > 0$ таке, що $h(f_m(A), \partial D') \geqslant \delta > 0$, $m = 1, 2, \ldots$. Звідси випливає існування номера $m_1 \in \mathbb{N}$, такого що

$$h(f_m(|C_m^1|)) \geqslant h(z_m, f_m(x_1)) \geqslant (1/2) \cdot h(f_m(A), \partial D') \geqslant \delta\,,$$
$$h(f_m(|C_m^2|)) \geqslant h(z'_m, f_m(x_2)) \geqslant (1/2) \cdot h(f_m(A), \partial D') \geqslant \delta \tag{4.36}$$

при всіх $m \geqslant m_1$. Крім того, $h(f_m(|C_m^1|), f_m(|C_m^2|)) \leqslant h(z_m, z'_m) \to 0$ за вибором z_m і z'_m. Тоді за властивістю слабкої плоскості D' на її межі ми маємо, що

$$M_{\alpha'}(f_m(\Gamma_m)) = M_{\alpha'}(\Gamma(f_m(|C_m^1|), f_m(|C_m^2|), D')) \to \infty$$

при $m \to \infty$. Останнє співвідношення суперечить (4.36), що вказує на хибність припущення в (4.31). Теорема доведена. $\square$

4.3 Аналог теореми Сохоцького–Вейєрштраса для просторів зі сферикалізацією

У недавній статті було доведене неперервне продовження відображень, що діють між метричними просторами, в ізольовану точку межі (див. [72]). Як наслідок, було встановлено, що образ довільного околу істотно особливої точки при відображенні є щільним у відповідному метричному просторі. Останнє твердження відоме як теорема Сохоцького-Касораті-Вейєрштраса, і було отримане для відображень, що спотворюють модуль сім'ї кривих типу нерівності Полецького. Зауважимо, що в статті [72] розглядається випадок коли відображений простір є регулярним за Альфорсом і задовольняє нерівність Пуанкаре. У цій статті, ми будемо розглядати дещо інший випадок, а саме, ми будемо припускати, що образ простору при відображенні є рівномірним. Зауважимо, що концепція рівномірних просторів бере свій початок у роботах Някі і Палка [63].

Для заданих $0 < r_1 < r_2 < \infty$, позначимо

$$A = A(x_0, r_1, r_2) = \{x \in X : r_1 < d(x, x_0) < r_2\}.$$

Означення 4.3.1. *Нехай $p \geqslant 1$ і $q \geqslant 1$, нехай G область в X, функція $Q : G \to [0, \infty]$ вимірна. Припустимо, що простір X' задовольняє слабку сферикалізацію.*

Подібно до [60, гл. 7], відображення $f : G \to \overline{X'}$ (або $f : G \setminus \{x_0\} \to \overline{X'}$) називається **кільцевим Q-відображенням в точці $x_0 \in G$ відносно (p, q)-модуля**, *якщо для деякого $r_0 = r_0(x_0) > 0$ і для всіх $0 < r_1 < r_2 < r_0$ нерівність*

$$M_p(f(\Gamma(S(x_0, r_1), S(x_0, r_2), A(x_0, r_1, r_2)))) \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{A(x_0,r_1,r_2)\cap G} Q(x)\cdot\eta^q(d(x,x_0))\,d\mu(x) \tag{4.37}$$

виконується для довільної вимірної функції $\eta : (r_1, r_2) \to [0,\infty]$ *за умови, що*

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)\,dr \geqslant 1\ . \tag{4.38}$$

Запропонована нижча термінологія, використана в статті [72], наведена нижче.

Означення 4.3.2. *Для заданих* $2 \leqslant \alpha < \infty$ *і* $1 \leqslant q \leqslant \alpha$, *простір* $X = (X, d, \mu)$ *називається* (α, q)**-допустимим джерелом**, *якщо* (X, d, μ) *локально компактний і локально лінійно зв'язний* α*-регулярний за Альфорсом зверху метричний простір, більше того, для кожної точки* $x_0 \in X$ *знайдеться* $\gamma > 0$ *таке, що*

$$\mu(B(x_0, 2r)) \leqslant \gamma\cdot\log^{\alpha-2}\frac{1}{r}\cdot\mu(B(x_0, r)) \tag{4.39}$$

для деякого $r_0 > 0$ *і для всіх* $r \in (0, r_0)$.

Стосовно співвідношення (4.39), див також [16, (10.7)].

Означення 4.3.3. *Для заданого* $p \geqslant 2$, *простір* $X' = (X', d', \mu')$ *називається* p**-допустимою ціллю**, *якщо* (X', d', μ') *задовольняє слабку сферикалізацію, крім того,* $\left(\overline{X'}, h\right)$ *локально зв'язний* p*-рівномірний метричний простір.*

Повне доведення тверджень 4.3.1 та 4.3.2 наведені в [77, леми 1 та 2] відповідно.

Лема 4.3.1. *Нехай* X *і* X' *– локально компактний метричний простір, нехай* X *є локально зв'язним, нехай* D *область в* X, *і нехай* $f : D \to X'$ *дискретне відкрите відображення. Якщо* $\beta : [a, b) \to X'$ *крива і* $x \in f^{-1}(\beta(a))$, *тоді існує максимальне* f*-підняття кривої* β *з початком в точці* x.

Повне доведення леми 1 можна знайти в [72, лема 2.1].

Як і в класичних випадках аналітичних функцій і квазіконформних відображень, результат теореми 4.3.2 можна отримати базуючись на більш загальній теоремі про можливість усунення ізольованих сингулярностей. Тому, ми доводимо наступне фундаментальне твердження, що має досить абстрактну форму. Далі, існування границі f в точці ζ_0 розуміється в сенсі простору $(\overline{X'}, h)$.

Лема 4.3.2. *Зафіксуємо* $2 \leqslant \alpha < \infty$, $2 \leqslant p < \infty$ *і* $1 \leqslant q \leqslant \alpha$. *Нехай* D *є областю в* X, *нехай* (X, d, μ) *є* (α, q)*-допустимим джерелом і нехай* (X', d', μ') *є* p*-допустимою ціллю. Зауважимо, що* $G := D \setminus \{\zeta_0\}$ *область в* X, *локально лінійно зв'язна в точці* $\zeta_0 \in D$.

Припустимо також, що існує $\varepsilon_0 > 0$ *і вимірна за Лебегом функція* $\psi \colon (0, \varepsilon_0) \to [0, \infty]$ *що задовольняє наступну властивість: для кожного* $\varepsilon_2 \in (0, \varepsilon_0]$ *знайдеться* $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_2]$ *таке, що співвідношення*

$$0 < I(\varepsilon, \varepsilon_2) := \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_2} \psi(t)\, dt < \infty \tag{4.40}$$

виконується для кожного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$. *Зауважимо також, що співвідношення*

$$\int\limits_{\varepsilon < d(x, \zeta_0) < \varepsilon_0} Q(x) \cdot \psi^q(d(x, \zeta_0))\; d\mu(x) \;=\; o\left(I^q(\varepsilon, \varepsilon_0)\right) \tag{4.41}$$

виконується при $\varepsilon \to 0$.

Нехай K *деякий невироджений континуум в* $\overline{X'}$, *і нехай* $f \colon D \setminus \{\zeta_0\} \to X' \setminus K$ *відкрите дискретне кільцеве* Q*-відображення в точці* ζ_0 *відносно* (p, q)*-модуля. Тоді,* f *має неперервне продовження в точку* ζ_0.

Доведення. Оскільки X є локально компактним, ми можемо вважати, що $\overline{B(\zeta_0, \varepsilon_0)}$ компактна множина в D. Припустимо протилежне, тобто що f не має границі в точці ζ_0. Оскільки $(\overline{X'}, h)$ компакт, множина

$$C(f, \zeta_0) := \{y \in \overline{X'} : \exists\, \zeta_k \in D \setminus \{\zeta_0\} : \zeta_k \stackrel{d}{\to} \zeta_0, f(\zeta_k) \stackrel{h}{\to} y, k \to \infty\}$$

не порожня. Таким чином, існують дві послідовності x_j і x_j' в $B(\zeta_0,\varepsilon_0)\setminus\{\zeta_0\}$, $d(x_j,\zeta_0)\to 0$, $\quad d(x_j',\zeta_0)\to 0$ такі, що

$$h\left(f(x_j),\, f(x_j')\right)\geqslant a>0$$

для всіх $j\in\mathbb{N}$. Оскільки G є локально лінійно зв'язною в точці ζ_0, існує послідовність $r_k\to 0$, $0<r_k<\varepsilon_0$, $r_1>r_2>r_3>\ldots$, така, що $B(\zeta_0,r_k)\subset V_k\subset B(\zeta_0,r_{k-1})$ і $V_k\cap G=V_k\setminus\{\zeta_0\}$ є лінійно зв'язною. Оскільки $d(x_j,\zeta_0)\to 0$ і $d(x_j',\zeta_0)\to 0$ коли $j\to\infty$, знайдеться номер $j_1\in\mathbb{N}$ такий. що x_{j_1} і $x_{j_1}'\in B(\zeta_0,r_2)$. Нехай C_{j_1} крива, що з'єднує x_{j_1} і x_{j_1}' в $V_2\setminus\{\zeta_0\}\subset B(\zeta_0,r_1)\setminus\{\zeta_0\}$. Аналогічно, знайдеться номер $j_2\in\mathbb{N}$ такий, що x_{j_2} і $x_{j_2}'\in B(\zeta_0,r_3)$. Нехай C_{j_2} крива, що з'єднує x_{j_2} і x_{j_2}' в $V_3\setminus\{\zeta_0\}\subset B(\zeta_0,r_2)\setminus\{\zeta_0\}$. Продовжуючи цей процес, ми отримаємо деякий номер $j_k\in\mathbb{N}$ такий, що x_{j_k} і $x_{j_k}'\in B(\zeta_0,r_{k+1})$. З'єднаємо x_{j_k} і x_{j_k}' кривою C_{j_k}, яка повністю лежить в $V_{k+1}\setminus\{\zeta_0\}\subset B(\zeta_0,r_k)\setminus\{\zeta_0\}$. Без обмеження загальності можна сказати x_j і x_j' можна з'єднати кривими C_j в $B(\zeta_0,r_j)\setminus\{\zeta_0\}$.

Нехай $E_j=(B(\zeta_0,\varepsilon_0)\setminus\{\zeta_0\},C_j)$, і нехай $\Gamma_{f(E_j)}$ сім'я кривих, що відповідає конденсатору $f(E_j)$ в сенсі зауваження, зробленого перед формулюванням леми. За властивістю мінорування модуля і за p-рівномірністю $\overline{X'}$

$$M_p(\Gamma_{f(E_j)})\geqslant M_p(\Gamma(f(C_j),K,X'\setminus K))\geqslant M_p(\Gamma(f(C_j),K,X'))\geqslant\delta>0\,, \tag{4.42}$$

де $\delta>0$ деяка додатна стала, що залежить від $\min\{a,h(K)\}$, див [45, теорема 1(c)]. Тепер, за рівномірністю простору $\overline{X'}$ і останнє співвідношення слідує із того, що сім'я кривих $\Gamma_{f(E_j)}$ не порожня. Нехай Γ_j^* сім'я всіх максимальних f-підняттів $\Gamma_{f(E_j)}$ в $B(\zeta_0,\varepsilon_0)\setminus\{\zeta_0\}$ з початком в C_j. Ця сім'я кривих гарно визначена за лемою 4.3.1.

Нехай $\Gamma_{E_j}^1$ сім'я всіх кривих $\alpha\colon[a,\,c)\to B(\zeta_0,\varepsilon_0)\setminus\{\zeta_0\}$ з початком в C_j, для яких $\alpha(t_k)\to\zeta_0$ для деякої послідовності $t_k\to c-0$, $t_k\in[a,\,c)$, коли $k\to\infty$. Аналогічно, нехай $\Gamma_{E_j}^2$ сім'я всіх кривих $\alpha\colon[a,\,c)\to$

$B(\zeta_0, \varepsilon_0) \setminus \{\zeta_0\}$ з початком в C_j, для яких $d\left(\alpha(t_k), S(\zeta_0, \varepsilon_0)\right) \to 0$ для деякої послідовності $t_k \in [a,\, c)$ such that $t_k \to c - 0$ as $k \to \infty$. За [72, лема 4.2]

$$\Gamma_j^* \subset \Gamma_{E_j}^1 \cup \Gamma_{E_j}^2\,. \tag{4.43}$$

Зауважимо, що $f(\Gamma_j^*) < \Gamma_{f(E_j)}$ і $f(\Gamma_j^*) \subset f(\Gamma_{E_j}^1) \cup f(\Gamma_{E_j}^2)$. Тепер, за (1.2) і (4.43), ми отримаємо, що

$$M_p\left(\Gamma_{f(E_j)}\right) \leqslant M_p(f(\Gamma_{E_j}^1)) \,+\, M_p(f(\Gamma_{E_j}^2))\,. \tag{4.44}$$

За [72, лема 4.1] $M_p(f(\Gamma_{E_j}^1)) = 0$.

Зауважимо, що довільна крива $\gamma \in \Gamma_{E_j}^2$ не міститься повністю ні в $B(\zeta_0, \varepsilon_0 - \frac{1}{m})$ ні в $X \setminus B(\zeta_0, \varepsilon_0 - \frac{1}{m})$ для досить великих m. Таким чином, існує $y_1 \in |\gamma| \cap S(\zeta_0, \varepsilon_0 - \frac{1}{m})$ (див. [11, теорема 1, § 46, пункт I]). Нехай $\gamma : [0, 1] \to X$ і нехай $t_1 \in (0, 1)$ такі, що $\gamma(t_1) = y_1$. Без обмеження загальності ми можемо вважати, що $|\gamma|_{[0,t_1)}| \subset B(\zeta_0, \varepsilon_0 - 1/m)$. Покладемо $\gamma_1 := \gamma|_{[0,t_1)}$. Зауважимо, що $|\gamma_1| \subset B(\zeta_0, \varepsilon_0 - 1/m)$, більше того, γ_1 не належить повністю $\overline{B(\zeta_0, r_j)}$ або $X \setminus \overline{B(\zeta_0, r_j)}$. Отже, існує $t_2 \in (0, t_1)$ з $\gamma_1(t_2) \in S(\zeta_0, r_j)$ (див. [11, теорема 1, § 46, пункт I]). Без обмеження загальності, ми можемо вважати, що $|\gamma|_{[t_2,t_1]}| \subset X \setminus \overline{B(\zeta_0, r_j)}$. Покладемо $\gamma_2 = \gamma_1|_{[t_2,t_1]}$. Зауважимо, що γ_2 є підкривої γ. За сказаним вище, $\Gamma_{E_j}^2 > \Gamma(S(\zeta_0, r_j), S(\zeta_0, \varepsilon_0 - \frac{1}{m}), A(\zeta_0, r_j, \varepsilon_0 - \frac{1}{m}))$ для достатньо великих $m \in \mathbb{N}$. Множина $A_j = \{x \in X : r_j < d(x, \zeta_0) < \varepsilon_0 - \frac{1}{m}\}$ і

$$\eta_j(t) = \begin{cases} \psi(t)/I(r_j, \varepsilon_0 - \frac{1}{m}), & t \in (r_j,\, \varepsilon_0 - \frac{1}{m}), \\ 0, & t \in \mathbb{R} \setminus (r_j,\, \varepsilon_0 - \frac{1}{m}). \end{cases}$$

Тут $I(a, b)$ визначене в (4.40). Зауважимо, що

$$\int\limits_{r_j}^{\varepsilon_0 - \frac{1}{m}} \eta_j(t)\, dt = \frac{1}{I\left(r_j, \varepsilon_0 - \frac{1}{m}\right)} \int\limits_{r_j}^{\varepsilon_0 - \frac{1}{m}} \psi(t)\, dt = 1\,.$$

За означенням Q-відображення в точці ζ_0 відносно (p, q)-модуля і тоді за (4.44), ми зауважимо, що

$$M_p(f(\Gamma_{E_j})) \leqslant \frac{1}{I^q(r_j, \varepsilon_0 - \frac{1}{m})} \int\limits_{r_j<d(x,\zeta_0)<\varepsilon_0} Q(x)\, \psi^{\,q}(d(x,\zeta_0))\, d\mu(x)\,.$$

Переходячи до границі $m \to \infty$, отримаємо, що

$$M_p(f(\Gamma_{E_j})) \leqslant \mathcal{S}(r_j) := \frac{1}{I^q(r_j, \varepsilon_0)} \int\limits_{r_j<d(x,\zeta_0)<\varepsilon_0} Q(x)\, \psi^{\,q}(d(x,\zeta_0))\, d\mu(x).$$

Формула (4.41) показує, що $\mathcal{S}(r_j) \to 0$ при $j \to \infty$ і, отже, з (4.44) випливає, що

$$M_p\left(\Gamma_{f(E_j)}\right) \to 0\,, \qquad j \to \infty\,. \tag{4.45}$$

З іншого боку, (4.45) суперечить (4.42). Таким чином, f не має границі в точці $\zeta_0,$. □

Наступне твердження можна знайти наприклад в [60, лема 13.2].

Пропозиція 4.3.1. *Нехай G область α-регулярного зверху метричного простору (X,d,μ) при $\alpha \geqslant 2$. Припустимо, що $x_0 \in \overline{G}$ і $Q : G \to [0,\infty] \in FMO(x_0)$. Якщо*

$$\mu(G \cap B(x_0, 2r)) \leqslant \gamma \cdot \log^{\alpha-2}\frac{1}{r} \cdot \mu(G \cap B(x_0, r))$$

для деякого $r_0 > 0$ і кожного $r \in (0, r_0)$, тоді

$$\int\limits_{\varepsilon<d(x,x_0)<\varepsilon_0} Q(x) \cdot \psi^{\,\alpha}(d(x,x_0))\, d\mu(x) = o(I^{\alpha}(\varepsilon,\varepsilon_0))\,, \qquad \varepsilon \to 0\,,$$

$I(\varepsilon,\varepsilon_0) := \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)\, dt$ *і* $\psi(t) := \frac{1}{t\log\frac{1}{t}}$.

Наступне твердження доводиться в [77, теорема 2]

Теорема 4.3.1. *Зафіксуємо $2 \leqslant \alpha < \infty$, $2 \leqslant p < \infty$ і $1 \leqslant q \leqslant \alpha$. Нехай D область в X, нехай (X,d,μ) є (α,q)-допустимим джерелом і нехай (X',d',μ') є p-допустимою ціллю. Припустимо, що $G := D\backslash\{\zeta_0\}$ область в X, локально зв'язна в точці $\zeta_0 \in D$.*

Нехай K деякий невироджений континуум в $\overline{X'}$ і нехай $f\colon D\setminus\{\zeta_0\}\to X'\setminus K$ відкрите дискретне кільцеве Q-відображення в точці ζ_0 відносно (p,q)-модуля. Якщо $Q\in FMO(\zeta_0)$, тоді f має неперервне продовження в точку ζ_0.

Доведення. Покажемо, що співвідношення $Q\in FMO(\zeta_0)$ тягне за собою умови (4.40)–(4.41) в ζ_0. Справді, покладемо $\psi(t)=\log^{-\alpha/q}\frac{1}{t}$, співвідношення (4.40)–(4.41) ми отримаємо із пропозиції 4.3.1. Бажаний висновок тепер отримаємо з леми 4.3.2. $\square$

Доведення наступної теореми наводиться в [77, теорема 1].

Теорема 4.3.2. *Зафіксуємо $2\leqslant\alpha<\infty$, $2\leqslant p<\infty$ і $1\leqslant q\leqslant\alpha$. Нехай D область в X, нехай (X,d,μ) є (α,q)-допустимим джерелом і нехай (X',d',μ') є p-допустимою ціллю. Припустимо, що $G:=D\setminus\{\zeta_0\}$ область в X, локально зв'язна в точці $\zeta_0\in D$, $Q\in FMO(\zeta_0)$ і кулі $B_h(A,r)=\{y\in\overline{X'}:h(y,A)<r\}$ не вироджуються в точки для кожного $A\in\overline{X'}$ і будь-якого $r>0$. Якщо $f\colon D\setminus\{\zeta_0\}\to X'$ відкрите дискретне кільцеве Q-відображення відносно (p,q)-модуля в точці ζ_0, і ζ_0 є істотною особливістю f, тоді $f(U\setminus\{\zeta_0\})$ є щільною в X' для довільного околу U точки ζ_0.*

Доведення. З того, що ζ_0 є істотно особливою точкою відображення f, куля $B(\zeta_0,r)$ містить скінченну кількість точок для кожного $r>0$. Здійснимо доведення від супротивного. Припустимо, що існує окіл U точки ζ_0 і $A\in\overline{X'}$ така, що
$$h(f(x),A)\geqslant\delta_0 \tag{4.46}$$
для кожного $x\in U\setminus\{\zeta_0\}$. Оскільки $D\setminus\{\zeta_0\}$ локально лінійно зв'язна в точці ζ_0, існує окіл $V\subset U$ точки ζ_0 такий, що $V\setminus\{\zeta_0\}$ є лінійно зв'язним.

Ми можемо вважати, що V відкрита. У іншому випадку, нехай D_* зв'язна компонента $\operatorname{Int}(U)\setminus\{\zeta_0\}$, що містить $V\setminus\{\zeta_0\}$. Оскільки X

є локально лінійно зв'язним, тоді $\mathrm{Int}\,(U)\setminus\{\zeta_0\}$ відкрите, D_* відкрита; див. [11, теорема 4.II.49.6]. Нехай $\bigcup\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} D_\alpha$ об'єднання всіх компонент $\mathrm{Int}\,(U)\setminus\{\zeta_0\}$ окрім D_*, де $\mathfrak{A}$ деякий набір індексів α. Зауважимо, що $\zeta_0\in\overline{D_*}$, оскільки $B(\zeta_0, r)$ містить скінченну кількість точок для кожного $r>0$. Тепер, $\zeta_0\not\in\overline{D_\alpha}$ для $\alpha\in\mathfrak{A}$. Оскільки D_α компоненти $\mathrm{Int}\,(U)\setminus\zeta_0$ і $\zeta_0\not\in\overline{D_\alpha}$, D_α are closed in $\mathrm{Int}\,(U)$. Тепер, $V_*:=\mathrm{Int}\,(U)\setminus\bigcup\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} D_\alpha$ є відкритим околом ζ_0, де $V_*\setminus\{\zeta_0\}=D_*$ зв'язна. Більше того, оскільки D_* відкрита, а X є локально лінійно зв'язним, D_* є лінійно зв'язною, див. наприклад [60, пропозиція 13.1]. таким чином, ми можемо вважати, що V є відкритою підмножиною U, V є околом точки ζ_0 і $V\setminus\{\zeta_0\}$ є зв'язною.

За (4.46), $f(x)\in X^{\,\prime}\setminus B_h(A,\delta_0)$ для $x\in V\setminus\{\zeta_0\}$, де

$$B_h(A,\delta_0)=\{y\in\overline{X^{\,\prime}}: h(y,A)<\delta_0\}\,.$$

Оскільки $\overline{X^{\,\prime}}$ є локально зв'язним і компактним простором і, також, будь-які кулі $B_h(A,r)=\{y\in\overline{X^{\,\prime}}: h(y,A)<r\}$ не вироджуються в точки, знайдеться невироджений континуум K такий, що $K\subset B_h(A,\delta_0)$. Із (4.46) випливає, що f не набуває значень в K. За теоремою 4.3.1, f має істотну особливість при $x\to\zeta_0$, що суперечить припущенню теореми. $\Box$

У теоремі 4.3.2, «щільність» і «істотна особливість» розуміється в термінах простору $(\overline{X^{\,\prime}},h)$.

4.4 Межова поведінка відображень з нерівністю Полецького у метричних просторах в термінах простих кінців

Зауважимо, що межове продовження відображень в термінах простих кінців вивчалось нещодавно деякими іншими авторами, див., напр. [38], [37], [5] і [10].

Означення 4.4.1. *Будемо говорити, що область* G *в* X *(або* $\overline{X}$*) є* **сильно досяжною в точці** $x_0\in\partial G$ **відносно** p**-модуля***, якщо, для* *будь-якого околу U точки x_0, знайдеться компактна множина $E \subset G$, окіл $V \subset U$ точки x_0 і число $\delta > 0$ такі, що*

$$M_p(\Gamma(E, F, G)) \geqslant \delta$$

для будь-кого континуума $F \subset G$, що перетинає ∂U і ∂V. Будемо говорити, що межа ∂G є сильно досяжною відносно p-модуля, якщо відповідна властивість виконується в кожній точці межі.

Відтепер ми припускаємо, що простір X є повним і задовольняє нерівності p-Пуанкаре, і що міра μ дублюється (див. [37]). У цьому випадку, простір X є локально зв'язним (див. [37, розділ 2]), і власним (див. [41, пропозиція 3.1]). Якщо X є також зв'язним тоді знайдуться сталі $C > 0$ і $q > 0$ такі, що для всіх $x \in X$, $0 < r \leqslant R$ і $y \in B(x, R)$,

$$\frac{\mu(B(y,r))}{\mu(B(x,R))} \leqslant C \left(\frac{r}{R}\right)^q , \tag{4.47}$$

див. [37, (2.2)].

Наступне твердження було доведене в [5, лема 5.1] для гомеоморфізмів в $\mathbb{R}^2$. Доведення випадку метричних просторів можна знайти в [77, лема 1].

Лема 4.4.1. *Припустимо, що умови теореми 4.4.1 виконуються. Більше того, припустимо, що для кожного $x_0 \in \partial D$ умови (4.55)–(4.56) виконуються. Тоді f має неперервне продовження $f : \overline{D}_P \to \overline{D'}$, $f(\overline{D}_P) = \overline{D'}$.*

Доведення. За [37, наслідок 10.9], $\overline{D}_P$ метризовний. Тепер, за метризовністю $\overline{D}_P$, досить показати, що

$$L = C(f, P) := \left\{ y \in \overline{X'} : y = \lim_{k \to \infty} f(x_k), x_k \to P, x_k \in D \right\}$$

складається з єдиної точки $y_0 \in \partial D'$. Оскільки X' простір, що задовольняє слабку сферикалізацію, $L \neq \varnothing$. Ву [70, пропозиція 2.1], $L \subset \partial D'$.

Припустимо протилежне, що f не має неперервного продовження в P. Тепер, можна знайти щонайменше дві точки y_0 і $z_0 \in L$. Позначимо $U = B(y_0, r_0)$, де $0 < r_0 < d(y_0, z_0)$. Ми можемо знайти послідовності y_k і z_k в $f(E_k)$, $k = 1, 2, \ldots$, $P = [E_k]$, такі, що $d(y_0, y_k) < r_0$ і $d(y_0, z_k) > r_0$ і, крім того, $y_k \to y_0$ і $z_k \to z_0$ коли $k \to \infty$. За зауваженням 4.5 in [37] ми можемо вважати, що множини E_k відкриті. Більше того, за зауваженням 2.6 в [37] множина E_k є зв'язною для кожного $k \in \mathbb{N}$.

Позначимо $x_0 := I([E_k])$ (див. [37, теорема 10.8]). Покажемо, що для кожного $r > 0$ існує $k \in \mathbb{N}$ такий, що

$$E_k \subset B(x_0, r) \cap D\,. \tag{4.48}$$

Припустимо протилежне, тобто що існує $r > 0$ з наступною умовою: для кожного $k \in \mathbb{N}$ знайдеться $x_k \in E_k \setminus B(x_0, r)$. Оскільки μ дублюється, X повний тоді і тільки тоді, коли він є власним (тобто кожна замкнена обмежена множина є компактом), див. [41, пропозиція 3.1]. Оскільки D обмежена, $\overline{D}$ компакт. Знайдемо послідовності $x_{k_l} \in D$ при $x_{k_l} \to \overline{x_0}$ коли $l \to \infty$ для деякого $\overline{x_0} \in \overline{D}$. Для заданого $i \in \mathbb{N}$, існує $l_0 \in \mathbb{N}$ таке, що $k_l > i$ для кожного $l \geqslant l_0$. Таким чином, $x_{k_l} \in E_{k_l} \subset E_i$ для кожного $l \geqslant l_0$ і таким чином, $\overline{x_0} \in \overline{E_i}$. Оскільки i довільне, маємо, що $\overline{x_0} \in \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \overline{E_i} = \{x_0\}$. Так, $x_0 = \overline{x_0}$. Залишилось показати, що $x_k \to x_0$ коли $k \to \infty$. Припустимо протилежне, тоді знайдеться підпослідовність $x_{m_l} \in D$ при $x_{m_l} \to \zeta_0$ коли $l \to \infty$. Міркуючи як вище, отримаємо, що $\zeta_0 = x_0$, що спростовує протиріччя, зроблене вище. Тепер $x_k \to x_0$ коли $k \to \infty$ і тому, $x_k \in B(x_0, r)$. Включення (4.48) доведене.

Оскільки $y_k, z_k \in f(E_k)$, можна знайти щонайменше дві послідовності $x_k, x_k' \in E_k$ такі, що $f(x_k) = y_k$ і $f(x_k') = z_k$. За (4.48) $x_k \to x_0$ і $x_k' \to x_0$ коли $k \to \infty$. Згідно з означенням сильної досяжності межі в точці $y_0 \in \partial D'$ відносно p-модуля, для будь-якого околу U цієї точки можна знайти компактну множину $C_0' \subset D'$, окіл V точки y_0 і число

$\delta > 0$ таке, що

$$M_p(\Gamma(C_0', F, D')) \geqslant \delta > 0 \qquad (4.49)$$

для довільного континуума F що перетинає ∂U і ∂V. За [70, пропозиція 2.1] $C_0 := f^{-1}(C_0')$ компактна підмножина D. Отже, $\delta_0 = \mathrm{dist}(x_0, C_0) > 0$. Тоді, без обмеження загальності, ми можемо вважати, що $C_0 \cap \overline{B(x_0, \varepsilon_0)} = \varnothing$. Оскільки E_k є зв'язною, точки x_k і x_k' можна з'єднати кривою γ_k, що лежить в E_k.

Як зазвичай, для заданої кривої $\gamma : [a,b] \to X$, або $\gamma : [a,b] \to X'$, покладемо

$$|\gamma| := \{x \in X : \exists\, t \in [a,b] : \gamma(t) = x\}\,.$$

Оскільки $f(x_k) = y_k \in V$ і $f(x_k') = z_k \in D' \setminus U$ для досить великих $k \in \mathbb{N}$, можна знайти номер $k_0 \in \mathbb{N}$ такий, що, завдяки (4.49),

$$M_p(\Gamma(C_0', |f(\gamma_k)|, D')) \geqslant \delta > 0 \qquad (4.50)$$

для всіх $k \geqslant k_0$. Нехай Γ_k позначимо сім'я всіх напіввідкритих кривих $\beta_k : [a,b) \to D'$ таких, що $\beta(a) \in |f(\gamma_k)|$, $\beta_k(t) \in D'$ для всіх $t \in [a,b)$, і

$$\lim_{t \to b-0} \beta_k(t) := B_k \in C_0'\,.$$

Очевидно, що

$$M_p(\Gamma_k) = M_p\left(\Gamma\left(C_0', |f(\gamma_k)|, D'\right)\right)\,. \qquad (4.51)$$

Оскільки X повний простір, що задовольняє p-Пуанкаре нерівність, тоді X є власним і локально зв'язним (див. [37, розділ 2], [41, пропозиція 3.1]). Тепер, за [72, лема 2.1], кожна крива $\beta_k \in \Gamma_k$ має максимальне підняття α_* в D з початком в $|\gamma_k|$. Нехай Γ_k' – сім'я всіх максимальних піднять $\alpha_k : [a,c) \to D$ кривих сім'ї Γ_k з початком в $|\gamma_k|$. Зауважимо, що немає кривої $\alpha_k \in \Gamma_k'$, $\alpha_k : [a,c) \to D$, не може прямувати до межі D коли $t \to c-0$, оскільки $C(f, \partial D) \subset \partial D'$. Then $C(\alpha_k, c) \subset D$.

Тепер, припустимо, що крива α_k не має границі при $t \to c-0$. Розглянемо

$$G = \left\{x \in X : x = \lim_{k \to \infty} \alpha(t_k)\right\}\,, \quad t_k \in [a,\, c)\,, \quad \lim_{k \to \infty} t_k = c\,.$$

Переходячи до підпослідовності, якщо це необхідно, ми можемо обмежитись монотонними послідовностями t_k. Для $x \in G$, за неперервністю f, $f(\alpha(t_k)) \to f(x)$ коли $k \to \infty$, де $t_k \in [a, c)$, $t_k \to c$ коли $k \to \infty$. Однак, $f(\alpha(t_k)) = \beta(t_k) \to \beta(c)$ коли $k \to \infty$. Таким чином, f є сталою на G. З іншого боку, $\overline{\alpha}$ компактна множина, тому що $\overline{\alpha}$ є замкненою підмножиною компактного простору $\overline{D}$ (див. [11, теорема 2.II.4, § 41]). Тепер, за умовою Кантора на компакті $\overline{\alpha}$, за монотонністю $\alpha([t_k, c))$,

$$G = \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{\alpha([t_k, c))} \neq \varnothing\,,$$

див. [11, 1.II.4, § 41]. За [11, теорема 5.II.5, § 47], G є зв'язною. За дискретністю f, G є одноточковою множиною, $\alpha\colon [a, c) \to D$ продовжується до замкненої множини $\alpha\colon [a, c] \to D$, і $f(\alpha(c)) = \beta(c)$.

Тому, існує $\lim\limits_{t\to c-0} \alpha_k(t) = A_k \in D$. Зауважимо, що у цьому випадку, за означенням максимального підняття, маємо $c = b$. Тоді, з одного боку, $\lim\limits_{t\to b-0} \alpha_k(t) := A_k$, і, з іншого боку, в силу неперервності відображення f в D,

$$f(A_k) = \lim_{t\to b-0} f(\alpha_k(t)) = \lim_{t\to b-0} \beta_k(t) = B_k \in C_0'\,.$$

Відповідно до означення C_0, випливає, що A_k належить C_0. Ми вклали компактну множину C_0 у певний континуум C_1 що лежить повністю в області D (див. лема 1 в [35]). Зменшуючи значення $\varepsilon_0 > 0$, ми можемо знову припустити, що $C_1 \cap \overline{B(x_0, \varepsilon_0)} = \varnothing$. Тепер, ми маємо, що $\Gamma_k' \subset \Gamma(|\gamma_k|, C_1, D)$. Переходячи до підпослідовностей, якщо необхідно, ми можемо вважати, що x_k і $x_k' \in B(x_0, 2^{-k})$. Зауважимо, що функція

$$\eta(t) = \begin{cases} \psi(t)/I(2^{-k}, \varepsilon_0), & t \in (2^{-k}, \varepsilon_0), \\ 0, & t \in \mathbb{R} \setminus (2^{-k}, \varepsilon_0)\,, \end{cases}$$

де $I(\varepsilon) := \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)\, dt$, задовольняє умову нормування у вигляді (4.55). За умовами (4.55) і (4.56), ми отримаємо

$$M_p(f(\Gamma_k')) \leqslant M_p(f(\Gamma(|\gamma_k|, C_1, D))) \leqslant \Delta(k)\,, \tag{4.52}$$

де $\Delta(k) \to 0$ коли $k \to \infty$. Однак, $\Gamma_k = f(\Gamma'_k)$. Тому, використовуючи (4.52), робимо висновок, що

$$M_p(\Gamma_k) = M_p\left(f(\Gamma'_k)\right) \leqslant \Delta(k) \to 0 \qquad \text{as} \qquad k \to \infty\,. \tag{4.53}$$

Співвідношення (4.53), разом з нерівнсітю (4.51), суперечить нерівності (4.50), що доводить можливість неперервного продовження $f : \overline{D}_P \to \overline{D'}$.

Залишилося показати, що $f(\overline{D}_P) = \overline{D'}$. Зрозуміло, що $f(\overline{D}_P) \subset \overline{D'}$. Тепер покажемо зворотне включення. Нехай $\zeta_0 \in \overline{D'}$. Якщо $\zeta_0 \in D'$, тоді існують $\xi_0 \in D$ такі, що $f(\xi_0) = \zeta_0$ і, отже, $\zeta_0 \in f(D)$. Припустимо, що $\zeta_0 \in \partial D'$. Тоді знайдуться $\zeta_m \in D'$, $\zeta_m = f(\xi_m)$, $\xi_m \in D$, такі, що $\zeta_m \to \zeta_0$ коли $m \to \infty$. За [37, теорема 10.10], $\overline{D}_P$ є компактним метричним простором. Тепер, ми можемо вважати, що $\xi_m \to P_0$ коли $m \to \infty$, де P_0 деякий простий кінець в $\overline{D}_P$. Тепер $\zeta_0 \in f(\overline{D}_P)$. Включення $\overline{D'} \subset f(\overline{D}_P)$ доведене. Отже, $f(\overline{D}_P) = \overline{D'}$. Лема доведена. $\Box$

Виконується наступне твердження (див. [35, лема 2]).

Пропозиція 4.4.1. *Нехай G є областю в q-регулярному зверху за Альфорсом метричному просторі (X, d, μ), $1 \leqslant q < \infty$. Зауважимо, що $x_0 \in \overline{G}$ і $Q : G \to [0, \infty]$ належить класу $FMO(x_0)$. Якщо*

$$\mu(G \cap B(x_0, 2r)) \leqslant \gamma \cdot \log^{q-2}\frac{1}{r} \cdot \mu(G \cap B(x_0, r)) \tag{4.54}$$

для деякого $r_0 > 0$ і кожного $r \in (0, r_0)$, тоді Q задовольняє (4.56) в точці x_0 з $\psi(t) := \frac{1}{t \log \frac{1}{t}}$.

Доведення теореми 4.4.1 можна знайти в [77, теорема 1].

Теорема 4.4.1. *Нехай (X, d, μ) і (X', d', μ') метричні простори, і нехай X' задовольняє слабку сферикалізацію. Нехай D обмежена область в X яка є скінченно зв'язною на межі, нехай D' область в $\overline{X'}$, і нехай $1 \leqslant p < \infty$, $1 \leqslant q < \infty$ фіксовані числа. Припустимо, що X повний метричний простір, що задовольняє нерівність q-Пуанкаре, і міра μ дублюється.*

Нехай $Q : X \to (0,\infty)$ є локально інтегровною функцією. Припустимо, що $f : D \to D'$, $D' = f(D)$, – дискретне, замкнене і відкрите кільцеве Q-відображення відносно (p,q)-модулів в ∂D. Більше того, припустимо, що $\partial D'$ є сильно досяжною відносно p-модуля.

Тоді f має неперервне продовження $f : \overline{D}_P \to \overline{D'}$, $f(\overline{D}_P) = \overline{D'}$, якщо $Q \in FMO(\partial D)$.

Доведення. Доведення теореми випливає з леми 4.4.1 і пропозиції 4.4.1. Справді, X є регулярним зверху за (4.47), і (4.54) виконується, оскільки міра μ дублюється за припущенням. Отже, бажане твердження випливає з леми 4.4.1. □

Неперервність відображення $f : \overline{D}_P \to \overline{D'}$ розуміється в сенсі продовженого простору $(\overline{X'}, h)$, тобто, якщо послідовність x_k, $k = 1, 2, \ldots$, збігається до простого кінця P_0 коли $k \to \infty$ в метричному просторі $\overline{D}_P$, тоді $f(x_k)$ збігається до деякого значення $y_0 \in \overline{X'}$ у метриці h.

Зауваження 4.4.1. Справді, умову типу FMO представлену в теоремі 4.4.1 можна замінити наступним більш загальним і більш фундаментальним припущенням, що буде використовуватися пізніше, в доведенні головних результатів. У заданій точці $x_0 \in \overline{D}$, припустимо, що існує вимірна за Лебегом функція $\psi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ така, що

$$I(\varepsilon, \varepsilon_0) := \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)\, dt < \infty \tag{4.55}$$

для кожного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ і $I(\varepsilon, \varepsilon_0) \to \infty$ коли $\varepsilon \to 0$, і

$$\int\limits_{\varepsilon < d(x,x_0) < \varepsilon_0} Q(x) \cdot \psi^q(d(x,x_0))\, d\mu(x) \;=\; o\left(I^q(\varepsilon, \varepsilon_0)\right), \quad \varepsilon \to 0. \tag{4.56}$$

Означення 4.4.2. *Для заданого $p \geqslant 1$, область $D \subset \overline{X'}$ називається* **p-рівномірною областю** *якщо для кожного $r > 0$, знайдеться $\delta > 0$*

таке, що $M_p(\Gamma(F,F^*,D))\geqslant\delta$ *як тільки* F *і* F^* *континууми в* D *з* $h(F)\geqslant r$ *і* $h(F^*)\geqslant r$. *(Тут* $h(A):=\sup\limits_{x,y\in A}h(x,y)$*). Області* $D_i,\ i\in I$, *називаються* p-**рівномірними** *областями, якщо для* $r>0$, *модульна умова, записана вище задовольняє кожна* D_i *з тим же числом* δ.

Нехай X' задовольняє слабку сферикалізацію. Для заданого $\delta>0$, $D\subset X$ і вимірної функції $Q:D\to[0,\infty]$, позначимо $\mathfrak{R}_{Q,\delta,p,q}(D)$ сім'ю всіх кільцевих Q-гомеоморфізмів $f\,:\,D\to\overline{X'}\setminus K_f$ відносно (p,q)-модулів в D, таку, що $f(D)$ деяка відкрита множина в $\overline{X'}$ і $h(K_f)=\sup\limits_{x,y\in K_f}h(x,y)\geqslant\delta$, де $K_f\subset\overline{X'}$ і континуум. Виконується наступне твердження, доведене в [77, лема 2].

Лема 4.4.2. *Нехай* (X,d,μ) *і* (X',d',μ') *метричні простори, нехай* D *область в* X, *і нехай* $1\leqslant p<\infty$, $1\leqslant q<\infty$ *фіксовані числа.*

Для заданої $x_0\in D$, *зауважимо, що умови (4.55)–(4.56) виконуються. Якщо* X *є локально лінійно зв'язним і локально компактним простором,* X' *задовольняє слабку сферикалізацію і* $\overline{X'}$ *є рівномірною областю, тоді* $\mathfrak{R}_{Q,\delta,p,q}(D)$ *є одностайно неперервною в точці* x_0. *(Як було сказане вище, одностайна неперервність розуміється тут в сенсі розширеного метричного простору* $(\overline{X'},h)$ *).*

Доведення. Ідея доведення тісно пов'язана з [23, лема 2]. Припустимо протилежне, тобто припустимо, що $\mathfrak{R}_{Q,\delta,p,q}(D)$ є одностайно неперервною в точці x_0. Тепер, знайдуться $x_k\in D$ і $f_k\in\mathfrak{R}_{Q,\delta,p,q}(D)$ такі, що $x_k\to x_0$ коли $k\to\infty$ і

$$h(f_k(x_k),f_k(x_0))\geqslant a_0\,,\quad k=1,2,\ldots\,, \tag{4.57}$$

для деякого a_0. Оскільки X є локально зв'язною за припущенням, знайдеться послідовність куль $B(x_0,\varepsilon_k)$, $k=0,1,2,\ldots$, $\varepsilon_k\to0$ коли $k\to\infty$, така, що $V_{k+1}\subset\overline{B(x_0,\varepsilon_k)}\subset V_k$, де V_k є зв'язними околами точки x_0 і $\overline{V_k}$ континууми в D. Без втрати загальності можна припустити, що

$x_k \in V_k$. Тепер з'єднаємо точки x_0 і x_k кривою γ_k в області V_k. Зауважимо, що довільна крива $\gamma \in \Gamma(K_{f_k}, |f_k(\gamma_k)|, X')$ не належить повністю ні $f_k(B(x_0, \varepsilon_0))$, ні $X' \setminus f_k(B(x_0, \varepsilon_0))$, тому знайдеться $y_1 \in |\gamma| \cap f_k(S(x_0, \varepsilon_0))$ (див. [11, теорема 1, § 46, пункт I]). Нехай $\gamma : [0,1] \to X'$ і нехай $t_1 \in (0,1)$ такі, що $\gamma(t_1) = y_1$. Без обмеження загальності, можемо вважати, що $|\gamma|_{[0,t_1)}| \subset f_k(B(x_0, \varepsilon_0))$. Покладемо $\gamma_1 := \gamma|_{[0,t_1]}$, і $\alpha_1 = f_k^{-1}(\gamma_1)$. Зауважимо, що $|\alpha_1| \subset B(x_0, \varepsilon_0)$, більше того, α_1 не належить повністю ні $\overline{B(x_0, \varepsilon_{k-1})}$, ні $X \setminus \overline{B(x_0, \varepsilon_{k-1})}$. Отже, знайдеться $t_2 \in (0, t_1)$ з $\alpha_1(t_2) \in S(x_0, \varepsilon_{k-1})$ (see [11, теорема 1, § 46, пункт I]). Без обмеження загальності ми можемо вважати, що $|\alpha_1|_{[t_2, t_1]}| \subset X \setminus \overline{B(x_0, \varepsilon_{k-1})}$. Покладемо $\alpha_2 = \alpha_1|_{[t_2, t_1]}$. Зауважимо, що $\gamma_2 := f_k(\alpha_2)$ є підкривою кривої γ. За сказаним вище,

$$\Gamma(K_{f_k}, |f_k(\gamma_k)|, \overline{X'}) > \Gamma(f_k(S(x_0, \varepsilon_{k-1})), f_k(S(x_0, \varepsilon_0)), f_k(A))\,,$$

де $A = A(x_0, \varepsilon_{k-1}, \varepsilon_0)$, і за (1.2) ми отримуємо, що

$$M_p(\Gamma(K_{f_k}, |f_k(\gamma_k)|, \overline{X'})) \leqslant M_p(\Gamma(f_k(S(x_0, \varepsilon_{k-1})), f_k(S(x_0, \varepsilon_0)), f_k(A)))\,. \tag{4.58}$$

Оскільки $I(\varepsilon, \varepsilon_0) \to \infty$ коли $\varepsilon \to 0$, ми можемо вважати, що $I(\varepsilon_k, \varepsilon_0) > 0$ для кожного $k = 1, 2, \ldots$. Розглянемо сім'ю вимірних функцій

$$\eta_k(t) = \psi(t)/I(\varepsilon_k, \varepsilon_0), \quad t \in (\varepsilon,\, \varepsilon_0)\,.$$

Зауважимо, що $\int\limits_{\varepsilon_k}^{\varepsilon_0} \eta_k(t)\, dt = 1$. Тепер, за (4.37), (4.56) і (4.58), ми зауважимо, що

$$M_p(\Gamma(K_{f_k}, |f_k(\gamma_k)|, \overline{X'})) \leqslant \varphi(\varepsilon_k)\,, \tag{4.59}$$

де φ деяка функція з $\varphi(\varepsilon_k) \to 0$ коли $k \to \infty$. З іншого боку, з (4.57) випливає, що $\min\{h(K_{f_k}), h(|f_k(\gamma_k)|)\} \geqslant r_0$ для деякого $r_0 > 0$ і кожного $k = 1, 2, \ldots,$. Тепер, оскільки X' є рівномірною областю, отримаємо, що

$$M_p(\Gamma(K_{f_k}, |f_k(\gamma_k)|, \overline{X'})) \geqslant \delta_0 \tag{4.60}$$

для деякого $\delta_0 > 0$ і кожного $k = 1, 2, \ldots,$. Тепер, (4.60) суперечить (4.59). Таким чином, $\mathfrak{R}_{Q,\delta,p,q}(D)$ є одностайно неперервною в x_0. $\Box$ $\Box$

Аналог наступного твердження був доведений [63, теорема 3.1] (див. також [70, лема 5.2]). Доведення леми 4.4.3 можна знайти в [77, лема 3].

Лема 4.4.3. *Нехай* (X, d, μ) *і* (X', d', μ') *метричні простори, і нехай* X' *задовольняє слабку сферикалізацію. Нехай* D *обмежена область в* X *скінченнозв'язна на межі, нехай* D' *область в* $\overline{X'}$, *і нехай* $1 \leqslant p < \infty$, $1 \leqslant q < \infty$ *фіксовані числа. Припустимо, що* X *повний простір, що задовольняє нерівність* p*-Пуанкаре, і міра* μ *дублюється.*

Нехай $Q : X \to (0, \infty)$ *локально інтегровна. Припустимо, що для кожного* $x_0 \in \overline{D}$ *умови(4.55)–(4.56) виконуються. Якщо* $D'_f := f(D)$ *і* $\overline{X'}$ *є одностайно рівномірними областями по всіх* $f \in \mathfrak{F}_{Q,\delta,A,p,q}(D)$, *тоді кожне* $f \in \mathfrak{F}_{Q,\delta,A,p,q}(D)$ *має неперервне продовження* $f : \overline{D}_P \to \overline{D'_f}$, *і* $\mathfrak{F}_{Q,\delta,A,p,q}(D)$ *є одностайно неперервною в* $\overline{D}_P$.

Доведення. Зауважимо, що $\partial D'_f = \partial f(D)$ є сильно досяжною для кожного $f \in \mathfrak{F}_{Q,\delta,A,p,q}(D)$. Дійсно, припустимо, що $x_0 \in \partial D'_f$. Для заданого околу U точки x_0, знайдеться $\varepsilon_1 > 0$ таке, що $V = B(x_0, \varepsilon_1)$, $V := \overline{B(x_0, \varepsilon_1)} \subset U$. Припустимо, що $\partial U \neq \varnothing$. Тепер, $\partial V \neq \varnothing$ за зв'язністю $\overline{X'}$ (див. [11, 5.I.46]). Тепер, покладемо $\varepsilon_2 := h'(\partial U, \partial V) > 0$. Оскільки D'_f є одностайно рівномірними, отримаємо, що $M_p(\Gamma(F, G, D'_f)) \geqslant \delta > 0$ для деякого $\delta > 0$ коли F і G континууми в D'_f такі, що $F \cap \partial U \neq \varnothing \neq F \cap \partial V$ і $G \cap \partial U \neq \varnothing \neq G \cap \partial V$ (тому, що, у цьому випадку, отримаємо, що $h(F) \geqslant \varepsilon_2$ і $h(G) \geqslant \varepsilon_2$). Таким чином, $\partial D'_f = f(D)$ є сильно досяжною відносно p-модуля. Тепер, за 4.4.1, $f \in \mathfrak{F}_{Q,\delta,A,p,q}(D)$ має неперервне продовження $f : \overline{D}_P \to \overline{D'_f}$.

Оскільки μ дублюється, а X – повний тоді і тільки тоді, коли він власний (тобто кожна замкнена обмежена множина компакт), див. [41, пропозиція 3.1]. Тепер, X є локально компактним простором. Оскільки X повний, X задовольняє нерівність q-Пуанкаре, і міра μ дублюється, ми отримаємо, що X є локально зв'язним (див. [37], див. також [42, теорема 17.1]). Більше того, X є локально зв'язним за теоремою Мазуркевича–Мура–Менгера (див. у [11, теорема 1.6.50.II]). Таким чином, всі умови леми 4.4.2 виконуються. Тепер, за лемою 4.4.2, $\mathfrak{F}_{Q,\delta,A,p,q}(D)$ є одностайно неперервною в x_0 для кожного $x_0\in D$.

Залишилось показати, що $\mathfrak{F}_{Q,\delta,A,p,q}(D)$ є одностайно неперервною в $E_D=\overline{D}_P\setminus D$. Припустимо протилежне, тобто, що існує $P_0\in E_D$ такий, що $\mathfrak{F}_{Q,\delta,A,p,q}(D)$ не є одностайно неперервною в P_0. Тепер, знайдеться $P_k\in \overline{D}_P$ і $f_k\in\mathfrak{F}_{Q,\delta,A}(D)$ такі, що $P_k\to P_0$ коли $k\to\infty$ і

$$h(f_k(P_k), f_k(P_0))\geqslant a_0 \tag{4.61}$$

для деякого $a_0>0$. Оскільки f_k має неперервне продовження в $\overline{D}_P$, для заданого $k\in\mathbb{N}$, ми можемо знайти $x_k\in D$ з $m_P(x_k, P_k)<1/k$ і $h(f_k(x_k), f_k(P_k))<1/k$. Таким чином, ми отримаємо (4.61), що

$$h(f_k(x_k), f_k(P_0))\geqslant a_0/2\quad\forall\quad k=1,2,\ldots, . \tag{4.62}$$

Аналогічно, ми можемо знайти $x_k^{\prime}\in D$ таку, що $x_k^{\prime}\to P_0$ as $k\to\infty$, і $h(f_k(x_k^{\prime}), f_k(P_0))<1/k,\ k=1,2,\ldots$. Таким чином, ми отримаємо (4.62) що

$$h(f_k(x_k), f_k(x_k^{\prime}))\geqslant a_0/4\quad\forall\quad k=1,2,\ldots\,, \tag{4.63}$$

де x_k і $x_k^{\prime}\in D$ задовольняють умови $x_k\to P_0$, $x_k^{\prime}\to P_0$ коли $k\to\infty$.

Нехай $P_0=[E_k]$. Позначимо $x_0:=I([E_k])$ (див. [37, теорема 10.8]). За [37, зауваження 4.5] ми можемо вважати, що множини E_k відкриті. Більше того, за зауваженням 2.6 in [37] множина E_k є зв'язною для кожного $k\in\mathbb{N}$. Аргументуючи, як при доведенні леми 4.4.1, ми можемо показати, що, для кожного $r>0$ знайдеться $k\in\mathbb{N}$ таке, що $E_k\subset B(x_0, r)\cap D$. Таким чином, без обмеження загальності знайдуться $x_k, x_k^{\prime}\in E_k$ і $E_k\subset B(x_0, 2^{-k})$. Нехай γ_k крива, що з'єднує x_k і $x_k^{\prime}$ в E_k. Зауважимо, що $A\subset D\setminus B(x_0, 2^{-k})$ для всіх $k>k_0$ і деякого $k_0\in\mathbb{N}$. Ми можемо вважати, що $2^{-k_0}<\varepsilon_0$. Нехай Γ_k сім'я кривих, що з'єднує $|\gamma_k|$ і A в D. За (1.2), ми отримуємо, що

$$M_p(f_k(\Gamma_k))\leqslant M_p(f_k(\Gamma(S(x_0, 2^{-k}), S(x_0, 2^{-k_0}), A(x_0, 2^{-k}, 2^{-k_0}))))\,. \tag{4.64}$$

Зауважимо, що

$$\eta(t) = \begin{cases} \psi(t)/I(2^{-k}, 2^{-k_0}), & t \in (2^{-k}, 2^{-k_0}), \\ 0, & t \in \mathbb{R} \setminus (2^{-k}, 2^{-k_0}), \end{cases}$$

$I(\varepsilon, \varepsilon_0) := \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)\,dt$, задовольняє умову (4.38) для $r_1 = 2^{-k}$ і $r_2 = 2^{-k_0}$. За означенням кільцевого Q-гомеоморфізма в точці x_0, (4.56) і (4.64) випливає

$$M_p(f_k(\Gamma_k)) \leqslant \alpha(2^{-k}) \to 0 \tag{4.65}$$

коли $k \to \infty$, де $\alpha(\varepsilon)$ деяка невід'ємна функція $\alpha(\varepsilon) \to 0$ коли $\varepsilon \to 0$.

Однак, $f_k(\Gamma_k) = \Gamma(|f_k(\gamma_k)|, f_k(A), D'_{f_k})$. За припущенням, $h(f_k(A)) \geqslant \delta$, $k = 1, 2, \ldots$, більше того, за (4.63) ми отримаємо, що $h(|f_k(\gamma_k)|) \geqslant a_0/4$, $k = 1, 2, \ldots,$. Оскільки D'_{f_k} є одностайно рівномірними областямими отримаємо, що

$$M_p(f_k(\Gamma_k)) \geqslant r_0\,, k = 1, 2, \ldots\,, \tag{4.66}$$

для деякого $r_0 > 0$. Однак (4.66) суперечить (4.65). Таким чином, сім'я $\mathfrak{F}_{Q,\delta,A,p,q}(D)$ є одностайно неперервною P_0. $\square$

Доведення наступного твердження можна знайти в [77, теорема 2].

Теорема 4.4.2. *Нехай (X, d, μ) і (X', d', μ') метричні простори, і нехай X' задовольняє слабку сферикалізацію. Нехай D обмежена область в X скінченнозв'язна на межі, нехай D' область в $\overline{X'}$, і нехай $1 \leqslant p < \infty$, $1 \leqslant q < \infty$ фіксовані числа. Припустимо, що X повний простір, що задовольняє нерівність p-Пуанкаре, і міра μ дублюється.*

Нехай $Q : X \to (0, \infty)$ локально інтегровна функція. Припустимо, що $Q \in FMO(\overline{D})$. Якщо $D'_f := f(D)$ і $\overline{X'}$ є одностайно рівномірними областями по $f \in \mathfrak{F}_{Q,\delta,A,p,q}(D)$, тоді кожне відображення $f \in \mathfrak{F}_{Q,\delta,A,p,q}(D)$ має неперервне продовження $f : \overline{D}_P \to \overline{D'_f}$, і $\mathfrak{F}_{Q,\delta,A,p,q}(D)$ є одностайно неперервною в $\overline{D}_P$.

Доведення. Доведення теореми 4.4.2 випливає з леми 4.4.3 і пропозиції 4.4.1. Нарешті, X є регулярним зверху за (4.47), і (4.54) виконується оскільки міра μ дублюється за умовою. Отже, бажане твердження випливає х леми 4.4.3. □

4.5 Відкриті дискретні відображення з оберненою нерівністю Полецького. Локальна поведінка. Приклади

Згідно з [34], у цьому підрозділі йдеться про один з можливих типів спотворення модуля при відображенні, а саме, коли модуль сімей кривих в прообразі при відображенні оцінюється ваговим модулем образу відповідної сім'ї кривих. Такі оцінки добре відомі в класичній теорії (зокрема, у квазіконформному аналізі), але їх роль не достатньо досліджена у випадку необмежених ваг. Подібні оцінки ми розглядаємо в метричному просторі, де їх застосування на даний момент також не дуже поширене. Оскільки за наявності оберненого відображення вказане спотворення модуля еквівалентне ваговій нерівності Полецького для оберненого відображення, природньо вважати їх «оберненими нерівностями Полецького», як це і пропонується в тексті. Щодо даного рукопису, він присвячений водночас як розвитку модульної техніки, так і дослідженню відображень просторів, що можуть бути не евклідовими. Центральне місце займає питання про локальну поведінку одного класу відображень метричних просторів. Розглядається випадок, коли вихідний метричний простір задовольняє умову слабкої сферікалізації, що є аналогом ріманової сфери (розширеного евклідового простору), а відображений простір є локально лінійно зв'язним. Отримана одностайна неперервність відповідних сімей відображень деякої області зі слабко плоскою межею на фіксовану область з компактним замиканням за умови, що відповідна вага у ключовій нерівності інтегровна.

Нехай $y_0 \in X'$, $0 < r_1 < r_2 < \infty$ і

$$A = A(y_0, r_1, r_2) = \{y \in X' : r_1 < d'(y, y_0) < r_2\}\ . \qquad (4.67)$$

Якщо $f : D \to X'$ – задане відображення, $y_0 \in f(D)$ і $0 < r_1 < r_2 < d_0 = \sup\limits_{y \in f(D)} d'(y, y_0)$, то через $\Gamma_f(y_0, r_1, r_2)$ ми позначимо сім'ю всіх кривих γ в області D таких, що $f(\gamma) \in \Gamma(S_1, S_2, A)$, де

$$S_i = \{y \in D' : d'(y, y_0) = r_i\}, \quad i = 1, 2\,,$$

а множина A визначена в (4.67). Нехай $Q : X' \to [0, \infty]$ – вимірна функція. Будемо говорити, що $f : D \to X'$ *задовольняє обернену нерівність Полецького* в точці $y_0 \in f(D)$, якщо співвідношення

$$M_\alpha(\Gamma_f(y_0, r_1, r_2)) \leqslant \int\limits_{f(D)\cap A(y_0, r_1, r_2)} Q(y) \cdot \eta^{\alpha'}(d'(y, y_0))\, d\mu'(y) \qquad (4.68)$$

виконується для довільної вимірної за Лебегом функції $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$ такої, що

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)\, dr \geqslant 1\,.$$

Нехай $\beta : [a, c) \to D$ – крива зі значеннями в області $D \subset (X, d)$. Скрізь далі ми пишемо $\beta(t) \to \partial D$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться $\delta := \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що $d(\beta(t), \partial D) < \varepsilon$ для всіх $t \in (\delta, c)$. Тут, звісно, припускається, що $\partial D \neq \varnothing$. Виконується наступне твердження, доведене в [34, лема 2.1].

Лема 4.5.1. *Нехай (X, d) – метричний простір, що допускає слабку сферикалізацію, $(\overline{X}, h)$ є локально зв'язним, (X', d') є компактним, крім того, нехай D, D' – області в $\overline{X}$ та X', відповідно. Нехай f – відкрите дискретне відображення області D на D'. Тоді для будь-якої кривої $\beta : [a, b) \to D'$, такої, що $\beta(t) \to \partial D'$ при $t \to b - 0$ будь-яке її максимальне підняття $\alpha : [a, c) \to D$ з початком в довільній точці $x \in f^{-1}(\beta(a))$ при відображенні f задовольняє умову: $h(\alpha(t), \partial D) \to 0$ при $t \to c - 0$.*

Доведення. Передусім зауважимо, що формулювання леми 4.5.1 є коректним, а саме, за умов леми ∂D не порожня. Дійсно, оскільки за умовою $\beta(t)\to\partial D'$, маємо: $\partial D'\ne\varnothing$. Тоді знайдеться послідовність точок $y_k=\beta(t_k)\in D'$ така, що $d'(y_k,\partial D')\to 0$ при $k\to\infty$, де $t_k\in[a,b)$. Оскільки простір X' є компактним, ми можемо вважати, що $y_k\to y_0\in X'$. Тоді $y_0\in\partial D'$, бо $d'(y_k,\partial D')\to 0$ при $k\to\infty$. Оскільки $f(D)=D'$ за умовою леми, існують $x_k\in D$ такі, що $f(x_k)=y_k$. Оскільки $\overline{X}$ є компактом, то ми також можемо вважати послідовність x_k збіжною до якоїсь точки x_0 при $k\to\infty$. Точка x_0 не може бути внутрішньою для області D, бо в протилежному випадку в силу відкритості відображення f такою була б і точка y_0. Тоді $x_0\in\partial D$, отже, $\partial D\ne\varnothing$.

Оскільки тепер нами встановлено, що $\partial D\ne\varnothing$, то можливі тільки два випадки: або $h(\alpha(t),\partial D)\to 0$ при $t\to c-0$, або $h(\alpha(p_k),\partial D)\geqslant\delta_0>0, k=1,2,\ldots,$ за певного $\delta_0>0$ і деякої послідовності $p_k\to c-0$ при $k\to\infty$. Здійснимо доведення леми 4.5.1 від супротивного, користуючись підходом, застосованим при доведенні [23, лема 3]. Нехай існує така крива $\beta:[a,b)\to D'$, відносно якої її максимальне підняття $\alpha:[a,c)\to D$, $c\in(a,b)$, задовольняє умову $h(\alpha(p_k),\partial D)\geqslant\delta_0>0, k=1,2,\ldots,$ для деякої послідовності $p_k\in[a,c)$ такої, що $p_k\to c-0$ при $k\to\infty$. Оскільки простір $\overline{X}$ – компактний, в цьому випадку можна вважати, що $\alpha(p_k)\to x_1\in D$ при $k\to\infty$. Розглянемо множину

$$D_0=\left\{x\in\overline{X}:x=\lim_{k\to\infty}\alpha(t_k),\quad t_k\in[a,c),\quad \lim_{k\to\infty}t_k=c\right\}.$$

Зауважимо, що $c\ne b$. Дійсно, якщо $c=b$, то за неперервністю f в області D ми мали б, що $f(\alpha(p_k))=\beta(p_k)\to x_1\in D$ при $k\to\infty$. Останнє суперечить обранню кривої β, бо $\beta(t)\to\partial D'$ при $t\to b-0$ за умовою леми.

Нехай тепер $c\ne b$. Переходячи до підпосліовностей за необхідності, ми можемо обмежитись тільки монотонними послідовностями t_k. Нехай $x\in D_0\cap D$, тоді з огляду на неперервність f ми отримаємо, що

$f(\alpha(t_k)) \to f(x)$ при $k \to \infty$, де $t_k \in [a, c), t_k \to c$ при $k \to \infty$. Однак, $f(\alpha(t_k)) = \beta(t_k) \to \beta(c)$ при $k \to \infty$. Тоді відображення f стале на $D_0 \cap D$. Зауважимо, що

$$D_0 = \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{\alpha([t_k, c))} \neq \varnothing.$$

Тому, з огляду на [11, теорема 5.II.47.5] множина D_0 зв'язна. Також зазначимо, що D_0 – непорожня, що безпосередньо випливає із включення $x_1 \in D_0$, де x_1 визначена вище. Нехай L_0 – зв'язна компонента $D_0 \cap D$, що містить точку x_1. Якщо D_0 містить дві і більше точок, то за означенням зв'язності таким є і L_0. Оскільки f – дискретне відображення і $L_0 \subset D$, множина L_0 є одноточковою. Отже, D_0 є одноточковою також. У такому випадку, криву $\alpha : [a, c) \to D$ можна продовжити до замкненої кривої $\alpha : [a, c] \to D$, причому $f(\alpha(c)) = \beta(c)$. Тоді за [72, лема 2.1] знайдеться ще одне максимальне підняття α' кривої $\beta|_{[c,b)}$ з початком в точці $\alpha(c)$. Об'єднуючи підняття α і α', ми отримаємо нове підняття α'' кривої β, визначене на $[a, c')$, $c' \in (c, b)$, що суперечить «максимальності» вихідного підняття α. Отримане протиріччя вказує на те, що $h(\alpha(t), \partial D) \to 0$ при $t \to c - 0$. $\Box$

Припустимо, X допускає слабку сферикалізацію. Тоді для областей $D \subset \overline{X}$, $D' \subset X'$ і довільної вимірної функції $Q : X' \to [0, \infty]$ позначимо через $\mathfrak{F}_Q(D, D')$ сім'ю всіх відкритих дискретних відображень f області D на область D' таких, що співвідношення (4.68) виконується для кожної точки $y_0 \in D'$. Основним результатом даного підрозділу є наступне твердження, доведене в [34, теорема 1.1].

Теорема 4.5.1. *Нехай (X, d, μ) і (X', d', μ') – метричні простори з хаусдорфовими розмірностями $2 \leqslant \alpha, \alpha' < \infty$, X' – локально лінійно зв'язний простір, а X допускає слабку сферикалізацію, причому відповідний простір $(\overline{X}, h)$ є локально зв'язним. Нехай також D і D' – області в $\overline{X}$ і X', відповідно, причому, простір D є слабко плоским,* *крім того,* $\overline{D'}$ *є компактом в* X', *а множина* $\partial D'$ *містить не менше двох точок.*

Якщо область D' *задовольняє умову* $\boldsymbol{A}$ *і* $Q \in L^1(D')$, *то сім'я* $\mathfrak{F}_Q(D, D')$ *є одностайно неперервною в* D.

Доведення. Здійснимо доведення теореми від супротивного. Припустимо, що сім'я $\mathfrak{F}_Q(D, D')$ не є одностайно неперервною в точці $x_0 \in D$. Іншими словами, знайдуться такі $x_0 \in D$ і $\varepsilon_0 > 0$ з наступною умовою: для будь-якого $m \in \mathbb{N}$ знайдеться $x_m \in D, m = 1, 2, \ldots$ і відображення $f_m \in \mathfrak{F}_Q(D, D')$ такі, що $h(x_0, x_m) < \frac{1}{m}$ і

$$d'(f_m(x_0), f_m(x_m)) \geqslant \varepsilon_0\,. \tag{4.69}$$

Оскільки за умовою $\overline{D'}$ – компакт, ми можемо вважати, що послідовності $f_m(x_0)$ і $f_m(x_m)$ збігаються при $m \to \infty$ до точок a_1 та $a_2 \in \overline{D'}$, відповідно. Тоді, з нерівності (4.69), за нерівністю трикутника та за неперервністю метрики маємо: $d'(a_1, a_2) \geqslant \varepsilon_0$. За умовами теореми знайдуться точки $w_1, w_2 \in \partial D'$, $w_1 \neq w_2$. Визначимо криві γ_1 і γ_2 наступним чином. Якщо обидві точки a_1 і a_2 є межовими, то позначимо через γ_i вироджену криву, образ якої збігається з відповідною точкою a_i, $i = 1, 2$. Якщо лише одна з точок a_1 або a_2 є межовою, наприклад, точка a_1, то знову позначимо через γ_1 відповідну вироджену криву, образ якої збігається з a_1; нехай, наприклад, $a_1 \neq w_2$, тоді точку a_2 з'єднаємо з точкою w_2 кривою γ_2, що лежить в D' повністю, за виключенням кінцевої точки w_2 (це можливо за умовою $\mathbf{A}$).

І нарешті, якщо обидві точки a_1 і a_2 є внутрішніми, з'єднаємо точки a_1 і w_1, a_2 і w_2 непересічними кривими γ_1 та γ_2 в D', що можливо за умовою $\mathbf{A}$). Зауважимо, що $|\gamma_i|, i = 1, 2$ – компакти в X' як неперервні образи відповідних відрізків у метричний простір, тому існує $l_0 > 0$ таке що $d'(|\gamma_1|, |\gamma_2|) = l_0 > 0$. Оскільки простір X' локально лінійно зв'язний, знайдуться лінійно зв'язні околи V_i точок a_i, $i = 1, 2$ такі, що $V_1 \cap V_2 = \varnothing$. Можна вважати, що $V_1 \subset B(a_1, \frac{l_0}{4})$. З'єднаємо точки a_1 та a_2

з точками $f_m(x_0)$ та $f_m(x_m)$ кривими α_m та β_m всередині околів V_1 та V_2, відповідно. Тепер утворимо нові криві: нехай $\gamma_m^{1*}:[0,1]\to X'$ крива, що є поєднанням кривих γ_1 та α_m, а $\gamma_m^{2*}:[0,1]\to X'$ – крива, що є поєднанням кривих γ_2 та β_m, де $\gamma_m^{1*}(0)=f_m(x_0)$ і $\gamma_m^{2*}(0)=f_m(x_m)$.

Нехай

$$t_m=\sup\limits_{t\in[0,1]}\{t:\gamma_m^{1*}(t)\in D'\},\ \ p_m=\sup\limits_{t\in[0,1]}\{t:\gamma_m^{2*}(t)\in D'\}.$$

Покладемо

$$\gamma_m^1=\gamma_m^{1*}|_{[0,t_m)}\,,\gamma_m^2=\gamma_m^{2*}|_{[0,p_m)}.$$

Покажемо, що умови леми 2.1 в [72] виконуються. Перш за все, локальна компактність $\overline{X}$ випливає із його компактності, також він є локально зв'язним за умовами теореми. Крім того, оскільки за умовою $\overline{D'}$ – компакт, то простір D' локально компактний. Отже, за [72, лема 2.1] знайдуться максимальні підняття кривих γ_m^1 та γ_m^2 при відображенні f_m з початками в точках x_0 та x_m, відповідно.

За лемою 4.5.1 $h(\alpha_m^*(t),\partial D)\to 0$ і $h(\beta_m^*(t),\partial D)\to 0$ при $t\to c_1-0$ і $t\to c_2-0$, відповідно. Отже, на кривих α_m^* та β_m^* знайдуться точки z_m^1 та z_m^2, відповідно, такі що $h(z_m^1,\partial D)<\frac{1}{m}$ та $h(z_m^2,\partial D)<\frac{1}{m}$. Оскільки $\overline{X}$ є компактним, можна вважати, що z_m^1 і z_m^2 збіжні до точок p_1 і p_2, відповідно. Нехай P_m – частина носія кривої α_m^* в X, що знаходиться між точками x_0 та z_m^1, а Q_m – частина носія кривої β_m^* в X, що знаходиться між точками x_m та z_m^2. Розглянемо сім'ю

$$\Gamma_m^*:=\Gamma(P_m,Q_m,D)$$

кривих, що з'єднують P_m та Q_m в D. За означенням максимального підняття при відображенні f_m у точках x_0 та x_m маємо:

$$f_m(P_m)\subset|\gamma_m^1|,\ f_m(Q_m)\subset|\gamma_m^2|. \tag{4.70}$$

Розглянемо покриття $A_0:=\bigcup\limits_{y\in|\gamma_1|}B(y,l_0/4)$ множини $|\gamma_1|$. Оскільки $|\gamma_1|$ – компактна множина, за лемою Гейне-Бореля-Лебега можна обрати скінченну кількість індексів $1\leqslant N_0<\infty$ і відповідні точки $z_1,\ldots,z_{N_0}\in|\gamma_1|$

так, щоб $|\gamma_1|\subset B_0:=\bigcup\limits_{i=1}^{N_0}B(z_i,l_0/4)$. Не обмежуючи загальності, можна вважати, що всі точки z_i належать D', так як у протилежному випадку за нерівністю трикутника можна замінити кулю $B(y,l_0/4)$ на кулю $B(y^*,l_0^*/4)$ з центром в деякій точці $y^*\in D'$, де l_0^* – деяке додатне число, яке можна обрати так, що $l_0/4<l_0^*/4<l_0/2$. Крім того, оскільки $V_1\subset B(a_1,\frac{l_0}{4})$, можна вважати, що $V_1\subset B(z_{i_0},\frac{l_0}{4})$ для деякого $z_{i_0}\in D'$ і $1\leqslant i_0\leqslant N_0$.

Нехай Γ_m' – сім'я всіх кривих, що з'єднують $f_m(P_m)$ та $f_m(Q_m)$ в D', а Γ_m – сім'я всіх кривих, що з'єднують $|\gamma_m^1|$ та $|\gamma_m^2|$ в D'. Тоді, користуючись (4.70), маємо:

$$\Gamma_m'\subset\Gamma_m=\bigcup_{i=1}^{N_0}\Gamma_{mi}\,, \tag{4.71}$$

де Γ_{mi} – сім'я всіх кривих $\gamma:[0,1]\rightarrow D'$ таких, що $\gamma(0)\in B(z_i,l_0/4)\cap|\gamma_m^1|$ і $\gamma(1)\in|\gamma_m^2|$ при $1\leqslant i\leqslant N_0$. Беручи до уваги [11, теорема 1.I.5, §46], ми можемо показати, що

$$\Gamma_{mi}>\Gamma(S(z_i,l_0/4),S(z_i,l_0/2),A(z_i,l_0/4,l_0/2))\,. \tag{4.72}$$

Нехай $\gamma\in\Gamma_m^*$, тоді $\gamma:[0,1]\rightarrow D$, $\gamma(0)\in P_m$, $\gamma(1)\in Q_m$. Зокрема, $f_m(\gamma(0))\in f_m(P_m)$, $f_m(\gamma(1))\in f_m(Q_m)$. З огляду на співвідношення (4.71), маємо: $f_m(\gamma)\in\Gamma_{mi}$ для деякого $1\leqslant i\leqslant N_0$. Тоді з (4.72) випливає, що $f_m(\gamma)$ має підкриву $\triangle:(t_1,t_2)\rightarrow D'$ таку, що $\triangle\in\Gamma(S(z_i,\frac{l_0}{4}),S(z_i,\frac{l_0}{2}),A(z_i,\frac{l_0}{4},\frac{l_0}{2}))$. Тобто, за означенням, маємо: $\gamma_1=\gamma|_{[t_1,t_2]}$ і $f_m(\gamma_1)=\triangle\in\Gamma(S(z_i,\frac{l_0}{4}),S(z_i,\frac{l_0}{2}),A(z_i,\frac{l_0}{4},\frac{l_0}{2}))$. Еквівалентно, умові $\gamma>\gamma_1$, де $\gamma_1\in\Gamma_{f_m}(z_i,\frac{l_0}{4},\frac{l_0}{2})$. Отже,

$$\Gamma_m^*>\bigcup_{i=1}^{N_0}\Gamma_{f_m}\left(z_i,\frac{l_0}{4},\frac{l_0}{2}\right)\,.$$

Покладемо

$$\eta(t)=\left\{\begin{array}{rl}4/l_0, & t\in[l_0/4,l_0/2],\\ 0, & t\notin[l_0/4,l_0/2]\,.\end{array}\right.$$

Оскільки відображення f_m задовольняють співвідношення (4.68) в D', маємо:

$$M_\alpha(\Gamma_m^*) \leqslant \sum_{i=1}^{N_0} M_\alpha\left(\Gamma_{f_m}(z_i, \frac{l_0}{4}, \frac{l_0}{2})\right) \leqslant$$

$$\leqslant 4^{\alpha'} N_0 / l_0^{\alpha'} \cdot \|Q\|_1 := c < \infty\,, \tag{4.73}$$

оскільки $Q \in L^1(D')$. Тут $\|Q\|_1$ позначає норму функції Q в $L^1(D')$.

З іншого боку, для достатньо великих m виконується:

$$h(P_m) \geqslant h(z_m^1, x_0) \geqslant h(x_0, p_1) - h(z_m^1, p_1) \geqslant \frac{1}{2} h(x_0, p_1)\,,$$

$$h(Q_m) \geqslant h(z_m^2, x_m) \geqslant h(z_m^2, x_0) - h(x_m, x_0) \geqslant$$

$$\geqslant h(p_2, x_0) - h(z_m^2, p_2) - h(x_m, x_0) \geqslant \frac{1}{2} h(x_0, p_2)\,.$$

Покладемо

$$U = B_h\left(x_0, \frac{R_0}{2}\right) = \left\{x \in \overline{X} : h(x, x_0) < \frac{R_0}{2}\right\}\,,$$

де

$$R_0 = \min\{h(x_0, p_1), h(x_0, p_2), h(x_0, \partial D)\}.$$

Оскільки $x_m \to x_0$ при $m \to \infty$, при цьому $h(P_m) \geqslant \delta_1$ і $h(Q_m) \geqslant \delta_2$ при всіх $m \geqslant m_0$ і деякому $m_0 \in \mathbb{N}$, з огляду на [11, теорема 1.I.5, §46] існує номер $m_1 \in \mathbb{N}$ такий, що $P_m \cap \partial U \neq \varnothing \neq Q_m \cap \partial U$ при $m \geqslant m_1$. Оскільки D – слабко плоский простір, для будь-якого числа $P > 0$ знайдеться інший окіл $V \subset U$ точки x_0 такий, що

$$M_\alpha(\Gamma(E, F, D)) > P \tag{4.74}$$

для будь-яких континуумів $E, F \subset D$ таких, що $E \cap \partial U \neq \varnothing \neq F \cap \partial U$ і $E \cap \partial V \neq \varnothing \neq F \cap \partial V$. Оскільки $x_m \to x_0$ при $m \to \infty$, при цьому $h(P_m) \geqslant \delta_1$ і $h(Q_m) \geqslant \delta_2$ при всіх $m \geqslant m_0$ і деякому $m_0 \in \mathbb{N}$, з огляду на [11, теорема 1.I.5, §46] існує номер $m_2 \in \mathbb{N}$, $m_2 > m_1$, такий, що $P_m \cap \partial V \neq \varnothing \neq Q_m \cap \partial V$. Тоді з (4.74) випливає, що

$$M_\alpha(\Gamma_m(P_m, Q_m, D)) > P\,, \quad m > m_2\,. \tag{4.75}$$

Співвідношення (4.75) суперечить (4.73), оскільки число P може бути обраним більше за $4^{\alpha'}N_0/l_0^{\alpha'}\cdot\|Q\|_1$. Отримана суперечність доводить теорему. $\Box$

Зауваження 4.5.1. В теоремі 4.5.1 одностайна неперервність розуміється в сенсі відображень, що діють між просторами $(\overline{X},h)$ і (X',d'). Іншими словами, $\mathfrak{F}_Q(D,D')$ є одностайно неперервною в точці $x_0\in D$ тоді і тільки тоді, коли для будь-якого $\varepsilon>0$ знайдеться $\delta=\delta(x_0,\varepsilon)>0$ таке, що нерівність $d'(f(x),f(x_0))<\varepsilon$ виконується одночасно для всіх $f\in\mathfrak{F}_Q(D,D')$ і всіх $x\in D$ таких, що $h(x,x_0)<\delta$.

Приклади, наведені далі, опубліковані в [34].

Приклад 4.5.1. Скористаємося прикладом 1 зі статті [75]. Обмежимося евклідовою розмірністю $n=2$. Зафіксуємо довільне число $p\geqslant 1$ з умовою $2/p<1$ і покладемо $\alpha\in(0,2/p)$. Визначимо послідовність відображень f_m одиничного круга $\mathbb{D}=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ на круг $B(0,2)=\{z\in\mathbb{C}:|z|<2\}$ наступним чином:

$$f_m(z)\;=\;\begin{cases}\frac{1+|z|^{\alpha}}{|z|}\cdot z\,, & 1/m\leqslant|z|\leqslant 1,\\ \frac{1+(1/m)^{\alpha}}{(1/m)}\cdot z\,, & 0<|z|<1/m\,.\end{cases}$$

Зауважимо, що f_m задовольняє умову

$$M(f_m(\Gamma(S_1,S_2,D)))\leqslant\int\limits_{A\cap\mathbb{D}}Q(z)\cdot\eta^2(|z-z_0|)\,dm(z)\tag{4.76}$$

для всіх $z_0\in\mathbb{D}$ і всіх $0<r_1<r_2<d_0:=\sup\limits_{z\in D}|z-z_0|$ і всіх вимірних за Лебегом функцій $\eta:(r_1,r_2)\to[0,\infty]$ з умовою

$$\int\limits_{r_1}^{r_2}\eta(r)\,dr\geqslant 1$$

для функції $Q(z)=\frac{1+|z|^{\alpha}}{\alpha|z|^{\alpha}}$ при кожному $z_0\in\mathbb{D}$, більше того, $Q\in L^p(\mathbb{D})$ (див., напр., міркування, застосовані при розгляді [60, пропозиція 6.3]).

Прямими обчисленнями можна переконатися в тому, що обернені відображення $g_m = f_m^{-1}(z)$ обчислюються шляхом співвідношення

$$g_m(z) \;=\; \begin{cases} \frac{(|z|-1)^{1/\alpha}}{|z|}\cdot z\,, & 1+1/(m^{\alpha})\leqslant |z|\leqslant 2,\\ \frac{1/m}{1+(1/m)^{\alpha}}\cdot z\,, & 0<|z|<1+1/(m^{\alpha})\,. \end{cases}$$

Більше того, співвідношення (4.76) можна записати в вигляді

$$M(\Gamma_{g_m}(z_0,r_1,r_2))\leqslant \int\limits_{A\cap\mathbb{D}} Q(z)\cdot\eta^2(|z-z_0|)\,dm(z)\,. \qquad (4.77)$$

Зауважимо, що сім'я відображень g_m задовольняє усі умови теореми 4.5.1. Зокрема, простір $\mathbb{C}$ (а, отже, і $\overline{\mathbb{C}}$) є слабко плоским (див., напр., [75, лема 2.2]). Роль слабкої сферикалізації відіграє розширена комплексна площина з хордальною метрикою h (див. співвідношення (1.3) в [75]).

Приклад 4.5.2. Для того, щоб отримати відповідну сім'ю відображень з розгалуженням, можна покласти $h_m=(g_m\circ l)(z)$, де $l(z)=z^2$. Зауважимо, що

$$M(\Gamma)\leqslant 2\cdot M(l(\Gamma))\,, \qquad (4.78)$$

оскільки $N(l,B(0,2))=2$ і $K_O(l,z)=1$, де $N(f,D)$ – максимальна кратність відображення f в D, а $K_O(f,z)$ позначає зовнішню дилатацію відображення f в точці z (див. [56, теорема 3.2]). Зауважимо, що $l(\Gamma_{h_m}(z_0,r_1,r_2))\subset\Gamma_{g_m}(z_0,r_1,r_2)$. Отже, зі співвідношень (4.77) і (4.78) випливає, що

$$M(\Gamma_{h_m}(z_0,r_1,r_2))\leqslant 2\int\limits_{A\cap\mathbb{D}} Q(z)\cdot\eta^2(|z-z_0|)\,dm(z)\,.$$

Сім'я відображень h_m також задовольняє всі умови теореми 4.5.1.

Приклад 4.5.3. Побудуємо тепер аналогічний приклад сім'ї відображень між метричними просторами. Для цього розглянемо дві ріманові поверхні, записані у вигляді фактор-просторів $\mathbb{D}/G$ і $\mathbb{D}/G_*$ по деяких групах G і G_* дробово-лінійних автоморфізмів одиничного круга $\mathbb{D}$, що діють розривно і не мають нерухомих точок (див., напр., [69, розд. 2]). Скористаємося схемою, застосованою при розгляді прикладу 3) зауваження 5.2 в [70]. Нагадаємо, що кожен елемент p_0 фактор-простору $\mathbb{D}/G$ є **орбітою** точки $z_0\in\mathbb{D}$, тобто, $p_0=\{z\in\mathbb{D}: z=g(z_0), g\in G\}$. Нехай $\widetilde{h}$ і $\widetilde{h}_*$ – метрики на $\mathbb{D}/G$ і $\mathbb{D}/G_*$, відповідно. Докладніше, для $p_1,p_2\in\mathbb{D}/G$ покладемо

$$\widetilde{h}(p_1,p_2):=\inf_{g_1,g_2\in G} h(g_1(z_1),g_2(z_2))\,, \tag{4.79}$$

де h – гіперболічна метрика:

$$h(z_1,z_2)=\log\frac{1+t}{1-t}\,,\quad t=\frac{|z_1-z_2|}{|1-z_1\overline{z_2}|}\,.$$

Зауважимо, що $\widetilde{h}$ у (4.79) дійсно є метрикою (див. міркування після формули (2.8) у [69]). Можна також визначити елемент площі $d\widetilde{v}$ на $\mathbb{D}/G$. З цією метою, введемо до розгляду так звану **фундаментальну множину** F, яка визначається як підмножина $\mathbb{D}$, що містить одну і тільки одну точку орбіти $z\in G_{z_0}$ (див. [4, § 9.1, розд. 9]). **Фундаментальною областю** D_0 називається область в $\mathbb{D}$, з властивістю $D_0\subset F\subset\overline{D_0}$ така, що $v(\partial D_0)=0$ (див. там же). Найважливішим прикладом фундаментальної області є **багатокутник Діріхле**,

$$D_\zeta=\bigcap_{g\in G, g\ne I} H_g(\zeta)\,,$$

де $H_g(\zeta)=\{z\in\mathbb{D}: h(z,\zeta)<h(z,g(\zeta))\}$ (див. [69, співвідношення (2.6)]). Нехай π – натуральна проекція $\mathbb{D}$ на $\mathbb{D}/G$, тоді π – аналітична функція, конформна на D_0 (див. [4, пропозиція 9.2.2] і коментар після (2.11) в [69]). Для вимірної множини $E\subset\mathbb{D}/G$ покладемо

$$\widetilde{v}(E):=v(\pi^{-1}(E))\,,$$

де v – гіперболічна міра в одиничному крузі з елементом площі

$$dv(z)=\frac{4\,dm(z)}{(1-|z|^2)^2}\,, \tag{4.80}$$

m – плоска міра Лебега. Таким чином, $\mathbb{D}/G$ і $\mathbb{D}/G_*$ – метричні простори з мірами, більше того, ці простори лінійно зв'язні і локально гомеоморфні простору $\mathbb{C}$ (див., напр., [4, теорема 6.2.1]). Зауважимо, що для будь-якої точки $p_0 \in \mathbb{D}/G$ знайдеться окіл $U \subset \mathbb{D}/G$, який називається **нормальним околом** цієї точки, такий що $\pi(V) = U$, де V – компактний окіл у $\mathbb{D}$, π є гомеоморфізмом в V, причому $\widetilde{h}(p_1, p_2) = h(\varphi(p_1), \varphi(p_2))$ для будь-яких $p_1, p_2 \in U$ і $\varphi := (\pi|_V)^{-1}$. Переходячи до еквівалентного фактор-простору за допомогою дробово-лінійного автоморфізму одиничного круга $g_0(z) = (z - z_0)/(1 - z\overline{z_0})$, ми завжди можемо вважати, що $0 \in V$ і $\pi(0) = p_0$. Існування нормальних околів випливає зі співвідношення (2.10) у [69] (докладне обґрунтування їх існування наведене в міркуваннях після формули (15) публікації [26]).

Нехай тепер $r_0 > 0$ таке, що куля $B(0, r_0)$ зі своїм замиканням лежить в околі $V \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{C}$, де $\pi(V) = U$. Аналогічно, для точки $p_0^* \in \mathbb{D}/G_*$ знайдеться нормальний окіл $U_* \subset \mathbb{D}/G_*$ і відповідний йому компактний окіл $V_* \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ такий, що $\pi_*(0) = p_0^*$, $\pi_*(V_*) = U_*$, π є гомеоморфізмом V_* на U_* і $\widetilde{h}_*(p_1, p_2) = h(\varphi_*(p_1), \varphi_*(p_2))$ для будь-яких $p_1, p_2 \in U_*$ і $\varphi_* := (\pi_*|_{V_*})^{-1}$. Нехай тепер $> 1R_0 > 0$ таке, що куля $B(0, R_0)$ зі своїм замиканням лежить в околі $V_* \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{C}$, де $\pi_*(V_*) = U_*$. Покладемо

$$F_m(z) \;=\; \begin{cases} \frac{r_0}{1+r_1^{\alpha}} \cdot \frac{1+|z|^{\alpha}}{|z|} \cdot z\,, & r_1/m \leqslant |z| \leqslant R_0, \\ \frac{r_0}{1+r_1^{\alpha}} \cdot \frac{1+(1/m)^{\alpha}}{(1/m)} \cdot z\,, & 0 < |z| < R_0/m\,. \end{cases}$$

Відображення F_m переводять кулю $B(0, R_0)$ на кулю $B(0, r_0)$. Покладемо

$$\widetilde{F}_m := (\pi \circ F_m \circ \varphi_*)(p_*)\,, \quad p_* \in \pi_*(B(0, R_0))\,.$$

Відображення $\widetilde{F}_m$ діють між областями $\pi_*(B(0, R_0))$ і $\pi(B(0, r_0))$ фактор-просторів $\mathbb{D}/G_*$ і $\mathbb{D}/G$, відповідно. Можна показати, що відображення F_m та $\widetilde{F}_m$ належать класу Соболєва і мають скінченне спотворення (див. міркування, наведені при доведенні теореми 7.1 в [25]). Зауважимо, що функція $Q(p_*)=\frac{1+|\varphi_*(p_*)|^{\alpha}}{\alpha|\varphi_*(p_*)|^{\alpha}}$ є інтегровною в $\pi_*(B(0, R_0))$, оскільки

$$\int\limits_{\pi_*(B(0,R_0))} Q(p_*)\,d\widetilde{v}_*(p)=\int\limits_{B(0,R_0)}\frac{4(1+|z|^{\alpha})\,dm(z)}{(1-|z|^2)^2\alpha|z|^{\alpha}}\leqslant$$

$$\leqslant C\cdot\int\limits_{B(0,R_0)}\frac{(1+|z|^{\alpha})\,dm(z)}{\alpha|z|^{\alpha}}<\infty\,.$$

Тоді за лемою 3.1 в [69] відображення $\widetilde{F}_m$ задовольняють умову

$$\widetilde{M}(\widetilde{F}_m(\Gamma(\widetilde{S}_1,\widetilde{S}_2,\pi_*(B(0,R_0)))))\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{\widetilde{A}\cap\pi_*(B(0,R_0))} Q(p_*)\cdot\eta^2(\widetilde{h}_*(p_*,p_0^*))\,d\widetilde{v}_*(p_*)$$

при $Q(p_*)=\frac{1+|\varphi_*(p_*)|^{\alpha}}{\alpha|\varphi_*(p_*)|^{\alpha}}$ для всіх $p_0^*\in\pi_*(B(0,R_0))$, всіх $0<r_1<r_2<\widetilde{h}_*(p_0^*,\partial\pi_*(B(0,R_0)))$ і всіх вимірних за Лебегом функцій $\eta:(r_1,r_2)\rightarrow[0,\infty]$ з умовою

$$\int\limits_{r_1}^{r_2}\eta(r)\,dr\geqslant 1\,,$$

де

$$\widetilde{S}_i=\{p_*\in\mathbb{D}/G_*:\widetilde{h}_*(p_*,p_0^*)=r_i\}\,,\quad i=1,2,$$

і

$$\widetilde{A}=\widetilde{A}(p_0^*,r_1,r_2)=\{p_*\in\mathbb{D}/G_*:r_1<\widetilde{h}_*(p_*,p_0^*)<r_2\}\,.$$

В такому випадку, відображення $\widetilde{G}_m:=\widetilde{F}_m^{-1}$ задовольняють умову

$$\widetilde{M}(\Gamma_{\widetilde{G}_m}(r_1,r_2,\widetilde{A}))\leqslant\int\limits_{\widetilde{A}\cap\pi_*(B(0,R_0))} Q(p_*)\cdot\eta^2(\widetilde{h}_*(p_*,p_0^*))\,d\widetilde{v}_*(p_*)\,,$$

де $\Gamma_{\widetilde{G}_m}(r_1,r_2,\widetilde{A})$ складається з тих і тільки тих кривих у $\pi(B(0,r_0))$, образи яких при відображенні $\widetilde{G}_m$ належать $\Gamma(\widetilde{S}_1,\widetilde{S}_2,\widetilde{A})$. Зауважимо, відображення $\widetilde{G}_m$ задовольняють всі умови теореми 4.5.1 (простір $\mathbb{D}/G$ можна наперед підібрати таким, що допускає слабку сферікалізацію, причому відповідний простір $\overline{\mathbb{D}/G}$ був би локально зв'язним). Слабка плоскість області $\pi(B(0,r_0))$ очевидна, оскільки $B(0,r_0)$ є слабко плоским в евклідовому, отже, і гіперболічному сенсі (а тому і в сенсі модуля сімей кривих на $\mathbb{D}/G$, бо цей модуль визначається в межах околу $\pi(B(0, r_0))$ саме через гіперболічну метрику і гіперболічну міру в $B(0, r_0)$). Крім того, $\overline{\pi_*(B(0, R_0))} = \pi_*(\overline{B(0, R_0)})$ є компактом в $\mathbb{D}/G_*$ як гомеоморфний образ компакту $\overline{B(0, R_0)}$ при відображенні π_*. Наявність двох і більше точок у $\partial\pi_*(B(0, R_0))$, а також умова **A** на $\pi_*(B(0, R_0))$ очевидні. Локальна лінійна зв'язність $\mathbb{D}/G_*$ є результатом вже згаданої вище [4, теорема 6.2.1] (хоча може бути отримана і безпосередньо: $\mathbb{D}/G_* = \pi_*(\mathbb{D})$, отже, $\mathbb{D}/G_*$ є лінійно зв'язним як неперервний образ лінійно зв'язної множини $\mathbb{D}/G_*$ при неперервному відображенні π_*).

Приклад 4.5.4. Нарешті, вкажемо відповідний приклад сім'ї відображень між метричним просторами з розгалуженням. Для цього в крузі $B(0, \sqrt{r_0})$ розглянемо відображення $l(z) = z^2$. Неважко бачити, що l переводить $B(0, \sqrt{r_0})$ в $B(0, r_0)$, причому має місце співвідношення (4.78). Нехай $M_h(\Gamma)$ – «гіперболічний» модуль сімей кривих, тобто, модуль сімей кривих, що визначається за допомогою гіперболічного елементу площі (4.80) і гіперболічної довжини кривої згідно метрики h. Зауважимо, що $M_h(\Gamma) = M(\Gamma)$ (див., напр., [70, зауваження 5.2]). Тоді з (4.78) будемо мати

$$M_h(\Gamma) \leqslant 2 \cdot M_h(l(\Gamma))\,. \tag{4.81}$$

Нехай $G_m := F_m^{-1}$. Покладемо тепер

$$\widetilde{H}_m := (\pi_* \circ G_m \circ l \circ \varphi)(p)\,, \qquad p \in \pi(B(0, \sqrt{r_0}))\,.$$

Покладемо

$$L := \varphi^{-1} \circ l \circ \varphi = \pi \circ l \circ \varphi\,.$$

Доведемо, що

$$L(\Gamma_{\widetilde{H}_m}(r_1, r_2, \widetilde{A})) \subset \Gamma_{\widetilde{G}_m}(r_1, r_2, \widetilde{A})\,. \tag{4.82}$$

Дійсно,

$$\widetilde{H}_m = (\pi_* \circ G_m \circ l \circ \varphi)(p) =$$

$$= (\pi_* \circ G_m \circ \varphi \circ \varphi^{-1} \circ l \circ \varphi)(p) = (\widetilde{G}_m \circ \varphi^{-1} \circ l \circ \varphi)(p) = \tag{4.83}$$
$$= (\widetilde{G}_m \circ L)(p)\,.$$

Нехай $\gamma \in \Gamma_{\widetilde{H}_m}(r_1, r_2, \widetilde{A})$, тоді $\widetilde{H}_m(\gamma) \in \Gamma(\widetilde{S}_1, \widetilde{S}_2, \widetilde{A})$, $\widetilde{A} = \widetilde{A}(p_0^*, r_1, r_2)$. Тоді з огляду на (4.83) маємо: $L(\gamma) \in \Gamma_{\widetilde{G}_m}(r_1, r_2, \widetilde{A})$. Включення (4.82) доведено.

Тепер зауважимо, що

$$\widetilde{M}(\Gamma) \leqslant 2\widetilde{M}(L(\Gamma)) \tag{4.84}$$

для будь-якої сім'ї кривих Γ у $\pi(B(0, r_0))$, де $\widetilde{M}$, як і вище, позначає модуль сімей кривих у $\mathbb{D}/G$. Дійсно, нехай Γ – вказана сім'я кривих. За вибором $B(0, r_0) \subset V$ і околу $V \subset U$, а також в силу рівності $M_h(\Gamma) = M(\Gamma)$ (див., напр., [70, зауваження 5.2]),

$$\widetilde{M}(\Gamma) = M_h(\varphi(\Gamma)) = M(\varphi(\Gamma))\,. \tag{4.85}$$

За нерівністю (4.81)

$$M(\varphi(\Gamma)) \leqslant 2 \cdot M(l(\varphi(\Gamma)))\,. \tag{4.86}$$

Знову, за вибором $B(0, r_0) \subset V$ і околу $V \subset U$, а також в силу рівності $M_h(\Gamma) = M(\Gamma)$ ([70, зауваження 5.2]))

$$M(l(\varphi(\Gamma))) = M_h(l(\varphi(\Gamma))) = \widetilde{M}((\pi \circ l \circ \varphi)(\Gamma)) = \widetilde{M}(L(\Gamma))\,. \tag{4.87}$$

Поєднуючи (4.85), (4.86) і (4.87), отримаємо бажане співвідношення (4.84).

Остаточно, з (4.82), (4.84) і (4.87) отримаємо, що

$$\widetilde{M}(\Gamma_{\widetilde{H}_m}(r_1, r_2, \widetilde{A})) \leqslant 2\widetilde{M}(L(\Gamma_{\widetilde{H}_m}(r_1, r_2, \widetilde{A}))) \leqslant \tag{4.88}$$
$$\leqslant 2\widetilde{M}(\Gamma_{\widetilde{G}_m}(r_1, r_2, \widetilde{A})) \leqslant 2 \cdot \int\limits_{\widetilde{A} \cap \pi_*(B(0,R_0))} Q(p_*) \cdot \eta^2(\widetilde{h}_*(p_*, p_0^*))\, d\widetilde{v}_*(p_*)\,.$$

Нерівності у (4.88) доводять, що відображення $\widetilde{H}_m$, $m = 1, 2, \ldots$, є відображеннями з основної нерівності (4.68), в який приймає участь деяка (не залежна від m) інтегровна функція Q, причому є відкритими і дискретними відображеннями між областями просторів $\mathbb{D}/G$ і $\mathbb{D}/G_*$ з точкою розгалуження p_0. Можна показати, що для $\widetilde{H}_m$ всі умови теореми 4.5.1 виконуються (за умови, що простір $\mathbb{D}/G$ допускає слабку сферикалізацію та за умови, що відповідний розширений простір $\overline{\mathbb{D}/G}$ є локально лінійно зв'язним).

Висновки до розділу 4

У даному розділі розвинута теорія відображень, що діють між метричними просторами:

1. Доведена теорема 4.1.1 про нульвимірність (сталість) відображення f за умови локально рівномірної збіжності послідовності відображень f_m, що є Q-відображеннями відносно (p, q)-модулів в кожній точці образу.

2. Доведена теорема 4.2.1 про одностайну неперевність сім'ї всіх гомеоморфізмів $g : D' \to D$ області D' на область D, обернені до яких є Q-гомеоморфізмами за умов, що D' є QED-областю та умови існування не менше двох точок межі образу, а $Q \in L^1(D)$; теорема 4.2.2 про неперевне продовження та одностайну неперервність у замиканні області сім'ї цих відображень за умови, що $\operatorname{diam} f(A) \geq \delta$ при відображенні $f := g^{-1}(A)$. Доведена теорема 4.2.3 про одностайну неперервність сім'ї гомеоморфізмів, обернені до яких є кільцевими Q-відображеннями у внутрішніх точках для просторів зі сферикалізацією. Доведена теорема 4.2.4 про неперервне продовження відображень на межу та їх одностайну неперервність у замиканні області за умови слабкої плоскості прообразу.

3. Доведена теорема 4.3.1 про неперевне продовження відкритого дискретного кільцевого Q-відображення в ізольовану точку межі за умови, що образ не набуває значень деякого континуума, а функція Q є

інтегровною. Також доведена теорема 4.3.2 про скрізь щільність образу довільного околу істотної особливості для відкритого дискретного кільцевого Q-відображення відносно (p,q)-модуля.

4. Доведені: теорема 4.4.1 про неперервне продовження дискретного, відкритого, замкненого кільцевого Q-відображення відносно (p,q)-модуля на межу області, поповненої її простими кінцями, за умови що образ вихідної області має сильно досяжну межу, а простір-ціль задовольняє слабку сферикалізацію та виконана умова $Q\in FMO(\partial D)$; теорема 4.4.2 про одностайну неперервність сім'ї відображень із теореми 4.4.1 в замиканні області, поповненої її простими кінцями за умови, що області є одностайно рівномірними по класу.

5. Доведена теорема 4.5.1 про одностайну неперервність сім'ї відкритих дискретних відображень з оберненою нерівністю Полецького у випадку, коли вихідний простір допускає слабку сферикалізацію, а межа образу містить не менше двох точок.

ВИСНОВКИ ЗА ДИСЕРТАЦІЄЮ В ЦІЛОМУ

Таким чином, дисертація робить внесок у розвиток теорії відображень зі скінченним спотворенням. Усі основні результати дисертації є новими.

До основних результатів дисертації можуть бути віднесені наступні:

1. Була доведена одностайна неперервність:

– у внутрішніх точках області сімей відображень, обернені до яких є Q-гомеоморфізмами та кільцевими Q-гомеоморфізмами за умови, що відповідна функція Q з означень цих класів є інтегровною в D;

– сім'ї відкритих дискретних відображень з оберненою нерівністю Полецького між метричними просторами у випадку, коли вихідний простір допускає слабку сферикалізацію, а межа образу містить не менше двох точок.

2. Доведена логарифмічна неперервність за Гельдером сім'ї відкритих дискретних відображень, що задовольняють обернену нерівність Полецького у кожній точці образу області за умови виконання логарифмічної нерівності та наслідок теореми у випадку, коли f є гомеоморфізмом в D.

3. Були доведені неперервне продовження на межу та одностайна неперервність в замиканні області:

– сім'ї відображень, обернені до яких $f=g^{-1}$ є Q-гомеоморфізмами за умов $Q\in L^1(D)$, $h(f(A)):=\sup\limits_{x,y\in f(A)}h(x,y)\geqslant\delta$ та $\operatorname{diam} f(A)\geq\delta$ для деякого невиродженого континуума A;

– кільцевих Q-гомеоморфізмів, що задовольняють умови $h(f(A))\geqslant\delta$ і $h(\overline{\mathbb{R}^n}\setminus f(D))\geqslant\delta$ в $\overline{D}$ за умови $Q\in FMO(\overline{D})$ або за умови розбіжності деякого інтеграла;

- сім'ї всіх відкритих дискретних замкнених Q-відображень за умов $Q \in FMO(\overline{D})$ або умови розбіжності інтеграла, сім'ї відображень згаданої вище з умовою, що для будь-якої області $D_f' := f(D)$ знайдеться континуум $K_f \subset D_f'$ такий, що $h(K_f) \geqslant \delta$ і $h(f^{-1}(K_f), \partial D) \geqslant \delta > 0$;

- сім'ї гомеоморфізмів, обернені до яких є кільцевими Q-відображеннями у внутрішніх точках для просторів зі сферикалізацією та за умови слабкої плоскості прообразу.

4. Доведена можливість неперервного продовження в ізольовану точку межі відкритого дискретного кільцевого Q-відображення в метричному просторі за умови, що образ не набуває значень деякого континуума, а функція Q є інтегровною.

5. Доведена теорема про нульвимірність (сталість) відображення f за умови локально рівномірної збіжності послідовності відображень f_m, що є «оберненими» Q-відображеннями відносно (p, q)-модулів в кожній точці образу (результат доведений у метричному просторі).

6. Доведені теореми про неперевне продовження на межу області, поповнену її простими кінцями дискретного, відкритого, замкненого кільцевого Q-відображення метричного простору відносно (p, q)-модуля:

- за умови що образ вихідної області має сильно досяжну межу, а простір-ціль задовольняє слабку сферикалізацію та виконана умова $Q \in FMO(\partial D)$;

- за умови, що області є одностайно рівномірними по класу.

7. У випадку локально зв'язних областей метричного простору доведена теорема про скрізь щільність образу довільного околу істотної особливості для відкритого дискретного кільцевого Q-відображення відносно (p, q)-модуля.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Альфорс Л. Лекции по квазиконформным отображениям. Москва: Мир, 1969. 133 с.

2. Афанасьева Е. О граничном поведении одного класса отображений в метрических пространствах. *Укр. мат. журн.* 2014. Т. 66. № 1. С. 17–29.

3. Берже М. Геометрия. Москва: Мир, 1984. Т. 1. 560 с.

4. Бердон А. Геометрия дискретных групп. Москва: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. 304 с.

5. Гутлянский В., Рязанов В., Якубов Е. Уравнения Бельтрами и простые концы. *Укр. мат. вест.* 2015. Т.12. №1. 27-–66; English transl. in J. Math. Sci. (N.Y.) 2015. Vol. 210, No 1. P. 22—51.

6. Игнатьев А., Рязанов В. Конечное среднее колебание в теории отображений. *Укр. мат. вестник.* 2005. Т.2. №. 3. С.395–417.

7. Ильютко Д., Севостьянов Е. Об открытых дискретных отображениях с неограниченной характеристикой на римановых многообразиях. *Мат. Сборник.* 2016. Т. 207, № 4. С. 65–112; англ. перевод Open discrete mappings with unbounded coefficient of quasiconformality on Riemannian manifolds. *Sbornik Mathematics.* 2016. Vol. 207, No. 4. P. 537–580.

8. Ильютко Д., Севостьянов Е. О граничном поведении открытых дискретных отображений на римановых многообразиях. *Матем. сб.* 2018. Т. 209. № 5. С. 3–53; англ. перевод Il'yutko D.P., Sevost'yanov T.A. Boundary behaviour of open discrete mappings on Riemannian manifolds. *Sb. Math.* 2018. V.209. No. 5. P. 605–651.

9. Ковтонюк Д., Рязанов В. Простые концы и классы Орлича–Соболева. *Алгебра и анализ.* 2015. Т. 27, № 5. С. 81–116.

10. Ковтонюк Д., Рязанов В. К теории простых концов для пространственных отображений. *Укр. мат. журн.* 2015. Т. 67. № 4. С. 467—479; English transl. in *Ukrainian Math. J.* 2015. Vol. 67, No 4. P. 528—541.

11. Куратовский К. Топология, Т. 2, Москва: Мир, 1969. 624 с.transl. Kuratowski K. Topology, Vol. 2, Academic Press, New York–London, 1968.

12. Мазья В. Г. Пространства Соболева. Ленинград: Изд-во ленинградского ун-та, 1985. 416 с.

13. Полецкий Е.А. Метод модулей для негомеоморфных квазиконформных отображений *Матем. сб.* 1970. Т. 83, № 2. С. 261–272.

14. Решетняк Ю.Г. Пространственные отображения с ограниченным искажением. Новосибирск: Наука, 1982. 288 с.

15. Решетняк Ю.Г. Оценки модуля непрерывности для некоторых отображений. *Сиб. матем. ж.* 1966. Т. 7. №5. С. 1106–1114.

16. Рязанов В., Салимов Р. Слабо плоские пространства и границы в теории отображений. *Укр. матем. вестник.* 2007. Т. 4, № 2, 199–234.

17. Салимов Р., Севостьянов Е. О равностепенной непрерывностыи одного семейства обратных отображений в терминах простых концов. *Укр. мат. журн.* 2018 Т. 70, № 9. С. 1264–1273.

18. Севостьянов Е.А. Исследование пространственных отображений геометрическим методом. Киев: Наукова думка, 2014. 304 с.

19. Севостьянов Е.А. Обобщение одной леммы Е.А. Полецкого на классы пространственных отображений. *Укр. матем. ж.* 2009. Т. 61, № 7. С. 969–975.

20. Севостьянов Е.А. О граничном поведении открытых дискретных отображений с неограниченной характеристикой. *Укр. матем. ж.* 2012. Т. 64, № 6. С. 855–859.

21. Севостьянов Е.А. О граничном продолжении и равностепенной непрерывности семейств отображений в терминах простых концов. *Алгебра и анализ.* 2018. Т.30, № 6. С. 97–146.

22. Севостьянов Е.А. Об открытости и дискретности отображений с неограниченной характеристикой квазиконформности. *Укр. матем. ж.* 2011. Т. 63, № 8. С. 1128–1134.

23. Севостьянов Е.А. О локальном и граничном поведении отображений в метрических пространствах. *Алгебра и анализ.* 2016. Т. 28, № 6. С. 118–146.

24. Севостьянов Е.А. О нульмерности предела последовательности обобщенно квазиконформных отображений *Матем. Заметки.* 2017. Т. 102, № 4. С. 586–596.

25. Севостьянов Е.А. О равностепенной непрерывности гомеоморфизмов с неограниченной характеристикой, *Математические труды.* 2012 Т. 15, №. 1, С. 178–204; transl. Equicontinuity of homeomorphisms with unbounded characteristic, *Siberian Advances in Mathematics* 2013. Vol.23, No. 2. P. 106–122.

26. Севостьянов Є.О. Про нерівність типу Полецького для відображень ріманових поверхонь, Укр. мат. журнал, **72**, no. 5, 2020, p. 705–720.

27. Севостьянов Є.О., Скворцов С.О., Довгоп'ятий О.П. Про негомеоморфні відображення з оберненою нерівністю Полецького. *Укр. мат вісник.* 2020. Т. 17, № 3. С. 414-436; translation On nonhomeomorphic mappings with the inverse Poletsky inequality. *Journal of Mathematical Sciences (United States).* 2021. V. 252, No. 4. P. 541-557.

28. Севостьянов Е.А., Скворцов С.А. О локальном поведении одного класса обратных отображений. *Труды ИПММ НАН Украины.* 2018. Т. 32. С. 115-120.

29. Севостьянов Е.А., Скворцов С.А. О локальном поведении одного класса обратных отображений. *Укр. мат. вестник.* 2018. Т. 15, № 3. С. 399-417; translation On the local behavior of a class of inverse mappings. *J. Math. Sci.* 2019. V. 241, No. 1. P. 77-89.

30. Севостьянов Е.А., Скворцов С.А. О локальном поведении отображений метрических пространств. *Укр. мат. вестник.* 2019. Т. 16, № 2. С. 215–227; transl. Sevost'yanov E.A., Skvortsov S.A. On the local behavior of mappings of metric spaces. *J. Math. Sci.* 2020. Vol. 244, No. 1. P. 47–55.

31. Севостьянов Е.А., Скворцов С.А. О равностепенной непрерывности семейств отображений в случае переменных областей. *Укр. мат. журн.* 2019. Т. 71, № 7. С. 938-951; translation On the equicontinuity of families of mappings in the case of variable domains. *Ukrainian Mathematical Journal.* 2019. V. 71, No. 7. P. 1071-1086.

32. Севостьянов Е.А., Скворцов С.А. О сходимости отображений в метрических пространствах с прямыми и обратными модульными условиями. *Укр. мат. журн.* 2018. Т. 70, № 7. С. 952-967; translation On the Convergence of Mappings in Metric Spaces with Direct and Inverse Modulus Conditions. *Ukr. Math. J.* 2018. V. 70, No. 7. P. 1097-1114.

33. Севостьянов Є.О., Скворцов С.О., Ількевич Н.С. Про поведінку обернених гомеоморфізмів в термінах простих кінців. *Праці ІПММ НАН України.* 2019. Т. 31. С. 188–203.

34. Скворцов С.О. Локальна поведінка відображень метричних просторів з розгалуженням. *Укр. мат. вісн.* 2020. Т. 17, № 4, С. 574-593;

translation Local behavior of mappings of metric spaces with branching. *Journal of Mathematical Sciences (United States).* 2021. Vol. 254, P. 425-438.

35. Смоловая Е. С. Граничное поведение кольцевых Q-гомеоморфизмов в метрических пространствах. *Укр. мат. журн.* 2010. Vol. 62, No. 5. P. 682–689. English transl. On boundary behavior of one class of mappings in metric spaces. *Ukrainian Math. Journ.* 2014. Vol. 66, No. 1, P. 16–29.

36. Суворов Г.Д., Обобщённый принцип длины и площади в теории отображений. Киев: Наукова Думка, 1985. 277 с.

37. Adamowicz T., Björn A., Björn J., Shanmugalingam N. Prime ends for domains in metric spaces / *Adv. Math.* 2013. Vol. 238. P. 459-–505.

38. Adamowicz T. Prime ends in metric spaces and quasiconformal-type mappings *Analysis and Mathematical Physics.* 2019. Vol. 9. P. 1941–1975.

39. Adamowicz T., Shanmugalingam N. Non-conformal Loewner type estimates for modulus of curve families. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.* 2010. Vol. 35. P. 609—626.

40. Bishop C.J., Gutlyanskii V.Ya., Martio O., Vuorinen M. On conformal dilatation in space. *Intern. J. Math. Sci.* 2003. Vol. 22. P. 1397–1420.

41. Björn A., Björn J. Nonlinear Potential Theory on Metric Spaces. *EMS Tracts in Mathematics.* 2011. Vol. 17. P. 47-50.

42. Cheeger J. Differentiability of Lipschitz functions on metric measure spaces. *Geom. Funct. Anal.* 1999 Vol. 9, P. 428-–517.

43. Cristea M. Open discrete mappings having local ACL^n inverses. *Complex Variables and Elliptic Equations.* 2010. Vol. 55, No. 1–3. P. 61–90.

44. Cristea M. Some properties of open, discrete, generalized ring mappings. *Complex Variables and Elliptic Equations.* 2015. 21 p.

45. Fuglede B. Extremal length and functional completion. *Acta Math.* 1957. Vol. 98. P. 171–219.

46. Golberg A., Salimov R., Sevost'yanov E. Normal Families of Discrete Open Mappings with Controlled p-Module. *Contemporary Mathematics.* 2016. Vol. 667. P. 83–103.

47. Gutlyanskiĭ V., Martio O., Ryazanov V., Vuorinen M. On convergence theorems for space qusiregular mappings *Forum Math.* 1998. Vol. 10. P. 353–375.

48. Gutlyanskiĭ V., Martio O., Ryazanov V., Vuorinen M. On local injectivity and asymptotic linearity of quasiregular mappings. *Studia Math.* 1998. Vol. 128, No. 3, P. 243–271.

49. Gutlyanskii V.Ya., Ryazanov V.I. Infinitesimal Geometry of Spatial Mappings. Kiev: Akademperiodyka, 2013, 187 pp., ISBN 978-966-360-243-1.

50. Heinonen J. Lectures on Analysis on metric spaces. New York: Springer Science+Business Media, 2001. 141 p.

51. Herron J., Koskela P. Quasiextremal distance domains and conformal mappings onto circle domains. *Compl. Var. Theor. Appl.* 1990. Vol. 15. P. 167–179.

52. Iwaniec T., Martin G. Geometrical Function Theory and Non-Linear Analysis. Oxford: Clarendon Press, 2001.

53. Koskela P., Onninen J. Mappings of finite distortion: Capacity and modulus inequalities. *J. Reine Angew. Math.* 2006. Vol. 599. P. 1–26.

54. Lee J.M. Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature. New York: Springer, 1997. 243 p.

55. Lehto O., Virtanen K. Quasiconformal Mappings in the Plane. New York: Springer, 1973. 258 p.

56. Martio O., Rickman S., Väisälä J. Definitions for quasiregular mappings. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1.* 1969. Vol. 448. P. 1–40.

57. Martio O., Rickman S., Väisälä J. Distortion and singularities of quasiregular mappings. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1.* 1970. Vol. 465. P.1–13.

58. Martio O., Rickman S., Väisälä J. Topological and metric properties of quasiregular mappings. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1.* 1971. Vol. 488. P. 1–31.

59. Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. Mappings with finite length distortion. *J. d'Anal. Math.* 2004. Vol. 93. P. 215–236.

60. Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. Moduli in Modern Mapping Theory. New York etc.: Springer, Springer Monographs in Mathematics, 2009. 367 p.

61. Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. On Q-homeomorphisms. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1.* 2005. Vol. 30, No. 1. P. 49–69.

62. Näkki R. Prime ends and quasiconformal mappings. *J. Anal. Math.* 1979. Vol. 35. P.13–40.

63. Näkki R., Palka B. Uniform equicontinuity of quasiconformal mappings. *Proc. Amer. Math. Soc.* 1973. Vol. 37, No. 2, P. 427–433.

64. Näkki R., Palka B. Boundary regularity and the uniform convergence of quasiconlormal mappings. *Comment. Math. Helvetici.* 1979 Vol. 54. P.458—476.

65. Rickman S. Quasiregular mappings, Results in Mathematic and Related Areas. Berlin: Springer-Verlag, 1993. 213 p.

66. Ryazanov V., Sevost'yanov E. Toward the theory of ring Q-homeomorphisms. *Israel J. Math.* 2008. Vol. 168. P. 101–118.

67. Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. Finite mean oscillation and the Beltrami equation. *Israel Math. J.* 2006. Vol. 153. P. 247–266.

68. Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. On ring solutions of Beltrami equations. *J. d'Anal. Math.* 2005. Vol. 96. P. 117–150.

69. Ryazanov V., Volkov S. On the Boundary Behavior of Mappings in the Class $W_{loc}^{1,1}$ on Riemann Surfaces. *Complex Analysis and Operator Theory.* 2017. Vol. 11. P. 1503–1520.

70. Sevost'yanov E. On boundary extension of mappings in metric spaces in terms of prime ends. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.* 2019. Vol. 44, No. 1, P.65–90.

71. Sevost'yanov E.A. On open and discrete mappings with a modulus condition. *Ann. Acad. Sci. Fenn.* 2016. Vol. 41. P. 41–50.

72. Sevost'yanov E., Markysh A. On Sokhotski-Casorati-Weierstrass theorem on metric spaces. *Complex Variables and Elliptic Equations.* 2019. Vol. 64, No. 12, P. 1973–1993.

73. Sevost'yanov E.O., Skvortsov S.O. Logarithmic Hölder continuous mappings and Beltrami equation. *Anal.Math.Phys.* 2021. V. 11, No. 138. https://doi.org/10.1007/s13324-021-00573-6

74. Sevost'yanov E., Skvortsov S. On behavior of homeomorphisms with inverse modulus conditions, www.arxiv.org, arXiv:1801.01808, p. 1–14.

75. Sevost'yanov E.A., Skvortsov S.A. On mappings whose inverse satisfy the Poletsky inequality. *Ann. Acad. Scie. Fenn. Math.* 2020. Vol. 45. P. 259-277.

76. Sevost'yanov E., Skvortsov S., Ilkevych N. On boundary behavior of mappings with two normalized conditions. *Mat. Studii.* 2018. Vol. 49, No. 2. P. 150-157.

77. Sevost'yanov E., Skvortsov S., Ilkevych N. On removable singularities of mappings in uniform spaces. *Mat. Studii.* 2019. Vol. 52, No. 1. P. 24-31.

78. Ilkevych, N., Sevost'yanov, E., Skvortsov, S. On the global behavior of inverse mappings in terms of prime ends. *Annales Fennici Mathematici.* 2021. Vol. 46, No. 1. P. 371–388.

79. Väisälä J. Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings. Berlin etc.: Springer-Verlag, Lecture Notes in Math. Vol. 229, 1971. 144 p.

80. Väisälä J. Modulus and capacity inequalities for quasiregular mappings. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A 1 Math.* 1972. Vol. 509, P.1–14.

81. Vuorinen M. Conformal Geometry and Quasiregular Mappings. Lecture Notes in Math. Berlin etc.: Springer–Verlag, 1988. Vol. 1319. 214 p.

82. Vuorinen M. Exceptional sets and boundary behavior of quasiregular mappings in n-space. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A 1. Math. Dissertationes.* 1976. Vol. 11. P. 1–44.

83. Vuorinen M. On the existence of angular limits of n-dimensional quasiconformal mappings. *Ark. Math.* 1980. Vol. 18. P. 157–180.