Національна академія наук України
Інститут математики

Дмитренко Сергій Олександрович

УДК 511.72

Двосимвольні системи кодування чисел, пов'язані з ланцюговими дробами, та їх застосування

01.01.06 — алгебра та теорія чисел
111 — математика

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ — 2021

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Національному педагогічному університеті імені М.П. Драгоманова Міністерства освіти і науки України.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор
Працьовитий Микола Вікторович,
Національний педагогічний університет
імені М. П. Драгоманова, декан
фізико-математичного факультету
Інститут математики НАН України,
в. о. завідувача відділу динамічних систем та
фрактального аналізу.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор
Варбанець Павло Дмитрович,
Одеський національний університет імені
І. І. Мечникова, завідувач кафедри
комп'ютерної алгебри та дискретної
математики;

доктор фізико-математичних наук, професор
Савченко Олександр Григорович,
Херсонський державний університет, професор
кафедри алгебри, геометрії та математичного
аналізу.

Захист відбудеться «21» грудня 2021 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.03 Інституту математики Національної академії наук України за адресою: 01024, м. Київ, вул. Терещінківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики Національної академії наук України.

Автореферат розісланий «19» листопада 2021 р.

Учений секретар
спеціалізованої вченої ради Сорока Ю. Ю.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Дисертаційна робота виконана в галузі метричної теорії чисел. Вона присвячена двосимвольним системам кодування дійсних чисел і їх застосуванням у метричній та ймовірнісній теоріях чисел, фрактальному аналізі та теорії функцій.

Актуальність дослідження. Метрична теорія дійсних чисел займається розв'язанням теоретико-числових проблем з використанням засобів теорії міри і метричних просторів. Вона також розглядає задачі про міри і метричні розмірності числових множин, визначених різними умовами.

Ймовірнісна теорія чисел займається теоретико-числовими проблемами з використанням стохастичних засобів (ймовірнісних та статистичних), а також розподілами на числових множинах, зокрема фракталах, та випадкових величин, визначених розподілами своїх цифр, а також розподілами цифр у різних системах зображення при заданому розподілі випадкової величини.

Метрична і ймовірнісна теорії чисел розвиваються у різних напрямах і для цього використовуються різні засоби для задання об'єктів і здійснення їх теоретичного аналізу. Одним з напрямів дослідження є теорія ланцюгових дробів (елементарних та неелементарних), як зі скінченним, так і нескінченним базисним набором елементів. Класичною в цьому відношенні є метрична теорія елементарних ланцюгових дробів, фундаторами якої були К.Ф. Гаусс, П. Леві, Р.О. Кузьмін, О. Я. Хінчин та інші. Теорії неелементарних ланцюгових дробів є менш розвиненими. Окремої уваги заслуговують дроби Данжуа, елементами яких є числа 0 та 1. З цими теоріями тісно пов'язана теорія послідовностей Фарея.

Двосимвольні системи зображення (кодування) дійсних чисел є зручним засобом для використання в обчислювальних пристроях і заслуговують на окрему увагу в силу мінімальності алфавіту (у багатьох задачах немає принципової відмінності між трисимвольними і n-символьними системами при $n > 3$, але існує принципова відмінність між трисимвольною і двосимвольною). Сьогодні у науці використовується багато двосимвольних систем зображення чисел (класична двійкова, нега-двійкова, Q_2- та Q_2^*-зображення, марківське зображення, G_2-зображення та інші). Вказані системи є узагальненями та аналогами класичної двійкової системи, одні з них самоподібні, інші несамоподібні, але кожна з них має нульову надлишковість, тобто числа мають не більше двох зображень. Цифри зображення чисел у цих системах є статистично незалежними.

Зображення чисел ланцюговими дробами є несамоподібним і має суттєво складнішу геометрію. Ідея створення двосимвольного ланцюгового зображення чисел належить науковому керівнику Працьовитому М.В., який запропонував не лише створити систему кодування чисел заданого відрізка, а й знайти умови, при яких вона буде мати нульову надлишковість. І нам це вдалося [1]. Створена у цій роботі тополого-метрична теорія ланцюгових A_2-дробів використовувалась в різних цілях, зокрема з метою моделювання неперервних функцій зі складною локальною будовою (Працьовийтий М.В., Чуйков А.С.) та з метою побудови ймовірнісної теорії ланцюгових A_2-дробів (Працьовитий М.В., Кюрчев Д.В.).

У 1911 році Г. Мінковський для задання неперервної строго зростаючої сингулярної функції $?(x)$, яка встановлює взаємнооднозначну відповідність між всіма квадратичними ірраціональностями відрізку $[0;1]$ і раціональними числами цього ж відрізка, використовував означення її у термінах елементарних ланцюгових дробів та медіант звичайних нескоротних дробів. У 1943 році Р. Салемом був знайдений її аналітичний вираз:

$$?(x) = ?([0; a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]) =$$
$$= 2^{1-a_1} - 2^{1-a_1-a_2} + 2^{1-a_1-a_2-a_3} + \cdots + (-1)^{n+1} 2^{1-a_1-\cdots-a_n} + \ldots,$$

де $x = [0; a_1, a_2, \ldots]$ — розклад x в елементарний ланцюговий дріб.

Алкаускас А. довів, що функція Мінковського є єдиним неперервним розв'язком наступної системи функціональних рівнянь:

$$\begin{cases} ?\left(\dfrac{x}{1+x}\right) = \dfrac{1}{2}?(x) \\ ?(1-x) = 1-?(x) \end{cases}$$

У 2010 році Працьовитий М.В., Калашніков А.В. та Безбородов В.К. побудували однопараметричне узагальнення φ_μ класичної функції Мінковського (зі збереженням властивостей неперервності, монотонності, сингулярності), яке є єдиним неперервним розв'язком системи функціональних рівнянь:

$$\begin{cases} \varphi_\mu\left(\dfrac{x}{1+x}\right) = (1-\mu)\varphi_\mu(x) \\ \varphi_\mu(1-x) = 1-\varphi_{1-\mu}(x) \end{cases},$$

де $\varphi(x,\mu) = \varphi_\mu(x)$ — функція двох змінних x та μ $(x \in [0;1], \mu \in (0;1))$ або функція однієї змінної x, залежна від параметра μ. Було встановлено, що функція φ_μ у ірраціональній точці інтервалу $(0;1)$ має наступний аналітичний вираз:

$$\varphi_\mu(x) = \varphi_\mu([0;a_1,a_2,\dots,a_n,\dots]) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(1-\mu^{a_{2k}}),$$

де $A_k = (1-\mu)^{a_1+a_3+\dots+a_{2k-1}-1}\mu^{a_2+a_4+\dots+a_{2k-2}}$, а в раціональних точках інтервалу $(0;1)$ доозначується за неперервністю і виражається скінченною сумою.

Як бачимо, ланцюгові дроби є ефективним засобом задання функцій зі складною локальною структурою.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами, грантами. Робота виконана у рамках досліджень математичних об'єктів зі складною локальною тополого-метричною структурою, що проводяться на кафедрі вищої математики Національного педагогічного університету імені М.П. Драгоманова й у лабораторії фрактального аналізу Інституту математики НАН України. Дослідження проводилось у рамках таких науково-дослідних тем:

— Статистика сингулярних розподілів ймовірностей і фрактальні неперервні функції випадкових величин (номер державної реєстрації 0119U002582).

— Функції з фрактальними властивостями (множини рівнів та розподіли значень) і складні динамічні системи з ними пов'язані (номер державної реєстрації 0121U000208).

— Фрактальна геометрія числових рядів і фрактальний аналіз стохастичних об'єктів, з ним пов'язаних (номер державної реєстрації 0118U002059).

Об'єкт дослідження. Двосимвольні системи кодування дійсних чисел, пов'язані з ланцюговими дробами, їхня геометрія та застосування.

Предмет дослідження. Медіантне та ланцюгове A_2-зображення дійсних чисел і їх застосування в теорії фракталів та теорії функцій з локально складною структурою і фрактальними властивостями.

Мета дослідження. Створити цілісну тополого-метричну теорію ланцюгового A_2-зображення чисел і знайти його застосування у теорії фракталів та теорії функцій, а також розробити метричну та ймовірнісну теорію двосимвольного медіантного зображення чисел.

Завдання дисертаційного дослідження полягає в наступному:

1. Обґрунтувати двосимвольну систему кодування дійсних чисел з нульовою надлишковістю, яка базується на їх розкладі в ланцюговий дріб з використанням двох фіксованих дійсних чисел (ланцюгове A_2-зображення чисел).
2. Описати властивості циліндричних множин.
3. Знайти ознаки раціональності числа за його зображенням.
4. Обґрунтувати, що медіантне зображення чисел є перекодуванням зображення чисел елементарними ланцюговими дробами та знайти формальне задання класичної сингулярної функції Мінковського у термінах медіантного зображення.
5. Встановити нормальні властивості чисел у їх A_2-зображенні.
6. Знайти вираз основного метричного відношення і встановити його оцінки.
7. Розв'язати ряд метричних задач для A_2-зображення чисел.
8. Вивчити властивості функції заданої перетворювачем пар цифр аргумента з їх ланцюговою скріпленістю.
9. Довести, що при обчисленні розмірності Гаусдорфа-Безиковича можна обмежитися покриттям за допомогою A_2-циліндрів.
10. Вивчити питання щодо ефективності використання A_2-циліндрів у задачах обчислення фрактальної розмірності Гаусдорфа-Безиковича числових множин.
11. Знайти застосування A_2-зображення чисел у конструктивній теорії функцій з локально складною структурою та фрактальними властивостями.

Методи дослідження. У роботі використовувалась методологія кодування дійсних чисел засобами скінченного алфавіту, методи метричної та ймовірнісної теорії чисел, ергодичної теорії, фрактальної геометрії та фрактального аналізу.

Наукова новизна отриманих результатів. У дисертації отримано наступні наукові результати:

1. Обгрунтовано загальну схему кодування дійсних чисел заданого відрізка засобами двосимвольного алфавіту.
2. Створено конструктивну тополого-метричну теорію медіантного зображення чисел і знайдено його застосування у теорії ймовірностей та теорії функцій, зокрема знайдено вираз класичної сингулярної строго зростаючої функції Мінковського у термінах медіантного представлення.
3. Доведено, що медіантне зображення є двосимвольним перекодуваннями зображення чисел елементарними ланцюговими дробами.
4. Обґрунтовано систему кодування дійсних чисел заданого відрізка засобами двосимвольного алфавіту, що ґрунтується на розкладах чисел у нескінченні ланцюгові дроби, елементами яких є два задані числа (ланцюгові A_2-дроби). Знайдено необхідні та достатні умови, при яких вона має нульову надлишковість.
5. Вивчено геометрію ланцюгового A_2-зображення дійсних чисел (описано властивості циліндричних множин, розв'язано ряд метричних задач).
6. Знайдено застосування ланцюгового A_2-зображення чисел у теорії фракталів, зокрема знайдено еквівалентне означення фрактальної розмірності Гаусдорфа-Безиковича у термінах A_2-зображення чисел і доведено, що для довільної підмножини ланцюгових A_2–дробів відрізка $[\frac{1}{2};1]$ в системі кодування з нульовою надлишковістю існує не більше шести циліндрів, які її покривають і мають довжини, менше діаметра множини.
7. Знайдено ефективні застосування ланцюгового A_2-зображення чисел у теорії функцій з локально складною структурою і фрактальними властивостями.

Одержані результати нові, строго і повно обґрунтовані.

Практичне значення отриманих результатів. Робота має в основному теоретичний характер. Однак результати досліджень вже використовуються для вивчення неперервних функцій зі складною локальною будовою та побудови ймовірнісної теорії ланцюгових A_2-дробів, також вони можуть бути використані при вивченні властивостей символьних динамік.

Особистий внесок здобувача. Усі наукові результати, що виносяться на захист отримані здобувачем самостійно. Науковому керівнику належить постановка задач, окремі ідеї щодо обґрунтування гіпотетичних тверджень, перевірка отриманих результатів. Співавторам спільних публікацій належать твердження, які до дисертації не увійшли.

Апробація матеріалів дисертації. Основні результати дослідження доповідалися на наукових конференціях різних рівнів та наукових семінарах, а саме:

— IV Всеукраїнська конференція молодих вчених з математики та фізики, Київ, 23–25 квітня 2015 р.;
— IX Міжнародна наукова конференція ім. академіка М.Кравчука, Київ, 16–19 травня 2002 р.;
— VIII Міжнародна наукова конференція ім. академіка М.Кравчука, Київ, 11–14 травня 2000 р.;
— Міжнародна студентська науково-практична конференція «Молодь, освіта, культура і національна свідомість», Київ, 1999 р.;
— VII Міжнародна наукова конференція ім. академіка М.Кравчука, Київ, 14–16 травня 1998 р.
— Міжнародна студентська науково-практична конференція «Молодь, освіта, культура і національна свідомість», Київ, 1999 р.;
— Семінар з фрактального аналізу Інституту математики НАН України та НПУ імені М. П. Драгоманова (керівник: д-р фіз.-мат. наук, професор Працьовитий М.В.)

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в 10 статтях у наукових виданнях, 8 з яких [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8] входять до переліку фахових видань МОН України, серед них стаття [1] у журналі, що індексується міжнародною наукометричною базою даних Scopus. Результати дослідження наведені також у матеріалах конференцій [11, 12, 13, 14, 15].

Структура та обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається зі вступу, чотирьох розділів, розбитих на підрозділи, висновків до кожного розділу і загальних висновків, списку використаних джерел (98 найменувань) і додатка (список публікацій автора — 15 найменувань). Загальний обсяг дисертації 128 сторінок.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми дослідження, визначено об'єкт, предмет, мету і завдання, зазначено наукову новизну одержаних результатів, практичне значення отриманих результатів і особистий внесок здобувача, анонсовано основні наукові результати.

Перший розділ **«Огляд літератури та концептуальні засади дослідження»** має вступний характер. У ньому наведено приклади: топологізації простору L послідовностей з нулів та одиниць; альтернативних способів введення в ньому ймовірнісної міри, мір Гаусдорфа дробових порядків, означення фрактальної розмірності Гаусдорфа-Безиковича підмножин цього простору, оминаючи його метризацію.

Центральним поняттям цієї теорії є поняття циліндра (циліндричного відрізка, циліндричного інтервала).

Циліндром рангу n з основою $c_1c_2...c_n$ простору L називається множина $\Delta_{c_1c_2...c_n} = \left\{(a_n) : (a_n) \in L, a_i = c_i, i = \overline{1,n}\right\}$.

Обґрунтовано загальну схему кодування чисел відрізка $[a;b]$ засобами алфавіту $A = \{0,1\}$, наведено приклади різних кодувань.

Означення 1.7. Кодуванням (зображенням) чисел відрізка $[a;b]$ з допомогою алфавіту A називається сюр'єктивне відображення f простору L у відрізок $[a;b]$: $L \ni (a_n) \xrightarrow{f} x \in [a;b]$.

Кажуть, що кодування чисел має нульову надлишковість, якщо лише скінченна або зліченна множина чисел має два зображення, а решта — єдине.

Відображення f і система циліндрів в L породжують систему W_f f-циліндрів у метричному просторі $[a;b] \subset \mathbb{R}^1$:

$$f(\blacksquare_{c_1...c_n}) = \Delta^f_{c_1...c_n} \in W_f.$$

Якщо кожен f-циліндр є проміжком, то кодування f називається неперервним. Прикладом неперервних кодувань $[0;1]$ є двійкове зображення, нега-двійкове: $f(a_n) = \frac{2}{3} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(-2)^n} \equiv \Delta^{-2}_{a_1 \ldots a_n \ldots}$.

Відношення діаметрів вкладених циліндрів

$$\frac{|\Delta_{c_1 \ldots c_n c}|}{|\Delta_{c_1 \ldots c_n}|} = \delta_f(c_1, \ldots, c_n, c),$$

називається основним метричним відношенням. Від його значення (оцінок) залежать розв'язки більшості метричних задач у заданій системі кодування.

У підрозділі 1.3 узагальнено теореми П. Біллінгслі і М.В. Працьовитого щодо довірчості покриттів, а саме вказано достатні умови, при яких для визначення розмірності Гаусдорфа-Безиковича множин простору можна обмежитись циліндрами f-кодування.

Теорема 1.3. *Якщо метричне відношення δ_f f-кодування чисел відрізка $[a;b]$ відокремлене від нуля та одиниці, то число α_*, визначене рівністю*

$$\alpha_*(E) = \sup\{\alpha : \widetilde{H}_\alpha(E) \neq 0\} = \inf\{\alpha : \widetilde{H}_\alpha(E) = 0\},$$

$$\text{де } \widetilde{H}_\alpha(E) = \lim_{\varepsilon \to 0} \inf_{|\omega_i| \leqslant \varepsilon} \Big\{ \sum_i |\omega_i|^\alpha : \omega_i \in W_f, E \subset \bigcup_i \omega_i \Big\},$$

співпадає з розмірністю Гаусдорфа-Безиковича множини $E \subset [0;1]$.

У підрозділі 1.5 наведено відомості про зображення чисел ланцюговими дробами (елементарними та неелементарними), які використовуються в наступних розділах.

У другому розділі **«Медіантне зображення дійсних чисел»** розглядається зображення чисел відрізка $[0;1]$, що ґрунтується на системі подрібнюючих розбиттів цього відрізка медіантами кінців циліндрів, які визначаються послідовностями Фарея. Описано геометрію цього зображення, яка включає властивості циліндричних множин, геометричне тлумачення цифр тощо.

Нагадаємо, що медіантою двох нескоротних дробів $\dfrac{a}{b}$ і $\dfrac{c}{d}$ називається дріб $\dfrac{a+c}{b+d}$. За допомогою медіантного поділу відрізка

$$\left[\frac{a}{b}; \frac{c}{d}\right] = \left[\frac{a}{b}; \frac{a+c}{b+d}\right] \cup \left[\frac{a+c}{b+d}; \frac{c}{d}\right]$$

отримується система подрібнюючих розбиттів відрізка $[\frac{0}{1};\frac{1}{1}]$ на циліндри різних рангів.

Циліндр n-го рангу $\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_n}=\left[\dfrac{p^n_{i-1}}{q^n_{i-1}};\dfrac{p^n_i}{q^n_i}\right]$ є об'єднання двох циліндрів $(n+1)$-го рангу:

$$\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_n\alpha_{n+1}}=\left[\frac{p^n_{i-1}+\alpha_{n+1}p^n_i}{q^n_{i-1}+\alpha_{n+1}q^n_i};\frac{p^n_{i-1}(1-\alpha_{n+1})+p^n_i}{q^n_{i-1}(1-\alpha_{n+1})+q^n_i}\right],\ \text{де } \alpha_{n+1}\in\{0,1\}.$$

Тоді медіантним представленням числа x є його задання послідовністю вкладених циліндрів: $x=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_k}$.

Теорема 2.1. *Для будь-якого числа x з відрізка $[0;1]$ існує послідовність $\alpha_k\in L$ така, що*

$$x=\bigcap_{k=1}^{\infty}\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_k}\equiv\Delta^M_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_k(x)\ldots}.$$

Останній символічний запис називається медіантним зображенням числа x. Його цифри визначаються умовами $x\in\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_k}, k\in\mathbb{N}$.

Теорема 2.2. *Для довжин циліндрів k-го рангу медіантного зображення чисел виконуються нерівності:*

$$\frac{5\cdot 2^{2k+3}}{(1+\sqrt{5})^{2k+3}+(1-\sqrt{5})^{2k+3}+(-2)^{2k+3}}\leqslant|\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_k}|\leqslant\frac{1}{k+1}.$$

Теорема 2.3. *Основне метричне відношення має оцінки:*

$$\frac{1}{k+2}\leqslant\frac{\left|\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_k\alpha_{k+1}}\right|}{|\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_k}|}\leqslant\frac{k+1}{k+2}.$$

Оцінено точність раціональних наближень дійсних чисел за допомогою їх медіантного представлення.

Теорема 2.4. *Нехай $x\in\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_n}$, тоді щонайменше для одного з кінців $\dfrac{p}{q}$ цього циліндра виконується нерівність $|\alpha-\dfrac{p}{q}|<\dfrac{1}{q^2}$.*

Раціональні наближення дробової частини дійсного числа медіантним представленням забезпечують точність не менше величини, оберненої квадрату знаменника.

У підрозділі 2.3 розглянуто випадкову величину $\xi = \Delta^M_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_k\ldots}$, цифри ξ_k медіантного представлення якої є незалежними випадковими величинами, що набувають значень 0 і 1 з ймовірностями p_{0n} і p_{1n} відповідно ($p_{0n} + p_{1n} = 1$). Знайдено функцію розподілу цієї випадкової величини, спектр та критерій дискретності розподілу.

Лема 2.1. *Функція розподілу випадкової величини $\xi = \Delta^M_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_k\ldots}$ записується у вигляді*

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, \text{якщо } x < 0, \\ \beta_1(x) + \sum\limits_{i=2}^{\infty} \left[\beta_i(x) \prod\limits_{j=1}^{i-1} p_{\alpha_j(x)j} \right], \text{якщо } x \in [0;1], \\ 1, \text{якщо } x > 1; \end{cases}$$

де $\alpha_i(x)$ — цифри M-представлення x, а

$$\beta_i(x) = \begin{cases} 0, \text{якщо } \alpha_i(x) = 0, \\ p_{0i}, \text{якщо } \alpha_i(x) = 1. \end{cases}$$

Лема 2.2. *Спектром S_ξ випадкової величини $\xi = \Delta^M_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_k\ldots}$ є множина $A = \{x \in [0;1] : p_{\alpha_k(x)k} > 0 \quad \forall k \in N\}$ доповнена раціональними точками відрізка $[0;1]$, що є граничними для неї.*

Теорема 2.5. *Випадкова величина ξ має чисто дискретний розподіл тоді і тільки тоді, коли*

$$\prod_{k=1}^{\infty} \max_n \{p_{nk}\} > 0,$$

і чисто неперервний — у решті випадків.

Третій розділ **«Ланцюгові A_2-дроби»** присвячений теорії нескінченних ланцюгових дробів, елементи яких належать множині $A_2 = \{\alpha_1, \alpha_2\}, \alpha_i \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha_1 < \alpha_2$.

Нескінченний ланцюговий дріб $[0; a_1, \ldots, a_n, \ldots]$, де $a_n \in A_2$, називається *ланцюговим A_2-дробом.* Множина L_{A_2} таких дробів належить відрізку $[\beta_1; \beta_2]$, де $\beta_1 = [0; (\alpha_2, \alpha_1)], \beta_2 = [0; (\alpha_1, \alpha_2)]$, де круглі дужки символізують період, але не завжди з ним збігається.

Теорема 3.1.(Основне метричне відношення) *Для вкладених ци-*

ліндрів ланцюгового A_2-зображення чисел має місце рівність:

$$\frac{|\Delta_{c_1\ldots c_n c}|}{|\Delta_{c_1\ldots c_n}|} = \frac{\left(1+\beta_1\frac{q_{n-1}}{q_n}\right)\left(1+\beta_2\frac{q_{n-1}}{q_n}\right)}{\left(c+\beta_1+\frac{q_{n-1}}{q_n}\right)\left(c+\beta_2+\frac{q_{n-1}}{q_n}\right)}.$$

У підрозділі 3.2 знайдено умови нульової надлишковості A_2-зображення та введено означення A-зображення.

Теорема 3.2. *Якщо $\alpha_1\alpha_2 \leqslant \frac{1}{2}$, то $L_{A_2} = [\beta_1, \beta_2]$, а у випадку $\alpha_1\alpha_2 > \frac{1}{2}$ множина L_{A_2} є ніде не щільною множиною нульової міри Лебега.*

Теорема 3.3. *Якщо $\alpha_1\alpha_2 = \frac{1}{2}$, то зчисленна множина точок $x \in [\beta_1, \beta_2]$ має два ланцюгових A_2-зображення, решта ж точок мають єдине зображення.*

Означення 3.1. Ланцюговим A-зображенням числа $x = \Delta^{A_2}_{c_1\ldots c_n\ldots}$, де $c_n \in A_2 = \{\frac{1}{2}, 1\}$, називається запис $x = \Delta^{A}_{a_1\ldots a_n\ldots}$, де

$$a_n = 2c_n - 1 = \begin{cases} 0, \text{ якщо } c_n = \frac{1}{2}, \\ 1, \text{ якщо } c_n = 1. \end{cases}$$

У підрозділі 3.3 вивчаються властивості інверсора ланцюгового A-зображення чисел.

Означення 3.2. Інверсором ланцюгового A-зображення чисел відрізка $[\frac{1}{2}; 1]$ називається функція $\mathfrak{I}$, означена рівністю:

$$\mathfrak{I}(\Delta^{A}_{a_1a_2\ldots a_n\ldots}) = \Delta^{A}_{[1-a_1][1-a_2]\ldots[1-a_n]\ldots}.$$

Теорема 3.4. *Інверсор $\mathfrak{I}$ цифр A-зображення чисел відрізка $[0,5; 1]$ є неперервною строго спадною функцією.*

Наслідок 3.9. *Оскільки $\mathfrak{I}(\frac{2}{3}) = \mathfrak{I}(\Delta^{A_2}_{1(10)}) = \Delta^{A_2}_{0(01)} = \frac{2}{3}$, то функція $\mathfrak{I}$ має єдину інваріантну точку $x_0 = \frac{2}{3}$.*

Оскільки функція $\mathfrak{I}$ неперервна і строго спадна, то за теоремою Лебега вона має скінченну похідну майже скрізь (у розумінні міри Лебега).

Лема 3.2. *Якщо в точці x_0 існує скінченна похідна, то вона обчислюється за формулою:*

$$\mathfrak{I}'(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{[q_{n-1}(x_0) + q_n(x_0)][q_{n-1}(x_0) + 2q_n(x_0)]}{[q_{n-1}(\mathfrak{I}(x_0)) + q_n(\mathfrak{I}(x_0))][q_{n-1}(\mathfrak{I}(x_0)) + 2q_n(\mathfrak{I}(x_0))]}.$$

Підрозділ 3.4 присвячений вивченю властивостей оператору лівостороннього зсуву елементів ланцюгового A_2-зображення:

$$\omega(\Delta^{A_2}_{a_1a_2\ldots}) = \Delta^{A_2}_{a_2a_3\ldots}.$$

У підрозділі 3.5 для випадку $\alpha_1\alpha_2 = \dfrac{1}{2}$ вивчено метричні властивості множини A_2-дробів, зображення яких не містять комбінації певних цифр.

Теорема 3.7. *При $c_1 \neq c_2$ множина $C[A_2, \overline{c_1c_2}]$ є зчисленною, а при $c_1 = c_2$ — континуальною множиною, міра Лебега якої дорівнює нулю.*

У четвертому розділі **«Застосування ланцюгових A_2-дробів до вивчення об'єктів з фрактальними властивостями»** розглядаються застосування ланцюгових A_2-дробів у теорії фракталів та в теорії локально складних функцій. Тут вивчаються функції з нетривіальними локальними властивостями, означені в термінах двосимвольного ланцюгового зображення дійсних чисел. Це функції визначені за допомогою нескінченних добутків, функції задані перетворювачами пар цифр A_2-зображення аргумента з їх ланцюговою скріпленістю.

У підрозділі 4.1 розглядається застосування A_2-зображення чисел у теорії метричної розмірності Гаусдорфа-Безиковича.

Теорема 4.1. *Для будь-якого інтервала $u \subset [\frac{1}{2}; 1]$ існує не більше шести A_2-циліндрів, які покривають u і мають довжини не більшу $/u/$.*

Теорема 4.2. *При визначені розмірності Гаусдорфа-Безиковича підмножин відрізка $[\frac{1}{2}; 1]$ можна обмежитись їх покриттями A_2-циліндрами.*

Підрозділ 4.2 присвячений одному класу автомодельних функцій, породжених нескінченними добутками та A-зображенням аргумента. Тут основним об'єктом вивчення є функція, означена рівністю

$$f(x = \Delta^{A}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}) = \prod_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{\alpha_k(x)},$$

де (λ_k) — наперед задана послідовність додатних чисел така, що нескінченний добуток $P \equiv \prod\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k$ є абсолютно збіжним.

Оскільки $\lambda_k > 0$, то $\lambda_k = e^{v_k}$ для деякого дійсного числа v_k і тоді $f(x = \Delta^A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \prod\limits_{k=1}^{\infty} e^{v_k\alpha_k} = e^{\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k\alpha_k}$.

Теорема 4.4. *Функція $f(x)$ неперервна в кожній A-унарній точці, а в A-бінарній точці $x^* = \Delta^A_{c_1\ldots c_m 0(01)} = \Delta^A_{c_1\ldots c_m 1(10)}$ неперервна, тоді і тільки тоді, коли виконується рівність*

$$v_m + \sum_{k=1}^{\infty} v_{m+2k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} v_{m+2k}.$$

Наслідок 4.2. *Функція f неперервна на відрізку $[\frac{1}{2};1]$ тоді і тільки тоді, коли $\lambda_k = e^{\frac{c(-1)^{k-1}}{2^{k-1}}}$ для деякого $c \in \mathbb{R}$ і всіх $k \in N$.*

Теорема 4.5. *Якщо подвійна нерівність $0 < v_n < r_n \equiv v_{n+1} + v_{n+2} +$ виконується для нескінченної кількість значень n, то функція f є ніде не монотонною.*

Теорема 4.6. *Якщо функція f неперервна, то вона ніде не монотонна.*

У підрозділі 4.3 вивчаються функції, задані перетворювачем пар цифр аргумента з їх ланцюговою скріпленістю. Нехай $g(i,j)$ — функція, визначена на множині пар елементів алфавіту $A = \{0,1\}$ і набуває значень 0 або 1. Множину всіх таких функцій позначимо через $\mathfrak{G}$. Зрозуміло, що таких функцій існує $2^4 = 16$. Кожну з таких функцій g формально можна визначити матрицею $A(g) = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{pmatrix}$, елементи якої $a_{ij} = g(i,j) \in \{0,1\}$.

Розглянемо функцію, що означена рівністю:

$$f(\Delta^A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^A_{g(\alpha_1,\alpha_2)g(\alpha_2,\alpha_3)\ldots g(\alpha_n,\alpha_{n+1})g(\alpha_{n+1},\alpha_{n+2})\ldots}.$$

Теорема 4.7. *Неперервні функції, означені рівністю вище, вичерпуються наступними $f(x) = \frac{\sqrt{17}-1}{4}$, $f(x) = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $f(x) = x$, $\mathfrak{I}(x = \Delta^A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^A_{[1-\alpha_1][1-\alpha_2]\ldots[1-\alpha_n]\ldots}$.*

Теорема 4.8. *Множиною значень E_f функції f, визначеної матрицею $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, є ніде не щільна множина нульової міри Лебега, числа якої у A-зображенні не містять комбінації двох послідовних цифр $\overline{11}$.*

У підрозділі 4.4 вивчаються функції канторівського типу, означені у термінах зображення чисел ланцюговими A_2-дробами та рядами Люрота.

ВИСНОВКИ

Основним об'єктом дослідження у даній роботі є зображення чисел ланцюговими дробами за допомогою елементів з двоелементної множини. При знайдених умовах така система кодування чисел має нульову надлишковість, що є її позитивною характеристикою у багатьох аспектах. Таке кодування дійсних чисел є синтезом двосимвольності і ланцюговості, тому має перспективи різнопланових застосувань, зокрема при побудові алгоритмів для дій обчислювальних пристроїв. Ланцюговість зображення покращує збіжність обчислювальних процесів, а двосимвольність оптимізує їх.

Основні результати дисертаційної роботи:

— Створено конструктивну тополого-метричну теорію медіантного зображення чисел відрізка $[0;1]$ і знайдено її застосування у теорії розподілів випадкових величин та встановлено його зв'язок з ланцюговими дробами.

— Обґрунтовано, що медіантне зображення є перекодуваннями зображення чисел елементарними ланцюговими дробами.

— Знайдено вираз класичної сингулярної, строго зростаючої функції Мінковського у термінах медіантного зображення.

— Обґрунтовано двосимвольну систему кодування дійсних чисел заданого відрізка засобами двосимвольного алфавіту, що ґрунтується на розкладах чисел у нескінченні ланцюгові дроби, елементами яких є два задані числа (ланцюгові A_2-дроби). Знайдено необхідні та достатні умови, при яких вона має нульову надлишковість.

— Вивчено геометрію ланцюгового A_2-зображення дійсних чисел (описано властивості циліндричних множин, розв'язано ряд метричних задач)

— Знайдено ефективні застосування ланцюгового A_2-зображення чисел у теорії фракталів і теорії функцій з локально складною структурою і фрактальними властивостями.

Бачимо перспективу нових застосувань медіантного та ланцюгового A_2-зображення у теорії динамічних систем, теорії функцій та теорії сингулярних розподілів ймовірностей.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Дмитренко С. О., Кюрчев Д. В. і Працьовитий М. В. Ланцюгові A_2-зображення дійсних чисел // Український математичний журнал. — 2009. — № 4. — С. 452–463.
2. Працьовитий М. В., Гончаренко Я. В., Дмитренко С. О., Лисенко І. М. і Ратушняк С. П. Про один клас функцій з фрактальними властивостями // Буковинський математичний журнал. — 2021. — Т. 9, № 1. — С. 273–283.
3. Гончаренко Я. В., Калашнікова Є. І., Дмитренко С. О. і Василенко Н. А. Про розподіл значень однієї сингулярної функції, пов'язаної з зображенням чисел рядами Люрота // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. — Київ, 2019. — № 3. — С. 219–229.
4. Дмитренко С. О. Узагальнене двійкове f-кодування дійсних чисел та його використання для дослідження фрактальних об'єктів // Наукові записки НПУ ім. М. П. Драгоманова. Фізико-математичні науки. — Київ : Нац. пед. ун-т імені М. П. Драгоманова, 2003. — № 4. — С. 233–240.
5. Барановський О. М. і Дмитренко С. О. Розмірність Хаусдорфа-Безиковича множин, інваріантних відносно одного класу кусково-лінійних // Наукові записки НПУ ім. М. П. Драгоманова. Фізико-математичні науки. — Київ : Нац. пед. ун-т імені М. П. Драгоманова, 2003. — № 4. — С. 164–176.
6. Дмитренко С. О. Метричні задачі медіантного представлення // Наукові записки НПУ ім. М. П. Драгоманова. Фізико-математичні науки. — Київ : Нац. пед. ун-т імені М. П. Драгоманова, 2002. — № 3. — С. 403–411.
7. Дмитренко С. О. Про один перетворювач елементів ланцюгового зображення // Фрактальний аналіз та суміжні питання. — Київ : Ін-т математики НАН України; Нац. пед. ун-т імені М. П. Драгоманова, 1998. — № 2. — С. 222–225.

8. Дмитренко С. О. Деякі сингулярні об'єкти пов'язані з ланцюговими дробами // Фрактальний аналіз та суміжні питання. — Київ : Ін-т математики НАН України; Нац. пед. ун-т імені М. П. Драгоманова, 1998. — № 1. — С. 84–87.
9. Дмитренко С. О. Наближення дійсних чисел за допомогою медіантного представлення // Студентські фізико-математичні етюди. — Київ : Нац. пед. ун-т імені М. П. Драгоманова, 2000. — № 2. — С. 26–29.
10. Дмитренко С. О. M-представлення чисел і випадкові величини, з ним пов'язані // Студентські фізико-математичні етюди. — Київ : Нац. пед. ун-т імені М. П. Драгоманова, 1999. — № 1. — С. 17–25.
11. Працьовитий М. В., Дмитренко С. О. і Чуйков А. С. Інверсор цифр ланцюгового A_2-зображення дробової частини числа // Тези доповідей Четвертої всеукраїнської конференції молодих вчених з математики та фізики, 23-25 квітня 2015 р. — Київ. — 2015. — С. 47.
12. Дмитренко С. О. і Барановський О. М. Обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича множин, інваріантних відносно одного кусково–лінійного відображення, за допомогою Q–представлення чисел // Дев'ята Міжн. Наукова Конференція ім. академіка М.Кравчука (16-19 травня 2002р. Київ): матеріали конференції. — Київ. — 2002. — С. 266.
13. Барановський О. М. і Дмитренко С. О. Використання різних способів представлення чисел для задання фрактальних розподілів // Восьма Міжн. Наукова Конференція ім. академіка М.Кравчука (11-14 травня 2000р. Київ): матеріали конференції. — Київ. — 2000. — С. 408.
14. Дмитренко С. О. Функція, задана перетворювачем елементів ланцюгового зображення // Молодь, освіта, культура і національна свідомість: Зб. матеріалів Міжнар. студ. науково-практ. конф. — Київ. — 1999. — С. 203–204.
15. Дмитренко С. О. Деякі сингулярні об'єкти пов'язані з ланцюговими дробами // Сьома Міжн. Наукова Конференція ім. академіка М.Кравчука (14-16 травня 1998р. Київ): матеріали конференції. — Київ. — 1998. — С. 147.

АНОТАЦІЯ

Дмитренко С.О. Двосимвольні системи кодування чисел, пов'язані з ланцюговими дробами, та їх застосування. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.06. — Алгебра та теорія чисел. — Національна академія наук України, Інститут математики, Київ, 2021.

Дисертаційна робота виконана в галузі метричної теорії чисел. Вона присвячена розвитку топологічної, метричної та фрактальної теорій дійсних чисел, що базуються на двосимвольних системах кодування чисел, а також їх застосуванням.

У роботі обґрунтовано дві двосимвольні системи кодування дійсних чисел з нульовою надлишковістю, пов'язані з ланцюговими дробами (медіантне зображення, ланцюгове A_2-зображення). Перша визначається системою подрібнюючих розбиттів відрізка на циліндри різних рангів, що ґрунтується на медіантному поділі відрізка. Друга базується на розкладі числа в ланцюговий дріб, елементи якого належать множині $A_2 = \{\alpha_1, \alpha_2\}$, $\alpha_i > 0, \alpha_1\alpha_2 = \frac{1}{2}$.

Створено цілісну тополого-метричну теорію вказаних зображень, знайдено основні метричні відношення і розв'язано ряд метричних задач.

Доведено, що медіантне зображення чисел є двосимвольним перекодуванням зображення чисел елементарними ланцюговими дробами. В його термінах знайдено новий вираз класичної сингулярної строго зростаючої функції Мінковського.

Для ланцюгового A_2-зображення чисел знайдено ефективні застосування у теорії фракталів та теорії локально складних функцій. Знайдено еквівалантне означення фрактальної розмірності Гаусдорфа-Безиковича у термінах A_2-зображення, описано властивості двох класів функцій. Функції першого класу визначаються A_2-зображенням і нескінченними абсолютно збіжними добутками чисел, а функції другого класу задаються перетворювачами пар A_2-цифр аргумента у A_2-цифри значення функції з їх ланцюговою скріпленістю.

Ключові слова: ланцюговий дріб, медіантне представлення, ланцюгове A_2-зображення числа, циліндричні множини, основне метри-

чне відношення, фрактальна розмірність Гаусдорфа-Безиковича .

ABSTRACT

Dmytrenko S. O. Two-symbol systems of encoding of numbers related to continued fractions and their applications. — Qualification scientific work in the form of manuscript.

Thesis for candidate of physical and mathematical sciences degree in speciality 01.01.06 — Algebra and number theory. — National Academy of Science of Ukraine, Institute of Mathematics, Kyiv, 2021.

The dissertation belongs to the field of metric number theory. In the thesis, we develop topological, metric and fractal theories of real numbers based on a two-symbol systems of encoding of numbers, and their application.

This research substantiates two two-symbol encoding systems of real numbers with zero redundancy, associated with continued fractions (mediant representation, continued A_2-fractions). The first is determined by the system of partitions of the segment into cylinders of different ranks, which is based on the mediant split of the segment. The second is based on the expansion of a number into a continued fraction, the elements of which belong to the set $A_2 = \{\alpha_1, \alpha_2\}$, $\alpha_i > 0, \alpha_1\alpha_2 = \frac{1}{2}$.

An integrated topological-metric theory of these representation is created, the basic metric relations are found and some of metric problems are solved.

It is proved that the mediant representation of numbers is a two-symbol transcoding of the representation of numbers by elementary continued fractions. A new expression of the classical singular strictly increasing Minkowski function in terms of mediant representation was found.

For the continued A_2-representation of numbers, effective applications have been found in the theory of fractals and the theory of locally complex functions. An equivalent definition of the Hausdorff -Besikovich fractal dimension in terms of the A_2-representation is found, and the properties of two classes of functions are described. The functions of the first class are determined by the A_2-representation and infinite absolutely convergent products of numbers, and the functions of the second class are given by the converters of pairs of A_2-digits of the argument

into A_2-digits of the function value with their chain bond.

Key words: continuous fraction, mediant representation, continuous A_2-representation of the number, cylindrical sets, basic metric ratio, Hausdorff–Besicovitch fractal dimension .

Підписано до друку 18.11.2021. Формат 60×84/16. Папір друк. Офсет. друк. Фіз. друк. арк. 0,9. Умовн. друк. арк. 0,8.
Тираж 100 пр. Зам. 25.

НПУ імені М.П Драгоманова,
01601, м. Київ, вул. Пирогова, 9.