Міністерство освіти і науки України
Національний педагогічний університет
імені М. П. Драгоманова

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Дмитренко Сергій Олександрович

УДК 511.72

Дисертація

Двосимвольні системи кодування чисел, пов'язані з ланцюговими дробами, та їх застосування

01.01.06 — алгебра та теорія чисел
111 — математика

Подається на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

____________ С. О. Дмитренко

Науковий керівник: **Працьовитий Микола Вікторович**,
доктор фізико-математичних наук, професор

Київ — 2021

АНОТАЦІЯ

Дмитренко С.О. Двосимвольні системи кодування чисел, пов'язані з ланцюговими дробами, та їх застосування. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.06 — алгебра та теорія чисел (111 — математика). — Інститут математики НАН України, Київ, 2021.

Дисертаційна робота виконана на кафедрі вищої математики Національного педагогічного університету імені М.П. Драгоманова.

Дослідження проведено в галузі метричної та ймовірнісної теорії чисел [39] . Воно присвячено розвитку топологічної, метричної [78] та фрактальної теорій дійсних чисел [60, 74, 75], що базуються на двосимвольних системах кодування чисел, пов'язаних з ланцюговими дробами, а також їх застосуванням у метричний та ймовірнісній теоріях чисел, фрактальному аналізі та теорії функцій.

У роботі обґрунтовано дві двосимвольні системи кодування дійсних чисел [21, 26] з нульовою надлишковістю, пов'язані з елементарними та неелементарними ланцюговими дробами (медіантне зображення, ланцюгове A_2-зображення). Перша визначається системою подрібнюючих розбиттів відрізка на циліндри різних рангів, що ґрунтується на медіантному поділі відрізка: $\left[\frac{a}{b};\frac{c}{d}\right]=\left[\frac{a}{b};\frac{a+c}{b+d}\right]\cup\left[\frac{a+c}{b+d};\frac{c}{d}\right]$. Друга система кодування базується на розкладі числа в ланцюговий дріб, елементи якого належать множині $A_2=\{\alpha_1,\alpha_2\}$, $\alpha_i>0,\alpha_1\alpha_2=\frac{1}{2}$.

Створено цілісну тополого-метричну теорію вказаних зображень, знайдено основні метричні відношення і розв'язано ряд метричних задач.

Доведено, що медіантне зображення чисел є двосимвольним перекоду-

ванням зображення чисел елементарними ланцюговими дробами. В його термінах знайдено новий вираз класичної сингулярної строго зростаючої функції Мінковського.

Для ланцюгового A_2-зображення чисел знайдено ефективні застосування у теорії фракталів та теорії локально складних функцій. Знайдено еквівалантне означення фрактальної розмірності Гаусдорфа-Безиковича у термінах A_2-зображення, описано властивості двох класів функцій. Функції першого класу визначаються A_2-зображенням і нескінченними абсолютно збіжними добутками чисел, а функції другого класу задаються перетворювачами пар A_2-цифр аргумента у A_2-цифри значення функції з їх ланцюговою скріпленістю.

Дисертаційна робота складається з анотації українською й англійською мовами, переліку скорочень і умовних позначень, вступу, чотирьох розділів, поділених на підрозділи, висновків до кожного розділу й загальних висновків, списку використаних джерел і додатку.

Основними об'єктами дослідження є:

1. Медіантне представлення чисел відрізку $[0;1]$, що задається системою подрібнюючих розбиттів цього відрізка медіантами кінців циліндрів, які визначаються послідовностями Фарея.
2. Нескінченні ланцюгові A_2-дроби виду $[0; a_1, \ldots, a_n, \ldots]$, де $a_n \in A_2 = \{\alpha_1, \alpha_2\}, \alpha_i \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha_1 < \alpha_2$.
3. Геометрія медіатного та A_2-представлень чисел (властивості циліндричних множин, метричні задачі та відношення).
4. Фрактальні властивості функцій та множин заданих за допомогою вище вказаних представлень чисел.

У вступі обґрунтовано актуальність дослідження, визначено об'єкт, предмет, мету і завдання дослідження, зазначено наукову новизну одержаних результатів, особистий внесок здобувача.

Перший розділ присвячено концептуальним засадам дослідження. В ньому проведено огляду літератури, наведено відомості з теорії ланцюгових дробів, які використовуються далі, обґрунтовано загальну схему кодування чисел заданого проміжку засобами двосимвольного алфавіту, а також запропоновано моделі топологізації, метризації, ймовірнісної міри та мір Гаусдорфа дробових порядків у абстрактному просторі L послідовностей нулів та одиниць. Вказані математичні структури у просторі L вводять на основі центрального поняття циліндра (циліндричної множини): $\blacksquare_{c_1c_2\ldots c_n} = \left\{(a_n) : (a_n) \in L, a_i = c_i, i = \overline{1,n}\right\}$. Введення означення фрактальної розмірності Гаусдорфа-Безиковича оминає питання метризації, а ґрунтується на мірі визначеній на циліндрах. Наведені конструкції складають новизну першого розділу.

f-кодуванням чисел проміжка $E \subset \mathbb{R}^1$ називається сюр'єктивне відображення простору L у множину E. Воно природнім способом визначає систему f-циліндрів: $f(\blacksquare_{c_1\ldots c_n}) = \Delta^f_{c_1\ldots c_n}$ в E, властивості яких визначаються відображенням f і евклідовою метрикою в $\mathbb{R}^1$.

У другому розділі розглядається зображення чисел відрізка $[0;1]$, що ґрунтується на системі подрібнючих розбиттів цього відрізка медіантами кінців циліндрів, які визначаються послідовностями Фарея. Описано геометрію цього зображення, що включає властивості циліндричних множин, геометричне тлумачення цифр, метричні відношення тощо [23].

Знайдено оцінки: довжин циліндричних інтервалів, основного метричного відношення та точності раціонального наближення дійсних чисел за допомогою медіантного представлення [22] .

Для класичної сингулярної строго зростаючої функції Мінковського:

$$?(x) = ?([0; a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} 2^{1-a_1-\cdots-a_n},$$

де $x = [0; a_1, a_2, \ldots]$ — розклад числа x в елементарний ланцюговий дріб, знайдено її вираз у термінах медіантного представлення:

$$?(x = \Delta^M_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_k(x)\ldots}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i(x)}{2^i}.$$

Доведено, що випадкова величина $\xi = \Delta^M_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_k\ldots}$, цифри (ξ_k) медіантного представлення якої є незалежними випадковими величинами, що набувають значень 0 і 1 з ймовірностями p_{0n} і p_{1n}, має чисто дискретний або чисто неперервний розподіл, обгрунтовано критерії належності кожному з типів; знайдено вираз функції розподілу, описано властивості спектра.

Третій розділ присвячений створенню і розвитку тополого-метричної теорії нескінченних ланцюгових дробів, елементи яких належать множині $A_2 = \{\alpha_1, \alpha_2\}$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha_1 < \alpha_2$.

Нескінченний ланцюговий дріб виду $[0; a_1, \ldots, a_n, \ldots]$, де $a_n \in A_2$, називається *ланцюговим A_2-дробом.* Множина таких дробів L_{A_2} належить відрізку $[\beta_1; \beta_2] : \beta_1 = [0; (\alpha_2, \alpha_1)], \beta_2 = [0; (\alpha_1, \alpha_2)]$, де круглі дужки символізують період, і співпадає з нею, якщо $\alpha_1\alpha_2 \leqslant \frac{1}{2}$. При умові $\alpha_1\alpha_2 > \frac{1}{2}$ множина L_{A_2} є континуальною досконалою ніде не щільною і має нульову міру Лебега. Знайдено необхідні і достатні умови нульової надлишковості A_2-зображення: $\alpha_1\alpha_2 = \frac{1}{2}$.

У цьому розділі детально описано властивості циліндричних множин — позиційні і метричні, знайдено основне метричне відношення і його оцінки. Розглядаються спеціальні функції пов'язані з A_2-зображенням чисел: інверсор та оператору лівостороннього та правостороннього зсувів елементів ланцюгового A_2-зображення. Описано властивості множини A_2-дробів, зображення яких не містять комбінації певних цифр.

У четвертому розділі розглянуто застосування A_2-зображення чисел у теорії метричної розмірності Гаусдорфа-Безиковича та метричної теорії функцій.

Доведено, що будь-яку підмножину $E \subset [\frac{1}{2}; 1]$ можна покрити не більше, ніж шістьма A_2-циліндрами. На основі цього обґрунтовано висновок: при визначенні розмірності Гаусдорфа-Безиковича підмножин відрізка $[\frac{1}{2}; 1]$ можна обмежитися покриттями за допомогою A_2-циліндрів.

Отримано опис структурних та варіаційних властивостей одного класу автомодельних функцій, означених рівністю

$$f(x = \Delta^A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}) = \prod_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{\alpha_k(x)},$$

де (λ_k) — наперед задана послідовність додатних чисел така, що нескінченний добуток $P \equiv \prod\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k$ є абсолютно збіжним.

Вивчено властивості функцій, заданих перетворювачем пар цифр аргумента з їх ланцюговою скріпленістю:

$$f(\Delta^A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^A_{g(\alpha_1,\alpha_2)g(\alpha_2,\alpha_3)\ldots g(\alpha_n,\alpha_{n+1})g(\alpha_{n+1},\alpha_{n+2})\ldots},$$

де $g(i,j)$ — функція, визначена на множині пар елементів алфавіту $\{0,1\}$ і набуває значень 0 або 1, кожну з яких формально можна визначити матрицею $A(g) = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{pmatrix}$, елементи якої $a_{ij} = g(i,j) \in \{0,1\}$. Таких функцій існує $2^4 = 16$. Доведено, що в даному класі існує лише чотири неперервні функції, найцікавішою з яких є інверсор цифр A_2-зображення: $\mathfrak{I}(x = \Delta^A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^A_{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)\ldots(1-\alpha_n)\ldots}$. Встановлено, що множиною значень E_f функції f, визначеної матрицею $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, є ніде не щільна множина нульової міри Лебега, числа якої у A-зображенні не містять комбінації двох послідовних цифр $\overline{11}$.

Додаток містить список публікацій здобувача на тему дисертації й відомості про апробацію результатів дисертації.

Ключові слова: ланцюговий дріб, медіантне представлення, ланцюгове A_2-зображення числа, циліндричні множини, основне метричне відношення, фрактальна розмірність Гаусдорфа-Безиковича .

ABSTRACT

Dmytrenko S. O. Two-symbol systems of encoding of numbers related to continued fractions and their applications. — Qualification scientific work in the form of manuscript.

Thesis for candidate of physical and mathematical sciences degree in speciality 01.01.06 — algebra and number theory (111 — mathematics). — Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2021.

The work is prepared at the Department of Higher Mathematics of National Pedagogical Mykhailo Drahomanov University.

The thesis belongs to the field of metric and probabilistic number theory. It's devoted to the development of topological, metric and fractal theories of real numbers based on two-symbol systems of encoding of numbers related to continuous fractions and their applications in metric and probabilistic number theories, fractal analysis and function theory.

In this paper substantiates two two-symbol systems of encoding of numbers with zero redundancy, related to elementary and non-elementary continuous fractions (mediant representation, continuous A_2-representation). The first one is determined by the system of partitions of the segment into cylinders of different ranks, based on the mediant division of the segment: $\left[\frac{a}{b};\frac{c}{d}\right] = \left[\frac{a}{b};\frac{a+c}{b+d}\right] \cup \left[\frac{a+c}{b+d};\frac{c}{d}\right]$. The second system of coding is based on the expansion of a number into a continuous fraction, the elements of which belong to the set $A_2 = \{\alpha_1, \alpha_2\}$, $\alpha_i > 0, \alpha_1\alpha_2 = \frac{1}{2}$.

An integrated topological-metric theory of these representation is created, the basic metric relations are found and some of metric problems are solved.

It is proved that the mediant representation of numbers is a two-symbol

transcoding of the representation of numbers by elementary continuous fractions. New expression in terms of mediant representation of the classical singular strictly increasing Minkowski function was found.

Effective applications in the theory of fractals and the theory of locally complex functions have been found for the continuous A_2-representation of numbers. An equivalent definition of the Hausdorff-Besicovitch fractal dimension in terms of the A_2-representation is found, and the properties of two classes of functions are described. Functions of the first class are defined by A_2-representation and infinite absolutely convergent products of numbers, and functions of the second class are set by converters of pairs A_2-digits of argument into A_2-digits of value of function with their chain bonding.

The thesis consists of an abstracts in Ukrainian and English, a list of abbreviations and symbols, an introduction, four sections divided into subsections, conclusions for each section and general conclusions, list of used sources and appendix.

The main objects of research are:

1. The mediant representation of the numbers of the segment $[0;1]$, given by the system of partitions of this segment by the mediants of the cylinder ends, which are determined by the Farey sequences.
2. Infinite continuous A_2-fractions $[0; a_1, \dots, a_n, \dots]$, where $a_n \in A_2 = \{\alpha_1, \alpha_2\}, \alpha_i \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha_1 < \alpha_2$.
3. Geometry of mediant and A_2-representations of numbers (properties of cylindrical sets, metric problems and relations).
4. Fractal properties of functions and sets given by mediant and A_2-representations of numbers.

The introduction substantiates the relevance of the research, determined the object, subject, purpose and objectives of the research, the scientific novelty of the obtained results and personal contribution of the applicant are also indicated.

The first section is devoted to the conceptual foundations of the researh. It reviews the literature, provides information on the theory of continuous fractions, which is used below. Substantiates the general scheme with two-symbol alphabet of encoding of numbers from given interval, and offers models of topology, metrization, probability measure and Hausdorff measures in abstract space L of sequences of zeros and ones. These mathematical structures in the space L are introduced on the basis of the central concept of the cylinder (cylindrical set): $\blacksquare_{c_1c_2\ldots c_n} = \left\{(a_n) : (a_n) \in L, a_i = c_i, i = \overline{1, n}\right\}$. Definition of the Hausdorff-Besicovitch fractal dimension bypasses the question of metrization, and based on the measure defined on the cylinders. These constructions are the novelty of the first section.

f-encoding the numbers from interval $E \subset \mathbb{R}^1$ is called the surjective mapping of the space L into set E. It naturally defines a system of f-cylinders: $f(\blacksquare_{c_1\ldots c_n}) = \Delta^f_{c_1\ldots c_n}$ in E, the properties of which are determined by the mapping f and the Euclidean metric in $\mathbb{R}^1$.

The second section considers the representation of the numbers of the segment $[0; 1]$, which is based on the system of partitions of this segment by the mediants of the cylinder ends, which are determined by the Farey sequences. The geometry of this representation is described, which includes the properties of cylindrical sets, geometric interpretation of numbers, metric relations, and so on.

Estimates of: lengths of cylindrical intervals, basic metric relation and accuracy of rational approximation of real numbers by mediant representation are found.

For the classical singular strictly increasing Minkowski function:

$$?(x) = ?([0; a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} 2^{1-a_1-\cdots-a_n},$$

where $x = [0; a_1, a_2, \ldots]$ — elementary continuous fraction, its expression is found in terms of the mediant representation:

$$?(x = \Delta^M_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_k(x)\ldots}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i(x)}{2^i}.$$

It is proved that the random variable $\xi = \Delta^M_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_k\ldots}$, the digits (ξ_k) of the median representation of which are independent random variables that acquire values of 0 and 1 with probabilities p_{0n} and p_{1n}, has a purely discrete or purely continuous distribution, the criteria of belonging to each of the types are substantiated; the expression of the distribution function is found, the properties of the spectrum are described.

The third section is devoted to the creation and development of topological-metric theory of infinite continuous fractions, the elements of which belong to the set $A_2 = \{\alpha_1, \alpha_2\}$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha_1 < \alpha_2$. Infinite continuous fraction $[0; a_1, \ldots, a_n, \ldots]$, where $a_n \in A_2$, is called *continuous A_2-fraction.* The set of such fractions L_{A_2} belongs to the segment $[\beta_1; \beta_2]$: $\beta_1 = [0; (\alpha_2, \alpha_1)], \beta_2 = [0; (\alpha_1, \alpha_2)]$, where (α_1, α_2) period, and coincides with it if $\alpha_1\alpha_2 \leqslant \frac{1}{2}$. If $\alpha_1\alpha_2 > \frac{1}{2}$ the set L_{A_2} is a continuous perfect nowhere dense and has zero Lebesgue measure. Necessary and sufficient conditions of zero redundancy of A_2-representation are found: $\alpha_1\alpha_2 = \frac{1}{2}$.

This section describes in detail the properties of cylindrical sets — positional and metric, found the basic metric ratio and its estimates. Special functions related to the A_2-representation of numbers are considered: the inverter and the operator of the left-hand and right-hand shifts of the elements of the continuous A_2-representation. The properties of the set of A_2-fractions, the representation of which do not contain a combination of certain digits, are described.

The fourth section considers the application of the A_2-representation of numbers in the theory of the metric Hausdorff-Besicovitch dimension and the metric theory of functions.It is proved that any subset $E \subset [\frac{1}{2}; 1]$ can be covered by no more than six A_2-cylinders. Based on this, the conclusion is substantiated: in determining the Hausdorff-Besicovitch dimension of subsets from $[\frac{1}{2};1]$ we can use coverege by A_2-cylinders.

A description of the structural and variational properties of one class of scale-invariant functions denoted by equality is obtained

$$f(x=\Delta^{A}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots})=\prod_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{\alpha_k(x)},$$

where (λ_k) — predetermined sequence of positive numbers so that the infinite product $P\equiv\prod\limits_{k=1}^{\infty}\lambda_k$ is absolutely convergent.

The properties of the functions given by the converter of pairs of digits of argument with their chain bond are studied:

$$f(\Delta^{A}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots})=\Delta^{A}_{g(\alpha_1,\alpha_2)g(\alpha_2,\alpha_3)\ldots g(\alpha_n,\alpha_{n+1})g(\alpha_{n+1},\alpha_{n+2})\ldots},$$

where $g(i,j)$ — function defined on a set of pairs of elements of the alphabet $\{0,1\}$ and acquires values 0 or 1, each one can be formally defined by a matrix $A(g)=\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11}\end{pmatrix}$, elements of which $a_{ij}=g(i,j)\in\{0,1\}$. There are $2^4=16$ such functions. It is proved that in this class there are only four continuous functions, and the most interesting of which is the digit inverter of A_2-representation: $\mathfrak{I}(x=\Delta^{A}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots})=\Delta^{A}_{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)\ldots(1-\alpha_n)\ldots}$. Found that the set of values E_f of the function f defined by the matrix $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0\end{pmatrix}$, there is nowhere a dense set of Lebesgue zero measure, the elements of which in the A-representation do not contain a combination of two consecutive digits $\overline{11}$.

The appendix contains a list of the applicant's publications on the topic of the thesis and information on the approbation of the research results.

Key words: continuous fraction, mediant representation, continuous A_2-representation of the number, cylindrical sets, basic metric ratio, Hausdorff-Besicovitch fractal dimension.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Дмитренко С. О. M-представлення чисел і випадкові величини, з ним пов'язані // Студентські фізико-математичні етюди. — Київ : Нац. пед. ун-т імені М. П. Драгоманова, 1999. — № 1. — С. 17–25.
2. Дмитренко С. О., Кюрчев Д. В. і Працьовитий М. В. Ланцюгові A_2-зображення дійсних чисел // Український математичний журнал. — 2009. — № 4. — С. 452–463.
3. Дмитренко С. О. Метричні задачі медіантного представлення // Наукові записки НПУ ім. М. П. Драгоманова. Фізико-математичні науки. — Київ : Нац. пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова, 2002. — № 3. — С. 403–411.
4. Дмитренко С. О. Наближення дійсних чисел за допомогою медіантного представлення // Студентські фізико-математичні етюди. — Київ : Нац. пед. ун-т імені М. П. Драгоманова, 2000. — № 2. — С. 26–29.
5. Працьовитий М. В., Гончаренко Я. В., Дмитренко С. О., Лисенко І. М. і Ратушняк С. П. Про один клас функцій з фрактальними властивостями // Буковинський математичний журнал. — 2021. — Т. 9, № 1. — С. 273–283.
6. Гончаренко Я. В., Калашнікова Є. І., Дмитренко С. О. і Василенко Н. А. Про розподіл значень однієї сингулярної функції, пов'язаної з зображенням чисел рядами Люрота // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. — Київ, 2019. — № 3. — С. 219–229.
7. Дмитренко С. О. Узагальнене двійкове f-кодування дійсних чисел та його використання для дослідження фрактальних об'єктів // Наукові записки НПУ ім. М. П. Драгоманова. Фізико-математичні науки. — Київ : Нац. пед. ун-т імені М. П. Драгоманова, 2003. — № 4. — С. 233–240.

8. Барановський О. М. і Дмитренко С. О. Розмірність Хаусдорфа-Безиковича множин, інваріантних відносно одного класу кусково-лінійних // Наукові записки НПУ ім. М. П. Драгоманова. Фізико-математичні науки. — Київ : Нац. пед. ун-т імені М. П. Драгоманова, 2003. — № 4. — С. 164–176.
9. Дмитренко С. О. Про один перетворювач елементів ланцюгового зображення // Фрактальний аналіз та суміжні питання. — Київ : Ін-т математики НАН України; Нац. пед. ун-т імені М. П. Драгоманова, 1998. — № 2. — С. 222–225.
10. Дмитренко С. О. Деякі сингулярні об'єкти пов'язані з ланцюговими дробами // Фрактальний аналіз та суміжні питання. — Київ : Ін-т математики НАН України; Нац. пед. ун-т імені М. П. Драгоманова, 1998. — № 1. — С. 84–87.
11. Працьовитий М. В., Дмитренко С. О. і Чуйков А. С. Інверсор цифр ланцюгового A_2-зображення дробової частини числа // Тези доповідей Четвертої всеукраїнської конференції молодих вчених з математики та фізики, 23-25 квітня 2015 р. — Київ. — 2015. — С. 47.
12. Дмитренко С. О. і Барановський О. М. Обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича множин, інваріантних відносно одного кусково–лінійного відображення, за допомогою Q–представлення чисел // Дев'ята Міжн. Наукова Конференція ім. академіка М.Кравчука (16-19 травня 2002р. Київ): матеріали конференції. — Київ. — 2002. — С. 266.
13. Барановський О. М. і Дмитренко С. О. Використання різних способів представлення чисел для задання фрактальних розподілів // Восьма Міжн. Наукова Конференція ім. академіка М.Кравчука (11-14 травня 2000р. Київ): матеріали конференції. — Київ. — 2000. — С. 408.
14. Дмитренко С. О. Функція, задана перетворювачем елементів ланцюгового зображення // Молодь, освіта, культура і національна свідомість: Зб. матеріалів Міжнар. студ. науково-практ. конф. — Київ. — 1999. —

С. 203–204.

15. Дмитренко С. О. Деякі сингулярні об'єкти пов'язані з ланцюговими дробами // Сьома Міжн. Наукова Конференція ім. академіка М.Кравчука (14-16 травня 1998р. Київ): матеріали конференції. — Київ. — 1998. — С. 147.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ І УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

$\mathbb{N}$	— множина натуральних чисел
$\mathbb{Z}$	— множина цілих чисел
$\mathbb{Q}$	— множина раціональних чисел
$\mathbb{R}$	— множина дійсних чисел
$[A]$	— замикання множини A
$[a]$	— ціла частина числа a
$\{a\}$	— дробова частина числа a
$(a_1 \dots a_s)$	— період довжини s у певному зображенні числа
L	— множина всіх нескінченних послідовностей з 0 і 1
$\bigotimes$	— прямий добуток
$E \overset{k}{\sim} E'$	— множина E подібна множині E' з коефіцієнтом подібності k
$\lambda(E)$	— міра Лебега множини E
$H^\alpha(E, \Phi)$	— α-мірна міра Хаусдорфа (або H^α-міра Хаусдорфа) множини E відносно сім'ї покриттів Φ
$H^\alpha(E, \mu, \Phi)$	— μ-α-мірна міра Хаусдорфа–Біллінгслі множини E відносно сім'ї покриттів Φ
$\alpha_0(E, \Phi)$	— розмірність Хаусдорфа–Безиковича множини E відносно сім'ї покриттів Φ
$\alpha_\mu(E, \Phi)$	— розмірність Хаусдорфа–Біллінгслі множини E відносно міри μ і сім'ї покриттів Φ
$\alpha_s(E)$	— самоподібна розмірність множини E
$\Delta^{A_2}_{c_1 \dots c_k}$	— циліндрична множина (циліндр) рангу k з основою $c_1 \dots c_k$, що породжена A_2-кодуванням чисел
$\nabla^{A_2}_{c_1 \dots c_k}$	— інтервал з тими ж кінцями, що й $\Delta^{A_2}_{c_1 \dots c_k}$
$\lvert\Delta^{A_2}_{c_1 \dots c_k}\rvert$	— довжина циліндра
$\dim \mu$	— розмірність Хаусдорфа міри μ
$\square$	— кінець доведення

ВСТУП

Дисертаційна робота виконана в галузі метричної теорії чисел. Вона присвячена двосимвольним системам кодування дійсних чисел і їх застосуванням у метричний та ймовірнісній теоріях чисел, фрактальному аналізі [60] та теорії функцій.

Актуальність дослідження. Метрична теорія дійсних чисел займається розв'язанням теоретико-числових проблем з використанням засобів теорії міри і теорії метричних просторів. Вона включає задачі про міри і метричні розмірності числових множин, визначених різними умовами.

Ймовірнісна теорія чисел займається теоретико-числовими проблемами з використанням стохастичних засобів (ймовірнісних та статистичних), а також розподілами на числових множинах, зокрема фракталах, а також вивченням випадкових величин, визначених розподілами своїх цифр, а також розподілами цифр у різних системах зображення випадкової величини при заданому її розподілі.

Метрична і ймовірнісна теорії чисел розвиваються у різних напрямах і для цього використовуються різні засоби для формального задання об'єктів і здійснення їх теоретичного аналізу. Одним з напрямів розвитку аналітичної теорії чисел є метрична та ймовірнісна теорії ланцюгових дробів (елементарних та неелементарних) як зі скінченним, так і нескінченним базисним набором елементів. Класичною в цьому відношенні є метрична теорія елементарних ланцюгових дробів, фундатором якої був Хінчин [61]. Теорії неелементарних ланцюгових дробів є менш розвиненими. Окремої уваги заслуговує теорія дробів Данжуа [73], елементами яких є числа 0 та 1. З цими теоріями також тісно пов'язана теорія послідовностей Фарея [7].

Двосимвольні системи зображення (кодування) дійсних чисел [95] є зручним засобом для використання в обчислювальних пристроях і заслуговують на окрему увагу в силу мінімальності алфавіту (у багатьох задачах немає принципової відмінності між трисимвольними і n-символьними системами при $n > 3$, але існує принципова відмінність між трисимвольною і двосимвольною системами). Сьогодні у науці використовується багато двосимвольних систем зображення чисел (класична двійкова, негадвійкова [45], Q_2- та Q_2^*-зображення [51, 56, 42], марківське зображення, G_2-зображення [93] та інші). Вказані системи є узагальненями та аналогами класичної двійкової системи, одні з них самоподібні, інші несамоподібні, але кожна з них має нульову надлишковість, тобто числа мають не більше двох зображень. Цифри зображення чисел у цих системах є статистично незалежними.

Зображення чисел ланцюговими дробами є несамоподібним і має суттєво складнішу геометрію. Ідея створення двосимвольного ланцюгового зображення чисел належить науковому керівнику Працьовитому М.В., який запропонував не лише створити систему кодування чисел заданого відрізка, а й знайти умови, при яких вона буде мати нульову надлишковість. І нам це вдалося.

Створена у роботі [26] тополого-метрична теорія ланцюгових A_2-дробів використовувалась в різних цілях, зокрема з метою моделювання неперервних функцій зі складною локальною будовою [94] та з метою побудови ймовірнісної теорії ланцюгових A_2-дробів ([48], [92]).

У 1911 році Г. Мінковський для задання неперервної строго зростаючої сингулярної функції $?(x)$, яка встановлює взаємнооднозначну відповідність між всіма квадратичними ірраціональностями відрізку $[0;1]$ і раціональними числами цього ж відрізка, використовував означення її у термінах елементарних ланцюгових дробів та медіант звичайних нескоротних дробів. У 1943 році Р. Салемом [96] був знайдений її аналітичний вираз:

$$?(x) = ?([0; a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]) =$$
$$= 2^{1-a_1} - 2^{1-a_1-a_2} + 2^{1-a_1-a_2-a_3} + \dots + (-1)^{n+1} 2^{1-a_1-\dots-a_n} + \dots,$$

де $x = [0; a_1, a_2, \dots]$ — розклад числа x в елементарний ланцюговий дріб.

У роботах Алкаускаса ([65], [66]) доведено, що класична функція Мінковського $?(x)$ є єдиним розв'язком у класі неперервних функцій наступної системи функціональних рівнянь:

$$\begin{cases} ?\left(\dfrac{x}{1+x}\right) = \dfrac{1}{2}?(x) \\ ?(1-x) = 1 - ?(x) \end{cases}$$

У 2010 році Працьовитий М.В., Калашніков А.В. та Безбородов В.К. у роботі [47] побудували однопараметричне узагальнення φ_μ класичної функції Мінковського (зі збереженням властивостей неперервності, монотонності, сингулярності), яке є єдиним неперервним розв'язком системи функціональних рівнянь:

$$\begin{cases} \varphi_\mu\left(\dfrac{x}{1+x}\right) = (1-\mu)\varphi_\mu(x) \\ \varphi_\mu(1-x) = 1 - \varphi_{1-\mu}(x) \end{cases},$$

де $\varphi(x, \mu) = \varphi_\mu(x)$ — функція двох змінних x та μ $\quad (x \in [0; 1], \mu \in (0; 1))$ або функція однієї змінної x, залежна від параметра $\mu \in (0; 1)$. Було встановлено, що функція φ_μ у ірраціональній точці інтервалу $(0; 1)$ має наступний аналітичний вираз:

$$\varphi_\mu(x) = \varphi_\mu([0; a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k (1 - \mu^{a_{2k}}),$$

де $A_k = (1-\mu)^{a_1+a_3+\dots+a_{2k-1}-1} \mu^{a_2+a_4+\dots+a_{2k-2}}$, а в раціональних точках інтервалу $(0; 1)$ доозначується за неперервністю і виражається скінченною сумою.

Як бачимо, ланцюгові дроби є ефективним засобом задання функцій зі складною локальною структурою.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами, грантами. Робота виконана у рамках досліджень математичних об'єктів зі складною локальною будовою, що проводяться на кафедрі вищої математики Національного педагогічного університету імені М.П. Драгоманова й у лабораторії фрактального аналізу Інституту математики НАН України. Дослідження проводилось у рамках таких науково-дослідних тем:

— Статистика сингулярних розподілів ймовірностей і фрактальні неперервні функції випадкових величин (номер державної реєстрації 0119U002582).

— Функції з фрактальними властивостями (множини рівнів та розподіли значень) і складні динамічні системи з ними пов'язані (номер державної реєстрації 0121U000208).

— Фрактальна геометрія числових рядів і фрактальний аналіз стохастичних об'єктів, з ним пов'язаних (номер державної реєстрації 0118U002059).

Об'єкт дослідження. Двосимвольні системи кодування дійсних чисел, отримані з використанням їх розкладу у ланцюгові дроби.

Предмет дослідження. Тополого-метрична і ймовірнісна теорії зображення чисел ланцюговими дробами з двоелементним алфавітом. Геометрія медіантного зображення чисел.

Мета і завдання дослідження. Основними завданнями дисертаційного дослідження є:

1. Створити тополого-метричну теорію ланцюгового A_2-зображення чисел.
2. Встановити нормальні властивості чисел у їх A_2-зображенні.
3. Вивчити властивості циліндричних множин, знайти вираз основно-

го метричного відношення і встановити його оцінки та розв'язати ряд метричних задач для A_2-зображення чисел.

4. Знайти ознаки раціональності числа за його зображенням.
5. Вивчити питання щодо ефективності використання A_2-циліндрів у задачах обчислення фрактальної розмірності Гаусдорфа-Безиковича числових множин.
6. Знайти застосування A_2-зображення чисел у конструктивній теорії функцій з локально складною структурою та фрактальними властивостями.

Окрім аналогічних завдань для медіантного зображення чисел, також ставилась задача знаходження формального задання класичної сингулярної функції Мінковського у термінах медіантного зображення.

Методи дослідження. У роботі використовувалась методологія кодування дійсних чисел засобами скінченного алфавіту [35], методи метричної та ймовірнісної теорії чисел [37, 72, 15, 70, 71], ергодичної теорії [5, 36], фрактальної геометрії [52] та фрактального аналізу.

Наукова новизна отриманих результатів. У дисертації отримано наступні наукові результати:

1. Обгрунтовано загальну схему кодування дійсних чисел заданого відрізка засобами двосимвольного алфавіту.
2. Створено конструктивну тополого-метричну теорію медіантного зображення чисел і знайдено його застосування у теорії ймовірностей та теорії функцій, зокрема знайдено вираз класичної сингулярної строго зростаючої функції Мінковського у термінах медіантного представлення.
3. Доведено, що медіантне зображення є двосимвольним перекодуваннями зображення чисел елементарними ланцюговими дробами.
4. Обґрунтовано систему кодування дійсних чисел заданого відрізка

засобами двосимвольного алфавіту, що ґрунтується на розкладах чисел у нескінченні ланцюгові дроби, елементами яких є два задані числа (ланцюгові A_2-дроби). Знайдено необхідні та достатні умови, при яких вона має нульову надлишковість.

5. Вивчено геометрію ланцюгового A_2-зображення дійсних чисел (описано властивості циліндричних множин, розв'язано ряд метричних задач).
6. Знайдено застосування ланцюгового A_2-зображення чисел у теорії фракталів, зокрема знайдено еквівалентне означення фрактальної розмірності Гаусдорфа-Безиковича у термінах A_2-зображення чисел і доведено, що для довільної підмножини ланцюгових A_2–дробів відрізка $[\frac{1}{2}; 1]$ в системі кодування з нульовою надлишковістю існує не більше шести циліндрів, які її покривають і мають довжини, менше діаметра множини.
7. Знайдено ефективні застосування ланцюгового A_2-зображення чисел у теорії функцій з локально складною структурою і фрактальними властивостями.

Практичне значення отриманих результатів. Робота має в основному теоретичний характер. Разом з цим результати досліджень вже знайшли своє застосування у теорії ймовірностей та теорії функцій і можуть бути використані в подальших дослідженнях у галузі метричної та ймовірнісної теорії чисел, теорії сингулярних розподілів, теорії локально складних неперервних функцій та теорії фракталів, а також при вивченні властивостей символьних динамік.

Особистий внесок здобувача. Усі наукові результати, що виносяться на захист отримані здобувачем самостійно. Науковому керівнику належить постановка задач, окремі ідеї щодо обґрунтування гіпотетичних тверджень, перевірка отриманих результатів. Співавторам спільних публікацій належать твердження, які до дисертації не увійшли.

Апробація матеріалів дисертації. Основні результати дослідження доповідалися на наукових конференціях різних рівнів та наукових семінарах, а саме:

— IV Всеукраїнська конференція молодих вчених з математики та фізики, Київ, 23–25 квітня 2015 р.;

— IX Міжнародна наукова конференція ім. академіка М.Кравчука, Київ, 16–19 травня 2002 р.;

— VIII Міжнародна наукова конференція ім. академіка М.Кравчука, Київ, 11–14 травня 2000 р.;

— Міжнародна студентська науково-практична конференція «Молодь, освіта, культура і національна свідомість», Київ, 1999 р.;

— VII Міжнародна наукова конференція ім. академіка М.Кравчука, Київ, 14–16 травня 1998 р.

— Семінар з фрактального аналізу Інституту математики НАН України та НПУ імені М. П. Драгоманова (керівник: д-р фіз.-мат. наук, професор Працьовитий М.В.)

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в 10 статтях у наукових виданнях, 8 з яких ([53, 14, 26, 24, 4, 23, 19, 17]) входять до переліку фахових видань МОН України, серед них стаття [26] у журналі, що індексується міжнародною наукометричною базою даних Scopus. Результати дослідження наведені також у матеріалах конференцій ([46, 25, 3, 20, 18]).

Структура та обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається з анотації, переліку скорочень і умовних позначень, вступу, чотирьох розділів, висновків до кожного розділу та загальних, списку використаних джерел і додатка, який містить список публікацій здобувача на тему дисертації й відомостей про апробацію результатів дисертаційного дослідження. Загальний обсяг дисертації становить 128 сторінок.

Основний зміст роботи. У **вступі** обґрунтовано актуальність дослідження, визначено об'єкт, предмет, мету і завдання, зазначено наукову новизну одержаних результатів, практичне значення отриманих результатів і особистий внесок здобувача, анонсовано основні наукові результати.

Перший розділ **«Огляд літератури та концептуальні засади дослідження»** має вступний характер. У ньому наведено приклади топологізації простору послідовностей з нулів та одиниць, введення в ньому ймовірнісних мір, мір Гаусдорфа дробових порядків і дано означення фрактальної розмірності Гаусдорфа-Безиковича підмножин цього простору.

Обґрунтовано загальну схему кодування чисел відрізка $[0;1]$ засобами алфавіту $A=\{0,1\}$, наведено приклади різних кодувань.

Означення 1.7. Кодуванням (зображенням) чисел відрізка $[0;1]$ з допомогою алфавіту A називається сюр'єктивне відображення простору L у відрізок $[0;1]$.

Кажуть, що кодування має нульову надлишковість, якщо лише скінченна або зліченна множина чисел має два зображення, а решта — єдине.

У підрозділі 1.3 узагальнено теореми П. Біллінгслі [5] і М.В. Працьовитого [43], щодо довірчості покриттів, а саме вказано достатні умови, при яких для визначення розмірності Гаусдорфа-Безиковича множин простору можна обмежитися циліндрами f-кодування.

Теорема 1.3. *Число α_*, визначене рівністю*

$$\alpha_*(E)=\sup\{\alpha:\widetilde{H}_\alpha(E)\neq 0\}=\inf\{\alpha:\widetilde{H}_\alpha(E)=0\},$$

$$\text{де } \widetilde{H}_\alpha(E)=\lim_{\varepsilon\to 0}\inf_{|\omega_i|\leqslant\varepsilon}\Big\{\sum_i|\omega_i|^\alpha:\omega_i\in W_f,E\subset\bigcup_i\omega_i\Big\}$$

співпадає з розмірністю Гаусдорфа-Безиковича множини $E\subset[0;1]$.

У підрозділі 1.5 наведено відомості про зображення чисел ланцюговими дробами (елементарними та неелементарними), які використовуються в наступних розділах.

У другому розділі **«Медіанте зображення дійсних чисел»** розглянуто медіантне розбиття на відрізку $[0;1]$, досліджено метричні властивості його циліндричних множин і означено медіантне представлення чисел.

Означення 2.1. Медіантою двох дробів $\frac{a}{b}$ і $\frac{c}{d}$ з додатними знаменниками називається дріб $\frac{a+c}{b+d}$.

Теорема 2.1. *Кожне число x з відрізка $[0;1]$ має своє медіантне представлення, елементи $\alpha_i(x) \in \{0;1\}$ якого визначаються наступним чином*

$$\forall x \in [0;1] : x = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Delta_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}$$

(далі позначатимемо $x = \Delta^M_{\alpha_1(x) \ldots \alpha_k(x) \ldots}$).

Знайдено оцінки довжин циліндричних відрізків.

Теорема 2.2. *Для довжин циліндрів k-го рангу медіантного зображення чисел виконуються нерівності:*

$$\frac{5 \cdot 2^{2k+3}}{(1+\sqrt{5})^{2k+3} + (1-\sqrt{5})^{2k+3} + (-2)^{2k+3}} \leqslant |\Delta_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}| \leqslant \frac{1}{k+1}.$$

Теорема 2.3. *Основне метричне відношення має оцінки:*

$$\frac{1}{k+2} \leqslant \frac{\left|\Delta_{\alpha_1 \ldots \alpha_k \alpha_{k+1}}\right|}{|\Delta_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}|} \leqslant \frac{k+1}{k+2}.$$

Пораховано точність раціональних наближень дійсних чисел за допомогою медіантного представлення.

Теорема 2.4. *Нехай $x \in \Delta_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}$, тоді щонайменше для одного з кінців $\frac{p}{q}$ цього циліндра виконується нерівність $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^2}$.*

Тобто медіантне представлення дозволяє знаходити раціональні наближення дійсних чисел, що забезпечують точність до величини, оберненої квадрату знаменника.

У підрозділі 2.3 розглянуто випадкову величину $\xi = \Delta^M_{\xi_1 \xi_2 \ldots \xi_k \ldots}$ елементи медіантного представлення якої ξ_n є незалежними випадковими величинами, що набувають значень 0 і 1 з ймовірностями p_{0n} і p_{1n}. Знайдено функцію розподілу цієї випадкової величини, спектр та критерій дискретності розподілу.

Лема 2.1. *Функція розподілу випадкової величини $\xi = \Delta^M_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_k\ldots}$ запишеться у вигляді*

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, \textit{якщо } x < 0, \\ \beta_1(x) + \sum\limits_{i=2}^{\infty}\left[\beta_i(x)\prod\limits_{j=1}^{i-1} p_{\alpha_j(x)j}\right], \textit{якщо } x \in [0;1], \\ 1, \textit{якщо } x > 1; \end{cases}$$

де $\alpha_i(x)$ — цифри M-представлення $x \in [0;1]$, а

$$\beta_i(x) = \begin{cases} 0, \textit{якщо } \alpha_i(x) = 0, \\ p_{0i}, \textit{якщо } \alpha_i(x) = 1. \end{cases}$$

Лема 2.2. *Спектром S_ξ випадкової величини $\xi = \Delta^M_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_k\ldots}$ є множина $A = \{x \in [0;1] : p_{\alpha_k(x)k} > 0 \quad \forall k \in N\}$ доповнена раціональними точками відрізка [0;1], що є граничними для неї.*

Теорема 2.5. *Випадкова величина ξ має чисто дискретний розподіл тоді і тільки тоді, коли*

$$\prod_{k=1}^{\infty} \max_n \{p_{nk}\} > 0$$

і чисто неперервний — у решті випадків.

Третій розділ **«Ланцюгові A_2-дроби»** присвячений означеню A_2-дробів та вивченню їх властивостей.

Нехай $A = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ — задана множина дійсних чисел, $0 < \alpha_1 < \alpha_2$. Нескінченний ланцюговий дріб виду $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]$, де $a_0 = 0$, $a_n \in A_2$, називатимемо *ланцюговим A_2-дробом.*

Теорема 3.1.(Основне метричне відношення) *Для вкладених циліндрів має місце наступна рівність:*

$$\frac{|\Delta_{c_1\ldots c_n c}|}{|\Delta_{c_1\ldots c_n}|} = \frac{\left(1 + \beta_1 \frac{q_{n-1}}{q_n}\right)\left(1 + \beta_2 \frac{q_{n-1}}{q_n}\right)}{\left(c + \beta_1 + \frac{q_{n-1}}{q_n}\right)\left(c + \beta_2 + \frac{q_{n-1}}{q_n}\right)}.$$

У підрозділі 3.2. знайдено умови нульової надлишковості A_2-зображення та введено означення A-зображення.

Теорема 3.3. *Якщо $\alpha_1\alpha_2 = \frac{1}{2}$, то зчисленна множина точок $x \in [\beta_1, \beta_2]$ має два ланцюгових A_2-зображення, решта ж точок мають єдине зображення.*

Означення 3.1. Ланцюговим A-зображенням числа $x = \Delta^{A_2}_{c_1 \ldots c_n \ldots}$, де $c_n \in A_2 = \{\frac{1}{2}, 1\}$, називається запис $x = \Delta^{A}_{a_1 \ldots a_n \ldots}$, де

$$a_n = 2c_n - 1 = \begin{cases} 0, \text{ якщо } c_n = \frac{1}{2}, \\ 1, \text{ якщо } c_n = 1. \end{cases}$$

У підрозділі 3.3. вивчаються властивості інверсору ланцюгового A-зображення чисел.

Означення 3.2. Інверсором ланцюгового A-зображення чисел відрізка $[\frac{1}{2}; 1]$ називається функція $\mathfrak{I}$, означена рівністю:

$$\mathfrak{I}(\Delta^{A}_{a_1 a_2 \ldots a_n \ldots}) = \Delta^{A}_{[1-a_1][1-a_2]\ldots[1-a_n]\ldots}.$$

Теорема 3.4. *Інверсор $\mathfrak{I}$ цифр A-зображення чисел відрізка $[\frac{1}{2}; 1]$ є неперервною строго спадною функцією.*

Наслідок 3.9. *Оскільки $\mathfrak{I}(\frac{2}{3}) = \mathfrak{I}(\Delta^{A_2}_{1(10)}) = \Delta^{A_2}_{0(01)} = \frac{2}{3}$, то функція $\mathfrak{I}$ має єдину інваріантну точку $x_0 = \frac{2}{3}$.*

Оскільки функція $\mathfrak{I}$ неперервна і строго спадна, то за теоремою Лебега вона має скінченну похідну майже скрізь (у розумінні міри Лебега).

Лема 3.2. *Якщо в точці x_0 існує скінченна похідна, то вона обчислюється за формулою:*

$$\mathfrak{I}'(x_0) = \lim_{n \to \infty} \frac{[q_{n-1}(x_0) + q_n(x_0)][q_{n-1}(x_0) + 2q_n(x_0)]}{[q_{n-1}(\mathfrak{I}(x_0)) + q_n(\mathfrak{I}(x_0)))][q_{n-1}(\mathfrak{I}(x_0)) + 2q_n(\mathfrak{I}(x_0))]}.$$

Підрозділ 3.4. присвячений вивченю властивостей оператору лівостороннього зсуву елементів ланцюгового A_2-зображення:

$$\omega(\Delta^{A_2}_{a_1 a_2 \ldots}) = \Delta^{A_2}_{a_2 a_3 \ldots},$$

У підрозділі 3.5 для випадку $\alpha_1\alpha_2 = \dfrac{1}{2}$ вивчено метричні властивості множини A_2-дробів, зображення яких не містять комбінації певних цифр.

Теорема 3.7. *При $c_1 \neq c_2$ множина $C[A_2, \overline{c_1c_2}]$ є зчисленною, а при $c_1 = c_2$ — континуальною множиною, міра Лебега якої дорівнює нулю.*

У четвертому розділі **«Застосування ланцюгових A_2-дробів до вивчення об'єктів з фрактальними властивостями»** розглядаються застосування ланцюгових A_2-дробів у теорії метричної розмірності Гаусдорфа-Безиковича, у теорії фракталів та в теорії локально складних функцій. Тут вивчаються функції з нетривіальними локальними властивостями, означені в термінах двосимвольного ланцюгового зображення дійсних чисел. Це функції визначені за допомогою нескінченних добутків, функції задані перетворювачами пар цифр A_2-зображення аргумента з їх ланцюговою скріпленістю.

Теорема 4.1. *Для будь-якого інтервала $u \subset [\frac{1}{2}; 1]$ існує не більше шести A_2-циліндрів, які покривають u і мають довжини не більше $|u|$.*

Теорема 4.2. *При визначені розмірності Гаусдорфа-Безиковича підмножин відрізка $[\frac{1}{2}; 1]$ можна обмежитись покриттями A_2-циліндрами.*

Підрозділ 4.2. присвячений автомодельним функціям типу Сендова [97]. У даному підрозділі основним об'єктом вивчення є функція, означена рівністю

$$f(x = \Delta^A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}) = \prod_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{\alpha_k(x)},$$

де $x \in [\frac{1}{2}; 1]$, (λ_k) — наперед задана послідовність додатних чисел така, що нескінченний добуток $P \equiv \prod\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k$ є абсолютно збіжним.

Оскільки $\lambda_k > 0$, то $\lambda_k = e^{v_k}$ для деякого дійсного числа v_k і тоді $f(x = \Delta^A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \prod\limits_{k=1}^{\infty} e^{v_k\alpha_k} = e^{\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k\alpha_k}$.

Теорема 4.4. *Функція $f(x)$ неперервна в кожній A-унарній точці, а в A-бінарній точці $x^* = \Delta_{c_1\ldots c_m0(01)} = \Delta_{c_1\ldots c_m1(10)}$ неперервна, тоді і тільки* *тоді, коли виконується рівність* $v_m + \sum\limits_{k=1}^{\infty} v_{m+2k+1} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} v_{m+2k}$.

Наслідок 4.2. *Функція* f*, неперервна на відрізку* $[\frac{1}{2};1]$ *тоді і тільки тоді, коли* $\lambda_k = e^{\frac{c(-1)^{k-1}}{2^{k-1}}}$ *для деякого* $c \in \mathbb{R}$ *і всіх* $k \in N$.

Теорема 4.5. *Якщо подвійна нерівність* $0 < v_n < r_n$ *виконується для нескінченної кількість значень* n*, то функція* f *є ніде не монотонною.*

Теорема 4.6. *Якщо функція* f *неперервна, то вона ніде не монотонна.*

У підрозділі 4.3. вивчаються функції, задані перетворювачем пар цифр аргумента з їх ланцюговою скріпленістю. Нехай $g(i,j)$ — функція, визначена на множині пар елементів алфавіту $A = \{0,1\}$ і набуває значень 0 або 1. Зрозуміло, що таких функцій існує $2^4 = 16$. Кожну з таких функцій g формально можна визначити матрицею $A(g) = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{pmatrix}$, елементи якої $a_{ij} = g(i,j) \in \{0,1\}$. Розглянемо функцію, що означена рівністю:

$$f(\Delta^A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^A_{g(\alpha_1,\alpha_2)g(\alpha_2,\alpha_3)\ldots g(\alpha_n,\alpha_{n+1})g(\alpha_{n+1},\alpha_{n+2})\ldots}.$$

Теорема 4.7. *Неперервні функції означені рівністю вище вичерпуються наступними* $f(x) = \frac{\sqrt{17}-1}{4}$, $f(x) = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $f(x) = x$, $\mathfrak{I}(x = \Delta^A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^A_{[1-\alpha_1][1-\alpha_2]\ldots[1-\alpha_n]\ldots}$.

Теорема 4.8. *Множиною значень* E_f *функції* f*, визначеної матрицею* $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *є ніде не щільна множина нульової міри Лебега, числа якої у* A*-зображенні не містять комбінації двох послідовних цифр* $\overline{11}$.

У підрозділі 4.4. розглядаються функції канторівського типу, означені у термінах зображення чисел ланцюговими A_2-дробами та рядами Люрота.

Подяка. Висловлюю щиру вдячність своєму Вчителю та Науковому Керівнику доктору фізико-математичних наук, професору Миколі Вікторовичу Працьовитому за постановку задач, постійну увагу, підтримку та мотивацію.

РОЗДІЛ 1
ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ТА КОНЦЕПТУАЛЬНІ ЗАСАДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Сьогодні у математиці використовується багато різних способів кодування (зображення) дійсних чисел за допомогою скінченного алфавіту. Окремої уваги заслуговує випадок, коли алфавіт є двосимвольним. Кодування може ґрунтуватися на розкладі чисел в ряди, нескінченні добутки, ланцюгові дроби тощо.

1.1. Простір послідовностей з нулів та одиниць та математичні структури у ньому

Загальний метод двосимвольного кодування дійсних чисел можна описати наступним чином [24].

Нехай L — множина всеможливих нескінченних послідовностей з нулів та одиниць, тобто

$$L = \{\alpha : \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, ...) \equiv (\alpha_n), \alpha_n \in \{0, 1\} \, \forall n \in N\} .$$

Далі L називатимемо простором послідовностей з нулів та одиниць, а елементи множини L — точками цього простору.

Топологізація простору L. Введемо у просторі L відношення рівності.

Означення 1.1. Елементи $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots)$ і $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \ldots)$ простору L називатимемо рівними, якщо $\alpha_i = \beta_i \; \forall i \in N$ або
$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n 1(0))$ і $\beta = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n 0(1))$.

Очевидно, що дане відношення рівності є відношенням еквівалентності. Фактор-множину $L/=$ позначимо через L^*.

Введемо у просторі L відношення порядку.

Означення 1.2. Елемент $\alpha \in L$ називатимемо меншим елемента $\beta \in L$, якщо $\alpha \neq \beta$ і існує таке k, що $\alpha_j = \beta_j, j = \overline{1, k-1}$ і $\alpha_k < \beta_k$.

Означення 1.3. Циліндричним відрізком $\blacksquare_{c_1c_2...c_n}$ рангу n з основою $c_1c_2...c_n$ простору L називатимемо множину всіх послідовностей, у яких перші n елементів рівні відповідно $c_1, c_2, ...c_n$, а решта довільні, тобто

$$\blacksquare_{c_1c_2...c_n} = \{\alpha : \alpha = (c_1, c_2, ..., c_n, \alpha_{n+1}, ...), \alpha_{n+j} \in \{0, 1\}\}.$$

Циліндричним інтервалом рангу n з основою $c_1c_2...c_n$ називатимемо наступну множину послідовностей

$$\square_{c_1c_2...c_n} = \blacksquare_{c_1c_2...c_n} \setminus \{(c_1, c_2, ..., c_n, (0)), (c_1, c_2, ..., c_n, (1))\}.$$

Безпосередньо, з вище наведених, означень отримуємо наступні властивості циліндричних множин.

1. $\square_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n a} \subset \square_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n} \forall a \in \{0; 1\}$.
2. $\blacksquare_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n} = \blacksquare_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n 0} \bigcup \blacksquare_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n 1}$.
3. $\square_{\beta_1\beta_2...\beta_n...\beta_k} \subset \square_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}$, якщо $\alpha_i = \beta_i \ i = \overline{1, n}$.
4. $\square_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n} = \square_{\beta_1\beta_2...\beta_n...\beta_k} \Leftrightarrow n = k$ і $\alpha_i = \beta_i \ i = \overline{1, n}$.
5. $\square_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n} \bigcap \square_{\beta_1\beta_2...\beta_n...\beta_k} = \varnothing$, де $n < k$, тоді і тільки тоді, коли $\exists i$: $\alpha_i \neq \beta_i$.
6. $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} {}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n} = (\alpha_1, ..., \alpha_n, ...) \equiv \square_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...}$.

Означення 1.4. Околом точки $\alpha = \{\alpha_k\} \in L$ називатимемо довільний циліндричний інтервал, що містить цю точку, тобто $\square_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n} \forall n \in N$.

Означення 1.5. Точка $\alpha \in A \subset L$ називається внутрішньою точкою множини A, якщо існує такий окіл точки α, який повністю міститься в множині A.

Означення 1.6. Множину A називатимемо відкритою, якщо кожна її точка є внутрішньою.

Очевидно, що простір L є відкритою множиною. Порожню множину вважатимемо відкритою за означенням.

Лема 1.1. *Множина всіх відкритих множин τ є топологією в L.*

Доведення. Розглянемо об'єднання довільної кількості відкритих множин $\bigcup A_k$. Нехай $x \in \bigcup A_k$, тоді існує k таке, що $x \in A_k$. Оскільки A_k — відкрита множина, то існує окіл точки x, який належить множині A_k, а отже, належить і об'єднанню $\bigcup A_k$. Таким чином, об'єднання довільної кількості відкритих множин є відкритою множиною. Нехай A і B — відкриті множини і $x \in A\bigcap B$, тоді $x \in A$, $x \in B$ та існують околи точки x $\square_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} \subset A$ і $\square_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_k} \subset B$. Тоді існує окіл $\square_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}\bigcap\square_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_k} \subset A\bigcap B$, тобто x є внутрішньою точкою множини $A\bigcap B$, а отже, остання є відкритою. Оскільки множини L та $\varnothing$ також належать до τ, то τ — топологія, а пара (L, τ) — топологічний простір. $\square$

Введення ймовірнісної міри. Задамо у просторі L міру μ наступним чином: означимо $P_k = \{p_{0k}, p_{1k}\}$, де $p_{ik} \geqslant 0$ і $p_{0k} + p_{1k} = 1$, $\forall k \in N$, покладемо

$$\mu\left\{\blacksquare_{c_1\ldots c_n}\right\} = \prod_{i=1}^{n} p_{c_i i}$$

і $\mu\left(\bigcup \blacksquare_{c_1\ldots c_n}\right) = \sum \mu\left(\blacksquare_{c_1\ldots c_n}\right)$, де відрізки $\blacksquare_{c_1\ldots c_n}$ не перетинаються.

Міри Гаусдорфа дробових порядків. Міра Гаусдорфа означається таким чином:

$$H_\alpha(E) = \lim_{\varepsilon\to 0}\inf_{\mu(\blacksquare_{c_1\ldots c_n})\leqslant\varepsilon}\left\{\sum \mu^\alpha(\blacksquare_{c_1\ldots c_n}), \bigcup \blacksquare_{c_1\ldots c_n} \supset E\right\}.$$

Розмірність Гаусдорфа-Безиковича. Розмірністю Гаусдорфа-Безиковича множини E називатимемо число

$$\alpha_\mu(E) = \inf\left\{\alpha : H_\alpha(E) = 0\right\} = \sup\left\{\alpha : H_\alpha(E) \neq 0\right\}.$$

1.2. Загальна схема кодування чисел відрізка [0;1]

Розглянемо відображення f множини L на відрізок $[0;1] \subset \mathbb{R}^1$. Множину всіх бієктивних відображень f, які зберігають порядок, позначимо L^f. Образ циліндричної множини $\blacksquare_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$ при відображенні $f \in L^f$ позначатимемо через $\Delta^f_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$. Накладаючи певні обмеження на відображення f, ми будемо отримувати різні представлення чисел на відрізку [0;1]. Наприклад, якщо $\dfrac{\left|\Delta^f_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n+1}}\right|}{\left|\Delta^f_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}\right|} = \frac{1}{2}$ для $\forall n \in \mathbb{N}$, то відображення f задає двійкове представлення, при $\dfrac{\left|\Delta^f_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n+1}}\right|}{\left|\Delta^f_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}\right|} = q_{\alpha_{n+1}}$ для $\forall n \in \mathbb{N}$ — Q_2-представлення.

Далі розглядатимемо f-коди дійсних чисел, для яких

$$\lambda_1 \leqslant \frac{\left|\Delta^f_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n+1}}\right|}{\left|\Delta^f_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}\right|} \leqslant \lambda_2.$$

Означення 1.7. Кодуванням (зображенням) чисел відрізка $[0;1]$ з допомогою алфавіту A називається сюр'єктивне відображення простору L у відрізок $[0;1]$.

Лема 1.2. *Існує континуальна множина бієктивних відображень f множини L^* в $[0;1] \subset R^1$, які зберігають порядок:*

$$\forall x_1, x_2 \in L : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Доведення. Нехай q_0 — довільне дійсне число таке, що $0 < q_0 < 1$, $Q_2 = \{q_0, q_1\}$, де $q_1 = 1 - q_0$. Відображення $f : L^* \to [0;1]$ за законом

$$x = f\left(\{\alpha_k\}\right) = \beta_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left[\beta_{\alpha_k} \prod_{j=1}^{k} q_{\alpha_j}\right],$$

де $\beta_0 = 0$, $\beta_1 = q_0$, є бієктивним і зберігає порядок [43].

З довільності вибору q_0 випливає існування континуальної кількісті таких відображень. $\square$

Лема 1.3. *Множина* $\Delta^f_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} = f(\blacksquare_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}) \subset [0;1]$*, що є образом циліндричної множини* $\blacksquare_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$ *при відображенні* f*, є відрізком.*

Доведення. Розглянемо довільне $\alpha \in \blacksquare_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$, очевидно, що виконуються нерівності:

$$\square_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(0)} \leqslant \alpha \leqslant \square_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(1)}.$$

При відображенні f, в силу його бієктивності, існує образ $\alpha : x = f(\alpha) \in \Delta^f_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$, тобто

$$\Delta^f_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(0)} \leqslant x \leqslant \Delta^f_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(1)}.$$

Якщо припустити, що остання нерівність не виконується, то оскільки відображення f зберігає порядок, отримаємо, що $\alpha \notin \blacksquare_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$. Дістали протиріччя, отже, в силу довільності α маємо, що $\Delta^f_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$ — відрізок.$\square$

Наслідок 1.1. *Якщо відображення* f *простору* L *в* $[0;1] \subset R^1$ *бієктивне і зберігає порядок, то воно неперервне.*

Доведення. Нехай α — довільна точка простору L і $f(\alpha)$ — її образ, розглянемо довільний окіл образу — $O(f(\alpha)) = (a;b) \subset [0;1]$. Вкажемо циліндричну множину $\nabla_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k} \subset (a;b)$, яка містить $f(\alpha)$, вона існує за вище доведеною лемою, і для неї існує прообраз $\square_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k} \ni \alpha$, тобто $f(\square_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}) = \nabla_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k} \subset (a;b)$. В силу бієктивності та неперервності відображення f індукує для циліндричних множин на $[0;1]$ властивості, аналогічні до властивостей циліндричних множин простору L. $\square$

Виходячи з доведеного вище, очевидно, що має місце наступна теорема.

Теорема 1.1. *Для* $\forall\alpha = \{\alpha_k\} \in L$ *переріз* $x = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \Delta^f_{\alpha_1\ldots\alpha_k}$ *є точкою з відрізка* $[0;1]$*, яку символічно позначатимемо* $\Delta^f_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_k(x)\ldots}$*, і називатимемо двійковим* f*-кодуванням точки* x*.*

Найпростішим способом кодування є класичне двійкове представлення та зображення дійсних чисел та його перекодування наступним чином: $\tau_{2n-1} = 1 - \alpha_{2n-1}$ і $\tau_{2n} = \alpha_{2n}$, таким чином отримаємо представлення числа двійковим рядом з основою (-2), так зване нега-двійкове зображення числа.

Теорема 1.2 ([45]). *Для будь-якого дійсного числа $x \in [0;1]$ існує послідовність (τ_n), де $\tau_n \in \{0,1\}$ така що*

$$x = \frac{2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tau_i}{(-2)^i} = \Delta^{-2}_{\tau_1\tau_2\ldots\tau_k\ldots}.$$

1.3. Метрична теорія узагальнених двійкових кодів

Метрична теорія двійкового зображення (кодування) чисел розв'язує задачі про міри множин чисел, які мають спільну властивість, що виражається у термінах їх зображень. найбільш зручною для аналізу масивності континуальних числових множин є міра Лебега. Це дійсна невід'ємна функція множини λ, визначена на σ-алгебрі борелівських множин простору $\mathbb{R}^1$.

Теорема 1.3. *Число α_*, визначене рівністю*

$$\alpha_*(E) = \sup\{\alpha : \widetilde{H}_\alpha(E) \neq 0\} = \inf\{\alpha : \widetilde{H}_\alpha(E) = 0\}, \textit{де} \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned} &\widetilde{H}_\alpha(E) = \lim_{\varepsilon\to 0} \widetilde{H}^\varepsilon_\alpha(E), \\ &\widetilde{H}^\varepsilon_\alpha(E) = \inf_{|\omega_i|\leqslant\varepsilon} \Big\{ \sum_i |\omega_i|^\alpha : \omega_i \in W_f, E \subset \bigcup_i \omega_i \Big\}, \end{aligned} \tag{1.2}$$

співпадає з розмірністю Гаусдорфа-Безиковича множини $E \subset [0;1]$.

Доведення. Покажемо, що існує константа $c > 0$ така, що

$$m^\alpha_\varepsilon(E) \leqslant \widetilde{H}^\varepsilon_\alpha(E) \leqslant c \cdot m^\alpha_\varepsilon(E), \tag{1.3}$$

зокрема $c = 2(2^\gamma + 1)$, де $H^\alpha(E) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} m^\alpha_\varepsilon(E)$ — класична міра Гаусдорфа, $l^\alpha(E) = c \lim\limits_{\varepsilon\to 0} m^\alpha_\varepsilon(E)$ і γ — найменше натуральне число таке, що

$$\lambda_2^\gamma \leqslant \lambda_1. \tag{1.4}$$

Ліва з нерівностей (1.3), очевидно, випливає з означення розмірності Гаусдорфа-Безиковича.

Доведемо праву. Для цього покажемо, що для довільного відрізка $u \subset [0;1]$ існує не більше, ніж $2(2^{\gamma}+1)$ елементів множини циліндричних відрізків W_f, таких, що покривають u і мають довжину, меншу $|u|$. Існують v_0 і v_1 рангу $k-1$ з $W_f^{(k-1)}$, такі, що $u \subset [0;1]$, $\sup v_0 = \inf v_1$ і $u_1 = u \bigcap v_0$, $u_2 = u \bigcap v_1$. Розглянемо u_1. Нехай $v_0 = v_{00} \bigcup v_{01}$, можливі наступні випадки.

1. $|v_{01}| \leqslant |u_1|$ і $|v_{00}| \leqslant |u_1|$. В цьому випадку u_1 покривається двома відрізками з $W_f^{(k)}$ з довжинами, меншими $|u_1|$.
2. $|v_{01}| \leqslant |u_1|$ і $|v_{00}| > |u_1|$. Виберемо γ таким, щоб виконувалась умова (1.4) і розглянемо всі 2^{γ} відрізки рангу $(k+\gamma)$ з $W_f^{(k+\gamma)}$, які належать v_{00}. Їх довжини не перевищують $|u_1|$, оскільки

$$\lambda_1|v_0| \leqslant |v_{01}| \leqslant |u_1| \leqslant |v_{00}| \leqslant \lambda_2|v_0|,$$

$$\lambda_1^{\gamma+1}|v_0| \leqslant \lambda_1^{\gamma}|v_{00}| \leqslant |v_{00c_1\ldots c_{\gamma}}| \leqslant \lambda_2^{\gamma}|v_{00}| \leqslant \lambda_2^{\gamma+1}|v_0|,$$

   і в силу нерівності (1.4), маємо

$$|v_{00c_1\ldots c_{\gamma}}| \leqslant \lambda_2^{\gamma+1}|v_0| \leqslant \lambda_1^{\gamma}|v_0| < |u_1|.$$

   В цьому випадку ми покрили u_1 за допомогою $(2^{\gamma}+1)$ відрізків з W_f, довжини яких менші $|u_1|$.
3. $|v_{01}| > |u_1|$. Нехай m — мінімальний ранг відрізків з W_f, для якого не існує відрізків рангу $(m-1)$, які б належали $|u_1|$, тобто існує відрізок $e \in W_f^{(m-1)}$ такий, що $u_1 \in e$. Розглядаючи $e = e_0 \bigcup e_1, e_i \in W_f^{(m)}$, приходимо до одного з попередніх випадків, оскільки $e_1 \subset u_1$.

Отже, в усіх випадках ми покриваємо u_1 не більше, ніж $(2^{\gamma}+1)$ відрізками з W_f, довжини яких не перевищують $|u_1|$.

Аналогічні міркування проводимо для u_2. Тобто, відрізок $u = u_0 \bigcup u_1$

можна покрити не більше, ніж $2(2^\gamma+1)$ відрізками з W_f, довжини яких не перевищують $|u|\leqslant\varepsilon$.

Таким чином, для будь-якого ε-покриття $\{u^k\}$ множини E існує її ε-покриття $\{w_i^k\}$, $w_i^k\in W_f$, $i=\overline{1,m_k}$, де $m_k\leqslant 2(2^\gamma+1)$ таке, що $|w_i^k|\leqslant|u^k|$ для $\forall i\in\{1,2,...,m_k\}$.

Тому

$$\sum|w_i^k|^\alpha=\sum_k\sum_{i=1}^{m_k}|w_i^k|^\alpha\leqslant\sum_k 2(2^\gamma+1)|u_k|^\alpha$$

і має місце права з нерівностей (1.3).

В свою чергу, з (1.3) випливає, що міри $l^\alpha(E)$ і $H^\alpha(E)$ одночасно перетворюються в нуль або нескінченність, тобто $\alpha_*(E)=\alpha_0(E)$. $\square$

Нехай $\delta=(\delta_1...\delta_m)$, $m\in N$, набори $\delta_i\in\{0;1\}$, $i\in\overline{1,m}$. Означимо T_δ^m-перетворення довільної точки $x=\Delta^f_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)...\alpha_k(x)...}$ з відрізка $[0;1]$ наступним чином:

$$T_\delta^m(x)=\Delta^f_{\delta_1\delta_2...\delta_m\alpha_{m+1}(x)...}.$$

T_δ^m-перетворенням множини E називається множина образів

$$T_\delta^m(E)=\left\{x:x=\Delta^f_{\delta_1\delta_2...\delta_m\alpha_{m+1}(x)...},\Delta^f_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)...\alpha_k(x)...}\in E\right\}.$$

Теорема 1.4. *Якщо відображення f має властивість:*

$$0<\lambda_1\leqslant\frac{|\Delta_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n\alpha_{n+1}}|}{|\Delta_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}|}\leqslant\lambda_2<1,\forall n\in N,\alpha_i\in\{0;1\},\qquad(1.5)$$

то для $\forall E\subset[0;1]:\lambda(E)=0\Longrightarrow\lambda(T_\delta^m(E))=0$.

Доведення. Як відомо, зовнішня міра Лебега означається так:

$$\lambda^*(E)=\inf_{E\subset\bigcup\limits_i u_i}\sum_k|u_k|,$$

і якщо $\lambda(E)=0$, то $\lambda^*(E)=0$.

Для доведення теореми досить показати, що при наведених вище умовах довільна борелівська множина нульової міри під дією T_δ^m-перетворення переходить в нуль-множину.

Нехай A — довільна борелівська множина, така що $\lambda(A) = 0$, тобто для $\forall\varepsilon > 0$ існує покриття w_i множини A, таке що $\sum\limits_i |w_i| < \varepsilon$. Покажемо, що існує константа s, така, що має місце нерівність

$$\lambda^*(A) \leqslant \lambda^*(T_\delta^m(A)) \leqslant s\lambda^*(A),$$

де $T_\delta^m(A)$ — образ множини A під дією T_δ^m-перетворення.

Розглянемо покриття множини A за допомогою циліндрів, для нього під дією T_δ^m-перетворення побудується покриття множини $T_\delta^m(A)$. На певному кроці кожен циліндр з покриття $T_\delta^m(A)$ можна покрити не більше, ніж $[\frac{\lambda_2}{\lambda_1}] + 1 = s$ циліндрами того ж рангу, виходячи з (1.5).

Позначимо, ω_i^* — покриття множини $T_\delta^m(A)$, тоді

$$\sum_i |w_i^*| \leqslant \sum_i |w_i| + s\sum_i |w_i| \leqslant \varepsilon + s\varepsilon = \varepsilon(1+s).$$

Отже, для $\forall\varepsilon > 0$ існує покриття w_i множини A, таке, що покриття множини $T_\delta^m(A)$ має властивість $\sum\limits_i |w_i^*| < \delta$, де $\delta = \varepsilon(1+s)$. А оскільки обидві множини вимірні, то їх міри одночасно рівні або нерівні нулю. □

1.4. Ймовірнісна теорія двійкового зображення

Ймовірнісна теорія двійкового зображення дійсних чисел вивчає задачі пов'язані з розподілами ймовірностей на множинах, що визначені властивостями двійкового зображення їх елементів.

Якщо Ω – непорожня множина, а $\mathfrak{F}$ – σ-алгебра підмножин Ω, тобто клас множин, що містить Ω і замкнений відносно об'єднання множин і доповнення, то пара $(\Omega, \mathfrak{F})$ називається *вимірним простором.* Міра μ, що задана на вимірному просторі $(\Omega, \mathfrak{F})$ називається *ймовірнісною*, якщо $\mu(\Omega) = 1$, а трійка $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ – *ймовірнісним простором.*

Теорема 1.5 (Лебега, [43]). *Якщо μ – зліченно-адитивна ймовірні-*

сна міра, то існує єдиний розклад

$$\mu(E) = \alpha_1\mu_d(E) + \alpha_2\mu_a c(E) + \alpha_3\mu_s(E),\ \forall E \in \mathfrak{F},$$

де $\mu_d, \mu_a c, \mu_s$ *– дискретна, абсолютно неперервна і сингулярна ймовірнісні міри відповідно,* $\alpha_i > 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$.

Розглянемо випадкову величину

$$\xi = \Delta^f_{\eta_1\eta_2\ldots\eta_k\ldots}, \tag{1.6}$$

двійкові f – коди η_k, якої є незалежними випадковими величинами, що набувають значень 0 та 1 з ймовірностями p_{0k} та p_{1k} відповідно, $p_{ik} \geqslant 0, p_{0k} + p_{1k} = 1\ \forall k \in N$. Матриця $\|p_{ik}\|$ повністю визначає тип розподілу вище означеної випадкової величини.

Лема 1.4. *Функція розподілу випадкової величини* $\xi = \Delta^f_{\eta_1\eta_2\ldots\eta_k\ldots}$ *подається у вигляді*

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, \textit{при } x < 0, \\ \beta_1(x) + \sum\limits_{i=2}^{\infty}\left[\beta_i(x)\prod\limits_{j=1}^{i-1} p_{\alpha_j(x)j}\right], \textit{при } x \in [0;1], \\ 1, \textit{при } x > 1; \end{cases}$$

де

$$\beta_i(x) = \begin{cases} 0, \textit{якщо } \alpha_i(x) = 0, \\ p_{0i}, \textit{якщо } \alpha_i(x) = 1 \end{cases},$$

а $\alpha_i(x)$ *— цифри* f*-кодування числа* x. *Якщо* $F_\xi(x)$ *має похідну у точці* $x = \Delta^f_{\alpha(x)_1\alpha(x)_2\ldots\alpha(x)_n\ldots}$, *вона запишеться наступним чином*

$$F'(x) = \lim_{x_2-x_1\to 0}\frac{F(x_2)-F(x_1)}{x_2-x_1} = \lim_{m\to\infty}\frac{\prod\limits_{i=1}^{m} p_{\alpha_i(x)i}}{|\Delta_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_m(x)}|} \leqslant \prod_{i=1}^{\infty}\frac{p_{\alpha_i(x)i}}{\lambda_1}.$$

Доведення. Оскільки за означенням функція розподілу $F(x) = P\{\xi < x\}$, то маємо

$$\{\xi < x\} = \{\xi_1 < \alpha_1(x)\}\bigcup\{\xi_1 = \alpha_1(x), \xi_2 < \alpha_2(x)\}\bigcup\ldots$$

$$\bigcup\{\xi_i = \alpha_i(x), i \in \overline{1, n-1}\xi_n < \alpha_n(x)\}\bigcup ...$$

Оскільки події в правій частині останньої рівності несумісні, то

$$P\{\xi < x\} = P\{\xi_1 < \alpha_1(x)\} + P\{\xi_1 = \alpha_1(x), \xi_2 < \alpha_2(x)\} + ...$$

$$P\{\xi_1 < \alpha_1(x)\} = \begin{cases} 0, \text{якщо } \alpha_i(x) = 0, \\ p_{0i}, \text{якщо } \alpha_i(x) = 1 \end{cases} := \beta_1(x)$$

В силу незалежності випадкових величин ξ_i маємо

$$P\{\xi_i = \alpha_i(x), i \in \overline{1, n-1}, \xi_n < \alpha_n(x)\} =$$

$$= P\{\xi_n < \alpha_n(x)\}\prod_{i=1}^{n-1} P\{\xi_i = \alpha_i(x)\} = \beta_n(x)\prod_{i=1}^{n-1} p_{\alpha_i(x)i},$$

тому $P\{\xi < x\} = \sum\limits_{j=1}^{\infty}[\beta_j(x)\prod\limits_{i=1}^{j-1} p_{\alpha_i(x)i}]$ для $\forall i > 1$.

$\square$

Теорема 1.6. *Для того, щоб випадкова величина ξ мала дискретний розподіл, необхідно і достатньо, щоб*

$$\prod_{k=1}^{\infty}\max_i\{p_{ik}\} > 0. \qquad (1.7)$$

Доведення. Необхідність. Як відомо, стрибок функції розподілу $F_\xi(x)$ в точці x рівний

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(F_\xi(x+\varepsilon) - F_\xi(x-\varepsilon)) = \lim_{k\to\infty} P\{\xi = \Delta_{\alpha_1(x)...\alpha_k(x)...}\} =$$

$$= \lim_{k\to\infty}\prod_{j=1}^{k} p_{\alpha_j(x)j} = \prod_{j=1}^{\infty} p_{\alpha_j(x)j}$$

Отже, для того щоб, функція розподілу мала стрибок в точці x необхідно і достатньо, щоб $\prod\limits_{j=1}^{\infty} p_{\alpha_j(x)j} > 0$. Оскільки ж

$$\prod_{k=1}^{\infty}\max_i\{p_{ik}\} \geqslant \prod_{j=1}^{\infty} p_{\alpha_j(x)j},$$

то має місце нерівність (1.7).

Достатність. Через $p_{n(k)k}$ позначимо $\max\limits_i\{p_{ik}\}$ для $\forall k \in N$ і розглянемо число $\overline{x} = \Delta_{\alpha_{n(1)}\alpha_{n(2)}\ldots\alpha_{n(k)}\ldots}$. Оскільки ξ_k незалежні, то

$$P\{\xi = \overline{x}\} = P\{\xi_1 = \alpha_{n(1)}, ..., \xi_k = \alpha_{n(k)}, ...\} = \prod_{k=1}^{\infty} \max_i\{p_{ik}\} > 0.$$

Отже, $\overline{x}$ є атомом розподілу.

Очевидно, що в точці $\overline{x}$ функція розподілу $F_\xi(x)$ буде мати максимальний стрибок. Числа, двійкове кодування яких відрізняється від $\overline{x}$ лише скінченим числом елементів, також є атомами, що випливає з необхідної умови збіжності нескінченного добутку. Не важко показати, що сума цих стрибків буде рівна 1, це доводить, що ймовірність зосереджена на зчисленній множині вище названих точок. □

Теорема 1.7. *Якщо довільну борелівську множину $E \subset [0;1]$ нульової міри Лебега, T_δ^m-перетворення переводить в нуль-множину, то випадкова величина* (1.6) *має чистий тип розподілу, тобто або чисто дискретний, або чисто абсолютно неперервний, або чисто сингулярний.*

Доведення. Нехай E — довільна борелівська множина. Розглянемо подію $A = \{\xi \in T_\delta^m(E)\}$.

Оскільки ξ_i незалежні, то подія A, будучи породженою послідовністю випадкових величин η_k не залежить від всіх $\sigma-$алгебр $\mathcal{B}_k$, породжених $\eta_1, \eta_2, ..., \eta_k$, є залишковою. Тому за законом 0 та 1 Колмогорова ймовірність $P(A) = 0$ або $P(A) = 1$.

Як було доведено вище, якщо $\prod\limits_{k=1}^{\infty} \max\limits_i\{p_{ik}\} > 0$, то множина E не більш ніж зчисленна і розподіл буде чисто дискретним. В протилежному випадку, тобто при $\prod\limits_{k=1}^{\infty} \max\limits_i\{p_{ik}\} = 0$ можливі два випадки:

1. знайдеться множина E нульової міри Лебега, що $P\{\xi \in E\} > 0$, тобто розподіл ξ містить ненульову сингулярну компоненту.
2. такої множини не існує, тобто з того що $\lambda(E) = 0$ випливає, що

$P\{\xi \in E\} = 0$, що рівносильно абсолютній неперервності розподілу.

$\square$

Теорема 1.8. *Якщо для відображення f виконується умова* (1.5)*:*

$$0 < \lambda_1 \leqslant \frac{|\Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\alpha_{n+1}}|}{|\Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}|} \leqslant \lambda_2 < 1, \forall n \in N, \alpha_i \in \{0;1\}$$

то розподіл випадкової величини ξ є чистим.

Доведення. В роботі [24] було доведено, що для обчислення розмірності Хаусдорфа-Безиковича можна обмежитись розглядом покриттів за допомогою циліндрів. При $\alpha = 1$ вираз $\widetilde{H}^{\varepsilon}_{\alpha}(E) = \inf\limits_{|\omega_i| \leqslant \varepsilon}\{\sum\limits_i |\omega_i|^{\alpha} : \omega_i \in W_f, E \subset \bigcup\limits_i \omega_i\}$, де W_f — множина циліндричних відрізків, співпадає з зовнішньою мірою Лебега множини E.

Як відомо, зовнішня міра Лебега означається $\lambda^*(E) = \inf\limits_{E \subset \bigcup\limits_i u_i} \sum\limits_k |u_k|$ і якщо $\lambda(E) = 0$, то $\lambda^*(E) = 0$.

Для доведення теореми досить показати, що при наведених вище умовах, довільна борелівська множина нульової міри під дією T^m_δ-перетворення переходить в нуль-множину. А це справедливо в силу теореми 1.4.

$\square$

Теорема 1.9. *Якщо для відображення f виконується* (1.5) *і матриця $\|p_{ik}\|$ має нескінченну кількість нулів, то випадкова величина ξ має сингулярний розподіл канторівського типу.*

Доведення. Нехай E_n — це об'єднання всіх відрізків рангу n, які містять точки спектра S_ξ, F_n — це об'єднання інтервалів рангу n, які мають порожній переріз з S_ξ, але містяться у відрізках рангу $n-1$, що належать до E_{n-1}. Тоді $E_{n-1} = E_n \bigcup F_n$ і $E_{n-1} \bigcap S_\xi \neq \varnothing$ і $S_\xi = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ і $\lambda(S_\xi) = \lim\limits_{n\to\infty} E_n$. Очевидно $E_0 = [0;1]$, $\lambda(E_0) = 1$. Тоді

$$\lambda(E_1) < \lambda(E_0) - \lambda(E_0) \cdot \mu =$$

$$= \lambda(E_0)(1-\mu) = (1-\mu)\lambda(E_2) < (1-\mu)^2$$

....

$$\lambda(E_k) < (1-\mu)^k \to 0 (k \to \infty).$$

$\square$

1.5. Ланцюгове представлення та зображення чисел

Вперше ланцюгові дроби були розглянуті італійським математиком Бомбеллі у 1572 році. Пізніше теорію ланцюгових дробів сформулював Л.Ейлер та застосував їх до розкладу функцій, представлення нескінченних добутків та ін. Ланцюгові дроби також зустрічались у роботах Д.Бернуллі, Ж.Л.Лагранжа. Метричну теорію елементарних ланцюгових дробів вивчали П.Леві [86], О.Я.Хінчин [61], I.J.Good [77], D.Hensley [81, 80, 79], O. Jenkinson [84], В.І.Арнольд [2], У.Джоунс і В.Трон [16] та інші. В Україні вивченням ланцюгових дробів та їх застосування займались В.Я.Скоробагатько [54], М.М.Пагіря [38], Я.Ф.Виннишин [9], Брагін О.Б. [6] Р.І.Дмитришин [27], М.В. Працьовитий [49, 41], О. Л. Лещинський [33, 32, 34], С. Альбеверіо, Г.М. Торбін [62, 1, 49] та інші.

Ланцюговим (або неперервним [61]) дробом називається вираз виду

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \dots}}, \tag{1.8}$$

де (a_n) — числова, функціональна або деяка інша послідовність. Якщо послідовність (a_n) є нескінченною, то ланцюговий дріб називається нескінченним, а якщо скінченною, то — скінченним. Найбільш поширеними в математиці і її застосуваннях є елементарні ланцюгові дроби [61], в яких (a_n) — послідовність натуральних чисел.

Нескінченний ланцюговий дріб будемо формально записувати у вигляді $[a_0; a_1, ..., a_n, ...]$ і називати зображенням ланцюгового дробу, а скінченний — $[a_0; a_1, ..., a_n]$. Також нескінченний ланцюговий дріб можна зобразити у вигляді $[a_0; a_1, a_2, ..., a_{n-1}, r_n]$, де $r_n = [a_n; a_{n+1}, ..., a_{n+k}, ...]$ — n-й залишок початкового ланцюгового дробу.

Періодичний ланцюговий дріб

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n, c_1, c_2, \ldots, c_p, c_1, c_2, \ldots, c_p, \ldots]$$

записується $[a_0; a_1, \ldots, a_n, (c_1, c_2, \ldots, c_p)]$, де $(c_1, c_2, \ldots, c_p)$ — період.

Очевидно, що кожне раціональне число можна розкласти у елементарний ланцюговий дріб двома способами $[0; a_1, ..., a_{n-1}, a_n+1] = [a_0; a_1, ..., a_n, 1]$. За домовленістю, будемо використовувати перший варіант.

Теорема 1.10 (Ейлер-Лагранж). *Число можна подати у вигляді нескінченного періодичного елементарного ланцюгового дробу тоді і тільки тоді, коли воно є ірраціональним роз'язком квадратного рівняння з цілими коефіцієнтами.*

Підхідним дробом порядку n ланцюгового дробу $[a_0; a_1, a_2, ..., a_n, ...]$ називається число $\frac{p_n}{q_n}$, що є значенням скінченного ланцюгового дробу $[a_0; a_1, a_2, ..., a_n]$, тобто n-го відрізка даного ланцюгового дробу. При цьому число p_n називається *чисельником підхідного дробу*, а q_n — *знаменником.* Добре відомий [61] закон утворення підхідних дробів має наступний вигляд: для довільного натурального $n \geqslant 2$

$$\begin{cases} p_n &= a_n p_{n-1} + p_{n-2}, \\ q_n &= a_n q_{n-1} + q_{n-2}, \end{cases}$$

при цьому вважається $p_0 = a_0$, $q_0 = 1$, $p_1 = a_1 a_0 + 1$, $q_1 = a_1$.

Оскільки p_n і q_n залежать від перших елементів ланцюгового дробу, то можна використовути і такі позначення $p(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ і $q(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ відповідно ($p(a_1, \ldots, a_n)$ і $q(a_1, \ldots, a_n)$ при $a_0 = 0$).

Теорема 1.11 ([61]). *Для підхідних дробів виконуються рівності:*

1. $q_k p_{k-1} - p_k q_{k-1} = (-1)^k$;
2. $q_k p_{k-2} - p_k q_{k-2} = (-1)^{k-1} a_k$;

3. $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} - \frac{p_k}{q_k} = \frac{(-1)^k}{q_k q_{k-1}}$;
4. $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} - \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} = \frac{(-1)^k a_{k+1}}{q_{k+1} q_{k-1}}$.
5. $\frac{q_k}{q_{k-1}} = [a_k; a_{k-1}, ..., a_1]$;
6. $[a_0; a_1, a_2, ..., a_n] = \frac{p_{k-1} r_k + p_{k-2}}{q_{k-1} r_k + q_{k-2}}$, *де* $r_k = [a_k; a_{k+1,...,a_n}]$, $k \leqslant n$.

Теорема 1.12. *Підхідні дроби парного порядку утворюють зростаючу, а непарного порядку — спадну послідовності. При цьому будь-який підхідний дріб непарного порядку більший будь-якого підхідного дробу парного порядку.*

Нескінченний ланцюговий дріб називається *збіжним*, якщо існує границя послідовності $\dfrac{p_n}{q_n}$ його підхідних дробів. Остання називається значенням ланцюгового дробу.

Теорема 1.13 ([61, с. 17]). *Для збіжності нескінченного ланцюгового дробу* $[a_0; a_1, a_2, ..., a_n, ...]$, *необхідно і достатньо, щоб розбігався ряд* $a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$

Теорема 1.14. *Якщо* x *— значення нескінченного ланцюгового дробу* $[0; a_1, a_2, ...]$, *то для будь-якого натурального* n

$$\frac{1}{q_n(q_n + q_{n+1})} < |x - \frac{p_n}{q_n}| = \frac{1}{q_n(r_{n+1} q_n + q_{n+1})} \leqslant \frac{1}{q_n q_{n+1}}.$$

Означення 1.8. Циліндром рангу n з основою $a_1 a_2 \ldots a_n$ ланцюгового зображення чисел називається множина

$$\Delta_{c_1 c_2 \ldots c_n} = \{x : x = [c_1, c_2, \ldots, c_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots], a_i = c_i, i = \overline{1, n}\}$$

Довжина циліндра n-го рангу обчислюється наступним чином [61]

$$|\Delta_{c_1 c_2 \ldots c_n}| = \frac{1}{q_n(q_n + q_{n-1})},$$

а основне метричне співвідношення запишеться

$$\frac{|\Delta_{c_1 c_2 \ldots c_n s}|}{|\Delta_{c_1 c_2 \ldots c_n}|} = \frac{1}{s^2} \frac{1 + \frac{q_{n-1}}{q_n}}{(1 + \frac{q_{n-1}}{s q_n})(1 + \frac{1}{s} + \frac{q_{n-1}}{s q_n})}.$$

Елементи ланцюгового дробу (1.8) визначаються з рівності:

$$a_n(x) = \left[\frac{1}{T^{n-1}(x)}\right], \quad T^{n-1}(x) \neq 0,$$

де $T : [0;1) \to [0;1)$ – перетворення Гауса, задане наступним чином:

$$T(x) := \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right], \quad 0 < x < 1, \quad T(0) := 0, \quad a_1(x) = \left[\frac{1}{x}\right]$$

Ланцюгові дроби Данжуа і D_2-зображення Покладемо $\frac{1}{0} \equiv \infty$, $\frac{1}{\infty} \equiv 0$, $(1,0)^k \equiv (\underbrace{1,0,1,0,...,1,0}_{2k})$, $(0,1)^k \equiv (\underbrace{0,1,...,0,1}_{2k})$.

Данжуа встановив [73], що кожне дійсне число x розкладається у скінченний або нескінченний ланцюговий дріб $x = [d_0; d_1, ..., d_n, ...]$, де $d_0 \in Z$, причому $x - d_0 \geqslant 0$, $d_n \in \{0,1\}$, який називається *канонічним ланцюговим дробом* (або *ланцюговим дробом Данжуа*).

Такі розклади чисел вивчалися в роботах [82, 83] і легко отримуються з розкладів чисел в елементарні ланцюгові дроби. Нижче наведемо алгоритм такого розкладу.

Теорема 1.15. *Для будь-якого $x \in (0;1]$ існує набір $d_1, ..., d_n$ або послідовність $(d_n) \in L$ такі, що: $x = [0; d_1, d_2, ..., d_n]$ або*

$$x = [0; d_1, d_2, ..., d_n, ...] \equiv [0; d_1 d_2 ... d_n ...]^{D_2}, \text{ причому} \tag{1.9}$$

$d_1 = 1$ і $d_{j+1} = 1$, якщо $d_j = 0$.

Доведення. Наведемо конструктивне (алгоритмічне) доведення існування розкладу числа x. Очевидно, що $1 = [0;1]^{D_2}$. Нехай $1 < a \in N$. Тоді $[0;a] = \frac{1}{a} = \frac{1}{1+a-1} = \frac{1}{1+\frac{1}{0+\frac{1}{a-1}}}$ і

$$\frac{1}{a} = [0;1,0,a-1] = [0;1,0,1,0,a-2] = ... = [0;1,0,1,0,...,1,0,2] =$$
$$= [0;1,0,1,0,...,1,0,1] = [0;(1,0)^{a-1},1]^{D_2}.$$

Нехай $0 < x < 1$. Тоді $u_1 \equiv \frac{1}{x} > 1$. Нехай $x_1 \equiv u_1 - 1 = \frac{1}{x} - 1$, маємо

$$x = \frac{1}{u_1} = \frac{1}{1 + x_1} = [0; 1 + x_1] \text{ і } d_1 = 1.$$

Якщо $x_1 = 1$, то $x = [0; 1, 1]^{D_2} = [0; 1, 0, 1]^{D_2}$. Якщо $x_1 \neq 1$, то можливі випадки $0 < x_1 < 1$ або $x_1 > 1$.

Якщо $x_1 < 1$, то виконаємо те ж саме перетворення.

Процедура 1. Поклавши $u_2 \equiv \frac{1}{x_1}$, отримуємо $1 < u_2 = 1 + x_2$,

$$x_1 = \frac{1}{1 + x_2} \text{ і } x = \frac{1}{1 + \frac{1}{1+x_2}}.$$

Якщо $x_1 > 1$, то застосуємо процедуру 2: покладемо $x_2 \equiv \frac{1}{x_1}$, отримаємо $x_1 = \frac{1}{0+x_2}$, де $x_2 \equiv \frac{1}{x_1} < 1$.

Отже, два елементи розкладу x в ланцюговий дріб знайдено:

$$x = \frac{1}{1 + \frac{1}{d_2+x_2}}, \text{ де } d_2 \in \{0, 1\}.$$

Алгоритм обчислення перших двох елементів розкладу (1.9) числа x завершено.

Тепер проаналізуємо залишок x_2. Якщо $x_2 = 1$, то

$$x = [0; 1, d_2, 1, 1]^{D_2} = [0; 1, d_2, 1, 0, 1]^{D_2}.$$

Якщо $x_1 < 1$, то діємо за процедурою 1, якщо $x_2 > 1$, то — за процедурою 2. Отримуємо x_3, d_3 і розклад

$$x = \frac{1}{1 + \frac{1}{d_2 + \frac{1}{d_3+x_3}}} = [0; 1, d_2, d_3 + x_3,],$$

причому, якщо $d_2 = 0$, то $d_3 = 1$. Справді, при $d_2 = 0$ число x_2 менше 1. І т.д.

За скінченне число кроків отримаємо $x_k = 1$ або ж процес продовжуватиметься до нескінченності. Його збіжність очевидна. $\square$

Розглянемо приклад:

$$\frac{3}{7}=\frac{1}{\frac{7}{3}}=\frac{1}{1+\frac{4}{3}}=\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{3}{4}}}=\frac{1}{1+\frac{1}{0+\frac{3}{4}}}=\frac{1}{1+\frac{1}{0+\frac{1}{\frac{4}{3}}}}=$$

$$=\frac{1}{1+\frac{1}{0+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}}}=\frac{1}{1+\frac{1}{0+\frac{1}{1+\frac{1}{1+2}}}}=\frac{1}{1+\frac{1}{0+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{1}{2}}}}}}=$$

$$=\frac{1}{1+\frac{1}{0+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{0+\frac{1}{2}}}}}}=\frac{1}{1+\frac{1}{0+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{0+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}}}}}=[0;1,0,1,1,0,1,1].$$

Таким чином, маючи розклад числа $x=[0;a_1,a_2,...,a_n,...]$ в елементарний ланцюговий дріб легко отримати розклад цього числа в ланцюговий дріб Данжуа з використанням двох прийомів:

Якщо $a,b\in Z$, $b\geqslant 2$ і $u\geqslant 0$, то

$$a+\frac{1}{b+u}=a+\frac{1}{1+\frac{1}{0+\frac{1}{b-1+u}}}=[a;1,0,(b-1)+u] \text{ і}$$

$$[a;b+u]=a+\frac{1}{b+u}=a-1+\frac{1}{0+\frac{1}{1+\frac{1}{b+u}}}=[a-1;0,1,b+u].$$

В результаті отримуємо розклад числа

$$x=[0;(1,0)^{a_1-1},1,(1,0)^{a_2-1},1,(1,0)^{a_2-1},1,...],$$

який називатимемо D_2-*зображенням.*

Зауважимо, що кожне раціональне число з проміжку $(0;1]$ має два D_2-зображення $[0;d_1,d_2,...,d_n,1,1]^{D_2}\equiv[0;d_1,d_2,...,d_n,1,0,1]^{D_2}$.

Оскільки $[0;a,b]=[0;a,0,0,b]$, то дозволивши використовувати два нулі підряд, ми отримуємо інший розклад числа в ланцюговий дріб з елементами 0 та 1, відмінний від одержаного за вказаним алгоритмом. Це приведе до того, що числа матимуть нескінченну кількість різних зображень. Заборона використовувати два нулі підряд дає єдиність D_2-зображення ірраціональних чисел і два зображення для раціональних чисел.

Зауваження 1.1. Оскільки D_2-зображення є двосимвольним перекодуванням елементарного ланцюгового зображення чисел, то відповідна йому тополого-метрична теорія частково може бути отримана в результаті проектування відомих фактів з теорії елементарних ланцюгових дробів в нові форми.

Наприклад, відомий результат Хінчина [61], що для майже всіх (у розумінні міри Лебега) чисел $x = [0; a_1, ..., a_n, ...]$ виконується $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n} a_j = \infty$ випливає, що

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} a_j - n}{\sum\limits_{j=1}^{n} a_j} = 1,$$

тобто для майже всіх x "частоти"нуля та одиниці у розкладі у канонічний ланцюговий дріб однакові.

Висновки до розділу 1

Даний розділ містить короткий огляд результатів пов'язаних з темою дисертаційного дослідження. Розглянуто основні означення та твердження, що використовуються у наступних розділах. Введено у розгляд простір послідовностей з нулів та одиниць та задано математичні структури на ньому. Сформульовано ряд тверджень стосовно його тополого-метричних властивостей. Викладено основні відомості з теорії елементарних ланцюгових дробів та їх перекодування у дроби Данжуа.

РОЗДІЛ 2
МЕДІАНТЕ ЗОБРАЖЕННЯ ДІЙСНИХ ЧИСЕЛ

У 1911 році Мінковським [90] був запропонований приклад сингулярної, тобто неперервної, похідна якої майже скрізь рівна нулю, функції, яку згодом назвали функцією Мінковського. Дана функція є строго монотонною та задовольняє вимоги до функції розподілу, тому цікаво було б знайти та дослідити випадкову величину, якій вона відповідає. Шукану випадкову величину зручно задавати за допомогою спеціального представлення чисел, яке назвемо медіантним представленням.

2.1. Медіантне розбиття та його циліндричні множини

Означення 2.1. Медіантою двох дробів $\frac{a}{b}$ і $\frac{c}{d}$ з додатними знаменниками називається дріб $\frac{a+c}{b+d}$.

Легко показати, що медіанта двох дробів завжди лежить між ними. Медіанти також використовуються для утворення підхідних дробів для ланцюгового представлення чисел [61], а також тісно пов'язані з послідовностями Фарея. Розглянемо числа $x \in [0;1] \equiv \Delta$. Відрізок Δ медіантою $\frac{1}{2}$ кінців $\frac{0}{1}$ і $\frac{1}{1}$ розбивається на два відрізки першого рангу

$$\Delta_0 = \left[\frac{0}{1}; \frac{1}{2}\right], \Delta_1 = \left[\frac{1}{2}; \frac{1}{1}\right].$$

В свою чергу кожен з цих відрізків медіантою своїх кінців розбивається на відрізки 2-го рангу:

$$\Delta_{00} = \left[\frac{0}{1}; \frac{1}{3}\right], \Delta_{01} = \left[\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right], \Delta_{10} = \left[\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right], \Delta_{11} = \left[\frac{2}{3}; \frac{1}{1}\right],$$

відрізки другого рангу за цим же принципом розбиваються на відрізки третього рангу $\Delta_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}$, $\alpha_i \in \{0;1\}$ і т.д.

Зрозуміло, що при кожному фіксованому наборі $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$ наступний елемент α_n набуває значень 0 і 1, причому $\alpha_n = 0$ для лівого з відрізків $\Delta_{\alpha_1\dots\alpha_n}$ і $\alpha_n = 1$ – для правого. Таким чином, отримуємо розбиття відрізка $[0;1]$ на відрізки n-го рангу для кожного натурального n. Далі будемо позначати через p_i^n і q_i^n відповідно чисельники і знаменники медіант, утворені до n-го кроку включно, де i пробігає всі значення від 1 до 2^n+1 і вказує на порядок медіанти зліва на право на n-му кроці розбиття.

В загальному випадку дане розбиття отримуємо наступним чином: для відрізка n-го рангу $\Delta_{\alpha_1\dots\alpha_n} = \left[\frac{p_{i-1}^n}{q_{i-1}^n}; \frac{p_i^n}{q_i^n}\right]$, відрізки $n+1$ рангу, що йому належать, запишуться у вигляді

$$\Delta_{\alpha_1\dots\alpha_n\alpha_{n+1}} = \left[\frac{p_{i-1}^n + \alpha_{n+1}p_i^n}{q_{i-1}^n + \alpha_{n+1}q_i^n}; \frac{p_{i-1}^n(1-\alpha_{n+1}) + p_i^n}{q_{i-1}^n(1-\alpha_{n+1}) + q_i^n}\right], \tag{2.1}$$

де p_i^n і q_i^n, $i = \overline{1, 2^n+1}$ — відповідно чисельники і знаменники медіант, при початкових значеннях $p_1^0 = 0$, $p_2^0 = q_1^0 = q_2^0 = 1$. Сім'ю відрізків всіх рангів позначимо W, для неї виконуються наступні властивості:

1. $\Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n} \subset \Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}} : \forall \alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n \in \{0,1\}$

   Враховуючи наведене вище дана властивість є очевидною.

2. $\Delta_{\alpha_1\dots\alpha_n\dots\alpha_k} \subset \Delta_{\beta_1\dots\beta_n} (k > n)$ при $\overline{\alpha_1 \dots \alpha_n} = \overline{\beta_1 \dots \beta_n}$ і $\Delta_{\alpha_1\dots\alpha_k} \cap \Delta_{\beta_1\dots\beta_n} = \varnothing$ при $\overline{\alpha_1 \dots \alpha_n} \neq \overline{\beta_1 \dots \beta_n}$.

   Доведення. Якщо $\alpha_1 \neq \beta_1$, то очевидно, що відрізки $\Delta_{\alpha_1\dots\alpha_k}$ і $\Delta_{\beta_1\dots\beta_n}$ не перетинаються. При $\alpha_1 = \beta_1$ розглянемо α_2, β_2 , якщо $\alpha_2 \neq \beta_2$ то згадані відрізки не перетинаються, в іншому випадку розглянемо α_3, β_3 і т.д. Якщо виявиться, що існує таке i, що $\alpha_i \neq \beta_i$, то відрізки $\Delta_{\alpha_1\dots\alpha_k}$ і $\Delta_{\beta_1\dots\beta_n}$ не перетинаються, оскільки у цьому випадку виходячи з того, що відрізки одного рангу не перетинаються та за властивістю 1 матимемо $\Delta_{\alpha_1\dots\alpha_i\dots\alpha_k} \subset \Delta_{\alpha_1\dots\alpha_i}$, $\Delta_{\beta_1\dots\beta_i\dots\beta_n} \subset \Delta_{\beta_1\dots\beta_i}$ і $\Delta_{\beta_1\dots\beta_i} \cap \Delta_{\alpha_1\dots\alpha_i} = \varnothing$. У протилежному випадку, тобто при $\alpha_i = \beta_i$

для будь-яких $i=\overline{1,n}$, маємо $\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_n}=\Delta_{\beta_1\ldots\beta_n}$ і за властивістю 1: $\Delta_{\beta_1\ldots\beta_n}\supset\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_n\alpha_{n+1}}\supset\ldots\supset\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_k}$. $\square$

3. Довжина відрізка $\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_n}=\left[\frac{p^n_{i-1}}{q^n_{i-1}};\frac{p^n_i}{q^n_i}\right]$, яку позначимо $|\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_n}|$, обчислюється за формулою:

$$|\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_n}|=\frac{1}{q^n_{i-1}q^n_i}. \tag{2.2}$$

Доведення. Для доведення рівності (2.2) розглянемо матрицю

$$M(\alpha_n)=\begin{pmatrix} p^n_{i-1} & p^n_i \\ q^n_{i-1} & q^n_i \end{pmatrix}.$$

Виходячи з (2.1), для наступного кроку матимемо

$$M(\alpha_{n+1})=\begin{pmatrix} p^n_{i-1}+\alpha_{n+1}p^n_i & p^n_{i-1}(1-\alpha_{n+1})+p^n_i \\ q^n_{i-1}+\alpha_{n+1}q^n_i & q^n_{i-1}(1-\alpha_{n+1})+q^n_i \end{pmatrix}.$$

Визначник матриці $A(\alpha_n)=\begin{pmatrix} 1 & 1-\alpha_n \\ \alpha_n & 1 \end{pmatrix}$ тотожно рівний 1, оскільки α_n набуває значень 0 і 1. Легко бачити, що матрицю $M(\alpha_{n+1})$ можна отримати в результаті множення $M(\alpha_{n+1})=M(\alpha_n)A(\alpha_{n+1})$. Методом математичної індукції доведемо, що рівність

$$M(\alpha_n)=M(\alpha_0)\prod_{j=1}^{n}A(\alpha_j) \tag{2.3}$$

виконується для будь-якого натурального n. Для $n=1$ маємо

$$\begin{pmatrix} p^0_1 & p^0_2 \\ q^0_1 & q^0_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1-\alpha_1 \\ \alpha_1 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} p^0_1+\alpha_1 p^0_2 & p^0_1(1-\alpha_1)+p^0_2 \\ q^0_1+\alpha_1 q^0_2 & q^0_1(1-\alpha_1)+q^0_2 \end{pmatrix}=M(\alpha_1),$$

тобто рівність (2.3) виконується.

Припустимо, що рівність (2.3) виконується для $n = k$, тобто

$$M(\alpha_k) = M(\alpha_0)\prod_{j=1}^{k} A(\alpha_j) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} p_{i-1}^k & p_i^k \\ q_{i-1}^k & q_i^k \end{pmatrix} = M(\alpha_0)\prod_{j=1}^{k} A(\alpha_j).$$

Розглянемо добуток

$$M(\alpha_k)\begin{pmatrix} 1 & 1-\alpha_{k+1} \\ \alpha_{k+1} & 1 \end{pmatrix} = M(\alpha_0)\prod_{j=1}^{k} A(\alpha_j)\begin{pmatrix} 1 & 1-\alpha_{k+1} \\ \alpha_{k+1} & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} p_{i-1}^k & p_i^k \\ q_{i-1}^k & q_i^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1-\alpha_{k+1} \\ \alpha_{k+1} & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} p_{i-1}^k + \alpha_{k+1}p_i^k & p_{i-1}^k(1-\alpha_{k+1}) + p_i^k \\ q_{i-1}^k + \alpha_{k+1}q_i^k & q_{i-1}^k(1-\alpha_{k+1}) + q_i^k \end{pmatrix} = M(\alpha_{k+1}).$$

Отже, рівність (2.3) виконується для $n = k + 1$, тобто і для будь-якого натурального n.

Маючи початкові значення $p_1^0 = 0$ і $p_2^0 = q_1^0 = q_2^0 = 1$ і поклавши $M(\alpha_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, з рівності (2.3) отримаємо

$$M(\alpha_n) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\prod_{j=1}^{n} A(\alpha_j).$$

Шукана довжина відрізка записується у вигляді

$$|\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_n}| = \frac{\left|p_{i-1}^n q_i^n - p_i^n q_{i-1}^n\right|}{q_{i-1}^n q_i^n} = \frac{1}{q_{i-1}^n q_i^n},$$

оскільки

$$p_{i-1}^n q_i^n - p_i^n q_{i-1}^n = |M(\alpha_n)| = \left|\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\prod_{j=1}^{n} A(\alpha_j)\right| =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\prod_{j=1}^{n} |A(\alpha_j)| = 1.$$

□

4. Відрізки одного і того ж рангу $\Delta_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}$ і $\Delta_{\beta_1 \ldots \beta_k}$, для яких виконуються рівність $\beta_i = 1 - \alpha_i, \forall i = \overline{1, k}$ мають однакову довжину.

   Доведення. Оскільки довжина відрізка залежить лише від знаменників медіант, то розглянемо механізм їх утворення. При утворенні знаменників на першому кроці маємо $q_1^1 = 1$, $q_2^1 = 2$, $q_3^1 = 1$, на другому - $q_1^2 = 1 = q_1^1$, $q_2^2 = 3 = q_1^1 + q_2^1$, $q_3^2 = 2 = q_2^1$, $q_4^2 = 3 = q_2^1 + q_3^1$, $q_5^2 = 1 = q_3^1$ і т.д. Тому, враховуючи властивість 3, очевидно, що відрізки симетричні відносно $\frac{1}{2}$, оскільки вирази (2) будуть відрізнятися лише порядком слідування множників у знаменнику.

   □

   Зауваження 2.1. Як видно з проведених міркувань, на $n + 1$ кроці послідовність знаменників має наступну властивість $q_i^n = q_{2i-1}^{n+1}$.

2.2. Метричні властивості медіантного представлення

Нехай маємо послідовність $\alpha_1, ..., \alpha_n, ...$, де α_n набувають значень 0 і 1. Задана послідовність, виходячи з вище доведених властивостей, визначає нескінченну послідовність вкладених відрізків: $\Delta_{\alpha_1} \supset \Delta_{\alpha_1 \alpha_2} \supset \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} \supset \ldots \supset \Delta_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} \supset \ldots$, які за аксіомою Кантора мають єдину спільну точку $x = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \Delta_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}$, яку називатимемо *медіантним представленням* числа x, і символічно зображатимемо $x = \Delta^M_{\alpha_1 \ldots \alpha_k \ldots}$.

З іншого боку, для кожної точки відрізка [0;1] існує відрізок першого рангу, відрізок другого рангу і т.д., що містять точку x. Таким чином, має місце наступне твердження.

Теорема 2.1. *Кожне число x з відрізка $[0; 1]$ має своє медіантне представлення, елементи $\alpha_i(x) \in \{0; 1\}$ якого визначаються наступним чином*

$$\forall x \in [0; 1] : x = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Delta_{\alpha_1 \ldots \alpha_k} \equiv \Delta^M_{\alpha_1(x) \ldots \alpha_k(x) \ldots}.$$

Зауважимо, що для всіх x з відрізка $[0;1]$ таке представлення єдине, за виключенням точок розбиття $\dfrac{p_i^n}{q_i^n}$.

Таким чином, виходячи з означення класичної функції Мінковського, якщо аргумент задано за допомогою медіантного представлення $x = \Delta^M_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_k(x)\ldots}$, то її значення запишеться у вигляді $?(x) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{\alpha_i(x)}{2^i}$.

Теорема 2.2. *Для довжин циліндричних відрізків k-го рангу мають місце нерівності:*

$$\frac{5\cdot 2^{2k+3}}{(1+\sqrt{5})^{2k+3}+(1-\sqrt{5})^{2k+3}+(-2)^{2k+3}} \leqslant |\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_k}| \leqslant \frac{1}{k+1}.$$

Доведення. Доведемо спочатку праву нерівність. За індукцією покажемо, що кожен із знаменників утворених на k-му кроці не менший, ніж $k+1$. При $k=1$ маємо знаменник $q_1^1 = 2 \geqslant 1+1 = q_0^0 + q_1^0$. Припустимо, що для k виконується нерівність $q_i^{*(k)} \geqslant k+1$, де $q_i^{*(k)}$ - знаменник, утворений на k-му кроці. Доведемо правильність твердження для $k+1$. Очевидно, що $q_i^k \geqslant 1 \forall k \in N$, тоді

$$q_i^{*(k+1)} = q_i^{*(k)} + q_i^{k-1} \geqslant k+1+1 = k+2,$$

що й треба було довести. Виходячи з того, що медіанта двох дробів знаходиться між ними, очевидно, що знаменники, утворені на кожному кроці, стоятимуть на парних місцях послідовності $\left\{q_i^k\right\}_{i=1}^{2^k+1}$. Тоді в силу вище доведеного,

$$q_i^{k-1} q_i^{*(k)} \geqslant k+1 \Rightarrow \frac{1}{q_i^{k-1} q_i^{*(k)}} = |\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_k}| \leqslant \frac{1}{k+1},$$

а останній дріб очевидно прямує до нуля, коли k прямує до нескінченності.

Для доведення лівої частини нерівності нагадаємо, що згідно властивості 3, довжина відрізка k-го рангу дорівнює $|\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_k}| = \dfrac{1}{q_{i-1}^k q_i^k}$, де q_{i-1}^k і q_i^k — знаменники медіант, що є кінцями даного відрізка. Тобто, щоб знайти нижню оцінку довжини відрізка, потрібно знайти максимальне значення знаменника. Як відомо, добуток набуває максимального значення при максимальних значеннях кожного з співмножників. Для початкових значень знаменників маємо $\max\limits_i q_i^0 = 1$, для відрізків першого рангу $\max\limits_i q_i^1 = 2$ і ці максимальні значення лежать поряд. Максимальний знаменник, на другому кроці, виходячи з описаного вище способу розбиття, рівний сумі максимальних значень на двох попередніх кроках, а саме $\max\limits_i q_i^2 = \max\limits_i q_i^1 + \max\limits_i q_i^0 = 2 + 1 = 3$ і т.д.

Легко бачити, що послідовність максимальних значень знаменників на кожному кроці співпадають з послідовністю чисел Фібоначчі, починаючи з другого члена, а остання послідовність задається формулою:

$$f_k = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k}{\sqrt{5}}.$$

Тобто $|\Delta_{\alpha_1}| > \dfrac{1}{f_2 f_3}$, $|\Delta_{\alpha_1\alpha_2}| > \dfrac{1}{f_3 f_4}$ і т.д., в загальному вигляді матимемо

$$|\Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}| > \frac{1}{f_{k+1} f_{k+2}}. \tag{2.4}$$

Обчислимо

$$f_{k+1} f_{k+2} = \frac{1}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\right] \cdot$$

$$\cdot \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2}\right] =$$

$$= \frac{(1+\sqrt{5})^{2k+3} + (1-\sqrt{5})^{2k+3} - (-4)^{k+1}(1+\sqrt{5}) - (-4)^{k+1}(1-\sqrt{5})}{5 \cdot 2^{2k+3}} =$$

$$= \frac{(1+\sqrt{5})^{2k+3} + (1-\sqrt{5})^{2k+3} - (-2)^{2k+2} \cdot 2}{5 \cdot 2^{2k+3}} =$$

$$= \frac{(1+\sqrt{5})^{2k+3} + (1-\sqrt{5})^{2k+3} + (-2)^{2k+3}}{5 \cdot 2^{2k+3}}.$$

Підставивши отримане в (2.4) матимемо потрібну нерівність. □

Теорема 2.3. *Основне метричне відношення має оцінки:*

$$\frac{1}{k+2} \leqslant \frac{\left|\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_k\alpha_{k+1}}\right|}{\left|\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_k}\right|} \leqslant \frac{k+1}{k+2}.$$

Доведення. Нехай $\Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k} = \left[\frac{p_i}{q_i}; \frac{p_{i+1}}{q_{i+1}}\right]$, як відомо його довжина $|\Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}| = \frac{1}{q_i q_{i+1}}$. Відрізки наступного рангу, що йому належать запишуться у вигляді $\Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k 0} = \left[\frac{p_i}{q_i}; \frac{p_i+p_{i+1}}{q_i+q_{i+1}}\right]$ і $\Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k 1} = \left[\frac{p_i+p_{i+1}}{q_i+q_{i+1}}; \frac{p_{i+1}}{q_{i+1}}\right]$, з довжинами $\frac{1}{q_i\left(q_i+q_{i+1}\right)}$ і $\frac{1}{q_{i+1}\left(q_i+q_{i+1}\right)}$ відповідно.

Розглянемо наступні відношення

$$\frac{|\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_k 0}|}{|\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_k}|} = \frac{1}{1+\frac{q_i}{q_{i+1}}} \text{ і } \frac{|\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_k 1}|}{|\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_k}|} = \frac{1}{1+\frac{q_{i+1}}{q_i}}.$$

З міркувань, які ми використовували для доведення попередньої теореми, випливає, що $\max\left\{\frac{q_i}{q_{i+1}}, \frac{q_{i+1}}{q_i}\right\} = \frac{k+1}{1}$, а $\min\left\{\frac{q_i}{q_{i+1}}, \frac{q_{i+1}}{q_i}\right\} = \frac{1}{k+1}$. Підставивши дані значення у попередні відношення отримаємо потрібні оцінки. □

Теорема 2.4. *Нехай $0 < \alpha < 1$. З двох сусідніх дробів, між якими лежить α, щонайменше один дріб $\frac{p}{q}$ відрізняється по абсолютній величині від α, менше, ніж на $\frac{1}{q^2}$.*

Доведення. Нехай $\frac{p_i}{q_i} < \alpha < \frac{p_{i+1}}{q_{i+1}}$, де $\frac{p_i}{q_i}$ і $\frac{p_{i+1}}{q_{i+1}}$ — два сусідні дроби на певному кроці розбиття. Якщо $\frac{p_i}{q_i} < \alpha < \frac{p_i+p_{i+1}}{q_i+q_{i+1}}$, то як відомо $p_{i+1}q_i + p_i q_{i+1} = 1$, і маємо:

$$\left|\alpha - \frac{p_i}{q_i}\right| \leqslant \frac{p_i+p_{i+1}}{q_i+q_{i+1}} - \frac{p_i}{q_i} = \frac{p_{i+1}q_i + p_i q_{i+1}}{q_i(q_i+q_{i+1})} < \frac{1}{q_i^2}.$$

Аналогічно, якщо $\frac{p_i+p_{i+1}}{q_i+q_{i+1}} < \alpha < \frac{p_{i+1}}{q_{i+1}}$, то отримаємо $\left|\alpha - \frac{p_i}{q_i}\right| < \frac{1}{q_{i+1}^2}$. Якщо α лежить поза інтервалом $(0;1)$, то ми можемо застосувати дану теорему до $\{\alpha\}$, а потім в отриманій нерівності $\left|\{\alpha\} - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$, додати до зменшуваного та від'ємника число, що є цілою частиною α . □

Зауваження. Тобто медіантне представлення дозволяє знаходити раціональні наближення дійсних чисел, що забезпечують точність до величини, оберненої квадрату знаменника.

Мають місце рівності:

$\Delta^M_{\underbrace{0\ldots0}_{a_1-1}\underbrace{1\ldots1}_{a_2}\underbrace{0\ldots0}_{a_3}\underbrace{1\ldots1}_{a_4}\ldots\underbrace{0\ldots0}_{a_n}} = \left[\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}; \frac{p_n}{q_n}\right]$ при непарному $n \geqslant 1$

$\Delta^M_{\underbrace{0\ldots0}_{a_1-1}\underbrace{1\ldots1}_{a_2}\underbrace{0\ldots0}_{a_3}\underbrace{1\ldots1}_{a_4}\ldots\underbrace{1\ldots1}_{a_n}} = \left[\frac{p_n}{q_n}; \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right]$ при парному $n \geqslant 2$, і

$$\Delta^M_{\underbrace{0\ldots0}_{a_1-1}\underbrace{1\ldots1}_{a_2}\underbrace{0\ldots0}_{a_3}\underbrace{1\ldots1}_{a_4}\ldots\underbrace{1\ldots1}_{a_{2n}}\underbrace{0\ldots0}_{a_{2n+1}}\ldots} = [0; a_1, a_2 \ldots] . \tag{2.5}$$

Що нескладно показати за індукцією. Очевидно, що $\Delta^M_{\underbrace{0\ldots0}_{m}} = \left[0; \frac{1}{m+1}\right]$. Тоді при $a_1 > 1$ маємо $\Delta^M_{\underbrace{0\ldots0}_{a_1-1}} = \left[0; \frac{1}{a_1}\right]$, і $\Delta^M_{\underbrace{0\ldots0}_{a_1-1}\underbrace{1\ldots1}_{a_2}} = \left[\frac{a_2}{a_1a_2+1}; \frac{1}{a_1}\right] = \left[\frac{p_2}{q_2}; \frac{p_1}{q_1}\right]$.

Нехай при непарному $n = k$ виконується рівність $\left[\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}; \frac{p_n}{q_n}\right] =$
$= \Delta^M_{\underbrace{0\ldots0}_{a_1-1}\underbrace{1\ldots1}_{a_2}\underbrace{0\ldots0}_{a_3}\underbrace{1\ldots1}_{a_4}\ldots\underbrace{0\ldots0}_{a_n}}$, тоді

$$\Delta^M_{\underbrace{0\ldots0}_{a_1-1}\underbrace{1\ldots1}_{a_2}\underbrace{0\ldots0}_{a_3}\underbrace{1\ldots1}_{a_4}\ldots\underbrace{0\ldots0}_{a_n}\underbrace{1\ldots1}_{a_{n+}}} = \left[\frac{p_{n-1}+a_{n+1}p_n}{q_{n-1}+a_{n+1}q_n}; \frac{p_n}{q_n}\right].$$

Аналогічні міркування можна провести і при парному n і здійснивши граничний перехід отримати (2.5). Проведені міркування показують, що медіантне зображення дісних чисел є певним перекодуванням їх зображення елементарними ланцюговими дробами.

2.3. Випадкові величини задані медіантним представленням

Розглянемо випадкову величину $\xi = \Delta^M_{\xi_1\xi_2...\xi_k...}$, де – ξ_n незалежні випадкові величини, що набувають значень 0 і 1 з ймовірностями p_{0n} і p_{1n} відповідно ($p_{0n} + p_{1n} = 1$).

Лема 2.1. *Функція розподілу випадкової величини* $\xi = \Delta^M_{\xi_1\xi_2...\xi_k...}$ *запишеться у вигляді*

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, \text{при } x < 0, \\ \beta_1(x) + \sum\limits_{i=2}^{\infty} \left[\beta_i(x) \prod\limits_{j=1}^{i-1} p_{\alpha_j(x)j} \right], \text{при } x \in [0;1], \\ 1, \text{при } x > 1; \end{cases}$$

де

$$\beta_i(x) = \begin{cases} 0, \text{якщо } \alpha_i(x) = 0, \\ p_{0i}, \text{якщо } \alpha_i(x) = 1 \end{cases},$$

а $\alpha_i(x)$ *— цифри M-представлення* $x \in [0;1]$.

Доведення. Дійсно, оскільки за означенням функція розподілу $F(x) = P\{\xi < x\}$, то маємо

$$\{\xi < x\} = \{\xi_1 < \alpha_1(x)\} \bigcup \{\xi_1 = \alpha_1(x), \xi_2 < \alpha_2(x)\} \bigcup ...$$

$$\bigcup \{\xi_i = \alpha_i(x), i \in \overline{1, n-1} \xi_n < \alpha_n(x)\} \bigcup ...$$

Оскільки події в правій частині останньої рівності несумісні, то

$$P\{\xi < x\} = P\{\xi_1 < \alpha_1(x)\} + P\{\xi_1 = \alpha_1(x), \xi_2 < \alpha_2(x)\} + ...$$

$$P\{\xi_1 < \alpha_1(x)\} = \begin{cases} 0, \text{якщо } \alpha_i(x) = 0, \\ p_{0i}, \text{якщо } \alpha_i(x) = 1 \end{cases} := \beta_1(x)$$

В силу незалежності випадкових величин ξ_i маємо

$$P\{\xi_i = \alpha_i(x), i \in \overline{1, n-1}, \xi_n < \alpha_n(x)\} =$$

$$= P\{\xi_n < \alpha_n(x)\} \prod_{i=1}^{n-1} P\{\xi_i = \alpha_i(x)\} = \beta_n(x) \prod_{i=1}^{n-1} p_{\alpha_i(x)i},$$

тому $P\{\xi < x\} = \sum_{i=1}^{\infty} [\beta_i(x) \prod_{j=1}^{i-1} p_{\alpha_j(x)j}]$ для $\forall i > 1$. □

Лема 2.2. *Спектром* S_ξ *випадкової величини* $\xi = \Delta^M_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_k\ldots}$ *є множина* $A = \{x \in [0;1] : p_{\alpha_k(x)k} > 0 \quad \forall k \in N\}$ *доповнена раціональними точками відрізка* $[0;1]$, *що є граничними для неї.*

Доведення. Щоб довести дане твердження досить показати, що $S_\xi \subseteq A_0 = A \cup \{x_n\}$ і $S_\xi \supseteq A_0 = A \cup \{x_n\}$.

1. Якщо $x \in A_0$, то $x \in A$ або $x \in \{x_n\}$. У першому випадку

$$P\{\xi \in \Delta^M_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_k(x)}\} = \prod_{i=1}^{k} p_{\alpha_i(x)i} \tag{2.6}$$

   а з цього випливає, що

$$\Delta^M_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_k(x)} \cap S_\xi \neq \varnothing, \tag{2.7}$$

   оскільки для $\forall \epsilon > 0$ можна вказати таке k, що $\Delta^M_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_k(x)} \subset (x - \epsilon, x + \epsilon)$. Отже $x \in S_\xi$. Нехай тепер $x \in \{x_n\} \neq \varnothing$. А це означає, що множина A не замкнена множина, тоді коли спектр S_ξ (як відомо) множина замкнена. Тому всі граничні точки A, в тому числі і $\{x_n\}$, належать S_ξ. Таким чином, $A \subseteq S_\xi$.

2. Нехай $x \in S_\xi$. Якщо x – ірраціональне число, то з означення спектра випливає (2.7) для $\forall k \in N$, а тому має місце (2.6) і $p_{\alpha_k(x)k} > 0$. Отже $x \in A$.

   Нехай тепер x – раціональне число. Оскільки випадкова величина не може набувати раціональних значень, то $P\{\xi = x\} = 0$. Тому з означення точки росту функції розподілу випливає, що для кожного $\epsilon > 0$ в інтервал $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ попадають і раціональні точки S_ξ, а вони за вище доведеним належать A. Зафіксуємо одну з них x_ε.

Тоді очевидно, що $x = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} x_\varepsilon$, тобто x – гранична точка множини A. Таким чином, $S_\xi \subseteq A$ і $S_\xi = A$.

$\square$

Теорема 2.5. *Випадкова величина ξ має чисто дискретний розподіл тоді і тільки тоді, коли*

$$\prod_{k=1}^{\infty} \max_n \{p_{nk}\} > 0 \tag{2.8}$$

і чисто неперервний - у решті випадків.

Доведення. Необхідність. За означенням стрибок функції розподілу $F_\xi(x)$ в точці x рівний

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(F_\xi(x+\varepsilon) - F_\xi(x-\varepsilon)) = \lim_{k\to\infty} P(\Delta_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_k(x)\ldots}) =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \prod_{j=1}^{k} p_{\alpha_j(x)j} = \prod_{j=1}^{\infty} p_{\alpha_j(x)j}.$$

Отже, для того щоб функція розподілу мала стрибок в точці x необхідно і достатньо, щоб $\prod\limits_{j=1}^{\infty} p_{\alpha_j(x)j} > 0$.

Оскільки ж $\prod\limits_{k=1}^{\infty} \max\limits_n \{p_{nk}\} \geqslant \prod\limits_{j=1}^{\infty} p_{\alpha_j(x)j}$, то має місце нерівність (2.8).

Достатність. Через $p_{n(k)k}$ позначимо $\max\limits_n\{p_{nk}\}$ для $\forall k$ і розглянемо число $\overline{x} = \Delta^M_{a_{n(1)}\ldots a_{n(k)}\ldots}$.

Оскільки ξ_k незалежні, то

$$P\{\xi = \overline{x}\} = P\{\xi_1 = a_{n(1)}, \ldots, \xi_k = a_{n(k)}, \ldots\} = \prod_{k=1}^{\infty} \max_n \{p_{nk}\} > 0$$

Отже, $\overline{x}$ є атомом розподілу. Очевидно, що в точці $\overline{x}$ функція розподілу $F_\xi(x)$ буде мати максимальний стрибок. Числа, медіантне представлення яких відрізняється від представлення числа $\overline{x}$ лише скінченим числом елементів, також є атомами, що випливає з необхідної умови збіжності нескінченного добутку.

Щоб підрахувати суму стрибків функції розподілу в цих точках позначимо через $x_i^{(1)} = \Delta^M_{\xi_1 a_{n(2)}\ldots a_{n(k)}\ldots}$ атоми, елементи медіантного представлення яких співпадають з $\overline{x}$ починаючи з другого елемента, через $x_i^{(2)} = \Delta^M_{\xi_1\xi_2 a_{n(3)}\ldots a_{n(k)}\ldots}$ – з третього і т.д., а через $x_i^{(m)} = \Delta^M_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_m a_{n(m+1)}\ldots}$ – атоми, елементи яких співпадають з елементами медіантного представлення $\overline{x}$ починаючи з $(m+1)$-го місця.

Очевидно, що $\{x_i^{(m)}\} \subset \{x_i^{(m+1)}\}$ для $\forall m \in N$. Тоді сума всіх стрибків в атомах $x_i^{(1)}$ рівна:

$$\sum_{i=1}^{2} P\{\xi = x_i^{(1)}\} = \frac{\prod\limits_{k=1}^{\infty} \max\limits_n \{p_{nk}\}}{p_{n(1)1}}(p_{01} + p_{11}) = p_{n(1)1}^{-1} \prod_{k=1}^{\infty} \max_n \{p_{nk}\}$$

Сума стрибків в атомах $x_i^{(2)}$ рівна:

$$\sum_{i=1}^{2^2} P\{\xi = x_i^{(2)}\} = \frac{\prod\limits_{k=1}^{\infty} \max\limits_n \{p_{nk}\}}{p_{n(1)1}p_{n(2)2}}(p_{01} + p_{12})(p_{01} + p_{11}) =$$

$$= (p_{n(1)1}p_{n(2)2})^{-1} \prod_{k=1}^{\infty} \max_n \{p_{nk}\}$$

....

Для атомів $x_i^{(m)}$:

$$\sum_{i=1}^{2^m} P\{\xi = x_i^{(m)}\} = \frac{\prod\limits_{k=1}^{\infty} \max\limits_n \{p_{nk}\}}{p_{n(1)1}p_{n(2)2}\cdots p_{n(m)m}} \prod_{j=1}^{m}(p_{0j} + p_{1j}) =$$

$$= (p_{n(1)1}p_{n(2)2}\cdots p_{n(m)m})^{-1} \prod_{k=1}^{\infty} \max_n \{p_{nk}\},$$

а останній вираз прямує до одиниці, коли k прямує до нескінченності. Це означає, що ймовірність зосереджена на зчисленній множині вище описаних точок. $\square$

Наслідок 2.1. *Для того щоб випадкова величина мала чисто неперервний розподіл, необхідно і достатньо, щоб нескінченний добуток* (2.8) *розбігався до нуля.*

Висновки до розділу 2

У цьому розділі ми означили медіантне представлення чисел через розбиття відрізка $[0;1]$ за допомогою медіант. Вивчили метричні властивості циліндричних множин. Обчислено точність раціональних наближень дійсних чисел за допомогою медіантного представлення. Знайдено формальний вираз класичної функції Мінковського для аргументу заданого медіантним представленням. Обґрунтовано, що медіантне зображення є перекодуваннями зображення чисел елементарними ланцюговими дробами.

Розглянуто випадкову величину елементи медіантного представлення якої є незалежними випадковими величинами. Знайдено функцію розподілу цієї випадкової величини, спектр та критерій дискретності розподілу.

РОЗДІЛ 3
ЛАНЦЮГОВІ A_2-ДРОБИ.

3.1. Розклади чисел і їх зображення

Нехай $A = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ — задана множина дійсних чисел, $0 < \alpha_1 < \alpha_2$. Нескінченний ланцюговий дріб виду

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + ...}} = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots], \tag{3.1}$$

де $a_0 = 0$, $a_n \in A_2$, $n = 1, 2, \ldots$, називатимемо *ланцюговим A_2-дробом.* Кожен ланцюговий A_2-дріб є збіжним, оскільки виконується критерій збіжності [61]: ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ розбігається.

Позначимо

$$\beta_1 = [(\alpha_2, \alpha_1)] = \frac{\sqrt{\alpha_1^2\alpha_2^2 + 4\alpha_1\alpha_2} - \alpha_1\alpha_2}{2\alpha_2}, \tag{3.2}$$

$$\beta_2 = [(\alpha_1, \alpha_2)] = \frac{\sqrt{\alpha_1^2\alpha_2^2 + 4\alpha_1\alpha_2} - \alpha_1\alpha_2}{2\alpha_1}. \tag{3.3}$$

З означень β_1 і β_2 маємо

$$\beta_2 = \frac{1}{\alpha_1 + \beta_1},$$

$$\beta_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\beta_1. \tag{3.4}$$

З (3.4) випливає

$$\frac{\beta_2}{\alpha_2} = \frac{\beta_1}{\alpha_1} = \lambda > 0 \ \text{ і } \ \beta_2 - \beta_1 = \lambda(\alpha_2 - \alpha_1).$$

Через L_{A_2} позначимо множину всіх ланцюгових A_2-дробів, тобто

$$L_{A_2} = \{x : \ x = [a_1, a_2, ..., a_n, ...]; \ \ a_n \in A_2, \ n = 1, 2, ...\}.$$

Тоді очевидно, що

$$\min L_{A_2} = \inf L_{A_2} = \beta_1, \max L_{A_2} = \sup L_{A_2} = \beta_2,$$

$$\text{і } L_{A_2} \subseteq [\beta_1, \beta_2] = [\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2].$$

Дослідимо тополого-метричні властивості множини L_{A_2}.

Можливі три випадки:

1. $\alpha_2 - \alpha_1 = \beta_2 - \beta_1 \Leftrightarrow \alpha_2 + \beta_1 = \alpha_1 + \beta_2$;
2. $\alpha_2 - \alpha_1 > \beta_2 - \beta_1 \Leftrightarrow \alpha_2 + \beta_1 > \alpha_1 + \beta_2$;
3. $\alpha_2 - \alpha_1 < \beta_2 - \beta_1 \Leftrightarrow \alpha_2 + \beta_1 < \alpha_1 + \beta_2$.

Враховуючи вирази (3.2) і (3.3), рівність $\alpha_2 - \alpha_1 = \beta_2 - \beta_1$ рівносильна

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \frac{\sqrt{\alpha_1^2\alpha_2^2 + 4\alpha_1\alpha_2} - \alpha_1\alpha_2}{2\alpha_1} - \frac{\sqrt{\alpha_1^2\alpha_2^2 + 4\alpha_1\alpha_2} - \alpha_1\alpha_2}{2\alpha_2},$$

$$\sqrt{\alpha_1^2\alpha_2^2 + 4\alpha_1\alpha_2} = 3\alpha_1\alpha_2,$$

$$\alpha_1\alpha_2 = \frac{1}{2}.$$

В цьому випадку $\beta_1 = \frac{1}{2\alpha_2} = \alpha_1$, $\beta_2 = \frac{1}{2\alpha_1} = \alpha_2$.

Зауважимо, що окремої уваги заслуговує підвипадок $\alpha_1 = \beta_1 = \frac{1}{2}$, $\alpha_2 = \beta_2 = 1$. Умова $\alpha_2 - \alpha_1 < \beta_2 - \beta_1$ рівносильна $0 < \alpha_1\alpha_2 < \frac{1}{2}$, а умова $\alpha_2 - \alpha_1 > \beta_2 - \beta_1$ — нерівності $\alpha_1\alpha_2 > \frac{1}{2}$.

Лема 3.1 ([31]). *Знаменник q_n підхідного дробу порядку n періодичного ланцюгового дробу $[0; (c)]$ обчислюється за формулою:*

$$q_n = \frac{1}{\sqrt{c^2+4}}\left(\left(\frac{c+\sqrt{c^2+4}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{c-\sqrt{c^2+4}}{2}\right)^{n+1}\right).$$

Наслідок 3.1. *Для знаменників q_n підхідних дробів ланцюгових A_2-дробів при кожному натуральному n мають місце точні оцінки:*

$$\begin{cases} q_n \geqslant \dfrac{1}{\alpha_1^2+4}\left(\left(\dfrac{\alpha_1+\sqrt{\alpha_1^2+4}}{2}\right)^{n+1} - \left(\dfrac{\alpha_1-\sqrt{\alpha_1^2+4}}{2}\right)^{n+1}\right) \\ q_n \leqslant \dfrac{1}{\alpha_2^2+4}\left(\left(\dfrac{\alpha_2+\sqrt{\alpha_2^2+4}}{2}\right)^{n+1} - \left(\dfrac{\alpha_2-\sqrt{\alpha_2^2+4}}{2}\right)^{n+1}\right). \end{cases} \tag{3.5}$$

Доведення. Очевидно, що при кожному $n = 1, 2, \ldots$ виконується нерівність:

$$q(\underbrace{\alpha_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_1}_{n}) \leqslant q(a_2, a_2, \ldots, a_n) \leqslant q(\underbrace{\alpha_2, \alpha_2, \ldots, \alpha_2}_{n}).$$

Скориставшись лемою 3.1, отримаємо (3.5). □

Наслідок 3.2. *Якщо* $\alpha_1 = \dfrac{1}{2}$, $\alpha_2 = 1$, *то для знаменників підхідних дробів мають місце нерівності:*

$$\begin{cases} q_n \geqslant \dfrac{2\sqrt{17}}{17}\left(\left(\dfrac{1+\sqrt{17}}{4}\right)^{n+1} - \left(\dfrac{1-\sqrt{17}}{4}\right)^{n+1}\right) \\ q_n \leqslant \dfrac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right), \qquad \text{для} \ \ \forall n \in N. \end{cases}$$

Циліндром рангу m з основою $c_1c_2...c_m$ називатимемо множину $\Delta'_{c_1...c_m}$ всіх $x \in L_{A_2}$, які мають ланцюгове A_2-зображення з першими m елементами відповідно рівними c_1, c_2, ..., c_m, тобто

$$\Delta'_{c_1...c_m} = \{x : \ x = [c_1, c_2, ..., c_m, a_{m+1}, a_{m+2}, ...], \ a_{m+i} \in A_2\}.$$

Очевидно, що

$$\min \Delta'_{c_1} = \left[c_1, \frac{1}{\beta_2}\right] = [c_1 + \beta_2], \qquad \min \Delta'_{c_1c_2} = \left[c_1, c_2, \frac{1}{\beta_1}\right] = [c_1, c_2 + \beta_1],$$

$$\max \Delta'_{c_1} = \left[c_1, \frac{1}{\beta_1}\right] = [c_1 + \beta_1], \qquad \max \Delta'_{c_1c_2} = \left[c_1, c_2, \frac{1}{\beta_2}\right] = [c_1, c_2 + \beta_2];$$

і в загальному випадку —

$$\min \Delta'_{c_1...c_m} = \begin{cases} \left[c_1, ..., c_m, \frac{1}{\beta_2}\right] = [c_1, ..., c_{m-1}, c_m + \beta_2], & \text{якщо} \ \ \text{m — непарне,} \\ \left[c_1, ..., c_m, \frac{1}{\beta_1}\right] = [c_1, ..., c_{m-1}, c_m + \beta_1], & \text{якщо} \ \ \text{m — парне;} \end{cases}$$

$$\max \Delta'_{c_1...c_m} = \begin{cases} \left[c_1, ..., c_m, \frac{1}{\beta_1}\right] = [c_1, ..., c_{m-1}, c_m + \beta_1], & \text{якщо} \quad m \text{ — непарне,} \\ \left[c_1, ..., c_m, \frac{1}{\beta_2}\right] = [c_1, ..., c_{m-1}, c_m + \beta_2], & \text{якщо} \quad m \text{ — парне.} \end{cases}$$

Відрізок з кінцями $\min \Delta'_{c_1...c_m}$ і $\max \Delta'_{c_1...c_m}$ називатимемо *циліндричним відрізком рангу m з основою $c_1..c_m$* і позначатимемо $\Delta_{c_1...c_m}$. Інтервал, кінці якого співпадають з кінцями $\Delta_{c_1...c_m}$, позначатимемо $\nabla_{c_1...c_m}$ і називатимемо *циліндричним інтервалом рангу m з основою $c_1c_2...c_m$*.

Очевидно, що $\Delta'_{c_1...c_m} \subset \Delta_{c_1...c_m}$, але не завжди $\Delta'_{c_1...c_m} = \Delta_{c_1...c_m}$. Необхідні і достатні умови для останньої рівності будуть вказані далі.

Для довільного натурального m мають місце наступні властивості.

1. $\Delta'_{c_1...c_m c} \subset \Delta'_{c_1...c_m}$. Більше того, $\Delta'_{c_1...c_m} = \Delta'_{c_1...c_m\alpha_1} \cup \Delta'_{c_1...c_m\alpha_2}$.

   Ця властивість випливає безпосередньо з означення циліндра.

2. $\Delta_{c_1...c_m c} \subset \Delta_{c_1...c_m}$, але, взагалі кажучи,

$$\Delta_{c_1...c_m} \neq \Delta_{c_1...c_m\alpha_1} \cup \Delta_{c_1...c_m\alpha_2}.$$

   Доведення. Включення є очевидним, а нерівність має місце, наприклад у випадку, коли $A_2 = \{1, 3\}$: $\Delta_1 \neq \Delta_{11} \cup \Delta_{13}$. □

3. $\inf \Delta_{c_1...c_m\alpha_1} < \inf \Delta_{c_1...c_m\alpha_2}$, якщо m — непарне,

   $\inf \Delta_{c_1...c_m\alpha_1} > \inf \Delta_{c_1...c_m\alpha_2}$, якщо m — парне.

   Доведення. Справді, при парному m

$$\begin{aligned} \inf \Delta_{c_1...c_m\alpha_1} &= [c_1, ..., c_m, \alpha_1 + \beta_2] < \\ &< [c_1, ..., c_m, \alpha_2 + \beta_2] = \inf \Delta_{c_1...c_m\alpha_2}; \end{aligned}$$

   а при непарному m

$$\begin{aligned} \inf \Delta_{c_1...c_m\alpha_1} &= [c_1, ..., c_m, \alpha_1 + \beta_1] < \\ &< [c_1, ..., c_m, \alpha_2 + \beta_1] = \inf \Delta_{c_1...c_m\alpha_2}. \end{aligned}$$

□

4. Якщо $\alpha_2 - \alpha_1 = \beta_2 - \beta_1$, що рівносильно $\alpha_2 + \beta_1 = \alpha_1 + \beta_2$, то

$$\Delta_{c_1...c_m\alpha_1} \cap \Delta_{c_1...c_m\alpha_2} = [c_1, ..., c_m, \alpha_1 + \beta_2] = [c_1, ..., c_m, \alpha_2 + \beta_1].$$

Доведення. Справді, при парному m

$$\begin{aligned} \max \Delta_{c_1...c_m\alpha_2} &= [c_1, ..., c_m, \alpha_2 + \beta_1] = \\ &= [c_1, ..., c_m, \alpha_1 + \beta_2] = \min \Delta_{c_1...c_m\alpha_1}; \end{aligned}$$

а при непарному m

$$\begin{aligned} \max \Delta_{c_1...c_m\alpha_1} &= [c_1, ..., c_m, \alpha_1 + \beta_2] = \\ &= [c_1, ..., c_m, \alpha_2 + \beta_1] = \min \Delta_{c_1...c_m\alpha_2}. \end{aligned}$$

$\square$

5. Якщо $\alpha_2 - \alpha_1 < \beta_2 - \beta_1 \Leftrightarrow \alpha_2 + \beta_1 < \alpha_1 + \beta_2$, то

$$\Delta_{c_1...c_m\alpha_1} \cap \Delta_{c_1...c_m\alpha_2} = [a, b], \text{ де}$$

$$a = \begin{cases} [c_1, ..., c_m, \alpha_1 + \beta_2] & \text{при} \quad \text{парному} \quad m, \\ [c_1, ..., c_m, \alpha_2 + \beta_1] & \text{при} \quad \text{непарному} \quad m; \end{cases}$$

$$b = \begin{cases} [c_1, ..., c_m, \alpha_2 + \beta_1] & \text{при} \quad \text{парному} \quad m, \\ [c_1, ..., c_m, \alpha_1 + \beta_2] & \text{при} \quad \text{непарному} \quad m; \end{cases}$$

Доведення. Нехай m — парне. Тоді

$$\begin{aligned} \max \Delta_{c_1...c_m\alpha_2} &= [c_1, ..., c_m, \alpha_2 + \beta_1] > \\ &> [c_1, ..., c_m, \alpha_1 + \beta_2] = \min \Delta_{c_1...c_m\alpha_1}. \end{aligned}$$

Враховуючи властивість 3, маємо

$$\Delta_{c_1...c_m\alpha_2} \cap \Delta_{c_1...c_m\alpha_1} = [\min \Delta_{c_1...c_m\alpha_1};\ \max \Delta_{c_1...c_m\alpha_2}] = [a, b].$$

Якщо m — непарне, то

$$\max \Delta_{c_1...c_m\alpha_1} = [c_1, ..., c_m, \alpha_1 + \beta_2] >$$

$$> \quad [c_1, ..., c_m, \alpha_2 + \beta_1] = \min \Delta_{c_1...c_m\alpha_2}.$$

Враховуючи властивість 3, тут маємо

$$\Delta_{c_1...c_m\alpha_1} \cap \Delta_{c_1...c_m\alpha_2} = [\min \Delta_{c_1...c_m\alpha_2};\ \max \Delta_{c_1...c_m\alpha_1}] = [a, b].$$

□

6. Якщо $\alpha_2 - \alpha_1 \leqslant \beta_2 - \beta_1 \Leftrightarrow \alpha_2 + \beta_1 \leqslant \alpha_1 + \beta_2$, то

$$\Delta_{c_1...c_m} = \Delta_{c_1...c_m\alpha_1} \cup \Delta_{c_1...c_m\alpha_2}.$$

Доведення. Дана властивість є наслідком властивостей 4 і 5. □

7. Якщо $\alpha_2 - \alpha_1 > \beta_2 - \beta_1$, що рівносильно $\alpha_2 + \beta_1 > \alpha_1 + \beta_2$, то

$$\Delta_{c_1...c_m\alpha_1} \cap \Delta_{c_1...c_m\alpha_2} = \varnothing. \tag{3.6}$$

Доведення. Нехай m — парне. Тоді

$$\begin{aligned} \max \Delta_{c_1...c_m\alpha_2} &= [c_1, ..., c_m, \alpha_2 + \beta_1] < \\ &< [c_1, ..., c_m, \alpha_1 + \beta_2] = \min \Delta_{c_1...c_m\alpha_1}. \end{aligned}$$

Якщо m — непарне, то

$$\begin{aligned} \max \Delta_{c_1...c_m\alpha_1} &= [c_1, ..., c_m, \alpha_1 + \beta_2] < \\ &< [c_1, ..., c_m, \alpha_2 + \beta_1] = \min \Delta_{c_1...c_m\alpha_2}. \end{aligned}$$

Враховуючи властивість 3, отримуємо (3.6). □

8. Довжина циліндричного відрізка $\Delta_{c_1...c_n}$ обчислюється за формулою

$$|\Delta_{c_1...c_n}| = \frac{\beta_2 - \beta_1}{(q_n + \beta_1 q_{n-1})(q_n + \beta_2 q_{n-1})}. \tag{3.7}$$

Доведення.

$$\begin{aligned} |\Delta_{c_1...c_n}| &= \max \Delta_{c_1...c_n} - \min \Delta_{c_1...c_n} = \\ &= \left|[c_1, ..., c_n, \beta_2^{-1}] - [c_1, ..., c_n, \beta_1^{-1}]\right| = \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left|\frac{\beta_2^{-1}p_n + p_{n-1}}{\beta_2^{-1}q_n + q_{n-1}} - \frac{\beta_1^{-1}p_n + p_{n-1}}{\beta_1^{-1}q_n + q_{n-1}}\right| = \\
&= \left|\frac{p_n + \beta_2 p_{n-1}}{q_n + \beta_2 q_{n-1}} - \frac{p_n + \beta_1 p_{n-1}}{q_n + \beta_1 q_{n-1}}\right| = \\
&= \frac{|\beta_2(p_{n-1}q_n - q_{n-1}p_n) - \beta_1(p_{n-1}q_n - q_{n-1}p_n)|}{(\beta_1 q_{n-1} + q_n)(\beta_2 q_{n-1} + q_n)} = \\
&= \frac{(\beta_2 - \beta_1)|p_{n-1}q_n - q_{n-1}p_n|}{(q_n + \beta_1 q_{n-1})(q_n + \beta_2 q_{n-1})}.
\end{aligned}
$$

Врахувавши, що $p_{n-1}q_n - q_{n-1}p_n = (-1)^n$, отримаємо формулу (3.7).

□

Наслідок 3.3. $|\Delta_{c_1\dots c_n}| \to 0$ $(n \to \infty)$.

Наслідок 3.4. *Діаметр циліндра* $\Delta'_{c_1\dots c_m}$*, співпадаючи з довжиною* $\Delta_{c_1\dots c_m}$*, дорівнює виразу* (3.7).

Наслідок 3.5. *Якщо* $\alpha_1 = \frac{1}{2}$*, а* $\alpha_2 = 1$*, то* $\beta_1 = \frac{1}{2}$*,* $\beta_2 = 1$ *і*

$$
|\Delta_{c_1\dots c_n}| = \frac{1}{(q_{n-1} + q_n)(q_{n-1} + 2q_n)}.
$$

Теорема 3.1 (Основне метричне відношення). *Для вкладених циліндрів має місце наступна рівність:*

$$
\frac{|\Delta_{c_1\dots c_n c}|}{|\Delta_{c_1\dots c_n}|} = \frac{\left(1 + \beta_1 \frac{q_{n-1}}{q_n}\right)\left(1 + \beta_2 \frac{q_{n-1}}{q_n}\right)}{\left(c + \beta_1 + \frac{q_{n-1}}{q_n}\right)\left(c + \beta_2 + \frac{q_{n-1}}{q_n}\right)}. \tag{3.8}
$$

Доведення. Використовуючи формулу (3.7) для виразів $|\Delta_{c_1\dots c_n}|$ і $|\Delta_{c_1\dots c_n c}|$ і закон утворення знаменників підхідних дробів, отримуємо:

$$
\begin{aligned}
\frac{|\Delta_{c_1\dots c_n c}|}{|\Delta_{c_1\dots c_n}|} &= \frac{(q_n + \beta_1 q_{n-1})(q_n + \beta_2 q_{n-1})}{(cq_n + q_{n-1} + \beta_1 q_n)(cq_n + q_{n-1} + \beta_2 q_n)} = \\
&= \frac{\left(1 + \beta_1 \frac{q_{n-1}}{q_n}\right)\left(1 + \beta_2 \dfrac{q_{n-1}}{q_n}\right)}{\left(c + \beta_1 + \dfrac{q_{n-1}}{q_n}\right)\left(c + \beta_2 + \dfrac{q_{n-1}}{q_n}\right)}.
\end{aligned}
$$

□

Наслідок 3.6. *Якщо* $\alpha_2 - \alpha_1 = \beta_2 - \beta_1$ *(тобто* $\alpha_1\alpha_2 = \frac{1}{2}$, $\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 = \beta_2$*), то:*

$$\frac{|\Delta_{c_1\ldots c_n c}|}{|\Delta_{c_1\ldots c_n}|} = \frac{\left(1 + c\frac{q_{n-1}}{q_n}\right)}{\left(2c^2 + 1 + 2c\frac{q_{n-1}}{q_n}\right)}; \tag{3.9}$$

$$\frac{|\Delta_{c_1\ldots c_n\alpha_1}|}{|\Delta_{c_1\ldots c_n\alpha_2}|} = \frac{\left(1 + \alpha_1\dfrac{q_{n-1}}{q_n}\right)\left(2\alpha_2^2 + 1 + 2\alpha_2\dfrac{q_{n-1}}{q_n}\right)}{\left(1 + \alpha_2\dfrac{q_{n-1}}{q_n}\right)\left(2\alpha_1^2 + 1 + 2\alpha_1\dfrac{q_{n-1}}{q_n}\right)}. \tag{3.10}$$

Доведення. Скориставшись теоремою 3.1, отримуємо

$$\lambda_1 = \frac{|\Delta_{c_1\ldots c_n\alpha_1}|}{|\Delta_{c_1\ldots c_n}|} = \frac{\left(1 + \beta_1\frac{q_{n-1}}{q_n}\right)\left(1 + \beta_2\dfrac{q_{n-1}}{q_n}\right)}{\left(\alpha_1 + \beta_1 + \dfrac{q_{n-1}}{q_n}\right)\left(\alpha_1 + \beta_2 + \dfrac{q_{n-1}}{q_n}\right)}.$$

Але $\beta_1 = \alpha_1$, $\beta_2 = \alpha_2$, $\alpha_1 = \dfrac{1}{2\alpha_2}$. Тому після спрощення маємо

$$\lambda_1 = \frac{\left(1 + \alpha_1\frac{q_{n-1}}{q_n}\right)}{\left(2\alpha_1^2 + 1 + 2\alpha_1\frac{q_{n-1}}{q_n}\right)}.$$

Рівність (3.10) є наслідком рівності (3.9). □

Наслідок 3.7. *Якщо* $\alpha_1 = \frac{1}{2}$, $\alpha_2 = 1$, *то* $\beta_1 = \frac{1}{2}$, $\beta_2 = 1$ *і*

$$\frac{|\Delta_{c_1\ldots c_n\frac{1}{2}}|}{|\Delta_{c_1\ldots c_n}|} = \frac{2 + \frac{q_{n-1}}{q_n}}{3 + 2\frac{q_{n-1}}{q_n}}, \tag{3.11}$$

$$\frac{|\Delta_{c_1\ldots c_n 1}|}{|\Delta_{c_1\ldots c_n}|} = \frac{1 + \frac{q_{n-1}}{q_n}}{3 + 2\frac{q_{n-1}}{q_n}}, \tag{3.12}$$

$$\frac{|\Delta_{c_1\ldots c_n\frac{1}{2}}|}{|\Delta_{c_1\ldots c_n 1}|} = \frac{2 + \frac{q_{n-1}}{q_n}}{1 + \frac{q_{n-1}}{q_n}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{q_{n-1}}{q_n}}. \tag{3.13}$$

Доведення. Безпосередня підстановка значень α_1 і α_2 в рівності (3.9)-(3.10) приводить після спрощення до рівностей (3.11)-(3.13). □

3.2. Тополого-метрична теорія

Теорема 3.2. *Якщо* $\alpha_1\alpha_2 \leqslant \frac{1}{2}$, *то* $L_{A_2} = [\beta_1, \beta_2]$, *а у випадку* $\alpha_1\alpha_2 > \frac{1}{2}$ *множина* L_{A_2} *є ніде не щільною множиною нульової міри Лебега.*

Доведення. Оскільки очевидно, що $L_{A_2} \subset [\beta_1, \beta_2]$, то залишається довести, що $[\beta_1, \beta_2] \subset L_{A_2}$.

Нехай x — довільна точка відрізка $[\beta_1, \beta_2]$. Згідно з властивістю 6 $[\beta_1, \beta_2] = \Delta_{\alpha_1} \cup \Delta_{\alpha_2}$. Тому існує $c_1 \in A_2 = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ таке, що $x \in \Delta_{c_1}$ (звичайно, якщо $x \in \Delta_{\alpha_1} \cap \Delta_{\alpha_2}$, то таке c_1 визначаєтся неоднозначно). За тією ж властивістю 6 $\Delta_{c_1} = \Delta_{c_1\alpha_1} \cup \Delta_{c_1\alpha_2}$. Тому існує $c_2 \in A_2$ таке, що $x \in \Delta_{c_1c_2}$ і т.д. Якщо $x \in \Delta_{c_1\ldots c_k}$ (а це означає, що $x = [c_1, ..., c_k, a_{k+1}, a_{k+2}, ...]$, де a_{k+j} — деякі елементи множини A_2), то з того, що

$$\Delta_{c_1\ldots c_k} = \Delta_{c_1\ldots c_k\alpha_1} \cup \Delta_{c_1\ldots c_k\alpha_2}$$

випливає існування $c_{k+1} \in A_2$ такого, що $x \in \Delta_{c_1\ldots c_kc_{k+1}}$ і т.д.

Отже, існує нескінченна послідовність $\{c_k\}$, $c_k \in A_2$, така, що x належить всім циліндричним відрізкам Δ_{c_1}, $\Delta_{c_1c_2}$, ..., $\Delta_{c_1c_2\ldots c_k}$, ... Оскільки, згідно з властивістю 2 $\Delta_{c_1\ldots c_kc_{k+1}} \subset \Delta_{c_1\ldots c_k}$ і наслідка 3.3 з властивості 8 $|\Delta_{c_1\ldots c_k}| \to 0 \quad (k \to \infty)$, то за аксіомою Кантора існує єдина точка, яка належить всім цим відрізкам, а такою є точка x. Тому

$$x = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Delta_{c_1\ldots c_k} = [c_1, c_2, ..., c_k, ...] \in L_{A_2},$$

що й вимагалось довести.

2. Розглянемо випадок $\alpha_1\alpha_2 > \frac{1}{2}$. Тоді ніде не щільність множини L_{A_2} є наслідком властивості циліндричних відрізків: $\Delta_{c_1\ldots c_k\alpha_1} \cap \Delta_{c_1\ldots c_k\alpha_2} = \varnothing$ для довільного набору $c_1, ..., c_k$, $c_i \in A_2$.

Оскільки $L_{A_2} \subset E_k$, то для міри Лебега $\lambda(L_{A_2}) \leqslant \lambda(E_k)$ і більше того,

$$\lambda(L_{A_2}) = \lim_{k\to\infty} \lambda(E_k) = (\beta_2 - \beta_1) \prod_{k=1}^{\infty} \tfrac{\lambda(E_k)}{\lambda(E_{k-1})}.$$

Нехай $\overline{E}_k \equiv E_{k-1} \setminus E_k$, $F_{c_1...c_k} \equiv \Delta_{c_1...c_k} \setminus \{\Delta_{c_1...c_k\alpha_1} \cup \Delta_{c_1...c_k\alpha_2}\}$. Тоді $\overline{E}_k = \bigcup\limits_{c_1\in A_2} ... \bigcup\limits_{c_k\in A_2} F_{c_1...c_k}$, $\lambda(\overline{E}_k) = \lambda(E_{k-1}) - \lambda(E_k)$,

звідки $\dfrac{\lambda(E_k)}{\lambda(E_{k-1})} = 1 - \dfrac{\lambda(\overline{E}_k)}{\lambda(E_{k-1})}$ і

$$\lambda(L_{A_2}) = (\beta_2 - \beta_1)\prod_{k=1}^{\infty}(1 - \frac{\lambda(\overline{E}_k)}{\lambda(E_{k-1})}). \tag{3.14}$$

Покажемо, що ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(\overline{E}_k)}{\lambda(E_{k-1})}$ розбігається. Для цього використаємо формулу довжини циліндричного відрізка і виразимо

$$\lambda(E_{k-1}) = \sum_{c_1\in A_2} ... \sum_{c_{k-1}\in A_2} \frac{\beta_2 - \beta_1}{(q_{k-1} + \beta_1 q_{k-2})(q_{k-1} + \beta_2 q_{k-1})},$$

$$\lambda(\overline{E}_k) = \sum_{c_1\in A_2} ... \sum_{c_{k-1}\in A_2} |u_k - v_k|,$$

$u_k = [0; c_1, ..., c_{k-1}, \alpha_1 + \beta_2] = \frac{(\alpha_1+\beta_2)p_{k-1}+p_{k-2}}{(\alpha_1+\beta_2)q_{k-1}+q_{k-1}}$,
$v_k = [0; c_1, ..., c_{k-1}, \alpha_2 + \beta_1] = \frac{(\alpha_2+\beta_1)p_{k-1}+p_{k-2}}{(\alpha_2+\beta_1)q_{k-1}+q_{k-1}}$ і

$$|u_k - v_k| = \frac{|(\alpha_2 - \alpha_1) - (\beta_2 - \beta_1)|}{((\alpha_1 + \beta_2)q_{k-1} + q_{k-2})((\alpha_2 + \beta_1)q_{k-1} + q_{k-2})}.$$

$$\frac{|F_{c_1...c_{k-1}}|}{|\Delta_{c_1...c_k}|} = \frac{|(\alpha_2 - \alpha_1) - (\beta_2 - \beta_1)|(1 + \beta_1\frac{q_{k-2}}{q_{k-1}})(1 + \beta_2\frac{q_{k-2}}{q_{k-1}})}{(\alpha_1 + \beta_2 + \frac{q_{k-2}}{q_{k-1}})(\alpha_2 + \beta_1 + \frac{q_{k-2}}{q_{k-1}})(\beta_2 - \beta_1)}.$$

Оскільки $\alpha_1\alpha_2 > \frac{1}{2}$, то $(\alpha_2 - \alpha_1) - (\beta_2 - \beta_1) = \theta > 0$. Враховуючи, що

$$\theta_1 \leqslant \frac{q_{k-2}}{q_{k-1}} = [a_{k-1}, a_{k-2}, ..., a_1] \leqslant \theta_2,$$

де $\theta_1 = \frac{1}{\alpha_2+\frac{1}{\alpha_1}}$, $\theta_2 = \frac{1}{\alpha_2}$ при $k = 2, 3, ...$, маємо

$$\frac{|F_{c_1...c_{k-1}}|}{|\Delta_{c_1...c_{k-1}}|} > \frac{\theta(1 + \beta_1\theta_1)(1 + \beta_2\theta_1)}{(\alpha_1 + \beta_2 + \theta_2)(\alpha_2 + \beta_1 + \theta_2)(\beta_2 - \beta_1)} = \delta > 0.$$

Тоді

$$\frac{\lambda(\overline{E}_k)}{\lambda(E_{k-1})} = \frac{\sum\limits_{c_1\in A_2} ... \sum\limits_{c_{k-1}\in A_2} |F_{c_1...c_{k-1}}|}{\sum\limits_{c_1\in A_2} ... \sum\limits_{c_{k-1}\in A_2} |\Delta_{c_1...c_{k-1}}|} \geqslant \frac{\sum\limits_{c_1\in A_2} ... \sum\limits_{c_{k-1}\in A_2} \delta|\Delta_{c_1...c_{k-1}}|}{\sum\limits_{c_1\in A_2} ... \sum\limits_{c_{k-1}\in A_2} |\Delta_{c_1...c_{k-1}}|} = \delta$$

і добуток (3.14) розбігається до нуля. Отже, $\lambda(L_{A_2}) = 0$.

$\square$

Наслідок 3.8. *Якщо* $\alpha_1\alpha_2 \leqslant \frac{1}{2}$, *то* $\Delta'_{c_1...c_m} = \Delta_{c_1...c_m}$.

Теорема 3.3. *Якщо* $\alpha_1\alpha_2 = \frac{1}{2}$, *то зчисленна множина точок* $x \in [\beta_1, \beta_2]$ *має два ланцюгових* A_2*-зображення, решта ж точок мають єдине зображення.*

Доведення. Якщо $x = \Delta_{c_1...c_m\alpha_1} \cap \Delta_{c_1...c_m\alpha_2}$, то x має два ланцюгових A_2-зображення згідно з властивістю 6 циліндричних множин. І таких точок очевидно є зчисленна множина (для кожного натурального m їх кількість скінченна).

Якщо x не є спільною точкою циліндричних відрізків $\Delta_{a_1...a_m\alpha_1}$ і $\Delta_{a_1...a_m\alpha_2}$, для жодного набору $a_1, ..., a_m$, то числа c_k, існування яких встановлюється в доведенні попередньої теореми, визначаються однозначно, оскільки

$$\nabla_{c_1...c_{k-1}\alpha_1} \cap \nabla_{c_1...c_{k-1}\alpha_2} = \varnothing.$$

В цьому випадку для точки x існує єдина послідовність $\{c_k\}$ така, що $x = [c_1, c_2, ..., c_k, ...]$. Справді, припустимо, що

$$x = [c_1, c_2, ..., c_k, ...] = [d_1, d_2, ..., d_k, ...].$$

Якщо $\alpha_1 = c_1 \neq d_1 = \alpha_2$, то $x \in \Delta_{\alpha_1}$ і $x \in \Delta_{\alpha_2}$, а це суперечить тому, що $\nabla_{\alpha_1} \cap \nabla_{\alpha_2} = \varnothing$ і $x \neq \Delta_{\alpha_1} \cap \Delta_{\alpha_2}$. Отже, $c_1 = d_1$.

Нехай тепер $c_i = d_i$, $i = \overline{1,m}$, і $c_{m+1} \neq d_{m+1}$. Тоді $x \in \Delta_{c_1...c_m\alpha_1}$ і $x \in \Delta_{c_1...c_m\alpha_2}$, тобто $x = \Delta_{c_1...c_m\alpha_1} \cap \Delta_{c_1...c_m\alpha_2}$, що суперечить умові

$$\begin{cases} \nabla_{c_1...c_m\alpha_1} \cap \nabla_{c_1...c_m\alpha_2} = \varnothing, \\ x \neq \Delta_{c_1...c_m\alpha_1} \cap \Delta_{c_1...c_m\alpha_2}. \end{cases}$$

Отже, для довільного натурального m $c_m \neq d_m$, що й вимагалось довести. $\square$

У випадку $\alpha_1\alpha_2 = \frac{1}{2}$ точки $x \in [\beta_1, \beta_2]$, що є кінцем деякого циліндра, будемо називати A_2-*бінарними*. До таких точок відносяться ті, що мають два ланцюгових A_2-зображення, а також точки β_1 і β_2. Очевидно, що кожне A_2-бінарне число (окрім β_1 і β_2) представляється у вигляді

$$\begin{aligned} x &= [a_1, a_2, \ldots, a_{n_0}, \alpha_1, (\alpha_1, \alpha_2)] \\ \text{або } x &= [a_1, a_2, \ldots, a_{n_0}, \alpha_2, (\alpha_2, \alpha_1)], \end{aligned} \tag{3.15}$$

де n_0 ($n_0 \geqslant 0$) — найменше ціле число, таке що точка x є спільним кінцем 2-х циліндрів рангу n для всіх $n > n_0$.

Якщо точка x не є кінцем жодного циліндричного відрізка $\Delta_{a_1a_2\ldots a_n}$, то такі x будемо називати A_2-*унарними*.

У подальшому, для зручності міркувань будемо також використовувати наступне

Означення 3.1. Ланцюговим A-зображенням числа $x = \Delta^{A_2}_{c_1\ldots c_n\ldots}$, де $c_n \in A_2 = \{\frac{1}{2}, 1\}$, називається запис $x = \Delta^{A}_{a_1\ldots a_n\ldots}$, де

$$a_n = 2c_n - 1 = \begin{cases} 0, & \text{якщо } c_n = \frac{1}{2}, \\ 1, & \text{якщо } c_n = 1. \end{cases}$$

3.3. Інверсор ланцюгового A-зображення

Означення 3.2. Інверсором ланцюгового A-зображення чисел відрізка $[\frac{1}{2}; 1]$ називається функція $\mathfrak{I}$, означена рівністю:

$$\mathfrak{I}(\Delta^{A}_{a_1a_2\ldots a_n\ldots}) = \Delta^{A}_{[1-a_1][1-a_2]\ldots[1-a_n]\ldots}.$$

Для обґрунтування коректності означення функції $\mathfrak{I}$ досить показати, що вираз її значення в A-бінарній точці не залежить від її зображення, тобто дає рівні значення для різних зображень.

Дійсно,

$$\mathfrak{I}(\Delta^{A}_{a_1a_2\ldots\alpha_m0(01)\ldots}) = \Delta^{A}_{[1-a_1][1-a_2]\ldots[1-a_n]1(10)\ldots} =$$

$$= \Delta^A_{[1-a_1][1-a_2]\ldots[1-a_n]0(01)\ldots} = \mathfrak{I}(\Delta^A_{a_1a_2\ldots\alpha_m 1(10)\ldots}).$$

Множиною значень функції $\mathfrak{I}$ є відрізок $[\frac{1}{2}; 1]$, причому

$$\mathfrak{I}(0,5) = \mathfrak{I}(\Delta^A_{(10)}) = \Delta^A_{(01)} = 1, \mathfrak{I}\,(1) = \mathfrak{I}(\Delta^A_{(01)}) = \Delta^A_{(10)} = (0,5).$$

Очевидною є рівність $\mathfrak{I}(\mathfrak{I}(x)) = x$. Отже, функція $\mathfrak{I}$ є оберненою сама собі, її графік симетричний відносно прямої $y = x$, причому $\mathfrak{I}(x) = x$ рівносильно $x = \Delta^A_{0(01)} = \Delta^A_{1(10)}$.

Теорема 3.4. *Інверсор $\mathfrak{I}$ цифр A-зображення чисел відрізка $[\frac{1}{2}; 1]$ є неперервною строго спадною функцією.*

Доведення. 1. Нехай $x_0 = \Delta^{A_2}_{c_1c_2\ldots c_n\ldots} = \Delta^A_{a_1a_2\ldots a_n\ldots}$ – довільна точка відрізка $[\frac{1}{2}; 1]$. Можливі випадки: 1) x_0 – A_2-унарна точка; 2) x_0 – A_2-бінарна точка.

1) Якщо має місце перший випадок, то для довільно взятого числа $x = \Delta^{A_2}_{c'_1c'_2\ldots c'_n\ldots} \neq x_0$ існує m, таке що: $c'_m(x) \neq c_m(x_0)$, але $c'_j(x) = c_j(x_0)$ при $j < m$.

Зазначимо, що умова $x \to x_0$ рівносильна умові $m \to \infty$.

Нехай $\mathfrak{I}(x_0) = [0; b_1, b_2, \ldots, b_m, b_{m+1}\ldots] = [0; b_1, b_2, \ldots, b_m, r_{m+1}]$, де $r_{m+1} = [b_{m+1}; b_{m+2}, \ldots]$, і $\mathfrak{I}(x) = [0; b_1, b_2, \ldots, b_m, b'_{m+1}, b'_{m+2}, \ldots] = [0; b_1, b_2, \ldots, b_m, r'_{m+1}]$, де $r'_{m+1} = [b'_{m+1}; b'_{m+2}, \ldots]$.

Тоді $\mathfrak{I}(x_0) = \dfrac{r_{m+1}p_m + p_{m-1}}{r_{m+1}q_m + q_{m-1}}, \mathfrak{I}(x) = \dfrac{r'_{m+1}p_m + p_{m-1}}{r'_{m+1}q_m + q_{m-1}}$. Якщо $x \to x_0$, то

$$|\mathfrak{I}(x) - \mathfrak{I}(x_0)| = |\frac{r_{m+1}p_m + p_{m-1}}{r_{m+1}q_m + q_{m-1}} - \frac{r'_{m+1}p_m + p_{m-1}}{r'_{m+1}q_m + q_{m-1}}| =$$

$$= \frac{1}{(r_{m+1}q_m + q_{m-1})(r'_{m+1}q_m + q_{m-1})}|r_{m+1} - r'_{m+1}| \to 0 \quad (m \to \infty),$$

а отже, $\mathfrak{I}(x) \to \mathfrak{I}(x_0)$, що й доводить неперервність у A_2-унарній точці.

2) Нехай x_0 є A_2-бінарною точкою, тобто

$$x_0 = \Delta^{A_2}_{c_1c_2\ldots c_m 1(1\frac{1}{2})} = \Delta^{A_2}_{c_1c_2\ldots c_m \frac{1}{2}(\frac{1}{2}1)}.$$

Нехай m – непарне число.

Доведемо неперервність в точці x_0 зліва. Візьмемо підпослідовність послідовності підхідних дробів з парними значеннями n:

$$x_n = \frac{p_n}{q_n} = [0; a_1, a_2, \ldots, a_m, 1, (1, \frac{1}{2})^k],$$

де $n = m + 1 + 2k$, тому $n \to \infty$ при $k \to \infty$.

Оскільки в такому випадку n – парне число, то, як відомо, послідовність підхідних дробів $\dfrac{p_n}{q_n}$ є зростаючою, причому $\lim\limits_{k\to\infty} x_n = x_0$. Тоді

$$\lim_{k\to\infty} \mathfrak{I}(x_n) = [0; b_1, b_2, \ldots, b_m, \frac{1}{2}, (\frac{1}{2}, 1)] = \mathfrak{I}(x_0).$$

Аналогічно, послідовність

$$x'_n = \frac{p'_n}{q'_n} = [0; a_1, a_2, \ldots, a_m, \frac{1}{2}, (\frac{1}{2}, 1)^k] \to x_0$$

є зростаючою, причому

$$\lim_{k\to\infty} \mathfrak{I}(x_n) = [0; b_1, b_2, \ldots, b_m, 1, (1, \frac{1}{2})] = \mathfrak{I}(x_0).$$

При парному значенні m міркування аналогічні. Таким чином, функція є неперервною і у A_2-бінарних точках відрізка $[\frac{1}{2}; 1]$.

2. Доведемо тепер, що функція є монотонно спадною на відрізку $[\frac{1}{2}; 1]$. Для цього розглянемо два довільні числа $x_1 = \Delta^A_{a_1a_2\ldots a_n\ldots}$ і $x_2 = \Delta^A_{b_1b_2\ldots b_n\ldots}$, і нехай $x_1 < x_2$. Тоді існує таке натуральне число n, що:

$$a_i = b_i, i = 1, \ldots, 2n, \quad \text{але} \quad a_{2n+1} > b_{2n+1}, \text{ або}$$

$$a_i = b_i, i = 1, \ldots, 2n-1, \quad \text{але} \quad a_{2n} < b_{2n}.$$

Тоді, у першому випадку $1 - a_{2n+1} < 1 - b_{2n+1}$ і $\mathfrak{I}(x_1) > \mathfrak{I}(x_2)$. Аналогічно, у другому випадку $1 - a_{2n} > 1 - b_{2n}$ і $\mathfrak{I}(x_1) > \mathfrak{I}(x_2)$. Отже, з того, що $x_1 < x_2$ випливає, що $\mathfrak{I}(x_1) > \mathfrak{I}(x_2)$, тобто інверсор цифр A_2-зображення є строго спадною функцією на відрізку $[\frac{1}{2}; 1]$. $\square$

Наслідок 3.9. *Оскільки* $\mathfrak{I}(\frac{2}{3}) = \mathfrak{I}(\Delta^{A_2}_{1(10)}) = \Delta^{A_2}_{0(01)} = \frac{2}{3}$, *то функція* $\mathfrak{I}$ *має єдину інваріантну точку* $x_0 = \frac{2}{3}$.

Оскільки функція $\mathfrak{I}$ неперервна і строго спадна, то за теоремою Лебега вона має скінченну похідну майже скрізь (у розумінні міри Лебега).

Лема 3.2. *Якщо в точці* x_0 *існує скінченна похідна, то вона обчислюється за формулою:*

$$\mathfrak{I}'(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{[q_{n-1}(x_0) + q_n(x_0)][q_{n-1}(x_0) + 2q_n(x_0)]}{[q_{n-1}(\mathfrak{I}(x_0)) + q_n(\mathfrak{I}(x_0)))][q_{n-1}(\mathfrak{I}(x_0)) + 2q_n(\mathfrak{I}(x_0))]}.$$

Доведення. Якщо похідна $\mathfrak{I}'(x_0)$ існує, то вона рівна циліндричній похідній

$$\mathfrak{I}'(x_0) = \lim_{\substack{x''_n - x'_n \to 0 \\ x'_n \leqslant x_0 \leqslant x''_n}} \frac{\mathfrak{I}(x''_n) - \mathfrak{I}(x'_n)}{x''_n - x'_n}.$$

Взявши в якості x'_n і x''_n кінці циліндра n-го рангу, що містить x_0, матимемо

$$\mathfrak{I}'(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{|\mathfrak{I}(\Delta^{A_2}_{\alpha_1(x_0)\ldots\alpha_n(x_0)})|}{|\Delta^{A_2}_{\alpha_1(x_0)\ldots\alpha_n(x_0)}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{[q_{n-1}(\mathfrak{I}(x_0))+q_n(\mathfrak{I}(x_0))][q_{n-1}(\mathfrak{I}(x_0))+2q_n(\mathfrak{I}(x_0))]}}{\frac{1}{[q_{n-1}(x_0)+q_n(x_0)][q_{n-1}(x_0)+2q_n(x_0)]}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{[q_{n-1}(x_0) + q_n(x_0)][q_{n-1}(x_0) + 2q_n(x_0)]}{[q_{n-1}(\mathfrak{I}(x_0)) + q_n(\mathfrak{I}(x_0))][q_{n-1}(\mathfrak{I}(x_0)) + 2q_n(\mathfrak{I}(x_0))]}.$$

□

Теорема 3.5. *Графік* $\Gamma_{\mathfrak{I}}$ *функції* $\mathfrak{I}$ *має властивості:*

$$\Gamma_{\mathfrak{I}} = \Gamma_0 \cup \Gamma_1,$$

де Γ_i *є образом* $\Gamma_{\mathfrak{I}}$ *при перетворенні* γ_i, *де*

$$\gamma_0 : \begin{cases} x' = \dfrac{1}{1+x}, \\ y' = \dfrac{1}{\frac{1}{2}+y}. \end{cases} \qquad \gamma_1 : \begin{cases} x' = \dfrac{1}{\frac{1}{2}+x}, \\ y' = \dfrac{1}{1+y}. \end{cases}$$

Доведення. Нехай

$$\Gamma_i = \{M(x;y) : x = \Delta^A_{ia_2(x)a_3(x)\ldots}, y = \mathfrak{I}(x)\}.$$

Покажемо, що $\gamma_i(\Gamma) = \Gamma_i$, тобто $\gamma_i(\Gamma) \subset \Gamma_i$, $\Gamma_i \subset \gamma_i(\Gamma)$.

Якщо $M(x;y) \in \Gamma$, тобто $y = \mathfrak{I}(x) = \Delta^A_{[1-a_1(x)][1-a_2(x)]\ldots[1-a_n(x)]\ldots}$, то $\gamma_0(M) = M'(x';y')$: $x' = [0;1,a_1(x),a_2(x),\ldots]$, $y' = [0;1-a_1(x),1-a_2(x),\ldots]$. Нехай $M(x;y) \in \Gamma_{\mathfrak{I}}$, $M'(x';y') \in \gamma_i(\Gamma_{\mathfrak{I}})$, тобто

$$x = \Delta^A_{a_1\ldots a_n\ldots},\ y = \mathfrak{I}(x) = \Delta^A_{[1-a_1]\ldots[1-a_n]\ldots},$$

$$x' = \Delta^A_{ia_1\ldots a_n\ldots},\ y' = \mathfrak{I}(x') = \Delta^A_{[1-i][1-a_1]\ldots[1-a_n]\ldots}.$$

Тоді $M' \in \Gamma_i$, тобто $x = \Delta^A_{ia_1\ldots a_n\ldots}, y = \mathfrak{I}(x) = \Delta^A_{[1-i][1-a_1]\ldots[1-a_n]\ldots}$, то очевидно, що $M(x;y) \in \gamma_i(\Gamma_{\mathfrak{I}})$. Отже, $\gamma_i(\Gamma) = \Gamma_i$.

□

3.4. Оператор лівостороннього зсуву елементів ланцюгового A_2-зображення

У просторі ланцюгових A_2-зображень означимо оператор ω рівністю

$$\omega(\Delta^{A_2}_{a_1a_2\ldots}) = \Delta^{A_2}_{a_2a_3\ldots}, \tag{3.16}$$

який називається *оператором лівостороннього зсуву цифр ланцюгового A_2-зображення.*

Домовившись використовувати лише перше з двох існуючих зображень (3.15) A_2-бінарного числа, з рівності (3.16) отримаємо коректно означену функцію числа $x = [0;a_1,a_2,\ldots]$, яка має аналітичний вираз

$$\omega(x) = \frac{1}{x} - a_1(x) = \frac{1-a_1x}{x}.$$

Покладемо

$$\omega^n(x) = \underbrace{\omega(\omega(\ldots\omega}(x))) = \frac{u_nx+v_n}{c_nx+d_n},$$

тоді $\omega^n(x) = \dfrac{1}{\omega^{n-1}(x)} - a_n(x) = \dfrac{1-\omega^{n-1}a_n(x)}{\omega^{n-1}}$.

Тоді $u_0 = 1, \quad v_0 = 0, \quad c_0 = 0, \quad d_0 = 1$ і при $a_n = \frac{1}{2}$ маємо

$$\frac{u_{n+1}x + v_{n+1}}{c_{n+1}x + d_{n+1}} = \frac{c_n x + d_n}{u_n x + v_n} - \frac{1}{2} = \frac{(2c_n - u_n)x + 2d_n - v_n}{2u_n x + 2v_n},$$

звідки

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2c_n - u_n, \\ v_{n+1} = 2d_n - v_n, \\ c_{n+1} = 2u_n, \\ d_{n+1} = 2v_n. \end{cases}$$

Якщо ж $a_n = 1$, то

$$\frac{u_{n+1}x + v_{n+1}}{c_{n+1}x + d_{n+1}} = \frac{c_n x + d_n}{u_n x + v_n} - 1 = \frac{(c_n - u_n)x + d_n - v_n}{u_n x + v_n}.$$

Маємо

$$\begin{cases} u_{n+1} = c_n - u_n, \\ v_{n+1} = d_n - v_n, \\ c_{n+1} = u_n, \\ d_{n+1} = v_n. \end{cases}$$

Оцінимо зверху величину $|u_n|$.

Теорема 3.6. *Виконується нерівність*

$$c_n \leqslant \frac{1}{\sqrt{17}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{17}}{4} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{17}}{4} \right)^n \right), \forall n \in Z_+.$$

Доведення. Зрозуміло, що $(u_0; v_0; c_0; d_0) = (1; 0; 0; 1)$ і можливими варіантами для $(u_1; v_1; c_1; d_1)$ є $(-1; 2; 2; 0)$ та $(-1; 1; 1; 0)$ якщо $a_1 = \frac{1}{2}$ або 1 відповідно. Можливі випадки

$$u_{n+1} = 2c_n - u_n = \begin{cases} 2u_{n-1} - u_n, \\ 4u_{n-1} - u_n, \end{cases}$$

та

$$u_{n+1} = c_n - u_n = \begin{cases} 2u_{n-1} - u_n, \\ u_{n-1} - u_n. \end{cases}$$

Отже, $u_{n+1} = ku_{n-1} - u_n$, де $k \in \{\ 1; 2; 4\}$.

Маємо

$$|u_{n+1}| = |ku_{n-1} - u_n| \leqslant |ku_{n-1}| + |u_n| \leqslant 4|u_{n-1}| + |u_n|.$$

Нехай (s_n) — послідовність така, що

$$s_{n+1} = s_n + 4s_{n-1}, \forall n \in N,$$

$$s_0 = 1, s_1 = 1.$$

Індуктивно легко показати, що

$$u_n \leqslant s_n, \forall n \in Z_+.$$

Оскільки

$$s_n = \frac{1}{\sqrt{17}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{17}}{4} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{17}}{4} \right)^n \right),$$

то

$$u_n \leqslant \frac{1}{\sqrt{17}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{17}}{4} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{17}}{4} \right)^n \right), \forall n \in Z_+.$$

Зрозуміло, що $c_n = ku_n$, де $k \in \{\ 1; \frac{1}{2}\}$, тому

$$c_n \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{\sqrt{17}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{17}}{4} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{17}}{4} \right)^n \right), \forall n \in Z_+.$$

□

3.5. Метричні задачі A_2-зображення

Далі розглядатимемо випадок, коли $\alpha_1 = \dfrac{1}{2}$, $\alpha_2 = 1$. Нехай $C[A_2, \overline{c_1c_2}]$ — множина A_2-дробів, що не містять комбінацію двох елементів c_1c_2, $c_1, c_2 \in A_2 = \{\dfrac{1}{2}, 1\}$. Очевидно, що множина $C[A_2, \overline{c_1c_2}]$ не містить точок, що мають два ланцюгових A_2-зображення.

Теорема 3.7. *При $c_1 \neq c_2$ множина $C[A_2, \overline{c_1c_2}]$ є зчисленною, а при $c_1 = c_2$ — континуальною множиною, міра Лебега якої дорівнює нулю.*

Доведення. Нехай $c_1 \neq c_2$. Тоді множина $C[A_2, \overline{c_1c_2}]$ складається з точок x, A_2-зображення яких до k-го місця включно містить лише елемент c_2, $k = 1, 2, \ldots$, а з $(k+1)$-го місця — лише елемент c_1, а також включає точки $[(1)]$ і $[(\frac{1}{2})]$. Тому $C[A_2, \overline{c_1c_2}]$ є зчисленною.

Нехай $c_1 = c_2 = c$, $\widetilde{c}$ — елемент, такий що $\{\widetilde{c}\} = A_2 \setminus \{c\}$. Множина точок $x \in C[A_2, \overline{cc}]$, A_2-розклад яких містить скінченну кількість елементів c, є зчисленною. Розглянемо точки $x \in C[A_2, \overline{cc}]$, в A_2-розкладі яких міститься нескінченна кількість елементів c. Тоді A_2-зображення таких x має вигляд: $x = [\underbrace{\widetilde{c}, \widetilde{c}, ..., \widetilde{c}}_{k_1}, c, \underbrace{\widetilde{c}, \widetilde{c}, ..., \widetilde{c}}_{k_2}, c, \ldots]$. Кожному розкладу поставимо у відповідність нескінченну послідовність натуральних чисел $k_1, k_2, \ldots$. Множина таких послідовностей континуальна, з чого випливає континуальність множини $C[A_2, \overline{cc}]$.

Покажемо, що міра Лебега множини $C[A_2, \overline{cc}]$ дорівнює нулю. Нехай F_k — об'єднання циліндрів рангу k, що містять точки множини $C[A_2, \overline{cc}]$. Очевидно, що $F_k \subset F_{k-1}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, $C[A_2, \overline{cc}] = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} F_k$ і для міри Лебега множини $C[A_2, \overline{cc}]$ мають місце співвідношення:

$$\lambda(C[A_2, \overline{cc}]) = \lim_{k\to\infty} \lambda(F_k) \leqslant \lim_{k\to\infty} \left(n_k \cdot \max_{c_1 \ldots c_k} |\Delta_{c_1c_2\ldots c_k}| \right),$$

де n_k — кількість циліндрів рангу k, що містяться в F_k. Дослідимо значення n_k.

Позначимо $n_{k-1}^{\widetilde{c}}$ — кількість циліндрів $(k-1)$-го рангу виду $\Delta_{c_1\ldots c_{k-2}\widetilde{c}}$, що входять до F_{k-1}, n_{k-1}^{c} — кількість циліндрів $(k-1)$-го рангу виду $\Delta_{c_1\ldots c_{k-2}c}$, що входять до F_{k-1}. Кожний циліндр $\Delta_{c_1\ldots c_{k-2}\widetilde{c}}$ з F_{k-1} породжує 2 циліндри k-го порядку: $\Delta_{c_1\ldots c_{k-2}\widetilde{c}\,c}$ і $\Delta_{c_1\ldots c_{k-2}\widetilde{c}\,\widetilde{c}}$, які належать F_k, а кожен циліндр виду $\Delta_{c_1\ldots c_{k-2}c}$ породжує лише один циліндр $\Delta_{c_1\ldots c_{k-2}\,c\,\widetilde{c}}$, який належить множині F_k.

Тоді очевидно, що $n_k = 2n_{k-1}^{\widetilde{c}} + n_{k-1}^{c}$. Оскільки $n_{k-1}^{\widetilde{c}} = n_{k-2}$, то $n_k = n_{k-1}^{\widetilde{c}} + n_{k-1}^{\widetilde{c}} + n_{k-1}^{c} = n_{k-2} + n_{k-1}$. Зокрема, $n_0 = 1$, $n_1 = 2$, $n_2 = 3$, і при $n_{-1} = 1$ послідовність $\{n_k\}$ $(k = -1, 0, 1, \ldots)$ співпадає з послідовністю чисел Фібоначчі, з чого випливає, що

$$n_k = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2}\right).$$

Скориставшись наслідком леми 1, отримаємо:

$$\max_{c_1\ldots c_k}|\Delta_{c_1c_2\ldots c_k}| = \left|\Delta_{\underbrace{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\ldots\frac{1}{2}}_{k}}\right| \leqslant \frac{1}{q_{k-1}^2\left(\underbrace{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\ldots\frac{1}{2}}_{k-1}\right)} =$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{2\sqrt{17}}{17}\left(\left(\frac{1+\sqrt{17}}{4}\right)^{k} - \left(\frac{1-\sqrt{17}}{4}\right)^{k}\right)\right)^2}.$$

Тоді для міри Лебега множини $C[A_2, \overline{cc}]$ мають місце нерівності:

$$\lambda(C[A_2, \overline{cc}]) \leqslant \lim_{k\to\infty}\left(n_k \cdot \max_{c_1\ldots c_k}|\Delta_{c_1c_2\ldots c_k}|\right) \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{k\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2}\right)}{\left(\frac{2\sqrt{17}}{17}\left(\left(\frac{1+\sqrt{17}}{4}\right)^{k} - \left(\frac{1-\sqrt{17}}{4}\right)^{k}\right)\right)^2} = 0,$$

звідки випливає, що $\lambda(C[A_2, \overline{cc}]) = 0$. $\square$

Висновки до розділу 3

У розділі 3 означено представлення чисел за допомогою ланцюгових A_2-дробів. Створено цілісну тополого-метричну теорію представлення чисел ланцюговими дробами, алфавіт якого є двоелементною множиною, і йому відповідну теорію зображення чисел за допомогою двосимвольного алфавіту $\{0, 1\}$. Знайдено необхідні і достатні умови, при яких така система кодування чисел цілого відрізка (A-зображення) має нульову надлишковість (тобто не існує чисел, які мають три зображення або більше).

Доведено, що A-зображення чисел топологічно еквівалентне нега-двійковому, але має принципово іншу метричну складову теорії. Детально вивчено геометрію ланцюгового A-зображення чисел (описано властивості циліндричних множин, встановлено ряд метричних відношень тощо).

РОЗДІЛ 4
ЗАСТОСУВАННЯ ЛАНЦЮГОВИХ A_2-ДРОБІВ ДО ВИВЧЕННЯ ОБ'ЄКТІВ З ФРАКТАЛЬНИМИ ВЛАСТИВОСТЯМИ

Цей розділ присвячено застосуванню ланцюгового A_2-зображення чисел у теорії фракталів і теорії локально складних функцій з фрактальними властивостями.

4.1. Розмірність Гаусдорфа-Безиковича і циліндри A_2-зображення чисел

Одними з ключових понять теорії фракталів є поняття α–мірної міри Гаусдорфа і розмірності Гаусдорфа-Безиковича. Нагадаємо [43] їх означення для простору $\mathbb{R}^1$.

Нехай $\mathbb{R}^1$ — метричний простір, E — деяка обмежена його підмножина, $d(E)$ — діаметр E, F_R — сім'я підмножин простору $\mathbb{R}^1$ така, що для $\forall E \subset \mathbb{R}^1$ і $\forall \varepsilon > 0$ існує не більш ніж зчисленне ε-покриття $\{G_i\}$, $G_i \in F_R$, множини E (тобто існує $\{G_i\}$, $\quad G_i \in F_R, \quad E \subset \bigcup\limits_i G_i, \quad d(G_i) \leqslant \varepsilon$). Для заданих E і будь-якого $\varepsilon > 0$ означимо функцію

$$m_d^\varepsilon(E) = \inf_{d(G_i)\leqslant\varepsilon} \left\{ \sum_i d(G_i) : E \subset \bigcup_i G_i \right\},$$

де нижня грань береться за всеможливими, не більш ніж зчисленними, ε-покриттями $\{G_i\}$, $G_i \in F_R$, множини E.

Означення 4.1. Число

$$H_d(E) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} m_d^\varepsilon(E) = \sup_{\varepsilon>0} m_d^\varepsilon(E)$$

називають зовнішньою мірою Гаусдорфа множини E, а зовнішню міру m_d^ε — наближаючою мірою порядку ε.

Якщо $0 < H_\alpha(E) < \infty$, то число α називають *розмірністю Гаусдорфа* множин E. Відомі приклади множин, для яких такого α не існує.

Означення 4.2. Число $\alpha_0 = \alpha_0(E)$, визначене рівністю

$$\alpha_0(E) = \sup\{\alpha : H_\alpha(E) \neq 0\} = \inf\{\alpha : H_\alpha(E) = 0\},$$

називається *розмірністю Гаусдорфа-Безиковича* множини E.

Розмірність Гаусдорфа-Безиковича множини $E \subset R^1$ визначається поведінкою $H_\alpha(E)$ не як функції від E, а як функції від α. Коректність означення підтверджує наступна властивість H_α-міри.

Якщо $H_{\alpha_1}(E) < \infty$, то $H_{\alpha_2}(E) = 0$ для $\alpha_2 > \alpha_1$. Якщо $H_{\alpha_2}(E) \neq 0$, то $H_{\alpha_1}(E) = \infty$ для $\alpha_1 < \alpha_2$.

З означення випливає, що для даної множини E або $H_\alpha(E) = 0$ для будь-якого $\alpha > 0$, тоді $\alpha_0(E) = 0$ за означенням, або існує точка “перескоку” α_0, така, що $H_\alpha(E) = \infty$ для $\alpha < \alpha_0$ і $H_\alpha(E) = 0$ для $\alpha > \alpha_0$. Таке число α_0 і називають *розмірністю Гаусдорфа-Безиковича.*

Відмітимо певні властивості розмірності Хаусдорфа-Безиковича:

1. Якщо множини E_1 і E_2 — геометрично подібні, то $\alpha_0(E_1) = \alpha_0(E_2)$;
2. $\alpha_0(E) = 0$ для довільної не більш ніж зчисленної множини E;
3. $\alpha_0(E_1) \leqslant \alpha_0(E_2)$, якщо $E_1 \subset E_2$;
4. $\alpha_0(\bigcup\limits_n E_n) = \sup\limits_n \alpha_0(E_n)$.

Лема 4.1. *Для довжин циліндрів ланцюгового A_2-зображення чисел при будь-яких $i, j \in A$ та $a \neq i$ виконується нерівність*

$$|\Delta_{c_1 \ldots c_{k-1} ij}| < |\Delta_{c_1 \ldots c_{k-1} a}|.$$

Доведення. Враховуючи вираз довжини A_2-циліндрів та правило утворення знаменників підхідних дробів q_n маємо

$$|\Delta_{c_1\ldots c_{n-1}a}| = \frac{1}{(q_{n-1}+q_n)(q_{n-1}+2q_n)} =$$

$$= \frac{1}{((1+a)q_{n-1}+q_{n-2})((1+2a)q_{n-1}+2q_{n-2})}.$$

Відповідно

$$|\Delta_{c_1\ldots c_{n-1}ij}| = \frac{1}{(q_n+q_{n+1})(q_n+2q_{n+1})} =$$

$$= \frac{1}{((1+j)q_n+q_{n-1})((1+2j)q_n+2q_{n-1}} =$$

$$= \frac{1}{((1+j)(iq_{n-1}+q_{n-2})+q_{n-1})((1+2j)(iq_{n-1}+q_{n-2})+2q_{n-1})} =$$

$$= \frac{1}{((i(1+j)+1)q_{n-1}+(1+j)q_{n-2})((i(1+2j)+2)q_{n-1}+(1+2j)q_{n-2})} =$$

$$= \frac{1}{((i+ij+1)q_{n-1}+(1+j)q_{n-2})((i+2ij+2)q_{n-1}+(1+2j)q_{n-2})}.$$

Розглянемо відношення

$$\delta = \frac{|\Delta_{c_1\ldots c_{n-1}ij}|}{|\Delta_{c_1\ldots c_{n-1}a}|} =$$

$$= \frac{((1+a)q_{n-1}+q_{n-2})((1+2a)q_{n-1}+2q_{n-2})}{((i+ij+1)q_{n-1}+(1+j)q_{n-2})((i+2ij+2)q_{n-1}+(1+2j)q_{n-2})} =$$

$$= \frac{((1+a)+\frac{q_{n-2}}{q_{n-1}})((1+2a)+2\frac{q_{n-2}}{q_{n-1}})}{((i+ij+1)+(1+j)\frac{q_{n-2}}{q_{n-1}})((i+2ij+2)+(1+2j)\frac{q_{n-2}}{q_{n-1}})} =$$

$$= \frac{(1+a+A)(1+2a+2A)}{(i+ij+1+(1+j)A)(i+2ij+2+(1+2j)A)}, \text{ де } A = \frac{q_{n-2}}{q_{n-1}}.$$

Розглянувши чотири можливі варіанти ($i=\frac{1}{2}$, $a=1$, $j\in\{\frac{1}{2},1\}$ та $i=1$, $a=\frac{1}{2}$, $j\in\{\frac{1}{2},1\}$) легко переконатися, що

$$\delta = \frac{|\Delta_{c_1\ldots c_{n-1}ij}|}{|\Delta_{c_1\ldots c_{n-1}a}|} < 1.$$

$\square$

Теорема 4.1. *Для будь-якого інтервала $u \subset [\frac{1}{2}; 1]$ існує не більше шести A_2-циліндрів, які покривають u і мають довжину не більшу $|u|$.*

Доведення. Позначимо через V_A — клас всіх A_2-циліндрів відрізка $[\frac{1}{2}; 1]$. Нехай u — довільний відрізок, що міститься в $[\frac{1}{2}; 1]$, а k — мінімальний ранг циліндра (позначимо його $\Delta_{c_1 \ldots c_{k-1} c_k}$), що повністю міститься в u, тобто u вже не містить циліндрів рангу $k-1$.

Зауважимо, що u може містити не більше двох циліндрів рангу k, оскільки з трьох суміжних циліндрів одного рангу існує два, які в об'єднанні утворюють циліндр рангу $k-1$, що суперечить вибору числа k.

Очевидно, що існують два циліндри v_0 і v_1 рангу $k-1$, які покривають u, при чому один з них це $\Delta_{c_1 \ldots c_{k-1}}$: $u \subset (v_0 \bigcup v_1)$, $\quad max\ v_0 = \ min\ v_1$. Позначимо $u_0 = [min\ u;\ max\ v_0]$, $\ u_1 = [max\ v_0, max\ u]$.

Зазначимо, що один з відрізків u_0, u_1 може мати довжину близьку до довжини u.

Розглянемо відрізки u_0 і u_1 окремо, довівши, що кожен з них може бути покритий не більше як трьома A_2-циліндрами, які мають довжину, що не перевищує $|u|$.

Зауважимо, що вищевказаний циліндр $\Delta_{c_1 \ldots c_{k-1} c_k}$ може належати або u_0, або u_1. Припустимо, що $\Delta_{c_1 \ldots c_{k-1} c_k} \subset u_0$, тоді він співпадає з одним з циліндрів $\Delta_{c_1 \ldots c_{k-1} i}$ або $\Delta_{c_1 \ldots c_{k-1} a}$, де $a = A \setminus \{i\}$, а саме з тим, що лежить правіше.

Якщо вважати, що з циліндром $\Delta_{c_1 \ldots c_{k-1} a}$, то тоді відрізок u_0 покривають три циліндри $\Delta_{c_1 \ldots c_{k-1} a}$, $\Delta_{c_1 \ldots c_{k-1} ij}$, де $j \in A$. Кожен з них має довжину меншу $|u|$, оскільки згідно з лемою 4.1:

$$|\Delta_{c_1 \ldots c_{k-1} ij}| < |\Delta_{c_1 \ldots c_{k-1} a}|.$$

Розглянемо тепер відрізок u_1. Існує найменший ранг m циліндра, який повністю належить u_1, якщо це $\Delta_{a_1 \ldots a_{m-1} a}$, то три циліндри $\Delta_{a_1 \ldots a_{m-1} a}$ і

$\Delta_{a_1 \dots a_{m-1} ij}$, де $i = A \setminus \{a\}$, $j \in A$ покривають u_1 і мають довжину меншу $|u_1|$ в силу тих же аргументів.

У випадку коли $\Delta_{c_1 \dots c_{k-1} c_k} \subset u_1$ висновок обґрунтовується аналогічно.

□

Теорема 4.2. *При визначені розмірності Гаусдорфа-Безиковича підмножин відрізка* $[\frac{1}{2}; 1]$ *можна обмежитись покриттями* A_2*-циліндрами.*

Доведення. Розглянемо довільну множину $E \subset [\frac{1}{2}; 1]$ і

$$l^{\varepsilon}_{\alpha}(E) = inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |u_i|^{\alpha};\ E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} u_i,\ u_i \in V_A,\ |u_i| \leqslant \varepsilon,\ i = 1, 2, ... \right\},$$

де $|u_i|$ — довжина u_i, а нижня межа береться за всеможливими покриттями E відрізками u_i з V_A, довжина яких не перевищує ε.

Враховуючи теорему 4.1, маємо

$$m^{\varepsilon}_{\alpha}(E) \leqslant l^{\varepsilon}_{\alpha}(E) \leqslant 6 m^{\varepsilon}_{\alpha}(E).$$

Тому хоча $l^{\varepsilon}_{\alpha}(E)$ і $m^{\varepsilon}_{\alpha}(E)$ різні, але в означенні розмірності Гаусдорфа-Безиковича можна використовувати $l^{\varepsilon}_{\alpha}(E)$ замість $m^{\varepsilon}_{\alpha}(E)$, оскільки $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} l^{\varepsilon}_{\alpha}(E)$ та $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} m^{\varepsilon}_{\alpha}(E)$ досягають нуля та нескінченності одночасно. □

В класичному означенні розмірності Гаусдорфа-Безиковича обмежених множин простору $\mathbb{R}^1$ розглядаються всеможливі покриття множин відрізками (рівносильно інтервалами). Одна з фундаментальних теорем Біллінгслі щодо еквівалентного означення приводить до системи покриттів двійковими циліндрами. Нами отримано аналог теореми Білінгслі для ланцюгових A_2-дробів.

Узагальнимо означення розмірності Гаусдорфа-Безиковича.

Нехай ν — неперервна міра на борелівських множинах $E \subset [\frac{1}{2}; 1]$ і

$$\nu_{\alpha}(E, \varepsilon) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \nu^{\alpha}(u_i) :\ E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} u_i,\ u_i \in V_A,\ i = 1, 2, ... \right\},$$

де нижня межа береться за $\nu - \varepsilon$-покриттями множини E, тобто за покриттями відрізками $u_i \in V_A$ з мірою $\nu(u_i) \leqslant \varepsilon$. Якщо ν — міра Лебега, то $\nu_\alpha(E,\varepsilon) = m_\alpha(E,\varepsilon)$. При $\varepsilon \to 0$ $\nu_\alpha(E,\varepsilon)$ монотонно прямує до границі $\nu_\alpha(E)$, що є узагальненою H_{ν_α}-мірою Гаусдорфа.

Означення 4.3. Розмірністю Біллінгслі (розмірністю Гаусдорфа-Безиковича відносно міри ν) множини E називається таке число α_0, що $\nu_\alpha(E) = \infty$ при $\alpha < \alpha_0$ і $\nu_\alpha(E) = 0$ при $\alpha > \alpha_0$. Її позначатимемо через $\alpha_\nu(E)$.

Якщо ν — міра Лебега, то розмірність Біллінгслі [5] співпадає з класичною розмірністю Гаусдорфа-Безиковича, тобто $\alpha_\nu(E) = \alpha_0(E)$ для будь-якої множини $E \subset [\frac{1}{2}; 1]$.

4.2. Автомодельні функції типу Сендова

Б. Сендов в роботі [97] вивчав функції, названі ним *двійково власне-подібними*. Кожна з таких функцій задавалась своєю числовою послідовністю (λ_k) ненульових елементів такою, що $\prod\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k < \infty$, і функціональними співвідношеннями:

$$f(x + 2^{-k}) = \lambda_k f(x), \quad x \in \nabla^2_{a_1 \ldots a_k 0}, \ k = 1, 2, ...,$$

де $\nabla^2_{a_1 \ldots a_k 0} = \left(\sum\limits_{i=1}^{k} 2^{-i} a_i; 2^{-k} + \sum\limits_{i=1}^{k} 2^{-i} a_i \right)$, $a_i \in A \equiv \{0, 1\}$.

Функції цього класу мають представлення

$$f(x = \Delta^2_{a_1 \ldots a_k \ldots}) = \prod_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{a_k(x)}, \text{ де } x = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} a_k \equiv \Delta^2_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k \ldots}.$$

Легко бачити, що даному класу належать всі показникові функції, зокрема функція $y = e^x$, а при $\lambda_k = 1$ для всіх $k \in N$ маємо $f(x) = 1$.

Акцент у згаданій роботі Сендова зроблено на питаннях неперервності функції за Гаусдорфом, інтегральних та «фрактальних» властивостях [98] функцій цього класу, а також на їх використанні для конструювання системи ортогональних функцій типу Уолша (Вулша) і пакету перетворень Хаара.

Ідею задання функцій з локально складною структурою, яку використовував у згаданій роботі Сєндов ми використали для задання класу функцій при умові, що аргумент має ланцюгове A-зображення.

У даному параграфі основним об'єктом вивчення є функція, означена рівністю

$$f(x = \Delta^A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}) = \prod_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{\alpha_k(x)}, \tag{4.1}$$

де $\Delta^A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}$ — A-зображення числа $x \in [\frac{1}{2}; 1]$, (λ_k) — наперед задана послідовність додатних чисел така, що нескінченний добуток $P \equiv \prod\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k$ є абсолютно збіжним.

Нагадаємо, що нескінченний добуток $\prod\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k \equiv \lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} \lambda_k$ називається *збіжним*, якщо збігається послідовність (P_n) його частинних добутків $P_n \equiv \prod\limits_{k=1}^{n} \lambda_k$ до числа, відмінного від нуля. У протилежному випадку, він називається *розбіжним*, зокрема розбіжним до нуля. Нескінченний добуток $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$ називається *абсолютно збіжним*, якщо збігається добуток $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1 + |a_n|)$, що рівносильно збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Коректність означення функції рівністю (4.1) забезпечується домовленістю розглядати лише одне з зображень для A-бінарних чисел, а саме те, що мають період (10).

Нас цікавлять структурні, варіаційні, інтегральні, диференціальні та фрактальні властивості функції (4.1), а також її зв'язки з відомими класами фрактальних функцій (сингулярних, ніде не монотонних тощо) [51].

Очевидними є наступні рівності:

1)

$$f(\Delta^A_{(0)}) = 0, f(\Delta^A_{(1)}) = P,$$

$$f(x = \Delta^A_{c_1\ldots c_m 1(10)}) = \lambda_1^{c_1}\lambda_2^{c_2}\ldots\lambda_m^{c_m}\lambda_{m+1}\lambda_{m+2};$$

2)

$$\frac{f(\Delta^A_{a_1a_2...a_k...})}{f(\Delta^A_{b_1b_2...b_k...})} = \prod_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{a_k-b_k},$$

$$\text{зокрема } f(\Delta^A_{\alpha_1...\alpha_m c\alpha_{m+2}...}) = \lambda^{2c-1}_{m+1} f(\Delta^A_{\alpha_1...\alpha_m[1-c]\alpha_{m+2}...}).$$

Остання рівність виражає властивість структурної подібності функції f.

Примітка 1. Оскільки $\lambda_k > 0$, то $\lambda_k = e^{v_k}$ для деякого дійсного числа v_k, а тому рівність (4.1) записується у формі

$$f(x = \Delta^A_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...}) = \prod_{k=1}^{\infty} e^{v_k\alpha_k} = e^{\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k\alpha_k}, \tag{4.2}$$

причому з абсолютної збіжності нескінченного добутку $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot ... \cdot \lambda_k \cdot ...$ випливає абсолютна збіжність ряду $v_1 + v_2 + ... + v_k + ...$

Кажуть, що функція має фрактальні властивості, якщо виконується принаймні одна з умов: вона трансформує фрактальну розмірність борелівських множин або має

1) хоча би одну фрактальну множину рівня;

2) фрактальний графік (як множину в $\mathbb{R}^2$);

3) фрактальну множину точок несталості (спадання, зростання тощо);

4) фрактальну множину особливостей (диференціального або іншого характеру);

5) розподіл значень при рівномірному розподілі аргумента, який зосереджений на фракталі; тощо.

Нагадаємо, що *неповною сумою (підсумою)* збіжного числового ряду

$$u_1 + u_2 + ... + u_n + ... = (u_1 + u_2 + ... + u_k) + r_k = S_k + r_k, \tag{4.3}$$

визначеною множиною $M \subset N$, називається число $x = x(M) = \sum\limits_{i\in M} u_i = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i u_i$, де $\varepsilon_i = 1$, якщо $i \in M$; $\varepsilon_i = 0$, якщо $i \notin M$.

Множиною неповних сум (підсум) ряду (4.3) називається множина $E(u_n)$ всіх його підсум, тобто $E(u_n) = \{x : x = \sum\limits_{n\in M} u_n, M \in 2^N\}$, де M —

пробігає сім'ю всіх підмножин множини натуральних чисел. Множина неповних сум (підсум) абсолютно збіжного числового ряду є континуальною і досконалою [85], вона належить до одного з трьох топологічних типів:

1) є скінченним об'єднанням відрізків;

2) є ніде не щільною множиною;

3) є двостороннім канторвалом — об'єднанням континуальної ніде не щільної множини і зліченної множини відрізків, а саме множиною, гомеоморфною множині підсум ряду

$$\frac{3}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4^2}+\frac{2}{4^2}+...+\frac{3}{4^n}+\frac{2}{4^n}+...,$$

що рівносильно гомеоморфною множині

$$T\equiv C\cup\bigcup_{n=1}^{\infty}G_{2n-1}=[0;1]\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}G_{2n},$$

де $G_k=\bigcup\limits_{\alpha_1\in\{0,2\}}...\bigcup\limits_{\alpha_{k-1}\in\{0,2\}}(\Delta^3_{\alpha_1...\alpha_{k-1}1(0)};\Delta^3_{\alpha_1...\alpha_{k-1}1(2)})$, $\Delta^3_{c_1...c_k}\equiv\frac{c_1}{3}+...+\frac{c_k}{3^k}+...$, $c_i\in\{0,1,2\}$.

Загальна теорія геометрії числових рядів, яка вивчає тополого-метричні властивості множин їх неповних сум, достатньо бідна. Вона містить ряд складних проблем, які стосуються критеріїв нуль-мірності множини підсум, її канторвальності тощо. Сьогодні прогрес теорії забезпечується за рахунок вивчення множин неповних сум рядів з певними умовами однорідності, які належать масивним багатопараметричним класам [88].

Оскільки означення функції f ґрунтується на ланцюжку залежностей

$$[\frac{1}{2};1]\ni x\leftrightarrow(\alpha_n)\in L\to\varphi(x)=\sum_{i=1}^{\infty}v_i\alpha_i(x)\to f(x)=e^{\varphi(x)},$$

де $L=A\times A\times...$ — простір послідовностей нулів та одиниць, то очевидним є наступне твердження.

Лема 4.2. *Функція f має структуру: $f(x)=e^{\varphi(x)}$, де*

$$\varphi(x=\Delta^A_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...})=v_1\alpha_1(x)+v_2\alpha_2(x)+...+v_n\alpha_n(x)+....$$

Наслідок 4.1. *Множина значень функції f з точністю до зліченної множини є образом множини неповних сум ряду $v_1 + v_2 + ... + v_n + ...$ під дією функції $y = e^x$, тобто є проміжком, об'єднанням проміжків, ніде не щільною множиною або канторвалом.*

Оскільки, дбаючи про коректність означення функції, ми заборонили використання зображення A-бінарних чисел, які мають період (10), то з множини неповних сум ряду, взагалі кажучи, вилучаються точки (числа) виду $u = v_1\alpha_1 + v_2\alpha_2 + ... + v_m\alpha_m + r_m$, де $r_m = v_{m+1} + v_{m+2} + ...$, які утворюють зліченну множину.

Приклад 1. Якщо $v_n = \frac{2}{3^n}$, то множина значень функції f є ніде не щільною нуль-множиною Лебега, розмірність Гаусдорфа-Безиковича якої дорівнює $\log_3 2$.

Справді, множиною неповних сум ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n}$ є класична множина Кантора, розмірність Гаусдорфа-Безиковича якої дорівнює $\log_3 2$. Оскільки функція $y = e^x$ зберігає розмірність борелівських множин [63], то в даному випадку множини значень функцій f і φ мають рівні розмірності. Справедливе більш загальне твердження.

Приклад 2. Якщо $v_k = \frac{(-1)^{k+1}}{2^k}$, то множиною значень функції f є відрізок $[e^{-\frac{1}{3}}; e^{\frac{2}{3}}]$.

Справді, множина неповних сум ряду $v_1 + v_2 + ...$ є відрізок $[-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}]$.

Теорема 4.3. *Якщо $\lambda_k = e^{v_k}$, $v_k \geqslant r_k \equiv v_{k+1} + v_{k+2} + ... > 0$ для всіх $k \in N$, то функція f, означена рівністю (4.1), є неспадною, причому зростаючою при виконані строгої нерівності, в цьому випадку її множина значень E_f є ніде не щільною множиною , яка має міру Лебега рівну нулю лише тоді, коли $\lim\limits_{k\to\infty} 2^k r_k = 0$, а її фрактальна розмірність Гаусдорфа-Безиковича обчислюється за формулою $\alpha_0(E_f) = -\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\log_2 r_n}$.*

Доведення. З умови $v_k \geqslant r_k \equiv v_{k+1} + v_{k+2} + ... > 0$ для будь-якого $k \in N$ випливає, що функція $\varphi(x)$ є неспадною.

Справді, якщо $x_1 < x_2$, то $x_1 = \Delta^{Q_2}_{c_1\dots c_{k-1}0\alpha_{k+1}\alpha_{k+2}\dots}$, $x_2 = \Delta^{Q_2}_{c_1\dots c_{k-1}1\alpha'_{k+1}\alpha'_{k+2}\dots}$, причому $\alpha_{k+m} - \alpha'_{k+m} \neq 1$ для деякого m. Тоді
$\varphi(x_2) - \varphi(x_1) \geqslant \varphi(\Delta^{Q_2}_{c_1\dots c_{k-1}1(0)}) - \varphi(\Delta^{Q_2}_{c_1\dots c_{k-1}0(1)}) = v_k - (v_{k+1} + v_{k+2} + \dots) = v_k - r_k \geqslant 0$.

Якщо $v_k > r_k$, то $\varphi(x_2) - \varphi(x_1) \geqslant v_k - r_k > 0$, тобто функція строго зростає. В цьому випадку, згідно з теоремою Какея, її множина значень E_φ є ніде не щільною досконалою множиною канторівського типу, міра Лебега якої, як відомо [43], обчислюється за формулою $\lambda(E_\varphi) = \lim\limits_{k\to\infty} 2^k r_k$.

Оскільки показникові функції володіють властивістю N, тобто образом множини нульової міри Лебега під дією функції є нуль-множина Лебега, то $\lambda(E_f) = 0$ лише тоді, коли $\lambda(E_\varphi) = 0$.

Функція $y = e^x$ зберігає розмірність Гаусдорфа-Безиковича борелівських множин, тому розмірності множин E_f і E_φ рівні, а розмірність останньої, як відомо [43], обчислюється за вказаною в теоремі формулою. □

Лема 4.3. *Нехай $r_0 = v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots$ — абсолютно збіжний ряд, де $v_i \in R$. Для того, щоб для будь-якого $n \in N$ мала місце рівність*

$$v_n + \sum_{k=1}^{\infty} v_{n+2k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} v_{n+2k}, \tag{4.4}$$

необхідно і достатньо, щоб $v_n = \dfrac{v_1(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}$ для $\forall n \in N$.

Доведення. Необхідність. Нехай має місце (4.4) доведемо, що

$$v_n = \frac{v_1(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} \text{ для } \forall n \in N.$$

При $n = 1$ рівність (4.4) перепишеться у вигляді $v_1 + v_2 - v_3 + v_4 - v_5 + \dots = 0$. Додавши до обох частин $2(v_3 + v_5 + \dots)$, отримаємо $r_0 = 2(v_3 + v_5 + \dots)$, звідки

$$v_1 + v_2 + v_4 + \dots = \frac{r_0}{2} = v_3 + v_5 + v_7 + \dots .$$

При $n = 2$ відповідно

$$v_2 + v_3 + v_5 + v_7 \cdots = v_4 + v_6 + \dots$$

$$v_2 + v_3 - v_4 + v_5 - v_6 + v_7 \cdots = 0$$

Додамо до обох частин $2(v_4 + v_6 + \dots)$, отримаємо

$$v_2 + v_3 + v_5 + \dots = \frac{r_1}{2} = v_4 + v_6 + v_8 + \dots .$$

Звідки

$$\frac{r_0}{2} = v_1 + v_2 + \frac{r_1}{2}$$
$$\frac{r_0}{2} = v_1 + v_2 + \frac{r_0 - v_1}{2}$$
$$v_1 + v_2 - \frac{v_1}{2} = 0$$
$$v_2 = -\frac{v_1}{2}$$

Проведемо загальні міркування, додамо до обох частин (4.4) праву частину, отримаємо

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_{m+2k} = \frac{r_{m-1}}{2} = v_m + \sum_{k=1}^{\infty} v_{m+2k-1}.$$

Тоді для $m + 1$ матимемо

$$\frac{r_m}{2} = v_{m+1} + \sum_{k=1}^{\infty} v_{m+2k}$$

$$\frac{r_{m-1}}{2} = v_m + v_{m+1} + \frac{r_m}{2}$$
$$\frac{r_{m-1}}{2} = v_m + v_{m+1} + \frac{r_{m-1} - v_m}{2}$$
$$v_{m+1} = -\frac{v_m}{2}$$

Звідки за m кроків отримаємо $v_n = \dfrac{v_1(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}$.

Достатність. Безпосередньо підставивши $v_n = \dfrac{v_1(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}$ у (4.4) отримаємо

$$v_n + \sum_{k=1}^{\infty} v_{n+2k-1} = \frac{v_1(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} + \sum_{k=1}^{\infty} v_{n+2k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} v_{n+2k}$$

$\square$

Теорема 4.4. *Функція $f(x)$ неперервна в кожній A-унарній точці, а в A-бінарній точці $x^* = \Delta_{c_1 \dots c_m 0(01)} = \Delta_{c_1 \dots c_m 1(10)}$ неперервна, тоді і тільки тоді, коли виконується рівність* (4.4)

$$v_m + \sum_{k=1}^{\infty} v_{m+2k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} v_{m+2k}.$$

Доведення. Нехай $x_0 = \Delta^A_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}$ — довільне A-унарне число. Розглянемо $x = \Delta^A_{a_1 \dots a_n \dots}$ таке, що $x \neq x_0$. Тоді існує m таке, що $a_m \neq \alpha_m$, але $a_i = \alpha_i$ при $i < m$. При чому $x \to x_0$ рівносильно $m \to \infty$. Тому маємо

$$\frac{f(x)}{f(x_0)} = \prod_{i=1}^{m-1} \lambda_i^{a_i - \alpha_i} \cdot \lambda_m^{a_m - \alpha_m} \cdot \prod_{i=m+1}^{\infty} \lambda_i^{a_i - \alpha_i},$$

але $\prod\limits_{i=1}^{m-1} \lambda_i^{a_i - \alpha_i} = 1$, $\lim\limits_{m \to \infty} \lambda_m = 1 = \lim\limits_{m \to \infty} \prod\limits_{i=1}^{m-1} \lambda_i^{a_i - \alpha_i}$.

Отже, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, тобто функція f є неперервною в точці x_0.

Легко довести, що функція f буде неперервною у точці x^* тоді і тільки тоді, коли її значення від двох формально різних зображень, обчислених за формулою (4.2) будуть рівними:

$$f(\Delta^A_{c_1 \dots c_{m-1} 1(10)}) = e^{c_1 v_1 + \dots + c_{m-1} v_{m-1} + v_m + v_{m+1} + v_{m+3} + \dots + v_{2k+1} + \dots}$$

$$f(\Delta^A_{c_1 \dots c_{m-1} 0(01)}) = e^{c_1 v_1 + \dots + c_{m-1} v_{m-1} + v_{m+2} + v_{m+4} + \dots + v_{2k} + \dots}.$$

Очевидно, що ці значення будуть співпадати, коли

$$v_m + v_{m+1} + v_{m+3} + \dots + v_{2k+1} + \dots = v_{m+2} + v_{m+4} + \dots + v_{2k} + \dots,$$

тобто коли має місце рівність (4.4).

$\square$

Наслідок 4.2. *Функція f, означена рівністю (4.1), неперервна на відрізку $[\frac{1}{2};1]$ тоді і тільки тоді, коли $\lambda_k = e^{\frac{c(-1)^{k-1}}{2^{k-1}}}$ для деякого $c \in R$ і всіх $k \in N$.*

Лема 4.4. *Нехай $x_0 = \Delta^A_{c_1c_2...c_m1(10)}$. Тоді*

$$\delta(x_0) \equiv \lim_{x\to x_0-0}[f(x_0) - f(x)] = \lambda_1^{c_1}...\lambda_m^{c_m}(\lambda_{m+1} - \prod_{i=2}^{\infty}\lambda_{m+i}). \tag{4.5}$$

Якщо $\lambda_{m+1} \neq \lambda_{m+2}\cdot\lambda_{m+3}\cdot ... \Leftrightarrow v_{m+1} \neq v_{m+2}+v_{m+3}+...$, то стрибок $\delta(x_0)$ функції f у точці x_0 обчислюється за формулою (4.5).

Доведення. Нехай $x < x_0$. Якщо x достатньо близьке до x_0, то $x = \Delta^A_{c_1...c_m0\underbrace{1...1}_{k}\alpha_{m+k+2}...}$, причому серед членів послідовності (α_{m+2+k}) є 0 і $x \to x_0$ рівносильно $k \to \infty$. Тому

$$\lim_{x\to x_0}[f(x_0) - f(x)] = \lambda_1^{c_1}...\lambda_m^{c_m}(\lambda_{m+1} - \frac{P}{\lambda_1...\lambda_m\lambda_{m+1}}),$$

тобто виконується рівність (4.5). Отже, у випадку розривності функції в точці x_0 її стрибок обчислюється за цією формулою. $\square$

Лема 4.5. *Якщо $\lambda_n = 1$ для всіх $n \geqslant m$, то функція f кусково стала, а саме є константою на кожному A-циліндрі рангу m.*

Доведення. Справді, нехай $x \in \Delta^A_{c_1...c_m} \setminus \{\Delta^A_{c_1...c_m1(10)}\}$, тоді

$$f(x = \Delta^A_{c_1...c_m\alpha_{m+1}\alpha_{m+2}...}) = \prod_{i=1}^{m}\lambda_i^{c_i}\cdot\prod_{i=1}^{\infty}\lambda_{m+i}^{\alpha_{m+i}} = P_m\cdot 1. \qquad \square$$

Лема 4.6. *Мають місце співвідношення:*

$$A_m \equiv \inf_{x\in\Delta^A_{c_1...c_m}} f(x) = \prod_{i=1}^{m}\lambda_i^{c_i}\cdot\prod_{k=m+1}^{\infty}\lambda_k^{\beta_k},\ \text{де}\ \beta_k = \begin{cases}0, & \text{якщо}\ \lambda_k \geqslant 1,\\ 1, & \text{якщо}\ \lambda_k < 1;\end{cases}$$

$$B_m \equiv \sup_{x\in\Delta^A_{c_1\ldots c_m}} f(x) = \prod_{i=1}^{m} \lambda_i^{c_i} \cdot \prod_{k=m+1}^{\infty} \lambda_k^{\gamma_k},\ \text{де } \gamma_k = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \lambda_k < 1, \\ 1, & \text{якщо } \lambda_k \geqslant 1; \end{cases}$$

$$\lim_{m\to\infty} \frac{A_m}{B_m} = 1,\ \text{тобто} \lim_{m\to\infty} (A_m - B_m) = 0.$$

Доведення. Перші дві рівності очевидні. Розглянемо відношення $\frac{A_m}{B_m} = \prod\limits_{k=m+1}^{\infty} \lambda_k^{\beta_k-\gamma_k}$. Оскільки $\beta_k - \gamma_k \in \{-1, 0, 1\}$, $\lambda_k \to 1$ $(k \to \infty)$ і нескінченний добуток є абсолютно збіжним, то $\frac{A_m}{B_m} \to \infty$, коли $m \to \infty$. □

Клас всіх функцій, означених рівністю (4.1), позначатимемо через S, а клас неперервних функцій через S_c.

Лема 4.7. *Якщо для всіх $n \in \mathbb{N}$ виконується нерівність $0 < v_n$, то функція f є ніде не монотонною.*

Доведення. Для обґрунтування висновку леми досить довести, що функція f не є монотонною на жодному з A-циліндрів.

Нехай $\Delta^A_{c_1\ldots c_n}$ — довільний A-циліндр, а $\Delta^A_{c_1\ldots c_n\ldots c_m}$ циліндр парного рангу, що йому належить. Розглянемо точки: $x_1 = \Delta^A_{c_1\ldots c_m(0)}$, $x_2 = \Delta^A_{c_1..c_m1(0)}$, $x_3 = \Delta^A_{c_1..c_m11(0)}$, очевидно, що $x_2 < x_3 < x_1$.

Значення функції в яких обчислюються відповідно:

$$f(x_1) = \lambda_1^{c_1} \ldots \lambda_m^{c_m},$$
$$f(x_2) = \lambda_1^{c_1} \ldots \lambda_m^{c_m} \lambda_{m+1}^{c_{m+1}},$$
$$f(x_2) = \lambda_1^{c_1} \ldots \lambda_m^{c_m} \lambda_{m+1}^{c_{m+1}} \lambda_{m+2}^{c_{m+2}},$$

де $\lambda_m = e^{v_m} > 1$, оскільки $v_m > 0$.

Тоді

$$f(x_3) - f(x_2) > 0$$
$$f(x_3) - f(x_1) > 0.$$

Оскільки для будь-якого інтервала з $[\frac{1}{2}; 1]$ можна вказати A-циліндр, що йому належить, то з довільності вибору розглянутого циліндру випливає, що функція f є ніде не монотонною. $\square$

Теорема 4.5. *Якщо подвійна нерівність* $0 < v_n < r_n$ *виконується для нескінченної кількість значень* n*, то функція* f *є ніде не монотонною.*

Доведення. Очевидно, що коли $v_n < r_n$, то існує таке натуральне $s = s(n)$, що виконується нерівність $v_n < v_{n+1} + v_{n_2} + ... + v_{n+s}$.

Покажемо, що функція f не є монотонною на жодному з A-циліндрів. Нехай $\Delta^A_{c_1...c_m}$ — довільний A-циліндр. Розглянемо точки:
$x_1 = \Delta^A_{c_1...c_m\underbrace{1...1}_{k}(0)}$, $x_2 = \Delta^A_{c_1..c_m\underbrace{1...1}_{k-1}0\underbrace{1...1}_{l}(0)}$, $x_3 = \Delta^A_{c_1..c_m\underbrace{1...1}_{k-1}0\underbrace{1...1}_{p}(0)}$,
де $m+k$–парне, $l < p$, $v_{m+k} < r_{m+k}$, $v_{m+k} < v_{m+k+1} + v_{m+k+2} + ... + v_{m+k+p}$.

Очевидно, що $x_2 < x_3 < x_1$, разом з цим
$f(x_3) - f(x_1) = e^{(v_{m+k+1}+v_{m+k+2}+...+v_{m+k+p})} - e^{v_{m+k}} > 0,$
$f(x_3) - f(x_2) = e^{(v_{m+l+1}+v_{m+l+2}+...+v_{m+k+p})} - e^{v_{m+k}} > 0.$

Тоді функція $f(x)$ — не є монотонна на $\Delta^A_{c_1...c_m}$, а враховуючи, що вибір циліндра довільний, робимо висновок, що $f(x)$ ніде не монотонна. $\square$

Теорема 4.6. *Всі неперервні функції з* S_c *є ніде не монотонними.*

Доведення. Дійсно, в силу леми 4.3 та теореми 4.4 загальний член ряду для неперервної функції обчислюється за формулою $v_n = \dfrac{v_1(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}$ для $\forall n \in N$, тобто є від'ємним при непарних n. В той же час, згідно теореми 4.5 загальний член ряду v_n має бути більшим за нуль. Дістали протиріччя. $\square$

Перехід від класичного двійкового зображення до A-зображення збагатив сім'ю сингулярно неперервними функціями і функціями з різноплановими фрактальними властивостями.

4.3. Функції, задані перетворювачем пар цифр аргумента з їх ланцюговою скріпленістю

Нехай $g(i,j)$ — функція, визначена на множині пар елементів алфавіту $A=\{0,1\}$ і набуває значень 0 або 1. Множину всіх таких функцій позначимо через $\mathfrak{G}$. Зрозуміло, що таких функцій існує $2^4=16$. Кожну з таких функцій g формально можна визначити матрицею $A(g)=\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{pmatrix}$, елементи якої $a_{ij}=g(i,j)\in\{0,1\}$.

На 16-елементній множині $\mathfrak{M}$ таких матриць визначимо операцію $*$:

$$\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} b_{00} & b_{01} \\ b_{10} & b_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{00} & c_{01} \\ c_{10} & c_{11} \end{pmatrix},$$

де $c_{ij}=|a_{ij}-b_{ij}|$, і таким чином отримаємо комутативну групу, з нейтральним елементом $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ і кожна матриця є собі симетричним елементом.

Очевидно, що між множинами $\mathfrak{G}$ і $\mathfrak{M}$ існує взаємнооднозначна відповідністю.

Об'єктом дослідження є функція, означена рівністю:

$$f(\Delta^A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots})=\Delta^A_{g(\alpha_1,\alpha_2)g(\alpha_2,\alpha_3)\ldots g(\alpha_n,\alpha_{n+1})g(\alpha_{n+1},\alpha_{n+2})\ldots}. \tag{4.6}$$

Зауваження. Оскільки існують A-бінарні числа, тобто такі, що мають два зображення: $\Delta^A_{c_1\ldots c_m0(01)}$ і $\Delta^A_{c_1\ldots c_m1(10)}$, то коректність означення функції f забезпечується домовленістю використовувати лише перше зображення.

Функції такого типу для двосимвольного Q_2-зображення вивчались у роботах [50], [51].

Теорема 4.7. *Неперервні функції означені рівністю* (4.6) *вичерпуються наступними* $f(x)=\frac{\sqrt{17}-1}{4}$, $f(x)=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $f(x)=x$, $\mathfrak{I}(x=\Delta^A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots})=\Delta^A_{[1-\alpha_1][1-\alpha_2]\ldots[1-\alpha_n]\ldots}$.

Доведення. Очевидно, що функція $f(x) = \frac{\sqrt{17}-1}{4}$ визначається нульовою матрицею, а функція $f(x) = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ — одиничною.

Нехай x^* — довільна A-бінарна точка, тобто $x^* = \Delta^A_{\alpha_1\ldots\alpha_k 0(01)} = \Delta^A_{\alpha_1\ldots\alpha_k 1(10)}$. Тоді значення від різних представлень

$$f(\Delta^A_{\alpha_1\ldots\alpha_k 0(01)}) = \Delta^A_{g(\alpha_1,\alpha_2)\ldots g(\alpha_k,0)g(0,0)(g(0,1)g(1,0))} \text{ і}$$
$$f(\Delta^A_{\alpha_1\ldots\alpha_k 1(10)}) = \Delta^A_{g(\alpha_1,\alpha_2)\ldots g(\alpha_k,1)g(1,1)(g(1,0)g(0,1))}$$

будуть співпадати, коли

$$\begin{cases} g(\alpha_k,0) = g(\alpha_k,1), \\ g(0,0) = g(1,1), \\ g(0,1) = g(1,0). \end{cases}$$

Відповідно, зазначені вище функції задаються матрицями, що містять однакові елементи у кожному рядку. Окрім двох, вище наведених, відповідно для $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ матимемо $f(x) = x$, а для $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ функція є інверсором елементів A-зображення $\mathfrak{I}(x = \Delta^A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^A_{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)\ldots(1-\alpha_n)\ldots}$.

□

Теорема 4.8. *Множиною значень E_f функції f, визначеної матрицею $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, є ніде не щільна множина нульової міри Лебега, числа якої у A-зображенні не містять комбінації двох послідовних цифр $\overline{11}$.*

Доведення. Скористаємося методом від супротивного.

Припустимо, що $y = f(x_0) = \Delta^A_{c_1c_2\ldots c_{m-1}11c_{m+2}\ldots} \in E_f$, $x_0 = \Delta^A_{\alpha_1\ldots\alpha_m\alpha_{m+1}\alpha_{m+2}\ldots}$.

Тоді

$$\begin{cases} g(\alpha_m,\alpha_{m+1}) = 1 \Rightarrow \alpha_m = 1 \text{ і } \alpha_{m+1} = 0, \\ g(\alpha_{m+1},\alpha_{m+2}) = 1 \Rightarrow \alpha_{m+1} = 1 \text{ і } \alpha_{m+2} = 0. \end{cases}$$

Тобто $\alpha_{m+1} = 0$ і $\alpha_{m+1} = 1$ одночасно. Дістали протиріччя. Тобто, $\overline{c_m c_{m+1}} \neq \overline{11}$ для $\forall m \in N$.

Для доведення ніде не щільності множини E_f досить вказати у кожному циліндрі інтервал, позбавлений точок множини E_f. Очевидно, що таким для циліндра $\Delta^A_{c_1\ldots c_m}$ буде внутрішність циліндра $\Delta^A_{c_1\ldots c_m 11}$.

Залишилось довести нуль-мірність множини E_f. Нехай E_k – об'єднання циліндрів рангу k, серед внутрішніх точок яких є точки E_f. $\overline{E_{k+1}} = E_k \setminus E_{k+1}$. Нехай $E_* = \lim\limits_{k\to\infty} E_k = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} E_k$. Очевидно, що $E_f \subset E_*$. Тоді $\lambda(E_f) \leqslant \lambda(E_*)$. Доведемо, що $\lambda(E_*) = 0$.

$$\lambda(E_k) = \frac{\lambda(E_k)}{\lambda(E_{k-1})}\frac{\lambda(E_{k-1})}{\lambda(E_{k-2})}\ldots\frac{\lambda(E_1)}{\lambda(E_0)}\lambda(E_0)$$

$$\lambda(E_k) = \lambda(E_0)\prod_{i=1}^{k}\frac{\lambda(E_i)}{\lambda(E_{i-1})},$$

де $E_0 = \left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

Оскільки

$$\lambda(E_{i-1}) = \lambda(E_i) + \lambda(\overline{E_i})$$

$$\lambda(E_i) = \lambda(E_{i-1}) - \lambda(\overline{E_i})$$

$$\frac{\lambda(E_i)}{\lambda(E_{i-1})} = 1 - \frac{\lambda(\overline{E_i})}{\lambda(E_{i-1})},$$

то $\lambda(E_k) = \lambda(E_0)\prod\limits_{i=1}^{k}\left(1 - \frac{\lambda(\overline{E_i})}{\lambda(E_{i-1})}\right)$ і $\lambda(E_*) = \lambda(E_0)\prod\limits_{i=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda(\overline{E_i})}{\lambda(E_{i-1})}\right)$.

А оскільки

$$0 < \lambda_1 \leqslant \frac{\lambda(\overline{E_i})}{\lambda(E_{i-1})} \leqslant \lambda_2 < 1,$$

то $\lambda(E_f) \leqslant \lambda(E_*) = 0$.

□

4.4. Функції канторівського типу, означені у термінах зображення чисел ланцюговими A_2-дробами та рядами Люрота

Розглянемо функцію, де аргумент задано A_2-зображенням, а значення додатнім рядом Люрота, при чому його елементи визначаються наступним чином:

$$f(\Delta^A_{\underbrace{0\ldots0}_{a_1-1}1\underbrace{0\ldots0}_{a_2-1}1}) = \Delta^L_{a_1a_2\ldots}$$

У роботах [43], [49] проведена актуалізація інтересу до розподілів значень функцій зі складною тополого-метричною локальною структурою, зокрема сингулярних функцій (монотоних і немонотонних), неперервних, ніде не монотонних (майже скрізь диференційовних та ніде не диференційовних). Також акцентувалася увага на сингулярних функціях канторівського типу. Вони стосувались зображень чисел засобами скінченного алфавіту. Виявилося, що в цьому класі розподілів природньо виникають суміші дискретних і неперервних розподілів.

Ми розглядаємо зображення чисел у системі з нескінченним алфавітом, а саме додатними рядами Люрота. Основною задачею, яка розв'язувалась в цих роботах, була задачі про лебегівську структуру розподілу (функції розподілу), а саме: $F_Y = \beta_1 F^d_Y + \beta_2 F^c_Y = \alpha_1 F^d_Y + \alpha_2 F^{ac}_Y + \alpha_3 F^s_Y$, $\beta_i \geqslant 0$, $\alpha_i \geqslant 0$, $\beta_1 + \beta_2 = 1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$.

Нехай $L = \{1, 2, \ldots, k, \ldots\}$ – алфавіт, $L = A \times A \ldots \times A \times \ldots$ – простір послідовностей елементів алфавіту.

Відомо [28, 87], що для будь-якого числа $x \in (0; 1]$ існує послідовність

$(a_n) \in L$ така, що

$$x=\frac{1}{a_1+1}+\frac{1}{a_1(a_1+1)(a_2+1)}+\frac{1}{a_1(a_1+1)a_2(a_2+1)(a_3+1)}+$$
$$+\ldots+\frac{1}{a_1(a_1+1)\ldots a_{n-1}(a_{n-1}+1)(a_n+1)}+\ldots=\Delta^L_{a_1\ldots a_k\ldots}.$$

Символічний запис $\Delta^L_{a_1\ldots a_k\ldots}$, що є скороченим записом ряду і його суми, називається L-зображенням числа x, $a_n = a_n(x)$ – його n-ою L-цифрою. Геометрія L-зображення чисел є добре вивченою, її основні положення розкривають властивості числових множин і метричні відношення.

Нагадаємо, що *циліндром рангу* m з основою $c_1c_2...c_m$ називається множина $\Delta^L_{c_1c_2...c_m}$, яка містить всі числа x такі, що $d_i(x) = c_i$ при $i \leqslant m$, тобто

$$\Delta^L_{c_1c_2...c_m} = \left\{x : x = \Delta^L_{c_1c_2...c_m d_{m+1}d_{m+2}...},\ d_{m+i} \in \mathbb{N}\right\}.$$

Циліндричним відрізком (інтервалом) рангу m з основою $c_1c_2...c_m$ називається відрізок (інтервал), кінці якого співпадають з кінцями циліндра, вони позначаються $\Delta^L_{c_1c_2...c_m}$ та $\nabla^L_{c_1c_2...c_m}$ відповідно.

Циліндри мають наступні **властивості**:

1. $\Delta^L_{c_1c_2...c_m} = \bigcup\limits_{i_1=1}^{\infty} ... \bigcup\limits_{i_k=1}^{\infty} \Delta^L_{c_1...c_m i_1 i_2...i_k}, \forall k \in N$;

2. $\inf \Delta^L_{c_1...c_m i} = \max \Delta^L_{c_1...c_m [i+1]}$;

2. Циліндр $\Delta^L_{c_1c_2...c_m}$ є півінтервалом $(A_m; B_m]$ з кінцями

$$A_m = \inf \Delta^L_{c_1...c_m} = \frac{1}{c_1+1} + ... + \frac{1}{c_1(c_1+1)...c_{m-1}(c_{m-1}+1)(c_m+1)},$$

$$B_m = \sup \Delta^L_{c_1...c_m} = \max \Delta^L_{c_1...c_m} = A_m + \frac{1}{b_m \cdot 2} + \frac{1}{b_m \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2} + ... = A_m + \frac{1}{b_m},$$

де $b_m = c_1(c_1+1)...c_m(c_m+1)$, тобто

$$\Delta^L_{c_1...c_m} = \left(A_m, A_m + \frac{1}{b_m}\right] = \left(A_m, A_m + \frac{1}{c_1(c_1+1)...c_m(c_m+1)}\right].$$

3. Довжина циліндра виражається формулою:

$$\left|\Delta^L_{c_1\ldots c_m}\right| = \frac{1}{c_1(c_1+1)\ldots c_m(c_m+1)} = \prod_{i=1}^{m}\frac{1}{c_i(c_i+1)}.$$

Остання рівність є наслідком попередньої властивості.

4. Для довільної послідовності натуральних чисел (c_n) переріз

$$\bigcap_{m=1}^{\infty}\Delta^L_{c_1\ldots c_m} \equiv \Delta^L_{c_1\ldots c_m\ldots}$$

є точкою (числом) з півінтервалу $(0;1]$.

Нехай (ζ_k) — незалежні однаково розподілені випадкові величини, які набувають значень $1, 2, \ldots, n, \ldots$ з ймовірностями $p_1, p_2, \ldots p_n, \ldots$ відповідно. Випадкова величина $\zeta = \Delta^L_{\zeta_1\ldots\zeta_k\ldots}$ має чистий лебегівський тип розподілу [43], причому її функція розподілу аналітично виражається:

$$\mathcal{F}_\zeta(x = \Delta^L_{a_1\ldots a_k\ldots}) = \beta_{a_1(x)} + \sum_{k=2}^{\infty}\left(\beta_{a_k(x)}\prod_{j=1}^{k-1}p_{a_j(x)}\right), \tag{4.7}$$

де $\beta_i = p_{i+1} + p_{i+2} + \ldots$, $i \in \mathbb{N}$. Критерії належності розподілу ζ до кожного з чистих лебегівських типів також відомі.

Теорема 4.9. *Розподіл випадкової величини* $\zeta = \Delta^L_{\zeta_1\zeta_2\ldots\zeta_k\ldots}$*, цифри* L*-зображення якої, незалежні і однаково розподілені* ($P\{\zeta_k = i\} = p_i$) *є:*

1. *виродженим дискретним з одним атомом, коли* $\max\limits_i p_i = 1$*;*
2. *рівномірним, коли* $p_i = \frac{1}{i(i+1)}$, $i \in \mathbb{N}$*;*
3. *сингулярно неперервним – в решті випадках, причому сингулярний розподіл канторівського типу, якщо існує* $p_i = 0$*.*

Теорема 4.10. *Випадкова величина* $\xi = \Delta^L_{\xi_1\ldots\xi_k\ldots}$*,* L*-символи* ξ_n *якої є незалежними і мають розподіли:* $\mathrm{P}\{\xi_k = i\} = p_{ik}$, $i \in N$*, має чистий лебегівський тип, причому*

1. дискретний — тоді і тільки тоді, коли

$$M = \prod_{k=1}^{\infty}\max_i\{p_{ik}\} > 0;$$

2. абсолютно неперервний — тоді і тільки тоді, коли

$$S = \prod_{k=1}^{\infty} (\sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\frac{p_{ik}}{i(i+1)}}) > 0; \tag{4.8}$$

3. сингулярний — в решті випадків, тобто, коли $M = 0 = S$.

Теорема 4.11. *Спектр S_ξ (мінімальний замкнений носій) розподілу випадкової величини ξ є*

1) відрізком $[0,1]$, якщо матриця $||p_{ik}||$ нулів не містить;

2) об'єднанням відрізків, якщо матриця $||p_{ik}||$ містить нулі лише у скінченній кількості стовпців;

3) ніде не щільною множиною, міра Лебега якої обчислюється за формулою

$$\lambda(S_\xi) = \prod_{k=1}^{\infty} W_k, \quad W_k = \sum_{i:p_{ik}>0} \frac{1}{i(i+1)}, k \in \mathbb{N},$$

якщо матриця $||p_{ik}||$ містить нулі у нескінченній кількості стовпців.

Далі з цього класу розглядаються сингулярні розподіли канторівського типу, тобто такі, що задовольняють умову 3).

Нехай X — рівномірно розподілена на відрізку $[0;1]$ випадкова величина. Розглянемо випадкову величину $Y = \mathcal{F}_\zeta(X)$, коректність її означення є наслідком неперервності функції $\mathcal{F}_\zeta$.

Теорема 4.12. *Якщо $P\{\zeta_k = a\} = p_a = 0$ і $p_c \neq 0$, коли $c \neq a$, то випадкова величина $Y = \mathcal{F}_\zeta(X)$ має чисто дискретний розподіл з атомами виду:*

$$y = \Delta^L_{c_1 \ldots c_m a(0)} = \beta_{c_1} + \sum_{k=2}^{m} \left(\beta_{c_k} \prod_{i=1}^{k} p_{c_i} \right) + \beta_a \prod_{i=1}^{m} p_{c_i}, \tag{4.9}$$

де $a \neq c_i \in \mathbb{N}$.

Нехай X — рівномірно розподілена на відрізку $[0;1]$ випадкова величина. Розглядається випадкова величина $Z = \mathcal{F}_\xi(X)$, коректність її означення є наслідком неперервності функції $\mathcal{F}_\xi$.

Теорема 4.13. *Якщо ξ – неперервна випадкова величина, спектр S_ξ якої має додатну міру Лебега, меншу 1, то розподіл випадкової величини $Z = F_\xi(X)$ є сумішшю дискретного і неперервного розподілів, причому в окремих випадках сумішшю дискретного і сингулярного або дискретного і абсолютно неперервного.*

Доведення. Оскільки $0 < \lambda(S_\xi) < 1$, то сумарна довжина l проміжків сталості функції додатна, але менша 1. А отже, сума мас атомів розподілу Z дорівнює l. Отже, розподіл Z має нетривіальні дискретну (оскільки розподіл атоми має) і неперервну (оскільки сума мас атомів менша 1) компоненту, тобто є сумішшю дискретного і неперервного розподілів. $\square$

Наведемо приклади сумішей розподілів. З цією метою дамо інше виведення формули для обчислення міри Лебега спектра розподілу випадкової величини ξ.

Нехай F_k – об'єднання циліндрів рангу k, серед внутрішніх точок яких є точки спектра S_ξ. Тоді

$$S_\xi = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k = \lim_{k\to\infty} F_k \text{ і } \lambda(F_k) = \frac{\lambda(F_k)}{\lambda(F_{k-1})} \cdot \frac{\lambda(F_{k-1})}{\lambda(F_{k-2})} \cdot \ldots \cdot \frac{\lambda(F_1)}{\lambda(F_0)},$$

де $F_0 = [0;1]$, а тому

$$\lambda(S_\xi) = \lim_{k\to\infty} \lambda(F_k) = \lim_{k\to\infty} \prod_{i=0}^{k} \frac{\lambda(F_i)}{\lambda(F_{i-1})} = \prod_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda(F_i)}{\lambda(F_{i-1})}.$$

Нехай $F_k \setminus F_{k+1} = \overline{F}_{k+1}$. Тоді $F_{k+1} = F_k \setminus \overline{F}_{k+1}$,
$\lambda F_{k+1} = \lambda(F_k) - \lambda(\overline{F}_{k+1})$ і

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(F_{k-1}) - \lambda(\overline{F}_k)}{\lambda(F_{k-1})} = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - \frac{\lambda(\overline{F}_k)}{\lambda(F_{k-1})}).$$

Наслідком з наведених дедуктивних міркувань є твердження.

Лема 4.8. *Міра Лебега спектра розподілу випадкової величини ξ об-*

числюється за формулою

$$\lambda(S_\xi) = \prod_{k=1}^{\infty}(1 - \frac{\lambda(\overline{F}_k)}{\lambda(F_{k-1})}),$$

де F_k *– об'єднання циліндрів рангу* k*, серед внутрішніх точок яких є точки спектра* S_ξ, $\overline{F}_{k+1} = F_{k+1} \setminus F_k$.

Наслідок 4.3. *Міра Лебега спектра* S_ξ *розподілу випадкової величини* ξ *дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли розбігається ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda(\overline{F}_k)}{\lambda(F_{k-1})}$$

Приклад 1. (Суміш дискретного та сингулярного розподілів) Нехай $0 = p_{21} = p_{2^2 2} = \ldots = p_{2^k k} = \ldots$; при $i \neq 2^k$

$$p_{ik} = \begin{cases} \dfrac{1}{2^i} \text{ при } i < 2^k, \\ \dfrac{1}{2^{i-1}} \text{ при } i > 2^k. \end{cases}$$

Справді, сума довжин інтервалів сталості функції розподілу F_ξ обчислюється за формулою $l = 1 - \prod\limits_{k=1}^{\infty}(1 - \frac{1}{2^k(2^k+1)})$, але останній добуток P лежить в межах $0 < P < \frac{5}{6}$. Тому сума мас атомів більше $\frac{1}{6}$, але менша 1.

Розподіл випадкової величини ξ при заданих умовах є сингулярним розподілом квазіканторівського типу [43].

Приклад 2. (Суміш дискретного і абсолютно неперервного розподілів) Нехай $0 = p_{21} = p_{2^2 2} = \ldots = p_{2^k k} = \ldots$; при $i \neq 2^k$

$$p_{ik} = \begin{cases} \dfrac{1}{i(i+1)} \text{ при } i < 2^k, \\ \dfrac{1}{(i-1)i} \text{ при } i > 2^k. \end{cases}$$

Справді, нетривіальність дискретної компоненти розподілу Z обгрунтовано у прикладі 1. Абсолютна неперервність розподілу випадкової величини ξ випливає з теореми 2. Нетривіальність абсолютно неперервної компоненти розподілу Z є наслідком того, що відображення φ спектра S_ξ у відрізок $[0, 1]$, яке дає функцію розподілу F_ξ, зберігає міру Лебега.

Зауважимо, що неперервні компоненти у прикладах 1 та 2 мають розподіли, аналогічні до розподілів випадкових величин, які розглядались у роботі [43].

Висновки до розділу 4

У цьому розділі ми вказали застосування A_2-зображення у теорії фрактальної розмірності Гаусдорфа-Безиковича і у конструктивній теорії функцій з локально складною структурою тополого-метричного та диференціального характеру (сингулярних функцій, ніде немонотонних функцій, автомодельних функцій). Фрактальні властивості таких функцій вивчені частково і залишились нерозв'язаними ряд непростих задач, зокрема, таких, що стосуються точних значень фрактальної розмірності суттєвих для функції множин.

Результати цього розділу опубліковано у роботах [53], [14].

ВИСНОВКИ

Основним об'єктом дослідження у даній роботі є зображення чисел ланцюговими дробами за допомогою елементів з двоелементної множини. При знайдених умовах така система кодування чисел має нульову надлишковість, що є її позитивною характеристикою у багатьох аспектах. Таке кодування дійсних чисел є синтезом двосимвольності і ланцюговості, тому має перспективи різнопланових застосувань, зокрема при побудові алгоритмів для дій обчислювальних пристроїв. Ланцюговість зображення покращує збіжність обчислювальних процесів, а двосимвольність оптимізує їх.

Основні результати дисертаційної роботи:

— Створено конструктивну тополого-метричну теорію медіантного зображення чисел відрізка $[0;1]$ і знайдено її застосування у теорії розподілів випадкових величин та встановлено його зв'язок з ланцюговими дробами.

— Обґрунтовано, що медіантне зображення є перекодуваннями зображення чисел елементарними ланцюговими дробами.

— Знайдено вираз класичної сингулярної, строго зростаючої функції Мінковського у термінах медіантного зображення.

— Обґрунтовано двосимвольну систему кодування дійсних чисел заданого відрізка засобами двосимвольного алфавіту, що ґрунтується на розкладах чисел у нескінченні ланцюгові дроби, елементами яких є два задані числа (ланцюгові A_2-дроби). Знайдено необхідні та достатні умови, при яких вона має нульову надлишковість.

— Вивчено геометрію ланцюгового A_2-зображення дійсних чисел (описано властивості циліндричних множин, розв'язано ряд метричних задач)

— Знайдено ефективні застосування ланцюгового A_2-зображення чисел у теорії фракталів і теорії функцій з локально складною структурою і фрактальними властивостями.

Проведені дослідження лежать в руслі сучасних математичних досліджень об'єктів зі складною локальною поведінкою (будовою), пов'язаних з ланцюговими дробами, інтерес до яких у світі достатньо високий. Бачимо перспективу нових застосувань медіантного та ланцюгового A_2-зображення у теорії динамічних систем, теорії функцій та теорії сингулярних розподілів ймовірностей.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Альбеверіо С., Кулиба Ю. В., Працьовитий М. В. і Торбін Г. М. Про сингулярність та спектральну структуру розподілів випадкових ланцюгових дробів // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико–математичні науки. — 2012. — № 13. — С. 31–44.
2. Арнольд В. И. Цепные дроби. — Москва : МЦНМО, 2001. — (Б-ка «Математическое просвещение»; Вып. 14).
3. Барановський О. М. і Дмитренко С. О. Використання різних способів представлення чисел для задання фрактальних розподілів // Восьма Міжн. Наукова Конференція ім. академіка М.Кравчука (11-14 травня 2000р. Київ): матеріали конференції. — Київ. — 2000. — С. 408.
4. Барановський О. М. і Дмитренко С. О. Розмірність Хаусдорфа-Безиковича множин, інваріантних відносно одного класу кусково-лінійних // Наукові записки НПУ ім. М. П. Драгоманова. Фізико-математичні науки. — Київ : Нац. пед. ун-т імені М. П. Драгоманова, 2003. — № 4. — С. 164–176.
5. Биллингслей П. Эргодическая теория и информация: Пер. с англ. — Москва : Мир, 1969.
6. Брагин А. Б. Сингулярные распределения случайных величин, заданных с помощью цепных дробей // Случайные эволюции: теорет. и прикл. задачи. — Киев : Ин-т математики АН Украины, 1992. — С. 10–16.
7. Бухштаб А. А. Теория чисел. — М. : Просвещение, 1966. — 384 с.
8. Василенко Н. М. і Працьовитий М. В. Математичні структури в просторі послідовностей Фібоначчі // Наук. часоп. Нац. пед. ун-ту ім. М. П. Драгоманова. Сер. 1. Фіз.-мат. на-

уки. — 2008. — № 9. — С. 171–191. — Доступний за адресою http://fmi.npu.edu.ua/images/files/publications/naukchasopys1/nz2008-9.pdf.

9. Виннишин Я. Ф. Випадкові ланцюгові дроби, що задаються незалежними елементами, та їх функції розподілу // Науковий записки НПУ імені М.П. Драгоманова. Фізико-математичні науки. — 2001. — Т. 0, № 2. — С. 319–326.
10. Гетьман Б. І. Зображення чисел s-адичними рядами Енгеля. — 2008. — № 9. — С. 212–224. — Доступний за адресою http://fmi.npu.edu.ua/images/files/publications/naukchasopys1/nz2008-9.pdf.
11. Гончаренко Я. В. Асимптотичні властивості характеристичної функції випадкової величини з незалежними двійковими цифрами та згортки сингулярних розподілів ймовірностей // Наук. зап. Нац. пед. ун-ту ім. М. П. Драгоманова. Фіз.-мат. науки. — 2002. — № 3. — С. 376–390.
12. Гончаренко Я. В. і Микитюк І. О. Представлення дійсних чисел в системах з надлишковим набором цифр та їх використання // Наук. часоп. Нац. пед. ун-ту ім. М. П. Драгоманова. Сер. 1. Фіз.-мат. науки. — 2004. — № 5. — С. 242–254.
13. Гончаренко Я. В., Працьовитий М. В. і Торбін Г. М. Фрактальні властивості множин точок недиференційовності абсолютно неперервної та сингулярної функцій розподілу // Теорія ймовір. та матем. статист. — 2001. — № 65. — С. 25–32.
14. Гончаренко Я. В., Калашнікова Є. І., Дмитренко С. О. і Василенко Н. А. Про розподіл значень однієї сингулярної функції, пов'язаної з зображенням чисел рядами Люрота // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. — Київ, 2019. — № 3. — С. 219–229.
15. Гуревич В. и Волмэн Г. Теория размерности: Пер. с англ. — Москва : Изд-во иностр. лит., 1948.
16. Джоунс У. и Трон В. Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения: Пер. с англ. — Москва : Мир, 1985.

17. Дмитренко С. О. Деякі сингулярні об'єкти пов'язані з ланцюговими дробами // Фрактальний аналіз та суміжні питання. — Київ : Ін-т математики НАН України; Нац. пед. ун-т імені М. П. Драгоманова, 1998. — № 1. — С. 84–87.
18. Дмитренко С. О. Деякі сингулярні об'єкти пов'язані з ланцюговими дробами // Сьома Міжн. Наукова Конференція ім. академіка М.Кравчука (14-16 травня 1998р. Київ): матеріали конференції. — Київ. — 1998. — С. 147.
19. Дмитренко С. О. Про один перетворювач елементів ланцюгового зображення // Фрактальний аналіз та суміжні питання. — Київ : Ін-т математики НАН України; Нац. пед. ун-т імені М. П. Драгоманова, 1998. — № 2. — С. 222–225.
20. Дмитренко С. О. Функція, задана перетворювачем елементів ланцюгового зображення // Молодь, освіта, культура і національна свідомість: Зб. матеріалів Міжнар. студ. науково-практ. конф. — Київ. — 1999. — С. 203–204.
21. Дмитренко С. О. M-представлення чисел і випадкові величини, з ним пов'язані // Студентські фізико-математичні етюди. — Київ : Нац. пед. ун-т імені М. П. Драгоманова, 1999. — № 1. — С. 17–25.
22. Дмитренко С. О. Наближення дійсних чисел за допомогою медіантного представлення // Студентські фізико-математичні етюди. — Київ : Нац. пед. ун-т імені М. П. Драгоманова, 2000. — № 2. — С. 26–29.
23. Дмитренко С. О. Метричні задачі медіантного представлення // Наукові записки НПУ ім. М. П. Драгоманова. Фізико-математичні науки. — Київ : Нац. пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова, 2002. — № 3. — С. 403–411.
24. Дмитренко С. О. Узагальнене двійкове f-кодування дійсних чисел та його використання для дослідження фрактальних об'єктів // Наукові записки НПУ ім. М. П. Драгоманова. Фізико-математичні науки. — Київ : Нац. пед. ун-т імені М. П. Драгоманова, 2003. — № 4. — С. 233–240.

25. Дмитренко С. О. і Барановський О. М. Обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича множин, інваріантних відносно одного кусково–лінійного відображення, за допомогою Q–представлення чисел // Дев'ята Міжн. Наукова Конференція ім. академіка М.Кравчука (16-19 травня 2002р. Київ): матеріали конференції. — Київ. — 2002. — С. 266.
26. Дмитренко С. О., Кюрчев Д. В. і Працьовитий М. В. Ланцюгові A_2-зображення дійсних чисел // Український математичний журнал. — 2009. — № 4. — С. 452–463.
27. Дмитришин Р. І. Оцінки похибок наближень для багатовимірного S-дробу з нерівнозначними змінними // Буковинський математичний журнал. — 2018. — Т. 6, № 1-2. — С. 56–59.
28. Жихарєва Ю. І. і Працьовитий М. В. Зображення чисел знакододатними рядами Люрота: основи метричної теорії // Наук. часоп. Нац. пед. ун-ту ім. М. П. Драгоманова. Сер. 1. Фіз.-мат. науки. — 2008. — № 9. — С. 200–211. — Доступний за адресою http://fmi.npu.edu.ua/images/files/publications/naukchasopys1/nz2008-9.pdf.
29. Косопльоткіна О. В. Фрактальні властивості суперпозиції двох однакових сингулярних функцій канторівського типу // Наук. зап. Нац. пед. ун-ту ім. М. П. Драгоманова. Фіз.-мат. науки. — 2001. — № 2. — С. 346–350.
30. Котова О. В. Континуальність множини розв'язків одного класу рівнянь, які містять функцію частоти трійкових цифр числа // Укр. мат. журн. — 2008. — Т. 60, № 10. — С. 1414–1421.
31. Кюрчев Д. В. Про розмірність Хаусдорфа-Безиковича деяких множин ланцюгових дробів // Науковий Часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — 2004. — № 5. — С. 285–291.
32. Лещинський О. Л. Канторівські проектори на ланцюгових дробах // Фрактальний аналіз та суміжні питання. — 1998. — № 1. — С. 76–83.

33. Лещинський О. Л. Розподіли випадкових величин, послідовні двійки елементів ланцюгового представлення яких утворюють однорідний ланцюг Маркова // Наук. зап. Нац. пед. ун-ту ім. М. П. Драгоманова. Фіз.-мат. науки. — 1999. — № 1. — С. 166–175.
34. Лещинський О. Л. і Працьовитий М. В. Один клас сингулярних розподілів випадкових величин, представлених елементарним ланцюговим дробом з незалежними елементами // Сучасні фізико-математичні дослідження молодих науковців вузів України: Зб. наук. пр. — Київ : Київ. нац. ун-т імені Т. Г. Шевченка, 1995. — С. 20–30.
35. Микитюк І. О. і Працьовитий М. В. Двійкова система числення з двома надлишковими цифрами і їй відповідна метрична теорія чисел // Наук. зап. Нац. пед. ун-ту ім. М. П. Драгоманова. Фіз.-мат. науки. — 2003. — № 4. — С. 270–290.
36. Нікіфоров Р. О. і Торбін Г. М. Ергодичні властивості Q_∞-зображень та фрактальні властивості ймовірнісних мір з незалежними Q_∞-символами // Наук. часоп. Нац. пед. ун-ту ім. М. П. Драгоманова. Сер. 1. Фіз.-мат. науки. — 2008. — № 9. — С. 81–103. — Доступний за адресою http://fmi.npu.edu.ua/images/files/publications/naukchasopys1/nz2008-9.pdf.
37. Окстоби Дж. Мера и категория: Пер. с англ. — Москва : Мир, 1974.
38. Пагіря М. М. Зображення функцій shz, chz, sinz, cosz ланцюговими дробами. — 2018. — Т. 70, № 5. — С. 682–698.
39. Постников А. Г. Вероятностная теория чисел. — Москва : Знание, 1974.
40. Працевитый Н. В. Непрерывные канторовские проекторы // Методы исследования алгебраических и топологических структур. — Киев : КГПИ, 1989. — С. 95–105.
41. Працьовитий М. В. Сингулярність розподілів випадкових величин, заданих розподілами елементів свого ланцюгового зображення // Укр. мат. журн. — 1996. — Т. 48, № 8. — С. 1086–1095.

42. Працьовитий М. В. Поліосновне $\tilde{Q}$-представлення і фрактальні математичні об'єкти, з ним пов'язані // Фрактальний аналіз та суміжні питання. — 1998. — № 2. — С. 14–35.
43. Працьовитий М. В. Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Київ : Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. — 296 с.
44. Працьовитий М. В. і Гетьман Б. І. Ряди Енгеля та їх застосування // Наук. часоп. Нац. пед. ун-ту ім. М. П. Драгоманова. Сер. 1. Фіз.-мат. науки. — 2006. — № 7. — С. 105–116.
45. Працьовитий М. В., Гончаренко Я. В. і Лисенко І. М. Нега-двійкове представлення дійсних чисел і його застосування // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико–математичні науки. — 2015. — № 17. — С. 83–106.
46. Працьовитий М. В., Дмитренко С. О. і Чуйков А. С. Інверсор цифр ланцюгового A_2-зображення дробової частини числа // Тези доповідей Четвертої всеукраїнської конференції молодих вчених з математики та фізики, 23-25 квітня 2015 р. — Київ. — 2015. — С. 47.
47. Працьовитий М. В., Калашніков А. В. і Безбородов В. К. Про один клас сингулярних функцій, що містить класичну функцію Мінковського // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико–математичні науки. — 2010. — № 11. — С. 207–213.
48. Працьовитий М. В. і Кюрчев Д. В. Сингулярність розподілу випадкової величини, зображеної A_2-дробом з незалежними елементами // Теорія ймовір. та матем. статистика. — 2009. — № 81. — С. 139–154.
49. Працьовитий М. В. і Лещинський О. Л. Фрактальні властивості розподілів випадкових величин, заданих розподілами елементів свого ланцюгового зображення // Фрактальний аналіз та суміжні питання. — 1998. — № 1. — С. 73–75.
50. Працьовитий М. В. і Ратушняк С. П. Розподіл значень однієї фракталь-

ної функції від випадкового аргументу // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико–математичні науки. — 2014. — № 16. — С. 150–160.

51. Працьовитий М. В. і Ратушняк С. П. Властивості та розподіли значень фрактальних функцій, пов'язаних з Q_2-зображенням дійсних чисел // Теорія ймовірностей та математична статистика. — 2018. — № 99. — С. 187–202.

52. Працьовитий М. В. і Торбін Г. М. Фрактальна геометрія та перетворення, що зберігають розмірність Хаусдорфа–Безиковича // Динамічні системи: Пр. Укр. мат. конгр.–2001. — Київ : Ін-т математики НАН України, 2003. — С. 77–93.

53. Працьовитий М. В., Гончаренко Я. В., Дмитренко С. О., Лисенко І. М. і Ратушняк С. П. Про один клас функцій з фрактальними властивостями // Буковинський математичний журнал. — 2021. — Т. 9, № 1. — С. 273–283.

54. Скоробогатько В. Я. Теория ветвящихся цепных дробей и ее применение в вычислительной математике. — М. : Наука, 1983. — 312 с.

55. Стахов А. П. Алгоритмическая теория измерения. — Москва : Знание, 1979.

56. Торбин Г. М. и Працевитый Н. В. Случайные величины с независимыми Q^*-знаками // Случайные эволюции: теорет. и прикл. задачи. — Киев : Ин-т математики АН Украины, 1992. — С. 95–104.

57. Торбін Г. М. Топологічні властивості спектра випадкової величини, заданої за допомогою збіжного знакододатного ряду // Фрактальний аналіз та суміжні питання. — 1998. — № 1. — С. 45–52.

58. Торбін Г. М. Узагальнені множини канторівського типу та один спосіб знаходження їх розмірності Хаусдорфа–Безиковича // Фрактальний аналіз та суміжні питання. — 1998. — № 2. — С. 115–121.

59. Турбин А. Ф. и Працевитый Н. В. Фрактальные множества, функции, распределения. — Киев : Наук. думка, 1992.

60. Федер Е. Фракталы. — Москва : Мир, 1991.

61. Хинчин А. Я. Цепные дроби. — М. : Наука, 1978. — 116 с.

62. Albeverio S., Kulyba Y., Pratsiovytyi M., and Torbin G. On singularity and fine spectral structure of random continued fractions // Mathematische Nachrichten. — 2015. — Vol. 288, no. 16. — P. 1803–1813.

63. Albeverio S., Pratsiovytyi M., and Torbin G. Fractalprobability distributions and transformations preserving The Hausdorff-Besicovitch dimension // Ergod. Th. & Dynam. Sys. — 2004. — no. 24. — P. 1–16.

64. Albeverio S., Pratsiovytyi M., and Torbin G. Topological and fractal properties of real numbers which are not normal // Bull. Sci. Math. — 2005. — Vol. 129, no. 8. — P. 615–630.

65. Alkauskas G. Semi-regular continued fractions and an exact formula for the moments of the Minkowski question mark function // Ramanujan J. — 2011. — Vol. 25. — P. 359–367.

66. Alkauskas G. The Minkowski $?(x)$ function and Salem's problem // Comptes Rendus Mathematique. — 2012. — Vol. 350. — P. 137–140.

67. Bumby R. T. Hausdorff dimensions of Cantor sets // J. Reine Angew. Math. — 1982. — Vol. 331. — P. 192–206.

68. Bumby R. T. Hausdorff dimension of sets arising in number theory // Number Theory (New York, 1983–84). — Berlin : Springer, 1985. — Vol. 1135 of Lecture Notes in Math. — P. 1–8.

69. Cantor G. Ueber die einfachen Zahlensysteme // Z. Math. Phys. — 1869. — Bd. 14. — S. 121–128.

70. Chatterji S. D. Certain induced measures on the unit interval // J. London Math. Soc. — 1963. — Vol. 38. — P. 325–331.

71. Chatterji S. D. Addendum: Certain induced measures on the unit interval // J. London Math. Soc. — 1964. — Vol. 39. — P. 320.

72. Dedekind R. Continuity and irrational numbers // Essays on the theory of numbers. — Chicago : The Open Court Publ. Co., 1901. — P. 1–13. — http://www.gutenberg.org/ebooks/21016.
73. Denjoy A. Complement a la notice publiee en 1934 sur les travaux scientifiques de M. Arnaud Denjoy // Hermann. — 1942. — Vol. 0, no. 0.
74. Eggleston H. G. The fractional dimension of a set defined by decimal properties // Quart. J. Math., Oxford Ser. (2). — 1949. — Vol. 20. — P. 31–36.
75. Eggleston H. G. Sets of fractional dimensions which occur in some problems of number theory // Proc. London Math. Soc. (2). — 1952. — Vol. 54. — P. 42–93.
76. Galambos J. Representations of real numbers by infinite series. — Berlin : Springer-Verlag, 1976. — Vol. 502 of Lecture Notes in Math.
77. Good I. J. The fractional dimensional theory of continued fractions // Proc. Cambridge Philos. Soc. — 1941. — Vol. 37, no. 3. — P. 199–228.
78. Gruber P. M. and Lekkerkerker C. G. Geometry of numbers. — 2nd ed. — Amsterdam : North-Holland, 1987. — Vol. 37 of North-Holland Mathematical Library.
79. Hensley D. The Hausdorff dimensions of some continued fraction Cantor sets // J. Number Theory. — 1989. — Vol. 33, no. 2. — P. 182–198.
80. Hensley D. Continued fraction Cantor sets, Hausdorff dimension, and functional analysis // J. Number Theory. — 1992. — Vol. 40, no. 3. — P. 336–358.
81. Hensley D. A polynomial time algorithm for the Hausdorff dimension of continued fraction Cantor sets // J. Number Theory. — 1996. — Vol. 58, no. 1. — P. 9–45.
82. Iosifescu M. and Kraaikamp C. On Denjoy's canonical continued fraction expansion // Osaka J. Math. — 2003. — Vol. 40, no. 1. — P. 235–244.

83. Iosifescu M. and Kraaikamp C. Metric properties of Denjoy's canonical continued fraction expansion // Tokyo J. Math. — 2008. — Vol. 31, no. 2. — P. 495–510.
84. Jenkinson O. and Pollicott M. Computing the dimension of dynamically defined sets: E_2 and bounded continued fractions // Ergodic Theory Dynam. Systems. — 2001. — Vol. 21, no. 5. — P. 1429–1445.
85. Kakeya S. On the partial sums of an infinite series // Tohoku Sci Rep. — 1914. — Vol. 3, no. 4. — P. 159–164.
86. Levy P. Sur les lois de probabilite dont dependent les quotients complets et incomplets d'une fraction continue // Bulletin de la Societe Mathematique de France. — 1929. — T. 57, № 1-2. — C. 178–194.
87. Luroth J. Uber eine eindeutige Entwickelung von Zahlen in eine unendliche Reihe // Mathematische Annalen. — 1883. — Vol. 21. — P. 411–423.
88. Markitan V. P., Pratsiovytyi M. V., and Savchenko I. O. Superfractality of the set of incomplete sums of one positive series // Ukrainian Mathematical Journal. — 2019. — Vol. 70, no. 10. — P. 1619–1634.
89. Oppenheim A. The representation of real numbers by infinite series of rationals // Acta Arith. — 1972. — Vol. 21. — P. 391–398.
90. P. Viader J. Paradis L. B. A new light on Minkowski's $?(x)$ function // J. of Number Theory. — 1998. — no. 73. — P. 212–227.
91. Parry W. On the β-expansions of real numbers // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. — 1960. — Vol. 11, no. 3–4. — P. 401–416.
92. Pratsiovytyi M. and Kyurchev D. Properties of the distribution of the random variable defined by A_2-continued fraction with independent elements // Randon Operators and Stochastic Equations. — 2009. — Vol. 17, no. 1. — P. 91–101.
93. Pratsiovytyi M., Lysenko I., and Maslova Y. Group of continuous transformations of real interval preserving tails of G_2-representation of num-

bers // Algebra and Descrete Mathematics. — 2020. — Vol. 29, no. 1. — P. 99–108.

94. Pratsiovytyi M. V. and Chuikov A. S. Continuos distributions whose functions preserve tails of a A-continued fraction representation of numbers // Randon Operators and Stochastic Equations. — 2019. — Vol. 27, no. 3. — P. 199–206.
95. Rényi A. Representations for real numbers and their ergodic properties // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. — 1957. — Vol. 8, no. 3–4. — P. 477–493.
96. Salem R. On some singular monotonic functions which are strictly increasing // Trans. Amer. Math. Soc. — 1943. — Vol. 53, no. 3. — P. 427–439.
97. Sendov B. K. Biniry self-similar fractal function // Fundamentalnaya i prikladnaya matematika. — 1999. — T. 5, № 2. — C. 589–595.
98. Sendov Bl. Fractal analysis // Доклади на Българската академия на науките. — 1994. — T. 47, № 5. — C. 17–20.

Додаток А

Список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації

Обов'язковим додатком до дисертації є список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації (зазначаються назви конференції, конгресу, симпозіуму, семінару, школи, місце та дата проведення, форма участі).

А.1. Список публікацій здобувача за темою дисертації

1. Дмитренко С. О. M-представлення чисел і випадкові величини, з ним пов'язані // Студентські фізико-математичні етюди. — Київ : Нац. пед. ун-т імені М. П. Драгоманова, 1999. — № 1. — С. 17–25.
2. Дмитренко С. О., Кюрчев Д. В. і Працьовитий М. В. Ланцюгові A_2-зображення дійсних чисел // Український математичний журнал. — 2009. — № 4. — С. 452–463.
3. Дмитренко С. О. Метричні задачі медіантного представлення // Наукові записки НПУ ім. М. П. Драгоманова. Фізико-математичні науки. — Київ : Нац. пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова, 2002. — № 3. — С. 403–411.
4. Дмитренко С. О. Наближення дійсних чисел за допомогою медіантного представлення // Студентські фізико-математичні етюди. — Київ : Нац. пед. ун-т імені М. П. Драгоманова, 2000. — № 2. — С. 26–29.
5. Працьовитий М. В., Гончаренко Я. В., Дмитренко С. О., Лисенко І. М. і Ратушняк С. П. Про один клас функцій з фрактальними властивостями // Буковинський математичний журнал. — 2021. — Т. 9, № 1. — С. 273–283.

6. Гончаренко Я. В., Калашнікова Є. І., Дмитренко С. О. і Василенко Н. А. Про розподіл значень однієї сингулярної функції, пов'язаної з зображенням чисел рядами Люрота // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. — Київ, 2019. — № 3. — С. 219–229.
7. Дмитренко С. О. Узагальнене двійкове f-кодування дійсних чисел та його використання для дослідження фрактальних об'єктів // Наукові записки НПУ ім. М. П. Драгоманова. Фізико-математичні науки. — Київ : Нац. пед. ун-т імені М. П. Драгоманова, 2003. — № 4. — С. 233–240.
8. Барановський О. М. і Дмитренко С. О. Розмірність Хаусдорфа-Безиковича множин, інваріантних відносно одного класу кусково-лінійних // Наукові записки НПУ ім. М. П. Драгоманова. Фізико-математичні науки. — Київ : Нац. пед. ун-т імені М. П. Драгоманова, 2003. — № 4. — С. 164–176.
9. Дмитренко С. О. Про один перетворювач елементів ланцюгового зображення // Фрактальний аналіз та суміжні питання. — Київ : Ін-т математики НАН України; Нац. пед. ун-т імені М. П. Драгоманова, 1998. — № 2. — С. 222–225.
10. Дмитренко С. О. Деякі сингулярні об'єкти пов'язані з ланцюговими дробами // Фрактальний аналіз та суміжні питання. — Київ : Ін-т математики НАН України; Нац. пед. ун-т імені М. П. Драгоманова, 1998. — № 1. — С. 84–87.
11. Працьовитий М. В., Дмитренко С. О. і Чуйков А. С. Інверсор цифр ланцюгового A_2-зображення дробової частини числа // Тези доповідей Четвертої всеукраїнської конференції молодих вчених з математики та фізики, 23-25 квітня 2015 р. — Київ. — 2015. — С. 47.
12. Дмитренко С. О. і Барановський О. М. Обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича множин, інваріантних відносно одного кусково–лінійного відображення, за допомогою Q–представлення чисел // Дев'ята Міжн. Наукова Конференція ім. академіка М.Кравчука (16-19

травня 2002р. Київ): матеріали конференції. — Київ. — 2002. — С. 266.

13. Барановський О. М. і Дмитренко С. О. Використання різних способів представлення чисел для задання фрактальних розподілів // Восьма Міжн. Наукова Конференція ім. академіка М.Кравчука (11-14 травня 2000р. Київ): матеріали конференції. — Київ. — 2000. — С. 408.
14. Дмитренко С. О. Функція, задана перетворювачем елементів ланцюгового зображення // Молодь, освіта, культура і національна свідомість: Зб. матеріалів Міжнар. студ. науково-практ. конф. — Київ. — 1999. — С. 203–204.
15. Дмитренко С. О. Деякі сингулярні об'єкти пов'язані з ланцюговими дробами // Сьома Міжн. Наукова Конференція ім. академіка М.Кравчука (14-16 травня 1998р. Київ): матеріали конференції. — Київ. — 1998. — С. 147.

А.2. Відомості про апробацію результатів дисертації

Основні результати дослідження доповідалися на наукових конференціях різних рівнів та наукових семінарах, а саме:

— IV Всеукраїнська конференція молодих вчених з математики та фізики, Київ, 23–25 квітня 2015 р.;

— IX Міжнародна наукова конференція ім. академіка М.Кравчука, Київ, 16–19 травня 2002 р.;

— VIII Міжнародна наукова конференція ім. академіка М.Кравчука, Київ, 11–14 травня 2000 р.;

— Міжнародна студентська науково-практична конференція «Молодь, освіта, культура і національна свідомість», Київ, 1999 р.;

— VII Міжнародна наукова конференція ім. академіка М.Кравчука, Київ, 14–16 травня 1998 р.

— Семінар з фрактального аналізу Інституту математики НАН України та НПУ імені М. П. Драгоманова (керівник: д-р фіз.-мат. наук, професор Працьовитий М.В.)