Національна академія наук України
Інститут математики

Міністерство освіти і науки України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Попович Дмитро Романович

УДК 512.812.4

Узагальнення контракцій Іньоню–Вігнера і ліївськи ортогональні оператори

01.01.06 — алгебра та теорія чисел
111 — математика

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ — 2021

Дисертацією є рукопис.

Роботу виконано в Інституті математики НАН України та на кафедрі алгебри і комп'ютерної математики Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Науковий керівник:

доктор фізико-математичних наук, професор
Петравчук Анатолій Петрович,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
завідувач кафедри алгебри і комп'ютерної математики.

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, професор
Бедратюк Леонід Петрович,
Хмельницький національний університет,
завідувач кафедри інженерії програмного забезпечення;

кандидат фізико-математичних наук, професор
Юрик Іван Іванович,
Національний університет харчових технологій, м. Київ,
завідувач кафедри вищої математики.

Захист відбудеться 21 грудня 2021 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.03 Інституту математики НАН України за адресою: 01024, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розісланий *16 листопада 2021 р.*

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради **Ю.Ю. Сорока**

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Контракції алгебр Лі є різновидом граничного переходу між орбітами таких алгебр. Це поняття, яке вперше розглянув І.Е. Сигал і строго визначив значно пізніше Ю.Дж. Салетан, стало відомим після статей Е. Іньоню та Ю.П. Вігнера. Його узагальненням є поняття виродження алгебр Лі. Контракції алгебр Лі зокрема утворюють симетрійне підґрунтя для двох найважливіших граничних переходів у фізиці — від релятивістської і квантової механік до класичної. Нещодавно в роботах В.М. Бойка, О.В. Локазюк, О.О. Ванєєвої, Н.М. Іванової, Р.О. Поповича, К. Софоклеуса контракції алгебр Лі було також використано в контексті граничних переходів між випадками розширення алгебр ліївської симетрії у класах диференціальних рівнянь.

Техніку класифікації контракцій у класах алгебр Лі на основі наборів неперервних і напівнеперервних величин розробили Д. Бурде, К. Штайнгоф, Ф. Ґрюневальд, Дж. О'Халоран, К. Сілей для комплексного випадку та М.О. Нестеренко, Р.О. Попович для дійсного випадку. З її використанням було прокласифіковано контракції п'яти- й шестивимірних комплексних нільпотентних алгебр Лі, комплексних і дійсних алгебр Лі до розмірності чотири включно, а також вивчено контракції у вужчих класах алгебр Лі більшої розмірності. Техніку класифікації контракцій алгебр Лі було поширено й на інші алгебри. Втім, навіть класифікації контракцій три- та чотиривимірних алгебр Лі не були повністю упорядковані, а наявних неперервних і напівнеперервних величин не вистачало для класифікації контракцій шестивимірних дійсних нільпотентних алгебр Лі.

На початку 1950-х рр. Е. Іньоню та Ю.П. Вігнер вивчили спеціальні типи контракцій алгебр Лі під час ширшого дослідження груп Лі та їхніх зображень. Відтоді висунуто чимало припущень щодо різних способів реалізації контракцій алгебр Лі. Контракції Іньоню–Вігнера є частинним випадком контракцій, реалізовних за допомогою афінних за параметром контракції матриць, які вивчав Ю.Дж. Салетан на початку 1960-х рр. і які тепер називають контракціями Салетана. Водночас, не було відомо, чи можна привести матриці контракцій Салетана до певного канонічного вигляду, що перешкоджало розробці ефективного алгоритму обчислення контракцій Салетана та їх класифікації. На сьогодні такої класифікації не існує навіть для чотиривимірних комплексних алгебр Лі.

Так звані узагальнені контракції Іньоню–Вігнера (або виродження за однопараметричними підгрупами в алгебраїчній термінології) запропонували Х.Д. Дьобнер та О. Мельсхаймер у 1967 р. Існувало припущення Е. Ваймар-Вудс, що будь-яка контракція еквівалентна узагальненій ІВ-контракції. Як зауважила Дж. О'Халоран, очевидними контрприкладами до цього припущення є контракції до характеристично нільпотентних алгебр Лі, низку яких побудував Д. Бурде для всіх розмірностей не менше семи, у яких і існують характеристично нільпотентні алгебри Лі. Тому таких прикладів немає в нижчих розмірностях. Доводити неіснування узагальнених ІВ-контракцій до алгебр Лі, які не є характеристично нільпотентними, суттєво складніше, оскільки такі контрактовані алгебри допускають власні градуювання, а зазначене неіснування пов'язане з несумісністю фільтрацій початкової алгебри і градуювань контрактованої алгебри. Питання про найменшу розмірність, у якій узагальнені ІВ-контракції не універсальні, залишалося без відповіді.

Поняття ліївськи ортогональних операторів на алгебрах Лі введено у статтях А.П. Петравчука та його учнів як узагальнення абелевих комплексних структур на дійсних алгебрах Лі. В цих роботах вивчено деякі властивості таких операторів, зазвичай коли центр алгебри нульовий. Водночас, було незрозуміло, чи завжди умова тривіальності центра суттєва в отриманих результатах. Також не існувало вичерпних описів ліївськи ортогональних операторів навіть для спеціальних класів алгебр Лі, хоча для певних класів алгебр Лі такий опис можна отримати у простий і елегантний спосіб.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертацію виконано у відділі математичної фізики Інституту математики НАН України в рамках науково-дослідних тем "Симетрія та інтегровність рівнянь сучасної математичної фізики" (номер держ. реєстрації 0120U100173) та "Аналітичні та групові методи дослідження математичних моделей сучасного природознавства" (номер держ. реєстрації 0117U002119), а також відповідно до плану наукових досліджень кафедри алгебри і комп'ютерної математики механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка в рамках науково-дослідної теми № 11БФ038-03 "Застосування алгебро-геометричних методів в теоріях груп, напівгруп, кілець, зображень до задач прикладної алгебри та захисту інформації" (номер держ. реєстрації 0111U005264).

Мета й завдання дослідження. *Метою* дисертаційної роботи є дослідження властивостей алгебр Лі, пов'язаних з їхніми контракціями, вивчення реалізацій таких контракцій матричнозначними функціями певних типів, створення нових методів обчислення контракцій Салетана й узагальнених контракцій Іньоню–Вігнера, оптимізація класифікацій контракцій алгебр Лі низької розмірності й опис ліївськи ортогональних операторів на алгебрах Лі.

Об'єктом дослідження є контракції алгебр Лі та ліївськи ортогональні оператори на таких алгебрах.

Предметом дослідження є поведінка прапорів підалгебр і підпросторів у алгебрах Лі при контракціях алгебр Лі, реалізації контракцій алгебр Лі різних типів, як-то контракції за допомогою обмежених матричнозначних функцій, контракції Салетана, узагальнені контракції Іньоню–Вігнера і діагональні контракції, контракції три- та чотиривимірних алгебр Лі, інваріантні відносно ліївськи ортогональних операторів підпростори, ліївськи ортогональні автоморфізми алгебр Лі, ліївськи ортогональні оператори на метричних алгебрах Лі й на алгебрах Лі низької розмірності.

Методи дослідження. Разом із загальними методами лінійної алгебри, теорії алгебр Лі й аналізу застосовано спеціальні методи факторизації, вибору канонічних базисів і побудови канонічних форм, комплексифікацію, оригінальний алгоритм обчислення узагальнених контракцій Іньоню–Вігнера або доведення їх неіснування шляхом зведення цієї задачі до розв'язання систем квадратичних рівнянь, встановлення відповідності між властивостями об'єктів різних типів, інваріантні білінійні форми. Для перевірки результатів щодо алгебр Лі низьких розмірностей використано систему символьних обчислень `Maple`.

Наукова новизна одержаних результатів. Основні результати, які визначають наукову новизну й винесені на захист, такі:

1. Описано поведінку прапорів підалгебр та підпросторів при контракціях алгебр Лі, що дає нові критерії неіснування контракцій.
2. Для кожної розмірності не менше п'яти знайдено приклад контракції, реалізовної лише матричнозначними функціями з нескінченними границями евклідових норм при граничному значенні аргументу.
3. Для матриць контракцій Салетана запропоновано нову канонічну форму і введено поняття сигнатури.

4. Створено алгоритм побудови узагальнених контракцій Іньоню–Вігнера або доведення їх неіснування для фіксованої пари алгебр Лі. За його допомогою оптимізовано відомий опис узагальнених контракцій Іньоню–Вігнера три- та чотиривимірних дійсних і комплексних алгебр Лі.
5. Доведено, що будь-яка діагональна контракція еквівалентна узагальненій контракції Іньоню–Вігнера з цілими степенями параметра контракції.
6. Знайдено найнижчу розмірність алгебр Лі, для якої узагальнені контракції Іньоню–Вігнера не є універсальними.
7. Введено поняття еквівалентності ліївськи ортогональних операторів на алгебрах Лі. Показано інваріантність низки ідеалів відносно таких операторів.
8. Знайдено зображення для ліївськи ортогональних автоморфізмів.
9. Вичерпно описано ліївськи ортогональні оператори на метричних алгебрах Лі.
10. Для низки класів алгебр Лі відповідні множини ліївськи ортогональних операторів обчислено прямим методом.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота має теоретичний характер. Отримані результати і розвинуті методи можуть бути використані для подальших досліджень у теорії алгебр Лі, теоретичній та математичній фізиці.

Особистий внесок здобувача. Усі результати, винесені на захист, здобувач отримав самостійно. У роботах [5, 6], опублікованих у співавторстві, співавтору належать постановка задач і перевірка отриманих результатів, інтерпретацію яких виконано спільно.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації доповідалися на таких конференціях і симпозіумах:

- Міжнародна конференція “The 13th International Algebraic Conference in Ukraine” (Київ, 6–9 липня 2021 р.),
- Міжнародна конференція “The International Conference of Young Mathematicians” (Київ, 3–5 червня 2021 р.),
- Міжнародна конференція “Algebraic and Geometric Methods of Analysis”, присвячена пам’яті Юрія Трохимчука (17.03.1928–18.12.2019) (Одеса, 25–28 травня 2021 р.),

- Сьомий міжнародний симпозіум “Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems (GADEIS)” (Ларнака, Кіпр, 15–19 червня 2014 р.),
- Міжнародний симпозіум “Symmetry and Integrability of Equations of Mathematical Physics” (Київ, 22–23 грудня 2013 р.),
- Міжнародна конференція “The Fifth International Conference on Analytic Number Theory and Spatial Tessellations” (Київ, 16–20 серпня 2013 р.),
- Третя міжуніверситетська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики (Київ, 25–27 квітня 2013 р.),
- Міжнародна конференція “Lie Algebras and Applications” (Упсала, Швеція, 6–8 вересня 2012 р.),
- Шостий міжнародний симпозіум “Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems (GADEIS)” (Протарас, Кіпр, 17–21 червня 2012 р.),
- Міжнародний симпозіум “Symmetry and Integrability of Equations of Mathematical Physics” (Київ, 18–19 грудня 2011 р.),
- Дев’ята міжнародна конференція “Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics” (Київ, 21–27 червня 2009 р.).

Результати дисертації також неодноразово доповідались і обговорювались на засіданнях наукових семінарів

- відділу математичної фізики Інституту математики НАН України (керівник семінару — член-кореспондент НАН України, професор А.Г. Нікітін),
- кафедри алгебри і комп’ютерної математики Київського національного університету імені Тараса Шевченка (керівник семінару — професор А.П. Петравчук).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано у статтях [1–8] і тезах конференцій [9–18]. Статті [1–6] відповідають вимогам до публікації результатів дисертаційних робіт у фахових виданнях із фізико-математичних наук. Статті [1–4, 7, 8] опубліковано без співавторів. Статті [2–6] проіндексовано в міжнародних наукометричних базах даних Web of Science і Scopus, статті [3–8] прореферовано в міжнародних реферативних базах MathSciNet і Zentralblatt MATH. Статті [4, 5] опубліковано у виданнях, які віднесено до квартиля Q1, а [3, 6] — Q2 відповідно до класифікації SCImago Journal and Country Rank.

Структура й обсяг дисертації. Дисертація складається з анотацій українською та англійською мовами, списку публікацій, змісту, переліку умовних позначень, вступу, трьох розділів, висновків, списку використаних джерел, що містить 115 найменувань, і додатка. Повний обсяг дисертації становить 175 сторінок, із них список використаних джерел займає 11 сторінок, а додаток — 4 сторінки.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обґрунтовано актуальність теми, проаналізовано сучасний стан розглянутих у дисертації проблем, сформульовано завдання дослідження й коротко викладено результати роботи.

Основну частину роботи складають три розділи. На початку кожного розділу подано стислий опис результатів, що містяться в ньому, в контексті відомих результатів, а наприкінці — висновки й обговорення нерозв'язаних проблем.

У **першому** розділі досліджено поведінку прапорів підалгебр і підпросторів при контракціях алгебр Лі, а також реалізовність контракцій алгебр Лі обмеженими матричнозначними функціями або послідовностями і матричнозначними функціями, афінними за параметром контракції.

Нехай V — n-вимірний лінійний простір над полем $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ чи $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, де $n < \infty$. Через $\mathcal{L}_n = \mathcal{L}_n(\mathbb{F})$ позначимо множину всіх дужок Лі на просторі V. Для дужки Лі $\mu \in \mathcal{L}_n$ і функції $U \in \mathrm{C}\big((0,1], \mathrm{GL}(V)\big)$ визначимо сім'ю дужок Лі $\mu_\varepsilon \in \mathcal{L}_n$, $\varepsilon \in (0,1]$, згідно з $\mu_\varepsilon(x,y) := {U_\varepsilon}^{-1}\mu(U_\varepsilon x, U_\varepsilon y)\ \forall\, x,y \in V$. Якщо для будь-яких $x,y \in V$ існує границя $\lim_{\varepsilon\to+0}\mu_\varepsilon(x,y) =: \mu_0(x,y)$, то $\mathfrak{g}_0 = (V,\mu_0)$ є добре визначеною алгеброю Лі, яку називають *(неперервною) контракцією* алгебри Лі $\mathfrak{g} = (V,\mu)$. Процедуру отримання алгебри $\mathfrak{g}_0$ з вихідної алгебри $\mathfrak{g}$ також називають *контракцією* $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_0$. У фіксованому базисі простору V відповідну матричнозначну функцію U називають *матрицею контракції* $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_0$. Замість неперервної контракції $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_0$ можна розглядати еквівалентну *послідовну контракцію*, в якій функцію U замінено на послідовність матриць.

Загалом, структура множин підалгебр, ідеалів чи підпросторів алгебр Лі змінюється при контракціях, але є певні стабільні властивості таких множин.

Теорема 1.6. *Нехай алгебра Лі $\mathfrak{g}_0$ є контракцією алгебри Лі $\mathfrak{g}$ і в алгебрі $\mathfrak{g}$ є прапор підалгебр $\{0\} = \mathfrak{s}^0 \subset \mathfrak{s}^1 \subset \cdots \subset \mathfrak{s}^m \subset \mathfrak{s}^{m+1} = \mathfrak{g}$. Тоді* *в алгебрі* $\mathfrak{g}_0$ *є прапор підалгебр* $\{0\} = \mathfrak{s}_0^0 \subset \mathfrak{s}_0^1 \subset \cdots \subset \mathfrak{s}_0^m \subset \mathfrak{s}_0^{m+1} = \mathfrak{g}_0$ *такий, що* $\dim \mathfrak{s}_0^a = \dim \mathfrak{s}^a$ *та* $\mathfrak{s}^a \to \mathfrak{s}_0^a$, $a = 1, \ldots, m$. *Якщо* $\mathfrak{s}^a$ *є ідеалом у* $\mathfrak{s}^b$, $1 \leqslant a < b \leqslant m+1$, *то* $\mathfrak{s}_0^a$ *можна вибрати ідеалом у* $\mathfrak{s}_0^b$, *причому* $\mathfrak{s}^b/\mathfrak{s}^a \to \mathfrak{s}_0^b/\mathfrak{s}_0^a$. *Загальніше, якщо* $[\mathfrak{s}^a, \mathfrak{s}^b] \subseteq \mathfrak{s}^c$ *для деяких* $a, b, c \in \{0, \ldots, m+1\}$, *то також* $[\mathfrak{s}_0^a, \mathfrak{s}_0^b]_0 \subseteq \mathfrak{s}_0^c$, *причому* $\dim[\mathfrak{s}_0^a, \mathfrak{s}_0^b]_0 \leqslant \dim[\mathfrak{s}^a, \mathfrak{s}^b]$. *Аналогічні твердження справедливі для будь-якої композиції комутаторів на довільному розміщенні з повтореннями з підалгебр* $\mathfrak{s}^a$.

Контракції зберігають властивості комутативності, нільпотентності, розв'язності та унімодулярності. Тому алгебра $\mathfrak{s}_0^a$ успадковує відповідні властивості алгебри $\mathfrak{s}^a$. Завдяки цьому певні відомі необхідні критерії контракцій прямо випливають з теореми 1.6.

Ослаблену версію теореми доведено для прапорів підпросторів.

Наслідок 1.7. *Якщо* $\dim \mathfrak{g} = \dim \mathfrak{g}_0 = n < \infty$ *і є контракція* $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_0$, *то для будь-якого повного прапора* $\{0\} = V^0 \subset V^1 \subset \cdots \subset V^n = V$ *підпросторів базового простору* V *існує такий повний прапор* $\{0\} = V_0^0 \subset V_0^1 \subset \cdots \subset V_0^n = V$ *підпросторів цього простору, що* $\dim[V_0^i, V_0^j]_0 \leqslant \dim[V^i, V^j]$ *для довільних* $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. *Аналогічне твердження справджується для будь-якої композиції комутаторів на комбінації з повтореннями підпросторів* $V^1, \ldots, V^n$.

Теорему 1.6 і відому класифікацію контракцій п'ятивимірних нільпотентних алгебр Лі застосовано для доведення неіснування контракцій у багатьох парах шестивимірних нільпотентних дійсних алгебр Лі попри те, що між відповідними комплексифікаціями контракції існують. Відомі критерії неіснування контракцій не працюють у цій ситуації.

У теоремі 1.15 вивчено контракцію між n-вимірними ($n \geqslant 5$) розв'язними дійсними або комплексними алгебрами Лі $\mathfrak{a}$ та $\mathfrak{a}_0$, ненульові комутаційні співвідношення яких, з точністю до антисиметричності дужки Лі, вичерпують відповідно співвідношення $[e_1, e_3] = e_3$, $[e_2, e_4] = e_4$, $[e_1, e_2] = e_5$ та $[e_1, e_3] = e_3$, $[e_2, e_4] = e_4$. З цієї теореми випливає, що для кожної розмірності не менше п'яти існує контракція, реалізовна лише за допомогою матриць, евклідові норми яких обов'язково прямують до нескінченності при граничному значенні параметра контракції. Добре відомо, що в розмірностях не більше ніж чотири це не так. Інакше кажучи, це дає вичерпну й залежну від розмірності відповідь про можливість реалізації контракцій за допомогою обмежених матричнозначних функцій.

Реалізацію контракції лінійною відносно параметра контракції матричнозначною функцією називають *контракцією Салетана*, або *лінійною контракцією.* Знайдено канонічний вигляд таких контракцій.

Теорема 1.17. *З точністю до заміни алгебр* $\mathfrak{g}$ *та* $\mathfrak{g}_0$ *на ізоморфні, будь-яку контракцію Салетана* $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_0$ *реалізує матриця канонічного вигляду* $E^{n_0} \oplus J_\varepsilon^{n_1} \oplus \cdots \oplus J_\varepsilon^{n_s}$, *або, еквівалентно,* $E^{n_0} \oplus J_0^{n_1} \oplus \cdots \oplus J_0^{n_s} + \varepsilon E^n$, *де* $n_0 + \cdots + n_s = n$. E^m *— одинична* $m \times m$*-матриця, а* J_λ^m *— жорданів* $m \times m$*-блок з власним значенням* λ.

Тому довільну контракцію Салетана можна реалізувати матрицею вигляду $AS_\varepsilon B$, де A та B — сталі невироджені матриці, а матричнозначна функція S_ε має канонічний вигляд. Цей результат обґрунтовує визначення для кожної контракції Салетана її сигнатури.

Означення 1.18. Набір $(n_0; n_1, \ldots, n_s)$, в якому n_1, …, n_s складають розбиття розмірності $n - n_0$ нульової компоненти Фіттінга відносно U_0, а $n_0 \in \{0, \ldots, n\}$, назвемо *сигнатурою* цієї контракції Салетана.

Розглянуто контракції Салетана з сигнатурою $(0; n)$. Повністю прокласифіковано такі контракції в розмірності $n = 3$.

Другий розділ цілковито присвячено узагальненим контракціям Іньоню–Вігнера. Контракцію $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_0$ називають *узагальненою контракцією Іньоню–Вігнера* (або, скорочено, *узагальненою ІВ-контракцією*), якщо її матрицю U_ε можна представити у вигляді $U_\varepsilon = AW_\varepsilon P$, де матриці A і P невироджені і сталі (тобто не залежать від параметра ε), а $W_\varepsilon = \operatorname{diag}(\varepsilon^{\alpha_1}, \ldots, \varepsilon^{\alpha_n})$ для деяких $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Набір з n показників $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ називають *сигнатурою* узагальненої ІВ-контракції $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_0$. *Простою ІВ-контракцією* називають узагальнену ІВ-контракцію, сигнатуру якої складають нулі та одиниці. Теорема 2.2, яка тривалий час була лише припущенням, стверджує, що будь-яка узагальнена ІВ-контракція (слабо) еквівалентна узагальненій ІВ-контракції з цілочисловою сигнатурою (і такими самими сталими матрицями).

На основі зазначеного запропоновано алгоритм знаходження узагальнених ІВ-контракцій або доведення їх неіснування для пари алгебр Лі. Використання цього алгоритму дало змогу поліпшити наявний у літературі опис узагальнених ІВ-контракцій три- та чотиривимірних алгебр Лі.

У теорії узагальнених IВ-контракцій довго існувало припущення, що будь-яку контракцію алгебр Лі можна реалізувати узагальненою IВ-контракцією. Це справедливо для контракцій між тривимірними дійсними чи комплексними алгебрами Лі. Розглянемо чотиривимірні дійсні алгебри Лі, що визначені, з точністю до антисиметричності дужки Лі, такими ненульовими комутаційними співвідношеннями:

$$\begin{aligned} 2\mathrm{A}_{2.1}\colon\ & [e_1,e_2]=e_1,\ [e_3,e_4]=e_3;\\ \mathrm{A}_1\oplus\mathrm{A}_{3.2}\colon\ & [e_2,e_4]=e_2,\ [e_3,e_4]=e_2+e_3;\\ \mathrm{A}_{4.1}\colon\ & [e_2,e_4]=e_1,\ [e_3,e_4]=e_2;\\ \mathrm{A}_{4.10}\colon\ & [e_1,e_3]=e_1,\ [e_2,e_3]=e_2,\ [e_1,e_4]=-e_2,\ [e_2,e_4]=e_1. \end{aligned}$$

Тут використано нумерацію Г.М. Мубаракзянова для алгебр Лі низьких розмірностей, а $\mathfrak{g}_{\dots}$ позначає комплексифікацію алгебри $\mathrm{A}_{\dots}$. Усі контракції чотиривимірних дійсних алгебр Лі реалізовано узагальненими IВ-контракціями, окрім двох: $2\mathrm{A}_{2.1}\to\mathrm{A}_1\oplus\mathrm{A}_{3.2}$ і $\mathrm{A}_{4.10}\to\mathrm{A}_1\oplus\mathrm{A}_{3.2}$. Оскільки комплексифікації $2\mathfrak{g}_{2.1}$ та $\mathfrak{g}_{4.10}$ ізоморфні, то у комплексному випадку є лише одна така контракція — $2\mathfrak{g}_{2.1}\to\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_{3.2}$.

Теорема 2.7. *Існує єдина контракція між чотиривимірними комплексними алгебрами Лі —* $2\mathfrak{g}_{2.1}\to\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_{3.2}$*, яку не можна реалізувати узагальненою IВ-контракцією.*

Наслідок 2.9. *Рівно дві контракції між чотиривимірними дійсними алгебрами Лі,* $2\mathrm{A}_{2.1}\to\mathrm{A}_1\oplus\mathrm{A}_{3.2}$ *та* $\mathrm{A}_{4.10}\to\mathrm{A}_1\oplus\mathrm{A}_{3.2}$*, не можна реалізувати узагальненими IВ-контракціями.*

Важливість цих тверджень полягає в тому, що вони встановлюють нижню межу розмірностей алгебр Лі, для яких узагальнені IВ-контракції не є універсальними. Також вони дають перші приклади контракцій, нереалізовних як узагальнені IВ-контракції, у випадку, коли контрактована алгебра не є характеристично нільпотентною і допускає нетривіальні діагональні диференціювання.

Комбінування зазначених результатів дає таке твердження.

Теорема 2.11. *Будь-яка узагальнена IВ-контракція між чотиривимірними комплексними (відповідно дійсними) алгебрами Лі еквівалентна контракції того самого типу з компонентами сигнатури з* $\{0,1,2,3\}$*. Множина* $\{0,1,2\}$ *достатня для всіх контракцій, окрім* $2\mathrm{A}_{2.1}\to\mathrm{A}_{4.1}$, $\mathrm{A}_{4.10}\to\mathrm{A}_{4.1}$ *та* $\mathrm{so}(3)\oplus\mathrm{A}_1\to\mathrm{A}_{4.1}$ *у дійсному випадку і* $2\mathfrak{g}_{2.1}\to\mathfrak{g}_{4.1}$ *у комплексному випадку, де мінімальною є сигнатура* $(3,2,1,1)$.

Як підсумок дослідження реалізацій контракцій між чотиривимірними комплексними (або дійсними) алгебрами Лі, теорема 2.10 стверджує, що будь-яку таку контракцію можна реалізувати узагальненою IВ-контракцією чи контракцією Салетана.

Контракцію $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_0$ називають *діагональною*, якщо її матрицю U_ε можна представити у вигляді $U_\varepsilon = AW_\varepsilon P$, де A і P — сталі невироджені матриці, а $W_\varepsilon = \mathrm{diag}(f_1(\varepsilon), \dots, f_n(\varepsilon))$ для деяких неперервних функцій $f_i\colon (0,1] \to \mathbb{F}\backslash\{0\}$.

Теорема 2.13. *Довільна діагональна контракція еквівалентна узагальненій IВ-контракції з цілочисловою сигнатурою.*

У **третьому** розділі вивчено ліївськи ортогональні оператори на скінченновимірних алгебрах Лі. Лінійний оператор J на алгебрі $\mathfrak{g}$ називають *ліївськи ортогональним*, якщо $[Jx, Jy] = [x, y]$ для довільних $x, y \in \mathfrak{g}$. Введено природне відношення еквівалентності на таких операторах. Доведено, що центр, радикал і елементи зростаючого центрального ряду є інваріантними відносно дії будь-якого ліївськи ортогонального оператора. З властивостей кореневих підпросторів ліївськи ортогональних операторів виведено, що над алгебраїчно замкненим полем характеристики нуль лише розв'язні алгебри Лі степеня розв'язності не більше за два допускають ліївськи ортогональні оператори, спектри яких не містять 1 і -1.

Вивчено ліївськи ортогональні автоморфізми. Знайдено зображення для таких автоморфізмів, яке конкретизовано у лемі 3.39 і теоремі 3.40 для алгебр Лі з нульовим центром. А саме, оператор J на скінченновимірній алгебрі $\mathfrak{g}$ з нульовим центром є ліївськи ортогональним автоморфізмом тоді і лише тоді, коли він допускає представлення у вигляді $J = \mathrm{id}_\mathfrak{g} + N$, де N — оператор на $\mathfrak{g}$ з $N^2 = 0$, $N\mathfrak{g}' = (N\mathfrak{g})' = \{0\}$, що є $(0,1,1)$-диференціюванням на $\mathfrak{g}$. Понад те, множина всіх таких операторів N є асоціативною алгеброю відносно композиції операторів з тривіальним (тотожно нульовим) антикомутатором.

Вичерпно описано ліївськи ортогональні оператори на метричних алгебрах Лі.

Теорема 3.43. *Нехай $\mathfrak{g}$ — скінченновимірна метрична алгебра Лі, а J — ліївськи ортогональний оператор на $\mathfrak{g}$. Тоді існують розклад алгебри $\mathfrak{g}$ у пряму суму двох ідеалів $\mathfrak{i}_+$, $\mathfrak{i}_-$ (тобто $\mathfrak{g} = \mathfrak{i}_+ \oplus \mathfrak{i}_-$) і оператор $J_\mathfrak{z}$ на $\mathfrak{g}$ з образом, що міститься в центрі $\mathfrak{z}$ алгебри $\mathfrak{g}$, такі, що $J = \mathrm{id}_{\mathfrak{i}_+} \oplus (-\mathrm{id}_{\mathfrak{i}_-}) + J_\mathfrak{z}$.*

З цього опису випливає, що ліївськи ортогональні оператори на простих алгебрах Лі вичерпуються тривіальними. Це дало змогу повністю описати ліївськи ортогональні оператори на напівпростих та редуктивних алгебрах, а також попередньо описати ліївськи ортогональні оператори на алгебрах Лі з нетривіальним розкладом Леві–Мальцева.

Прямим методом обчислено множини ліївськи ортогональних операторів на певних класах алгебр Лі (алгебрах Гейзенберга, майже абелевих алгебрах, алгебрах низьких розмірностей тощо). Так, група класів еквівалентності ліївськи ортогональних операторів алгебри Гейзенберга ізоморфна стандартній симплектичній групі відповідної розмірності.

Основні результати дисертації підсумовано у висновках. Список наукових праць, де опубліковано результати дисертації, й інформацію щодо їхньої апробації наведено у додатку А.

ВИСНОВКИ

Основні результати дисертації можна підсумувати таким чином:

- Описано поведінку прапорів підалгебр, ідеалів і підпросторів при контракціях алгебр Лі, що дає нові критерії неіснування контракцій. З їх допомогою показано неіснування контракцій для низки пар шестивимірних нільпотентних дійсних алгебрі Лі, для яких не працюють раніше відомі критерії.

- Для кожної розмірності не менше п'яти знайдено приклад контракції між розв'язними алгебрами Лі, яку можна реалізувати лише за допомогою матриць, евклідові норми яких обов'язково прямують до нескінченності при граничному значенні параметра контракції.

- Показано, що з точністю до замін базисів початкової і кінцевої алгебр Лі будь-яку контракцію Салетана можна реалізувати матричнозначною функцією, цілком визначеною розбиттям розмірності нульової компоненти Фіттінга її значення при граничному значенні параметра контракції. Це дало змогу ввести поняття сигнатури контракції Салетана, яку складають розмірність одиничної компоненти Фіттінга такого значення та вказане розбиття. Вивчено контракції Салетана з зазначеними одиничними компонентами Фіттінга розмірності нуль. Вичерпно прокласифіковано такі контракції між алгебрами Лі розмірності три.

• Запропоновано алгоритм побудови узагальнених контракцій Іньоню–Вігнера або доведення їх неіснування для фіксованої пари алгебр Лі. За допомогою цього алгоритму оптимізовано відомий з літератури опис узагальнених контракцій Іньоню–Вігнера три- та чотиривимірних дійсних і комплексних алгебр Лі. Зокрема, показано, що будь-яка узагальнена контракція Іньоню–Вігнера між чотиривимірними комплексними або дійсними алгебрами Лі еквівалентна такій контракції зі степенями параметра контракції з множини $\{0,1,2,3\}$, причому ця множина є мінімальною.

• Показано, що існує єдина пара комплексних чотиривимірних алгебр Лі, добре визначена контракція між якими не еквівалентна узагальненій контракції Іньоню–Вігнера. Над полем дійсних чисел цій парі відповідають дві пари алгебр Лі з однаковою контрактованою алгеброю.

• Доведено, що будь-яка діагональна контракція еквівалентна узагальненій контракції Іньоню–Вігнера з цілими степенями параметра контракції.

• Вивчено основні властивості ліївськи ортогональних операторів на скінченновимірних алгебрах Лі. Так, введено природне поняття еквівалентності таких операторів. Показано інваріантність центра, радикала та членів зростаючого центрального ряду відносно дії довільного ліївськи ортогонального оператора. Доведено, що над алгебраїчно замкненим полем характеристики 0 лише розв'язні алгебри Лі степеня розв'язності не більше за два допускають ліївськи ортогональні оператори, спектри яких не містять 1 і -1.

• Вивчено ліївськи ортогональні автоморфізми алгебр Лі. Знайдено зображення для таких автоморфізмів, яке конкретизовано для алгебр Лі з нульовим центром. На основі цього зображення для кожної з таких алгебр встановлено взаємнооднозначну відповідність між її групою ліївськи ортогональних автоморфізмів і асоціативною алгеброю нільпотентних операторів степеня нільпотентності два з тривіальним (тотожно нульовим) антикомутатором відносно композиції операторів.

• Вичерпно описано ліївськи ортогональні оператори на метричних алгебрах Лі. Зокрема, на простих алгебрах Лі можливі лише тривіальні ліївськи ортогональні оператори. Це дало змогу отримати повний опис ліївськи ортогональних операторів на напівпростих і редуктивних алгебрах Лі, а також попередній опис ліївськи ортогональних операторів з нетривіальним розкладом Леві–Мальцева.

- Для деяких класів алгебр Лі (алгебр Гейзенберга, майже абелевих алгебр, алгебр низьких розмірностей тощо) відповідні множини ліївськи ортогональних операторів обчислено прямим методом.

Список опублікованих праць за темою дисертації

1. Попович Д.Р., Прапори підалгебр у контрактованих алгебрах Лі, *Допов. Нац. акад. наук Укр.* (2021), № 4, 9–17.
2. Popovych D.R., Canonical forms for matrices of Saletan contractions, *J. Phys.: Conf. Ser.* **621** (2015), 012012, 10 pp., arXiv:1507.00781.
3. Popovych D.R., Contractions with necessarily unbounded matrices, *Linear Algebra Appl.* **458** (2014), 689–698, arXiv:1401.5456.
4. Popovych D.R., Lie-orthogonal operators, *Linear Algebra Appl.* **438** (2013), 2090–2106, arXiv:1109.1548.
5. Popovych D.R. and Popovych R.O., Lowest dimensional example on non-universality of generalized Inönü–Wigner contractions, *J. Algebra* **324** (2010), 2742–2756, arXiv:0812.1705.
6. Popovych D.R. and Popovych R.O., Equivalence of diagonal contractions to generalized IW-contractions with integer exponents, *Linear Algebra Appl.* **431** (2009), 1096–1104, arXiv:0812.4667.
7. Попович Д.Р., Контракція між алгебрами Лі з обов'язково сингулярними компонентами матриці контракції, *Допов. Нац. акад. наук Укр.* (2014), № 7, 29–35.
8. Popovych D.R., Generalized IW-contractions of low-dimensional Lie algebras, *Proceedings of the Sixth International Workshop "Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems" (Protaras, Cyprus, June 17–21, 2012)*, University of Cyprus, Nicosia, 2013, pp. 179–191.
9. Popovych D.R., Subalgebra and subspace flags in contracted Lie algebras, *Book of abstracts of the 13th International Algebraic Conference in Ukraine (2021, July 6–9, Kyiv, Ukraine)*, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, 2021, p. 62.
10. Popovych D.R., Chains of subalgebras in contracted Lie algebras, *Book of abstracts of the International Conference of Young Mathematicians (2021, June 3–5, Kyiv, Ukraine)*, Institute of Mathematics

of NAS of Ukraine, Kyiv, 2021, p. 36. https://www.imath.kiev.ua/~young/youngconf2021/Abstracts_2021.pdf

11. Popovych D.R., IW contractions and their generalizations, *Book of abstracts of the International Conference "Algebraic and Geometric Methods of Analysis" dedicated to the memory of Yuriy Trokhymchuk (17.03.1928–18.12.2019) (2021, May 25–28, Odesa, Ukraine)*, pp. 116–117. https://www.imath.kiev.ua/~topology/conf/agma2021/contents/agma2021-abstracts.pdf
12. Popovych D.R., Contractions with specific contraction matrices, *Book of abstracts of the Seventh International Workshop "Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems" (2014, June 15–19, Larnaca, Cyprus)*, p. 36.
13. Popovych D., Lowest dimensional example of contraction with necessarily singular matrix components, *International Workshop "Symmetry and Integrability of Equations of Mathematical Physics" (2013, December 22–23, Kyiv, Ukraine)*. Abstract. http://www.imath.kiev.ua/appmath/~AbstractsWIF/PopovychD2013
14. Popovych D.R., Application of Voronoi theorem to diagonal contractions of Lie algebras, *Book of abstracts of the Fifth International Conference on Analytic Number Theory and Spatial Tessellations, (2013, September 16–20, Kyiv, Ukraine)*, pp. 26–27.
15. Попович Д.Р., Діагональні контракції алгебр Лі, *Тези Третьої міжуніверситетської наукової конференції молодих вчених з математики та фізики (25–27 квітня 2013 р., Київ, Україна)*, с. 132–133.
16. Popovych D., Non-universality of IW-contractions, *Book of abstracts of the Sixth International Workshop "Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems" (2012, June 17–21, Protaras, Cyprus)*, p. 35.
17. Popovych D., Lie-orthogonal operators, *International Workshop "Symmetry and Integrability of Equations of Mathematical Physics" (2011, December 18–19, Kyiv, Ukraine)*. Abstract. http://www.imath.kiev.ua/~appmath/AbstractsWIF/PopovychD
18. Popovych D.R., Generalized IW-contractions of Lie algebras, *International Conference "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics" (2009, June 21–27, Kyiv, Ukraine)*. Abstract. https://www.imath.kiev.ua/~appmath/Abstracts2009/PopovychD

АНОТАЦІЯ

Попович Д.Р. Узагальнення контракцій Іньоню–Вігнера і ліївськи ортогональні оператори — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.06 — алгебра та теорія чисел (111 — математика). — Інститут математики НАН України та Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, 2021.

Вивчено властивості контракцій скінченновимірних дійсних і комплексних алгебр Лі, спеціальні типи реалізації контракцій, як-то контракції Салетана, контракції з необмеженими матрицями, узагальнені контракції Іньоню–Вігнера, а також ліївськи ортогональні оператори на таких алгебрах. Зокрема, описано поведінку прапорів підалгебр, ідеалів та підпросторів при контракціях алгебр Лі, що дає нові критерії неіснування контракцій. Для кожної розмірності не менше п'яти побудовано приклад контракції, реалізовної лише матричнозначними функціями з елементами, необмеженими при граничному значенні аргументу. Знайдено канонічну форму матриць і введено поняття сигнатури для контракцій Салетана. Запропоновано алгоритм побудови узагальнених контракцій Іньоню–Вігнера або доведення їх неіснування для фіксованої пари алгебр Лі. За його допомогою оптимізовано відомий опис узагальнених контракцій Іньоню–Вігнера три- та чотиривимірних дійсних і комплексних алгебр Лі. Показано неуніверсальність таких контракцій у розмірності чотири. Доведено, що будь-яка діагональна контракція еквівалентна узагальненій контракції Іньоню–Вігнера з цілими степенями параметра контракції. Введено поняття еквівалентності ліївськи ортогональних операторів на алгебрах Лі. Описано алгебри, що допускають ліївськи ортогональні оператори, спектр яких не містить 1 і -1. Знайдено зображення для ліївськи ортогональних автоморфізмів. Вичерпно описано ліївськи ортогональні оператори на метричних алгебрах Лі. Для низки класів алгебр Лі відповідні множини ліївськи ортогональних операторів обчислено прямим методом.

Ключові слова: алгебри Лі, контракції алгебр Лі, прапори підалгебр, контракції Іньоню–Вігнера, контракції Салетана, діагональні контракції, узагальнені контракції Іньоню–Вігнера, ліївськи ортогональні оператори.

ABSTRACT

Popovych D.R. Generalizations of Inönü–Wigner contractions and Lie-orthogonal operators. — Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

Thesis for the degree of Candidate of Physical and Mathematical Sciences, speciality 01.01.06 "Algebra and Number Theory" (111 — Mathematics). — Institute of Mathematics of NAS of Ukraine and Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, 2021.

In the thesis, the main attention is paid to problems related to contractions between finite-dimensional real and complex Lie algebras, special kinds of contractions such as Saletan contractions, contractions with necessarily unbounded matrices and generalized Inönü–Wigner contractions. Also studied are Lie-orthogonal operators on such algebras.

We describe the behavior of subalgebra and subspace flags of Lie algebras under contractions, which gives new criteria for nonexistence of contractions. Using them, we show the nonexistence of contractions for a number of pairs of six-dimensional nilpotent real Lie algebras, for which the earlier known criteria do not work. For each dimension not less than five, we construct a contraction between solvable Lie algebras that can be realized only with matrices whose Euclidean norms necessarily approach infinity at the limit value of the contraction parameter. We show that each Saletan (linear) contraction can be realized, up to change of bases of the initial and the target Lie algebras, by a matrix-function that is completely defined by a partition of the dimension of Fitting null component of its value at the limit value of the contraction parameter. The dimension of the Fitting one component and the above partition constitute the signature of the Saletan contraction. We study Saletan contractions with Fitting null components of maximal dimension and trivial one-part partition. All contractions of such kind in dimension three are completely classified.

An algorithm of finding generalized IW-contractions or proving their nonexistence for a certain pair of Lie algebras is suggested. Using this algorithm, we optimize the known description of the generalized IW-contractions of three- and four-dimensional algebras. We prove that there exists just one pair of complex four-dimensional Lie algebras such that a well-defined contraction among them is not equivalent to a generalized IW-contraction (or to a one-parametric subgroup degeneration in conventional algebraic terms). Over the field of real numbers, this pair of

algebras splits into two pairs with the same contracted algebra. The example we constructed demonstrates that even in dimension four generalized IW-contractions do not suffice for realizing all possible contractions, and this is the lowest dimension in which generalized IW-contractions are not universal. Moreover, this is also the first example of nonexistence of generalized IW-contraction for the case when the contracted algebra is not characteristically nilpotent and, therefore, admits nontrivial diagonal derivations. The lower bound (equal to three) of nonnegative integer parameter exponents that suffice for realizing all generalized IW-contractions of four-dimensional Lie algebras is also found. Any diagonal contraction (e.g., a generalized Inönü–Wigner contraction) is proved to be equivalent to a generalized Inönü–Wigner contraction with integer parameter powers.

Basic properties of Lie-orthogonal operators on a finite-dimensional Lie algebra are studied. In particular, we introduce a natural equivalence relation on such operators. It is proved that the center, the radical and the elements of the ascending central series are invariant with respect to any Lie-orthogonal operator. Over an algebraically closed field of characteristic 0, only solvable Lie algebras with solvability degree not greater than two are shown to admit Lie-orthogonal operators whose all eigenvalues differ from 1 and -1. We obtain a representation for Lie-orthogonal automorphisms, which is then specified for the case of Lie algebras with zero centers. Lie-orthogonal operators on metric Lie algebras are completely described. This description implies that Lie-orthogonal operators on a simple Lie algebra are exhausted by the trivial ones, which allows us to give the complete description of Lie-orthogonal operators for semisimple and reductive algebras. We preliminarily describe Lie-orthogonal operators on Lie algebras with nontrivial Levi–Mal'tsev decomposition as well. The sets of Lie-orthogonal operators of some classes of Lie algebras (Heisenberg algebras, almost Abelian algebras, three- and four-dimensional Lie algebras, five-dimensional nilpotent Lie algebras, etc.) are directly computed. In particular, it turns out that the group formed by the equivalence classes of Lie-orthogonal operators on a Heisenberg algebra is isomorphic to the standard symplectic group of the appropriate dimension.

Key words: Lie algebras, contractions of Lie algebras, subalgebra flags, Inönü–Wigner contractions, Saletan contractions, diagonal contractions, generalized Inönü–Wigner contractions, Lie-orthogonal operators.

Підписано до друку 28.10.2021. Формат 60×84/16. Папір офс. Офс. друк.
Фіз. друк. арк. 1,06. Умов. друк. арк. 0,98.
Наклад 100 пр. Зам. 51.

Інститут математики НАН України,
01024, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.