

## ВІДГУК

офіційного опонента на дисертаційну роботу Дмитренка Сергія Олександровича  
«Двосимвольні системи кодування чисел,  
пов'язані з ланцюговими дробами, та їх застосування»  
подану на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук  
за спеціальністю 01.01.06 – алгебра і теорія чисел

Дисертація Дмитренка С.О. в основному присвячена розвитку теорії ланцюгових дробів, елементами яких є два додатні дійсні числа (так звані ланцюгові  $A_2$ -дроби, введені в математику у 2009 році дисертантом і його співавторами), побудові тополого-метричної та ймовірнісної теорії таких ланцюгових дробів.

**Актуальність теми дослідження.** Сьогодні теорія ланцюгових дробів – добре розвинута галузь математики з багаточисельними застосуваннями. Вона має довгу і багату історію. В її становленні брали участь видатні особистості: Л.Ейлер, Лагранж, К.Гаусс, П.Л.Чебишев, А.А. Марков, О.Я. Хінчин тощо.....

Ланцюгові дроби є важливим способом представлення чисел і функцій, засобом вивчення діофантових рівнянь і ортогональних многочленів. Але ідея отримати систему зображення чисел цілого відрізка нескінченними ланцюговими дробами з двома різними елементами, коли при цьому переважна більшість чисел мають єдине зображення, виявилась новою і плідною. Вона успішно реалізується в даній дисертаційній роботі. В цьому полягає її актуальність.

**Аналіз структури та змісту роботи.** Робота складається зі вступу, чотирьох розділів, розділених на підрозділи, висновків до кожного розділу та загальних висновків, списку використаних джерел (98 найменувань) та додатку з списком публікацій здобувача і відомостей про апробацію результатів дослідження.

У першому розділі «Огляд літератури та концептуальні засади дослідження» здійснено виклад основних відомостей та фактів, що використовуються у дисертаційному дослідженні, а також проведено огляд літератури та наукових здобутків, що стосуються теорії ланцюгових дробів. Важливою частиною цього розділу є абстрактна схема кодування (зображення) чисел з допомогою двосимвольного алфавіту. Тут наведено конструкції топологічного простору, ймовірнісних мір та мір Гаусдорфа, розмірності Гаусдорфа-Безиковича у просторі послідовностей нулів та одиниць.

У другому розділі «Медіантне зображення дійсних чисел» розглядається, запропонована дисертантом, система двосимвольного кодування чисел одиничного відрізка, яка ґрунтується на медіантному розбитті відрізка. Вона пов'язана з послідовностями Фарея і елементарними ланцюговими дробами. Запропоноване зображення чисел використано для знаходження аналітичного виразу відомої сингулярної функції Мінковського – популярного об'єкту у сучасних наукових

дослідженнях. Окремою складовою теорії є результати дослідження структури розподілу випадкової величини, цифри медіантного зображення якої є незалежними випадковими величинами.

У третьому розділі «Ланцюгові  $A_2$ -дроби» викладено побудовану автором тополого-метричну теорію ланцюгових  $A_2$ -дробів, центральним поняттям якої є циліндрична множина ( $A_2$ -циліндр). Детально описано властивості циліндричних множин, геометричний зміст цифр зображення, розв'язано метричні задач.

У четвертому розділі «Застосування ланцюгових  $A_2$ -дробів до вивчення об'єктів з фрактальними властивостями» розглядаються застосування ланцюгових  $A_2$ -дробів у теорії фрактальної розмірності Гаусдорфа-Безиковича і метричній теорії функцій. Дослідження, що стосується фрактальної розмірності, присвячено питанню довірчості системи покриттів  $A_2$ -циліндрами у задачі обчислення розмірності Гаусдорфа-Безиковича. Застосування у теорії функцій стосується трьох класів специфічно заданих функцій з фрактальними властивостями. Функції першого класу визначаються ланцюговими  $A_2$ -розкладами аргументу і нескінченними абсолютно збіжними добутками. У другому класі функцій аргумент і значення функції представляються ланцюговими  $A_2$ -дробами, при цьому цифри зображення значення функції залежать від пар послідовних цифр аргумента, що мають ланцюгову скріпленість. В останньому пункті розділу вивчається лебегівська структура (вміст дискретної та абсолютно неперервної компонент) значень функції розподілу випадкової величини з незалежними елементами зображення додатним рядом Люрота.

**Наукова новизна і ступінь обґрунтованості результатів.** У роботі запропоновано три моделі зображення чисел заданого проміжку, одна з яких абстрактна, а дві інші – метричні.

У дисертаційній роботі побудовано цілісну тополого-метричну теорію двосимвольного кодування чисел заданого відрізка на основі розкладу чисел в нескінченні ланцюгові дроби, елементами яких є два дійсні додатні числа (ланцюгові  $A_2$ -дроби). Знайдено необхідні і достатні умови, при яких така система кодування має нульову надлишковість (кожне число має не більше двох зображень). На основі отриманих метричних співвідношень і розв'язків метричних задач вказано конкретні застосування теорії ланцюгових  $A_2$ -дробів у фрактальному аналізі та метричній теорії функцій з фрактальними властивостями.

Принципово іншу реалізацію загальної схеми кодування дійсних чисел одиничного відрізка побудовано на основі медіантного поділу відрізка. У роботі отримали розвиток метрична та ймовірнісна теорії цього зображення чисел. Вказано його зв'язок з розкладами чисел в елементарні ланцюгові дроби. Знайдено ефективне

застосування медіантного зображення чисел для аналітичного задання сингулярної функції Мінковського.

Всі результати є новими і строго доведеними, їх правильність не викликає сумнівів.

**Теоретична та практична цінність роботи.** Робота носить в основному теоретичний характер, вказані застосування стосуються суміжних галузей. Ланцюгові  $A_2$ -дроби уже знайшли свої застосування у ряді досліджень інших авторів у теорії ймовірностей та теорії функцій. Подальші дослідження у цій галузі вважаю перспективними.

**Повнота викладу в опублікованих працях та апробація роботи.** Основні положення дисертаційного дослідження, які виносяться на захист, отримані автором самостійно і достатньо повно викладені у 8 статтях, опублікованих у фахових виданнях, а 1 з яких у виданні, що індексується міжнародною наукометричною базою Scopus, а також у 5 тезах доповідей на наукових конференціях. Автореферат правильно відображає зміст дисертації.

**Зауваження та побажання.**

1. Є ряд зауважень до оформлення роботи:
  - 1.1. Не всі скорочення та умовні позначення, які наведені у списку використовуються, тоді як окремі, що використовуються в списку не зазначаються.
  - 1.2. У роботі зустрічається чимало стилістичних та орфографічних описок.
2. У дисертації автор використовує два позначення для ланцюгових дробів з двоелементною базисною множиною, одне з яких називає  $A_2$  –зображенням, а інше  $A$  –зображенням. Кожне з них є природнім, разом з цим іноді перехід від одного до іншого є стихійним, що створює незручності для читача. Вважаю, що можна було би вповні обійтись  $A$  –зображенням, більш зручним в питаннях застосувань.
3. В роботі вживається дві українські транслітерації одного і того ж прізвища: Хаусдорф і Гаусдорф.
4. Здається, що список використаних літератури містить джерела, що не мають прямого відношення до об'єктів дослідження і природньо, що не були процитовані.
5. У першій частині доведення теореми 3.2 не вказано який з двох випадків розглядається.
6. Наведені в дисертації властивості неперервних дробів можна було б не давати (стор. 44-46).
7. Формулювання деяких тверджень не завжди повні (наприклад, в Лемі 3.2 не вказано функцію  $I(x)$ ).

Вказані недоліки носять рекомендаційний характер і не впливають на загальну позитивну оцінку дисертаційної роботи.

**Загальні висновки.** Оцінюючи дисертаційну роботу в цілому, можна сказати, що дисертантом проведена значна дослідницька робота.

Враховуючи актуальність дослідження, нетривіальність конструкцій математичних структур, які розглядаються, відносну цілісність побудованих теорій і важливість отриманих результатів, які певним чином збагачують метричну теорію ланцюгових дробів, теорію функцій, завершеність роботи, а також відсутність академічної недоброчесності, належну якість публікацій, вважаю, що дисертаційна робота С.О. Дмитренка задовольняє всім вимогам п.п. 9, 11, 12-14 «Порядку присудження наукових ступенів», затвердженого Постановою Кабінету Міністрів України №567 від 24 липня 2013 року (зі змінами, внесеними згідно з Постановами Кабінету Міністрів України № 656 від 19 серпня 2015 року та № 1159 від 30 грудня 2015 року), які висуваються до кандидатських дисертацій, а тому її автор Дмитренко Сергій Олександрович заслуговує на присудження наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук зі спеціальності 01.01.06 – алгебра та теорія чисел.

Завідувач кафедри комп'ютерної алгебри  
та дискретної математики  
Одеського національного  
університету імені І.І. Мечникова,  
доктор фізико-математичних наук, професор



Варбанець П.Д.

Підпис проф. Варбанець П.Д.  
**ЗАСВІДЧУЮ**  
Вчений секретар ОНУ імені І.І. Мечникова  
С. В. Курандо  
\* 20\_\_ р.



Надійшов 10.12.2021 р.