

**ВІДГУК**

офіційного опонента на дисертаційну роботу

**Поповича Дмитра Романовича**

“Узагальнення контракцій Іньоню–Вігнера  
і ліївськи ортогональні оператори”,  
представлену на здобуття наукового ступеня  
кандидата фізико-математичних наук  
за спеціальністю 01.01.06 — алгебра та теорія чисел

Дисертаційну роботу Дмитра Романовича Поповича присвячено дослідженню властивостей алгебр Лі, пов’язаних з їхніми контракціями, вивченю реалізацій таких контракцій матричнозначними функціями певних типів, створенню методів обчислення узагальнених контракцій Іньоню–Вігнера, а також оптимізації класифікацій контракцій алгебр Лі низьких розмірностей та опису ліївськи ортогональних операторів на алгебрах Лі. Треба зазначити, що тема дисертації перебуває на перетині досліджень, які проводяться на кафедрі алгебри і комп’ютерної математики механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка та відділу математичної фізики Інституту математики НАН України.

Загальний обсяг дисертації становить 175 сторінок. Вона складається зі вступу, трьох розділів, висновків, списку використаних джерел із 115 найменувань і додатку.

На початку *першого розділу* дисертації отримано нові результати стосовно прапорів підалгебр і підпросторів при контракціях алгебр Лі. З’ясовано, що для кожного прапора у вихідній алгебрі є відповідний прапор у контрактованій алгебрі. Тому порушення такої відповідності в деякій упорядкованій парі алгебр Лі означає, що елементи пари не пов’язані контракцією. Важливість зазначеного критерію полягає в тому, що він дає змогу доводити неіснування контракцій між дійсними алгебрами у випадках, коли між їхніми комплексифікаціями контракції існують. При-

кладом його ефективного застосування є лема 1.12, у якій доведено неіснування контракцій для низки пар шестивимірних нільпотентних дійсних алгебр Лі. У цьому розділі також побудовано серію прикладів контракцій між розв'язними алгебрами Лі для кожної розмірності, вищої за чотири, матриці яких за евклідовою нормою прямують до нескінченності при граничному значенні параметра контракції. Це показує, що лише в розмірностях, нижчих за п'ять, будь-яку контракцію можна реалізувати за допомогою обмеженої матричнозначної функції. Суттєвим зрушенням у дослідженні контракцій Салетана є знайдена дисертантом їхня канонічна форма. А саме, у теоремі 1.17 показано, що будь-яку контракцію Салетана з точністю до заміни базисів у вихідній і контрактованій алгебрах можна реалізувати матричнозначною функцією спеціальної жорданової форми. Це дало змогу ввести поняття сигнатури контракції Салетана як набору натуральних чисел, що однозначно задає її канонічну форму. Вивчено контракції Салетана, канонічний вигляд матриць яких має лише одну жорданову клітинку з параметром контракції як власним числом, й вичерпно прокласифіковано такі контракції між алгебрами Лі розмірності три.

У другому розділі ґрунтовно розвинуто теорію узагальнених контракцій Іньоню–Вігнера та розглянуто питання їх універсальності. Дисертант запропонував дієвий алгоритм обчислення узагальнених контракцій Іньоню–Вігнера алгебр Лі невисокої розмірності. З використанням цього алгоритму у прикладі 2.5 та підрозділі 2.3.4 отримано виправлений та оптимізований опис усіх контракцій три- та чотиривимірних алгебр Лі. Важливим результатом другого розділу є доведення того, що деякі контракції між чотиривимірними алгебрами Лі не можна реалізувати як узагальнені контракції Іньоню–Вігнера. А саме, у теоремі 2.7 стверджується про неможливість реалізації відомої контракції у парі чотиривимірних комплексних алгебр Лі узагальненою контракцією Іньоню–Вігнера. Внаслідок цієї теореми, над полем дійсних чисел є рівно дві контракції, які не можна реалізувати узагальненими контракціями Іньоню–Вігнера. Ці приклади є першими такого роду для випадку, коли контрактова-

на алгебра не є характеристично нільпотентною і допускає нетривіальні діагональні диференціювання. Також строго показано, що узагальнених контракцій Іньоню–Вігнера та контракції Салетана разом достатньо, щоб реалізувати всі контракції між чотиривимірними комплексними або дійсними алгебрами Лі. Одним із найбільш елегантних у дисертації є доведення теореми 2.13 про те, що узагальнені контракції Іньоню–Вігнера з цілими степенями параметра контракції універсальні в класі діагональних контракцій. Воно ґрунтується на пов’язуванні, з одного боку, границь певних функцій і операцій з ними та, з іншого боку, побудованих спеціальним чином систем рівнянь і нерівностей та операцій з ними, що дозволило застосувати теорему Вороного про існування тотожно нульової комбінації лівих частин нерівностей з несумісної системи.

У третьому розділі вивчено ліївськи ортогональні оператори на скінченновимірних алгебрах Лі. Дослідження цієї тематики започатковано А.П. Петравчуком та його учнями при узагальненні абелевих комплексних структур на дійсних алгебрах Лі. Дисертант суттєво розширив попередні та отримав низку нових результатів. Так, запропоноване ним поняття еквівалентності ліївськи ортогональних операторів дало змогу розглядати алгебри Лі з ненульовим центром. У дисертації доведено інваріантність відносно дії таких операторів низки важливих ідеалів: центра, радикала та членів зростаючого центрального ряду. Вивчено кореневі підпростори ліївськи ортогональних операторів. Цікавими є також результати, що характеризують ліївськи ортогональні автоморфізми алгебр Лі. Зокрема, теорема 3.40 описує структуру множини таких автоморфізмів та їх зв’язок з узагальненими диференціюваннями. Спираючись на існування у метричних алгебр невиродженої інваріантної форми, доведено, що довільний ліївськи ортогональний оператор на такій алгебрі еквівалентний прямій сумі тривіальних ліївськи ортогональних операторів, визначених на її взаємодоповнюючих ідеалах. Це цікаве твердження додатково уточнено для підкласів метричних алгебр, складених простими, напівпростими та редуктивними алгебрами. Зокрема, використання інваріантності та невиродженості форм Кіллінга на простих алге-

брах дало змогу показати, що на них можливі лише тривіальні ліївські ортогональні оператори (теорема 3.45).

Не залишились поза увагою більш вузькі, проте важливі класи алгебр Лі, в тому числі алгебри Гейзенберга, майже абелеві алгебри, алгебри низьких розмірностей. Для цих класів відповідні множини ліївські ортогональних операторів обчислено прямим методом на основі базисного підходу.

У висновках дисертант розгорнуто сформулював положення, висунуті на захист.

Результати дисертації є новими, всі твердження чітко сформульовано і строго доведено, що забезпечує достовірність основних положень та висновків дисертації.

Хотіло б звернути увагу дисертанта на низку відкритих проблем, тісно пов'язаних з результатами дисертації.

- У висновках до розділу 1 зауважено, що поняття сигнатури Салетана разом з умовам (1.4) і (1.5) також може слугувати основою алгоритму для вичерпної класифікації контракцій Салетана, принаймні у випадку низьких розмірностей. Там само зазначено, що цей алгоритм має схожі риси з алгоритмом для побудови чи доведення неіснування узагальнених контракцій Іньоню–Вігнера, який запропоновано у розділі 2, хоча сам алгоритм не наведено. За 60 років після опублікування статті Ю.Дж. Салетана, де й було вперше досліджено контракції Салетана, ефективних інструментів для їх обчислення так і не було створено. Тому можна рекомендувати дисертанту продовжити дослідження у цьому напрямі.
- Ще в статті Ю.Дж. Салетана було доведено, що існує контракція між тривимірними дійсними алгебрами Лі, яку не можна реалізувати як контракцію Салетана. А саме, це контракція  $so(3) \rightarrow h(1)$  спеціальної ортогональної алгебри  $so(3)$  до алгебри Гейзенберга  $h(1)$ . Усі інші контракції між тривимірними дійсними алгебрами Лі, а також усі контракції між тривимірними комплексними алгебрами Лі

були пізніше реалізовані як прості контракції Іньоню–Вігнера, які очевидно є спеціальними контракціями Салетана. Це дає вичерпний опис контракцій Салетана у розмірності три. Доведення Ю.Дж. Салетана і класифікацію контракцій тривимірних алгебр Лі в цілому відповідно поліпшено у прикладах 1.20 і 2.5 дисертації. Цікавішою є задача про опис контракцій Салетана у розмірності чотири. Зокрема, дотепер не відомо, які з контракцій чотиривимірних алгебр Лі не еквівалентні контракціям Салетана.

- Як зазначено вище, згідно з теоремою 3.45, яка є одним з найцікавіших результатів дисертації, на простій алгебрі Лі є виключно тривіальні ліївськи ортогональні оператори. Твердження 3.53 показує, що таку властивість мають не лише прості алгебри Лі. У висновках до розділу 3 зазначено, що природно виникає проблема пошуку інших класів алгебр Лі або, більш загально, вичерпної характеризації алгебр Лі з властивістю тривіальності ліївськи ортогональних операторів. Було б доцільно навести у дисертації хоча б припущення щодо таких алгебр Лі.

Звичайно ж, ці пропозиції та зауваження не впливають на загальну позитивну оцінку дисертації, і більш того, пропозиції можна розглядати як побажання для урахування дисертантом у подальших дослідженнях.

#### *Загальний висновок:*

Дисертація Д.Р. Поповича є актуальним і важливим дослідженням реалізації контракцій скінченновимірних алгебр Лі та ліївськи ортогональних операторів на таких алгебрах. Введені поняття, отримані результати та розвинуті в дисертації методи мають значні перспективи щодо подальшого їх використання в теорії алгебр Лі, теоретичній і математичній фізиці, груповому аналізі диференціальних рівнянь.

Оформлення дисертації задовольняє всім вимогам, що висувають до рукописів на здобуття наукових ступенів. Результати достатньо повно опубліковано в українських і міжнародних математичних журналах, збір-

нику праць міжнародного наукового симпозіуму і багатьох тезах наукових конференцій. З 8 статей і 10 тез, включених до списку опублікованих праць за темою дисертації, лише 2 статті написано у співавторстві. З цих статей у дисертацію включено результати, отримані особисто дисертантом, що явно зазначено в дисертації та авторефераті. Результати дисертації відомі українським і закордонним спеціалістам, що зокрема видно з їх цитувань. Дисерант доповідав їх на багатьох семінарах, українських та міжнародних конференціях. Автореферат дисертації правильно і повно відображає зміст роботи.

Враховуючи зазначене вище, вважаю, що дисертація “Узагальнення контракцій Іньоню–Вігнера і ліївськи ортогональні оператори” містить важливі наукові результати з теорії та застосування алгебр Лі, задовільняє вимогам пп. 9, 11–14 “Порядку присудження наукових ступенів” Постанови Кабінету Міністрів України від 24 липня 2013 р. № 567 (зі змінами і доповненнями, внесеними згідно з Постановами Кабінету Міністрів № 656 від 19.08.2015, № 1159 від 30.12.2015, № 567 від 27.07.2016, № 943 від 20.11.2019, № 607 від 15.07.2020) щодо кандидатських дисертацій, а її автор Дмитро Романович Попович безумовно заслуговує на присвоєння наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.06 — алгебра та теорія чисел.

Офіційний опонент  
завідувач кафедри вищої математики  
імені проф. Можара В.І.  
Національного університету харчових технологій,  
кандидат фізико-математичних наук,  
професор

I.I. Юрик



Магішев 01.12.2021