

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Котов Тарас Олександрович

УДК 517.93; 519.71

ДИСЕРТАЦІЯ

Робастна стабілізація та зважене гасіння обмежених збурень у дескрипторних системах керування

113 — прикладна математика

Подається на здобуття третього (освітньо-наукового) рівня вищої освіти —
доктора філософії

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей,
результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело
Т.О. Котов

Науковий керівник: **Мазко Олексій Григорович**,
доктор фізико-математичних наук, професор

Київ — 2021

АНОТАЦІЯ

Котов Т.О. Робастна стабілізація та зважене гасіння обмежених збурень у дескрипторних системах керування. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 113 – прикладна математика. — Інститут математики НАН України, Київ, 2021.

Дисертаційна робота присвячена розробці нових методів стабілізації та оптимізації дескрипторних систем керування за умов невизначеності. Наявність невизначених елементів у рівняннях руху керованих об'єктів обумовлюється аналітичною складністю математичного моделювання та дією зовнішніх неконтрольованих збурень, які суттєво впливають на стійкість та якість даних об'єктів в реальних умовах. Задача робастної стабілізації полягає у побудові законів керування, які забезпечують асимптотичну стійкість руху керованого об'єкта при допустимих значеннях елементів невизначеності.

Сучасна теорія H_∞ -керування, засновниками якої є G. Zames, В.А. Francis, J.C. Doyle та ін. (1981 – 1990), розв'язує важливі для практики проблеми оцінки та мінімізації рівня впливу обмежених збурень на стійкість та якість керованих систем. Вказані проблеми є особливо актуальними для класу дескрипторних систем, які дозволяють описувати динаміку багатьох керованих об'єктів механіки, робототехніки, електротехніки, економіки тощо. Розвиток та узагальнення методів H_∞ -оптимізації неперервних та дискретних систем керування отримано у роботах багатьох авторів (Р. Gahinet, Р. Arkarian, І. Masubushi, А.А. Stoer, T. Iwasaki, S. Boyd, Z. Feng, S. Zhou, A. Rehm, Б.Т. Поляк, П.С. Щербаков, Д.В. Баландин, М.М. Коган, В.М. Кунцевич, В.Б. Ларін, О.Г. Мазко та ін.).

Дисертація складається з анотацій українською й англійською мовами, вступу, чотирьох розділів основної частини, висновків, списку використаних джерел і додатка.

У вступі обґрунтовано актуальність тематики дослідження, наведено мету, об'єкт, предмет, завдання і методи дослідження, відмічено наукову новизну отриманих результатів, їхнє практичне значення, зв'язок роботи з науковими темами та особистий внесок здобувача, а також інформацію про апробацію результатів дисертаційної роботи.

У першому розділі проведено огляд літературних джерел та основних задач, пов'язаних з темою дисертаційної роботи. Наведено основні класичні результати з теорії стійкості руху, відомі методи стабілізації та оптимізації систем керування з невизначеністю, а також ряд прикладів конкретних дескрипторних моделей динамічних систем, що застосовуються на практиці.

Другий розділ присвячено аналітичному дослідженні класу лінійних дескрипторних систем. На основі канонічної форми регулярної в'язки матриць досліджена структура загального розв'язку регулярних дескрипторних систем з узгодженими початковими умовами, встановлено алгебраїчний критерій неімпульсності регулярної в'язки матриць та наведено умови стійкості таких систем в термінах матричних рівнянь та нерівностей. Виділено клас допустимих дескрипторних систем, які описують регулярні, неімпульсні та стійкі в'язки матриць.

Для класу дескрипторних систем з обмеженими зовнішніми та початковими збуреннями

$$E\dot{x} = Ax + Bw, \quad z = Cx + Dw, \quad x(0) = x_0,$$

використовуються основні критерії якості

$$J_0 = \sup_{0 < \|w\|_P^2 < \infty} \frac{\|z\|_Q}{\|w\|_P}, \quad J = \sup_{0 < \|w\|_P^2 + x_0^\top X_0 x_0 < \infty} \frac{\|z\|_Q}{\sqrt{\|w\|_P^2 + x_0^\top X_0 x_0}},$$

де $\|z\|_Q$ і $\|w\|_P$ — зважені L_2 -норми відповідно векторів виходу та зовнішніх збурень, $P > 0$, $Q > 0$ і $X_0 = E^\top H E \geq 0$ — вагові матриці. Значення J_0 у випадку одиничних вагових матриць збігається з класичним критерієм якості — H_∞ -нормою матричної передатної функції системи, а критерій якості J характеризує зважений рівень гасіння зовнішніх і початкових збурень у

системі. Наведено необхідні та достатні умови, що забезпечують виконання верхніх оцінок наведених критеріїв якості $J_0 < \gamma$ та $J < \gamma$ (підрозділ 2.3). У підрозділі 2.4 запропоновано методику знаходження найгірших зовнішніх і початкових збурень у дескрипторних системах стосовно зваженого критерію якості J .

У розділі 3 досліджується клас лінійних дескрипторних систем керування

$$\begin{aligned} E\dot{x} &= Ax + B_1w + B_2u, \quad x(0) = x_0, \\ z &= C_1x + D_{11}w + D_{12}u, \quad y = C_2x + D_{21}w + D_{22}u, \end{aligned}$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $w \in \mathbb{R}^s$, $z \in \mathbb{R}^k$ і $y \in \mathbb{R}^l$ — вектори відповідно стану, керування, зовнішніх збурень, керованого і спостережуваного виходів, а всі матричні коефіцієнти відповідних розмірів сталі, причому $\text{rank } E = \rho \leq n$. Основною задачею для таких систем є пониження та мінімізація впливу обмежених збурень на їхню динаміку і, зокрема, стійкість за допомогою придатних законів керування. Статичні та динамічні регулятори, які мінімізують значення зваженого критерію якості J замкненої системи, називаються J -оптимальними. Наближені методи знаходження таких регуляторів базуються на умовах виконання верхньої оцінки $J < \gamma$ при мінімально можливих значеннях γ .

У підрозділі 3.2 в термінах лінійних матричних нерівностей при додаткових рангових обмеженнях встановлено необхідні і достатні умови існування стабілізуючих статичних регуляторів за спостережуванним виходом $u = Ky$, при яких замкнена система належить класу допустимих дескрипторних систем і її зважений рівень гасіння зовнішніх і початкових збурень J менший заданого значення (теорема 3.1). Виділено окремі випадки даних умов, коли алгоритми пошуку матриці коефіцієнтів підсилення K суттєво спрощуються. Зокрема, при виконанні додаткових умов

$$C_2 = I_n, \quad D_{11}^\top Q D_{11} < \gamma^2 P, \quad D_{21} = 0, \quad D_{22} = 0$$

існує статичний регулятор за станом $u = Kx$, при якому замкнена система допустима і виконується бажана оцінка $J < \gamma$. При цьому відповідний алгоритм пошуку матриці K зводиться до розв'язування лише лінійних матричних нерівностей без додаткових рангових обмежень.

Розвинуто комбінований метод лінійних та квадратичних матричних нерівностей для розв'язання узагальненої задачі H_∞ -керування зі зваженим критерієм якості J (теорема 3.2). Для практичного застосування цього методу встановлено критерій сумісності квадратичних матричних нерівностей загального вигляду при додаткових рангових обмеженнях на матричні коефіцієнти (лема 3.2).

Встановлено необхідні і достатні умови існування динамічного регулятора за спостережуванним виходом з нульовим початковим вектором

$$\dot{\xi} = Z\xi + Vy, \quad u = U\xi + Ky, \quad \xi \in \mathbb{R}^p, \quad \xi(0) = 0,$$

при якому замкнена система у розширеному фазовому просторі $\mathbb{R}^{n+p}$ належить класу допустимих дескрипторних систем і її зважений рівень гасіння зовнішніх і початкових збурень J менший заданого значення (теорема 3.3). З метою спрощення процедури пошуку невідомих матричних коефіцієнтів регулятора встановлена допоміжна лема 3.3 про еквівалентність блочних матричних співвідношень, які можна застосувати у твердженнях теореми 3.3. Отримані умови в загальному випадку зведено до розв'язання лінійних матричних нерівностей при додаткових рангових обмеженнях. Розроблено і чисельно реалізовано алгоритми синтезу статичних та динамічних регуляторів для розв'язання узагальненої задачі H_∞ -керування (підрозділ 3.3). Результати розрахунків на чисельних прикладах узгоджені з отриманими теоретичними висновками. Виділено клас нелінійних дескрипторних систем з керованими і спостережуваними виходами, для яких можуть бути застосовані отримані методи розв'язання проблеми зваженого H_∞ -керування з локальним критерієм якості J .

У розділі 4 викладено результати досліджень узагальненої задачі H_∞ -керування для дескрипторних систем з керованими і спостережуваними виходами за умов поліедральної невизначеності матричних коефіцієнтів

$$\begin{aligned} A &\in \text{Co}\{A_1, \dots, A_{\nu_1}\}, & B_1 &\in \text{Co}\{B_1^1, \dots, B_1^{\nu_2}\}, \\ C_1 &\in \text{Co}\{C_1^1, \dots, C_1^{\nu_3}\}, & D_{11} &\in \text{Co}\{D_{11}^1, \dots, D_{11}^{\nu_4}\}, \end{aligned}$$

де $\text{Co}\{A_1, \dots, A_\nu\}$ — політоп (багатогранник) з вершинами $A_1, \dots, A_\nu$ у просторі матриць, тобто опукла множина матриць

$$\left\{ \sum_{i=1}^{\nu} a_i A_i : a_i \geq 0, i = \overline{1, \nu}, \sum_{i=1}^{\nu} a_i = 1 \right\}.$$

Окремими випадками поліедральної невизначеності можуть бути, наприклад, інтервальна або афінна невизначеності матричних коефіцієнтів, які часто використовуються в практичних задачах робастної стабілізації та оптимізації керованих систем.

У підрозділі 4.1 наведено нове формулювання відомої леми про матричну нерівність з поліедральними коефіцієнтами, на основі якої узагальнено основні результати з розділу 3. Встановлено достатні умови існування стабілізуючих динамічних регуляторів за спостережуваним виходом, при яких замкнена система з поліедральною невизначеністю матричних коефіцієнтів належить класу допустимих дескрипторних систем і її зважений рівень гасіння зовнішніх і початкових збурень J менший заданого значення (теорема 4.1). Отримані умови у окремому випадку забезпечують існування статичного регулятора за спостережуваним виходом, при якому замкнена система має аналогічні властивості, причому при застосуванні статичних регуляторів за станом дані умови зводяться до розв’язування лише лінійних матричних нерівностей. Комбінований метод лінійних та квадратичних матричних нерівностей для розв’язання узагальненої задачі H_∞ -керування зі зваженим критерієм якості J поширено на сім’ю лінійних дескрипторних систем, яку описують невизначені матричні коефіцієнти (теорема 4.2).

Застосовуючи узагальнену лему про матричну невизначеність, розвинуто методику побудови еліпсоїдальної множини матриць статичних регуляторів за спостережуваним виходом $\mathcal{K} = \{K : K^\top P_0 K \leq Q_0\}$, при яких замкнена система належить класу допустимих дескрипторних систем і її зважений рівень гасіння зовнішніх і початкових збурень J менший заданого значення (підрозділ 4.3).

Розроблені методи дослідження, що базуються на розв’язанні систем лінійних та квадратичних матричних нерівностей, за допомогою комп’ютерних

засобів продемонстровано в задачах робастної стабілізації та зваженої H_∞ -оптимізації для дескрипторної моделі керування електричного кола за умов інтервальної невизначеності опорів (підрозділ 4.4).

У додатку викладено список публікацій здобувача за темою дисертаційної роботи та відомості про апробацію результатів даної роботи.

Ключові слова: дескрипторна система, робастна стійкість, функція Ляпунова, робастна стабілізація, H_∞ -керування, статичний регулятор, динамічний регулятор, матрична нерівність.

Kotov T.O. Robust stabilization and weighted damping of bounded disturbances in descriptor control systems. — Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

The dissertation on competition of a scientific degree of the doctor of philosophy on a specialty 113 – applied mathematics. — Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2021.

The dissertation is devoted to the development of new methods of stabilization and optimization of descriptor control systems with uncertainties. The availability of uncertainty elements in the motion equations of controlled objects is due to the analytical complexity of mathematical modeling and the action of external uncontrolled disturbances, which significantly affect the stability and quality of these objects in actual conditions. The robust stabilization problem consists of constructing a control law, which provides an asymptotic stability of the controlled object motion with admissible values of uncertainty elements.

The modern H_∞ -control theory founded by G. Zames, B.A. Francis, J.C. Doyle et al. (1981 – 1990) solves important practical problems of estimating and minimizing the level of influence of bounded disturbances on the stability and quality of controlled systems. These problems are especially relevant for a class of descriptor systems, which allow us to describe the dynamics of many controlled objects of mechanics, robotics, electrical engineering, economics, etc. Development and generalization of H_∞ -optimization methods for continuous and discrete-time

control systems are received in works of many authors (P. Gahinet, P. Apkarian, I. Masubushi, A.A. Stoorvogel, T. Iwasaki, S. Boyd, Z. Feng, S. Zhou, A. Rehm, B.T. Polyak, P.S. Scherbakov D.V. Balandin, M.M. Kogan, V.M. Kuntsevich, V.B. Larin, A.G. Mazko etc.).

The dissertation consists of an abstract in Ukrainian and in English, an introduction, four chapters of the main results, conclusions, references and an appendix.

The introduction grounds the actuality of the research topic and formulates the purpose, object, subject, task and methods of the research, indicates the scientific novelty of the obtained results, their practical significance, the relation of the research to scientific programs, the personal contribution of the applicant as well as points out information about the approbation of main obtained results of the dissertation.

The first chapter reviews the literature sources and the main tasks related to the topic of the dissertation. The main classical results from the theory of motion stability, known methods of stabilization and optimization of control systems with uncertainty, and several examples of specific descriptor models of dynamical systems used in practice are given.

The second chapter is devoted to the analytical study of the class of linear descriptor systems. Based on the canonical form of regular matrix pencil, a structure of the general solution of regular descriptor systems with agreed initial conditions is investigated. An algebraic criterion is established, which guarantees the regular matrix pencil to be impulse-free and the stability conditions of such systems in terms of matrix equations and inequalities are given. A class of admissible descriptor systems is distinguished, which describe regular, impulse-free and stable matrix pencils.

For a class of descriptor systems with bounded external and initial perturbations

$$E\dot{x} = Ax + Bw, \quad z = Cx + Dw, \quad x(0) = x_0,$$

we use the basic performance measures

$$J_0 = \sup_{0 < \|w\|_P^2 < \infty} \frac{\|z\|_Q}{\|w\|_P}, \quad J = \sup_{0 < \|w\|_P^2 + x_0^\top X_0 x_0 < \infty} \frac{\|z\|_Q}{\sqrt{\|w\|_P^2 + x_0^\top X_0 x_0}},$$

where $\|z\|_Q$ and $\|w\|_P$ are the weighted L_2 -norms of output vector and perturbation vector, accordingly, and $P > 0$, $Q > 0$ and $X_0 = E^\top H E \geq 0$ are the weighted matrices. The value of J_0 in the case of identity weight matrices coincides with the classical performance measure — H_∞ -norm of the matrix transfer function of the system, and the performance measure J characterizes the weighted damping level of external and initial perturbations in the system. Necessary and sufficient conditions are given to ensure the fulfillment of the upper evaluations for given performance measures $J_0 < \gamma$ and $J < \gamma$ (section 2.3). Section 2.4 proposes a method for finding the worst external and initial perturbations in descriptor systems with respect to the weighted performance measure J .

In chapter 3, the class of linear descriptor control systems

$$\begin{aligned} E\dot{x} &= Ax + B_1w + B_2u, \quad x(0) = x_0, \\ z &= C_1x + D_{11}w + D_{12}u, \quad y = C_2x + D_{21}w + D_{22}u, \end{aligned}$$

is investigated, where $x \in \mathbb{R}^n$ is the state, $u \in \mathbb{R}^m$ is the control input, $w \in \mathbb{R}^s$ is the exogenous input (perturbations), $z \in \mathbb{R}^k$ is the regulated output and $y \in \mathbb{R}^l$ is the measured output, and all matrix coefficients are constant matrices with compatible dimensions, and $\text{rank } E = \rho \leq n$. The main problem for such systems is to reduce and minimize the influence of bounded perturbations on their dynamics and, in particular, stability with the help of appropriate control laws. Static and dynamic controllers that minimize the value of weighted performance measure J for a closed-loop system are called J -optimal. Approximate methods for finding such controllers are based on the conditions of performing the upper estimate $J < \gamma$ at the minimum possible values of γ .

In section 3.2, in terms of linear matrix inequalities with additional rank restrictions, the necessary and sufficient conditions for the existence of stabilizing static output controllers $u = Ky$, are obtained to ensure the closed-loop system to be admissible and its weighted damping level of external and initial disturbances J to

be less than the specified value (theorem 3.1). Some cases of these conditions are highlighted, when the algorithms for finding the gain matrix K are significantly simplified. In particular, if the following additional conditions

$$C_2 = I_n, \quad D_{11}^\top Q D_{11} < \gamma^2 P, \quad D_{21} = 0, \quad D_{22} = 0$$

hold, then there exists a static state-feedback controller $u = Kx$ to ensure the closed-loop system to be admissible and the performance measure J to be less than a prescribed scalar. In this case, the corresponding matrix search algorithm K is reduced to solving only linear matrix inequalities without additional rank restrictions.

A combined method of linear and quadratic matrix inequalities for solving the generalized H_∞ -control problem with a weighted performance measure J is developed (theorem 3.2). For the practical application of this method, the solvability criterion for quadratic matrix inequalities of general form with additional rank restrictions on matrix coefficients is established (lemma 3.2).

Necessary and sufficient conditions of existence of the dynamic controller with zero initial state

$$\dot{\xi} = Z\xi + Vy, \quad u = U\xi + Ky, \quad \xi \in \mathbb{R}^p, \quad \xi(0) = 0,$$

are established to ensure the closed-loop system in the extended phase space $\mathbb{R}^{n+p}$ to be admissible and its weighted damping level of external and initial disturbances J to be less than the specified value (Theorem 3.3). In order to simplify the procedure for searching for unknown matrix coefficients of the controller, auxiliary lemma 3.3 on the equivalence of block matrix relations, which can be applied in the statements of theorem 3.3, is established. In the general case, the obtained conditions are reduced to solving the linear matrix inequalities with additional rank constraints. Algorithms for the synthesis of static and dynamic controllers for solving the generalized H_∞ -control problem have been developed and numerically implemented (subsection 3.3). The results of calculations for numerical examples are consistent with the obtained theoretical conclusions. A class of nonlinear descriptor systems with controllable and observable outputs is

distinguished, for which the obtained methods for solving the problem of weighted H_∞ -control with the local performance measure J can be applied.

Chapter 4 presents the results of studies of the generalized H_∞ -control problem for descriptor systems with controlled and observed outputs under conditions of polyhedral uncertainty of matrix coefficients

$$\begin{aligned} A &\in \text{Co}\{A_1, \dots, A_{\nu_1}\}, & B_1 &\in \text{Co}\{B_1^1, \dots, B_1^{\nu_2}\}, \\ C_1 &\in \text{Co}\{C_1^1, \dots, C_1^{\nu_3}\}, & D_{11} &\in \text{Co}\{D_{11}^1, \dots, D_{11}^{\nu_4}\}, \end{aligned}$$

where $\text{Co}\{A_1, \dots, A_\nu\}$ is the polytope (polyhedron) with vertices $A_1, \dots, A_\nu$ in a matrix space that is the convex set of matrices

$$\left\{ \sum_{i=1}^{\nu} a_i A_i : a_i \geq 0, i = \overline{1, \nu}, \sum_{i=1}^{\nu} a_i = 1 \right\}.$$

Some cases of polyhedral uncertainty may be, for example, interval or affine uncertainty of matrix coefficients, which are often used in practical problems of robust stabilization and optimization of controlled systems.

Section 4.1 presents a new formulation of the known lemma on matrix inequality with polyhedral coefficients, based on which the main results from chapter 3 are generalized. Sufficient conditions for the existence of stabilizing dynamic output-feedback controller are obtained to ensure the closed-loop system with polyhedral uncertainty of matrix coefficients to be admissible and its weighted damping level of external and initial perturbations J to be less than the specified value (theorem 4.1). The obtained conditions in a particular case ensure the existence of a static output-feedback controller for which a closed-loop system has similar properties, and when using static state-feedback controller these conditions are reduced to solving only the linear matrix inequalities. The combined method of linear and quadratic matrix inequalities for solving the generalized H_∞ -control problem with a weighted performance measure J is extended to a family of linear descriptor systems described by uncertain matrix coefficients (theorem 4.2).

Applying the generalized lemma on matrix uncertainty, the method for constructing of an ellipsoidal set of gain matrices of static output-feedback

controller $\mathcal{K} = \{K : K^\top P_0 K \leq Q_0\}$, for which closed-loop system belongs to the class of admissible descriptor systems and its weighted damping level of external and initial perturbations J is less than the specified value (section 4.3).

The appendix contains the applicant's publications list concerning the topic of the thesis and the information about approbation of research results of this work.

Keywords: descriptor system, robust stability, Lyapunov's function, robust stabilization, H_∞ -control, static controller, dynamic controller, matrix inequality.

Список публікацій здобувача за темою дисертації:

Статті у наукових фахових виданнях:

1. Мазко О.Г., Котов Т.О. Стабілізація і гасіння обмежених збурень у дескрипторних системах керування // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2018. — **15**, №1. — С. 65 – 87.

2. Мазко О.Г., Котов Т.О. Оцінка впливу і гасіння обмежених збурень у дескрипторних системах керування // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2019. — **16**, №2. — С. 63 – 84.

3. Мазко О.Г., Котов Т.О. Робастна стабілізація і зважене гасіння обмежених збурень у дескрипторних системах керування // Укр. мат. журн. — 2019. — **71**, №10. — С. 1374 – 1388.

Переклад: Mazko A.G., Kotov T.O. Robust stabilization and weighted damping of bounded disturbances in descriptor control systems // Ukrainian Mathematical Journal. — 2020. — **71**, No. 10, P. 1572 – 1589.
<https://doi.org/10.1007/s11253-020-01732-x> .

Тези наукових доповідей:

1. Мазко А. Г., Котов Т. А. Стабилизация и подавление ограниченных возмущений в дескрипторных системах управления // Тези V міжнародної конференції “Сучасні проблеми механіки” (28–30 серпня 2019 р., Київ) с. 58.

2. Мазко А. Г., Котов Т. А. Оценка взвешенного подавления возмущений в дескрипторных системах управления // Proceedings of XIX International conference reports “Dynamical system modelling and stability investigation” (May 22–24, 2019, Kyiv, Ukraine), P. 334 – 336.

3. Котов Т.О., Мазко О.Г. Зважена оцінка та мінімізація впливу обмежених збурень у дескрипторних системах керування // Тези VI міжнародної конференції “Сучасні проблеми механіки” (30–31 серпня 2021 р., Київ) с.34.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ	16
ВСТУП	17
Розділ 1. ОГЛЯД СТАНУ ДОСЛІДЖЕНЬ	22
1.1. Методи аналізу стійкості та якості динамічних систем	22
1.2. Методи стабілізації та оптимізації систем керування	29
1.3. Дескрипторні системи у прикладних дослідженнях	38
Розділ 2. ОЦІНКА ЗВАЖЕНОГО РІВНЯ ГАСІННЯ ЗОВНІШНІХ І ПОЧАТКОВИХ ЗБУРЕНЬ	49
2.1. Структура розв'язків і стійкість лінійних дескрипторних систем	49
2.2. Допустимі дескрипторні системи зі збуреннями	52
2.3. Зважений рівень гасіння обмежених збурень	55
2.4. Найгірші зовнішні та початкові збурення	57
2.5. Висновки до розділу	59
Розділ 3. МЕТОДИ ГАСІННЯ ОБМЕЖЕНИХ ЗБУРЕНЬ У ДЕСКРИПТОРНИХ СИСТЕМАХ КЕРУВАННЯ	61
3.1. Лінійні системи з керованими і спостережуваними виходами. Постановка задачі.	61
3.2. Побудова статичних регуляторів за спостережуваним виходом	63
3.2.1. Методи лінійних матричних нерівностей з обмеженнями.	63
3.2.2. Застосування критеріїв сумісності квадратичних матричних нерівностей	68
3.3. Побудова динамічних регуляторів за спостережуваним виходом	69

3.3.1. Система керування у розширеному фазовому просторі	69
3.3.2. Умови існування та алгоритми побудови динамічних регуляторів	71
3.4. Приклади та обчислювальні експерименти	78
3.4.1. Приклад 1. Статичний регулятор.	78
3.4.2. Приклад 2. Динамічний регулятор.	79
3.4.3. Приклад 3. Гідравлічна система з трьома резервуарами.	84
3.5. Висновки до розділу	87
 Розділ 4. ОЦІНКА ГАСІННЯ ОБМЕЖЕНИХ ЗБУРЕНЬ ЗА УМОВ НЕ- ВИЗНАЧЕНОСТІ	89
4.1. Поліедральна невизначеність матричних коефіцієнтів	89
4.2. Умови існування зважених H_∞ -регуляторів за умов невизначеності	91
4.3. Побудова сім'ї статичних регуляторів за спостережуваним виходом	94
4.4. Приклад. Робастна стабілізація дескрипторної моделі електричного кола.	96
4.5. Висновки до розділу	99
 ВИСНОВКИ	101
 СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	103
 ДОДАТОК	118

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

- $\mathbb{N}$ — множина натуральних чисел;
- $\mathbb{R}$ — множина дійсних чисел;
- $\mathbb{R}^m$ — m -вимірний дійсний векторний простір, $m \in \mathbb{N}$;
- $\mathbb{R}^{n \times m}$ — простір дійсних $n \times m$ матриць;
- $\mathbb{C}^{n \times m}$ — простір комплексних матриць розмірів $n \times m$;
- $0_{n \times m}$ — нульова $n \times m$ матриця;
- I_n — одинична $n \times n$ матриця;
- $A^\top$ — матриця транспонована до матриці A ;
- $\det(A)$ — визначник матриці A ;
- $\text{rank } A$ — ранг матриці A ;
- $\text{tr } A$ — сума діагональних елементів (слід) матриці A ;
- A^{-1} — матриця обернена до невиродженої квадратної матриці A ;
- A^+ — псевдообернена матриця до матриці A ;
- $A^\perp$ — матриця ортогонального доповнення стрічок (стовпців) матриці A до матриці повного рангу;
- W_A — матриця, стовпці якої утворюють базис ядра $\ker A$;
- $\sigma(A)$ — спектр матриці A ;
- $\rho(A)$ — спектральний радіус матриці A ;
- $\lambda_i(A)$ — власне значення матриці A ;
- $\lambda_{\max}(A)$ ($\lambda_{\min}(A)$) — максимальне (мінімальне) власне значення A ;
- $i(A) = \{i_+(A), i_-(A), i_0(A)\}$ — інерція симетричної матриці $A = A^\top$, що складається з кількостей її додатних ($i_+(A)$), від'ємних ($i_-(A)$) і нульових ($i_0(A)$) власних значень з урахуванням кратностей;
- $\|x\| = \sqrt{x^\top x}$ — евклідова норма вектора x ;
- $\|x\|_Q$ — узагальнена (зважена) L_2 -норма вектор-функції $x(t)$;
- $\text{Co}\{A_1, \dots, A_\nu\} = \left\{ \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i A_i : \alpha_i \geq 0, i = \overline{1, \nu}, \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i = 1 \right\}$ — опуклий багатогранник (матричний політоп) з вершинами $A_1, \dots, A_\nu$.

ВСТУП

Актуальність теми. Один із найважливіших напрямків сучасної теорії керування складають методи H_2/H_∞ -оптимізації динамічних систем, які інтенсивно розвиваються на протязі останніх 40 років і широко застосовуються при проектуванні високонадійних керованих об'єктів механіки, космічної і авіаційної техніки, економіки тощо. Основними засновниками даного напрямку досліджень вважаються G. Zames, В.А. Francis і J.C. Doyle. Критерії якості в задачах H_∞ -оптимізації неперервних та дискретних систем характеризують рівень гасіння обмежених зовнішніх (екзогенних) збурень, який необхідно оцінити та мінімізувати за допомогою придатних законів керування. Для класу лінійних стаціонарних систем дана характеристика збігається з H_∞ -нормою матричної передатної функції, а її верхню оцінку можна встановити на основі математичного апарату лінійних матричних нерівностей (ЛМН). З розвитком та узагальненням теорії H_∞ -керування пов'язані численні роботи, зокрема, Б.Т. Поляка, П.С. Щербакова, Д.В. Баландіна, М.М. Когана, В.М. Кунцевича, В.І. Коробова, В.Б. Ларіна, А.А. Туніка, О.Г. Мазка, В.А. Francis, P. Gahinet, P. Apkarian, A.A. Stoorvogel, K. Takaba, T. Katayama, S. Boyd, C. Scherer, S. Weiland, Wang He-Sheng, та ін.

Дана дисертаційна робота присвячена розробці конструктивних методів узагальненої (зваженої) H_∞ -оптимізації для класу лінійних дескрипторних (диференціально-алгебраїчних) систем керування при наявності обмежених збурень у рівняннях динаміки об'єкта, а також керованого і спостережуваного виходів. При цьому застосовуються узагальнені критерії якості таких систем, які характеризують зважений рівень гасіння зовнішніх і початкових збурень (Д.В. Баландін, М.М. Коган, О.Г. Мазко, Z. Feng). На практиці такі критерії якості дозволяють встановити бажані пріоритети між компонентами керованого виходу, а також зовнішніх і початкових збурень. Застосування методів зваженої H_∞ -оптимізації для дескрипторних систем з поліедральною і, зокрема, інтервальною невизначеностями коефіцієнтів забезпечує робастну стійкість та бажані динамічні характеристики відповідних замкнених систем.

Слід зазначити, що дескрипторні системи керування виникають та широко застосовуються на практиці, зокрема, при проектуванні складних керованих об'єктів механіки та техніки з обмеженнями. Отже, тематика роботи є актуальною, важливою і перспективною для теоретичних досліджень та практичного застосування.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертація виконана згідно з планом наукових досліджень відділу математичних проблем механіки та теорії керування Інституту математики НАН України на 2018–2021 роки в рамках держбюджетної теми №ІІІ-13-16 «Математичні проблеми динаміки, стабілізації та оптимізації складних механічних систем» (номер держ. реєстрації 0116U003101), а також в межах науково-дослідної теми №ІІІ-20-17 «Розробка аналітичних та чисельно-аналітичних методів дослідження задач сучасного природознавства» (номер держ. реєстрації 0117U004077) за програмою «Розробка та дослідження сучасних математичних моделей у галузі фізико-технічних та медико-біологічних наук».

Мета і завдання дослідження.

Метою дисертаційної роботи є розробка нових методів робастної стабілізації за спостережуванним виходом та оптимізації лінійних дескрипторних систем керування при наявності зовнішніх збурень та аналітичних невизначеностей.

Об'єктом дослідження є лінійні диференціально-алгебраїчні (дескрипторні) системи керування з керованими і спостережуваними виходами.

Предметом дослідження є вектори станів, керованого та спостережуваного виходів та керування динамічних систем, інтегральні критерії якості, властивості асимптотичної (робастної) стійкості станів рівноваги дескрипторних систем.

Методи дослідження. Використовуються другий метод Ляпунова дослідження стійкості, його матричні інтерпретації та узагальнення, методи теорії диференціальних рівнянь, матричного аналізу та теорії керування.

Визначена мета зумовлює виконання таких завдань:

- на основі канонічної форми Веєрштрасса регулярної в'язки матриць вивчити структуру і властивості розв'язків початкової задачі для класу лінійних дескрипторних систем із зовнішніми збуреннями;
- розробити методику знаходження векторів найгірших зовнішніх і початкових збурень стосовно зважених критеріїв якості, що узагальнюють H_∞ -норму матричної передатної функції;
- встановити необхідні та достатні умови існування стабілізуючих статичних та динамічних регуляторів за спостережуваним виходом, при яких замкнена система належить класу допустимих дескрипторних систем і її зважений рівень гасіння зовнішніх і початкових збурень менший заданого значення;
- розробити методи оцінки та пониження впливу зовнішніх і початкових збурень в дескрипторних системах керування за умов поліедральної невизначеності матричних коефіцієнтів;
- провести чисельну реалізацію та продемонструвати ефективність нових методів синтезу узагальнених H_∞ -регуляторів для конкретних дескрипторних моделей систем керування.

Наукова новизна одержаних результатів. В дисертаційній роботі отримано такі нові наукові результати:

- досліджена структура загального розв'язку початкової задачі для регулярних дескрипторних систем з узгодженими початковими умовами;
- запропоновано методику знаходження векторів найгірших зовнішніх і початкових збурень у дескрипторних системах стосовно зважених критеріїв якості;
- задачу синтезу дескрипторних систем з динамічним регулятором зведено до аналогічної задачі зі статичним регулятором у розширеному фазовому просторі;
- встановлено необхідні і достатні умови існування стабілізуючих статичних та динамічних регуляторів за спостережуваним виходом, при яких замкнена система належить класу допустимих дескрипторних систем і її зважений рівень гасіння зовнішніх і початкових збурень менший заданого значення;

- узагальнено комбінований метод лінійних та квадратичних матричних нерівностей в задачі зваженого H_∞ -керування для дескрипторних систем з поліедральною невизначеністю матричних коефіцієнтів;
- розвинуто методику побудови еліпсоїдальної сім'ї матриць узагальнених H_∞ -регуляторів за спостережуванним виходом;
- розроблені методи дослідження, що зводяться до розв'язання систем лінійних та квадратичних матричних нерівностей, застосовано в задачах робастної стабілізації та узагальненої H_∞ -оптимізації конкретних дескрипторних моделей керування.

Обґрунтованість і достовірність отриманих в дисертації наукових результатів підтверджується коректною постановкою задач та строгим доведенням всіх висновків на основі застосування класичних теорем з теорії стійкості і матричного аналізу, а також порівняння з відомими результатами інших авторів та проведення чисельних експериментів з використанням ефективних засобів комп'ютерної техніки.

Практичне значення одержаних результатів. Результати дисертаційної роботи мають теоретичне і практичне значення. Вони можуть бути використані в практичних задачах синтезу систем керування для механічних об'єктів, математичні моделі яких повинні враховувати наявність неконтрольованих зовнішніх збурень та невизначених параметрів. Задачі погашення зовнішніх збурень виникають при розробці високонадійних систем стабілізації для нових об'єктів авіаційної, космічної та ін. техніки. Методи розв'язування вказаних задач можуть забезпечувати надійність та безпеку керованих систем на етапі їх експлуатації. Практична реалізація запропонованих в дисертації методів та алгоритмів базується на застосуванні ефективних засобів LMI Toolbox комп'ютерної системи MATLAB та MATHCAD PRIME.

Особистий внесок здобувача. Основні результати дисертаційної роботи отримані автором самотійно. У роботах, опублікованих у співавторстві [46–48], особистий внесок здобувача полягає в обговоренні постановок

та ідей розв’язування задач, виконанні основних доведень, створенні комп’ютерних програм та проведенні чисельних експериментів, формулюванні висновків та підготовці рукописів до опублікування. Співавтору О.Г.Мазку належать постановки задач та рекомендації щодо можливих методів їх розв’язування.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації доповідались і обговорювались на семінарах відділу математичних проблем механіки та теорії керування Інституту математики НАН України, відділу стійкості процесів Інституту механіки НАН України, а також на таких міжнародних конференціях: XIX International conference “Dynamical system modelling and stability investigation” (травень 2019 р., Київ); V міжнародна конференція “Сучасні проблеми механіки” (серпень 2019 р., Київ); VI міжнародна конференція “Сучасні проблеми механіки” (серпень 2021 р., Київ);

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано у 6 наукових роботах. Серед них 3 статті [46–48] в наукових періодичних фахових виданнях, 1 із яких [48] у журналі, що індексується у наукометричній базі Scopus (її переклад [136]), та 3 тези доповідей [33, 49, 50] на міжнародних наукових конференціях.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається із анотації українською та англійською мовами, вступу, чотирьох розділів, висновків, додатку та списку використаних джерел із 167 найменувань, вона містить 12 малюнків. Обсяг дисертації становить 119 сторінок друкованого тексту.

Подяки. Хочу висловити щире подяку моєму науковому керівнику професору Олексію Григоровичу Мазку та завідувачу відділу математичних проблем механіки та теорії керування академіку НАН України Олександрові Миколайовичу Тимосі за поради при роботі над дисертацією, а також співробітникам відділу за творчі дискусії.

Розділ 1

ОГЛЯД СТАНУ ДОСЛІДЖЕНЬ

1.1. Методи аналізу стійкості та якості динамічних систем

Математична теорія стійкості руху динамічних систем започаткована у роботі Олександра Михайловича Ляпунова [38]. Наведемо основні означення даної теорії для системи диференціальних рівнянь збуреного руху

$$\dot{x} = f(x, t), \quad (1.1)$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, $f(0, t) \equiv 0$ і $t \geq t_0$.

Нульовий розв'язок $x \equiv 0$ (стан рівноваги) системи (1.1) називається *стійким за Ляпуновим*, якщо для будь-яких $\varepsilon > 0$ і $t_0 > 0$ існує таке $\delta = \delta(\varepsilon, t_0)$, що для довільного розв'язку $x(t)$ при $\|x(t_0)\| \leq \delta$ і $t \geq t_0$ виконується нерівність $\|x(t)\| \leq \varepsilon$. Якщо при цьому $\delta = \delta(\varepsilon)$ не залежить від t_0 , то розв'язок $x \equiv 0$ є *рівномірно стійким* за початковим моментом часу. Розв'язок $x \equiv 0$ називається *асимптотично стійким*, якщо він стійкий за Ляпуновим і для будь-якого $t_0 > 0$ існує таке $\delta = \delta(t_0) > 0$, що довільний розв'язок $x(t)$ при $\|x_0\| \leq \delta$ задовольняє умову $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$. У випадку, коли множина початкових векторів x_0 (область притягання) збігається з $\mathbb{R}^n$, розв'язок $x \equiv 0$ системи (1.1) називається *асимптотично стійким в цілому*. Розв'язок $x \equiv 0$ системи (1.1) називається *експоненціально стійким*, якщо існують додатні числа α , β і γ такі, що $\|x(t)\| \leq \gamma \|x_0\| e^{-\alpha(t-t_0)}$ для довільного розв'язку $x(t)$ при $\|x_0\| \leq \beta$ і $t \geq t_0$.

О.М. Ляпунов вперше розробив два методи дослідження стійкості руху, які отримали назву перший та другий (прямий) методи Ляпунова.

У *першому методі Ляпунова* використовуються можливості дослідження стійкості розв'язків нелінійних систем (1.1) на основі лінійного і квазілінійного представлень типу

$$\dot{x} = A(t)x + \varphi(x, t), \quad A(t) = \left. \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0}. \quad (1.2)$$

Тут $A(t)$ — матриця Якобі векторної функції $f(x, t)$ і виконуються умови

$$\|\varphi(x, t)\| \leq \beta \|x\|^{1+\alpha}, \quad x \in \mathcal{S}_0, \quad t \geq t_0, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0. \quad (1.3)$$

При цьому $\varphi(0, t) \equiv 0$ і дана система має нульовий розв'язок, а система

$$\dot{x} = A(t)x, \quad (1.4)$$

є лінійним наближенням для системи (1.1). Для класу лінійних систем (1.4) експоненціальна стійкість еквівалентна рівномірній асимптотичній стійкості. Із експоненціальної стійкості системи лінійного наближення (1.4) випливає асимптотична стійкість нульового розв'язку системи (1.2). Якщо система (1.4) є автономною, то із її асимптотичної стійкості (нестійкості) випливає асимптотична стійкість (нестійкість) нульового розв'язку системи (1.2).

Лінійна автономна система

$$\dot{x} = Ax, \quad (1.5)$$

стійка тоді і лише тоді, коли спектр матриці A належить лівій півплощині, тобто $\operatorname{Re} \lambda_j(A) \leq 0$ ($j = \overline{1, n}$), причому чисто уявним власним значенням відповідають лише прості елементарні дільники. Система (1.5) є асимптотично стійкою тоді і лише тоді, коли $\operatorname{Re} \lambda_j(A) < 0$ ($j = \overline{1, n}$). Лінійна неавтономна система (1.4) асимптотично стійка, якщо всі її характеристичні показники Ляпунова від'ємні.

Достатньо універсальним і ефективним засобом в теорії стійкості руху є *другий метод Ляпунова*. Даний метод базується на побудові допоміжних функцій (функцій Ляпунова) з певними властивостями та дослідженні виразів їхніх *похідних в силу системи* (1.1)

$$\dot{v}(x, t) = \frac{\partial v}{\partial t} + f^\top(x, t) \operatorname{grad}_x v(x, t).$$

В загальному випадку такі функції повинні бути неперервно диференційовними і задовольняють тотожність $v(0, t) \equiv 0$ при $t \geq 0$.

Якщо існує *додатно визначена функція* $v(x, t)$, яка допускає *недодатно визначену похідну в силу системи* (1.1) то розв'язок $x \equiv 0$ даної системи

стійкий за Ляпуновим (*перша теорема Ляпунова*). Якщо при цьому функція $v(x, t)$ допускає *нескінченно малу вищу границю* при $x \rightarrow 0$, то нульовий розв'язок системи рівномірно стійкий (К.П. Персидський). Якщо існує додатно визначена функція $v(x, t)$, яка допускає *нескінченно малу вищу границю* при $x \rightarrow 0$ і від'ємно визначену похідну в силу системи (1.1), то розв'язок $x \equiv 0$ даної системи асимптотично стійкий (*друга теорема Ляпунова*). Якщо до того ж існує *нескінченно велика нижня границя* функції $v(x, t)$ при $x \rightarrow \infty$, то нульовий розв'язок системи (1.1) асимптотично стійкий в цілому (*теорема Барбашина-Красовського*). Якщо існує функція $v(x, t)$, яка допускає *нескінченно малу вищу границю* при $x \rightarrow 0$ і знаковизначену похідну в силу системи (1.1), причому в довільному околі $\mathcal{S}_0$ стану рівноваги є точка x_0 така, що $v(x_0, t_0) \dot{v}(x_0, t_0) > 0$ при деякому $t_0 \geq 0$, то нульовий розв'язок даної системи нестійкий за Ляпуновим (*третья теорема Ляпунова*). М.Г. Четаєв [68] послабив умови третьої теореми Ляпунова, використовуючи лише частину околу $\mathcal{S}_0$, що прилягає до початку координат. Друга теорема Ляпунова посилена для класу нелінійних автономних систем

$$\dot{x} = f(x). \quad (1.6)$$

де $f(0) = 0$ і $t \geq t_0$. Якщо існує додатно визначена функція $v(x)$, яка допускає недодатно визначену похідну $\dot{v}(x)$ в силу системи (1.6), причому множина $\{x : \dot{v}(x) = 0\}$ не містить цілих траєкторій системи (1.6), окрім точки $x = 0$, то розв'язок $x \equiv 0$ даної системи асимптотично стійкий (Є.А. Барбашин, Н.Н. Красовський).

Функції $v(x, t)$, які задовольняють умови першої, другої і третьої теорем Ляпунова називаються функціями Ляпунова відповідно *першого, другого і третього роду*. Для основних теорем другого методу Ляпунова виконуються зворотні твердження. Так, для системи (1.1) знайдені умови існування функцій Ляпунова першого роду (К.П. Персидський) та другого роду (Х.Л. Масера) [35, 52].

Методом функцій Ляпунова встановлені умови експоненціальної стійкості нульового стану класу систем (1.1) (Н.Н. Красовський). Лінійна система

(1.4) є експоненціально стійкою тоді і лише тоді, коли для деякої неперервної симетричної матриці $Y(t)$ існує неперервно диференційовний розв'язок $X(t)$ матричного диференціального рівняння Ляпунова

$$\dot{X}(t) + A^\top(t)X(t) + X(t)A(t) = Y(t), \quad (1.7)$$

причому $\varepsilon_1 I_n \leq X(t) \leq \varepsilon_2 I_n$, $-\delta_1 I_n \leq Y(t) \leq -\delta_2 I_n$, $t \geq t_0$, де ε_1 , ε_2 , δ_1 і δ_2 — деякі додатні сталі. Лінійна автономна система (1.5) асимптотично стійка тоді і лише тоді, коли для будь-якої матриці $Y < 0$ існує єдиний розв'язок $X > 0$ матричного алгебраїчного рівняння Ляпунова

$$A^\top X + XA = Y. \quad (1.8)$$

Розв'язки матричних рівнянь (1.7) і (1.8) є ваговими матрицями квадратичних функцій Ляпунова $v(x, t) = x^\top X(t)x$ і $v(x) = x^\top Xx$ для відповідних класів систем.

Прямий метод дозволяє розв'язати такі практичні задачі, як оцінка часу та якості регулювання, опис області притягання у фазовому просторі та впливу постійно діючих збурень, існування або відсутності періодичних розв'язків нелінійних систем, встановлення їх обмеженості та оцінка інтегральних критеріїв якості [9, 23, 28] тощо. На основі прямого методу Ляпунова досліджується проблема практичної стійкості з можливістю оцінки областей у фазовому просторі, де знаходяться траєкторії системи [10]. Розвитку та узагальненню методу функцій Ляпунова присвячено роботи А.І. Лур'є, М.Г. Четаєва, І.Г. Малкіна, О.М. Лєтова, Є.О. Барбашина, М.М. Красовського, В.І. Зубова, К.Г. Персидського, В.В. Рум'янцева, В.М. Матросова, Ж. Ла-Салля, Т. Йошизава, А.А. Мартинюка, Д.Я. Хусаїнова та ін. Велика кількість робіт присвячена методам побудови функцій Ляпунова для різних класів систем (див., наприклад, [9, 16, 17, 21, 22, 29, 54, 59, 65]). Проте, до теперішнього часу не розроблено універсальних конструктивних методів їх побудови для нелінійних систем, оскільки в загальному випадку для цього необхідно побудувати інтеграл системи.

Розглянемо клас нелінійних дескрипторних систем

$$E(x)\dot{x} = A(x, t)x + \varphi(x, t), \quad (1.9)$$

де $E(x)$ і $A(x, t)$ — неперервні і обмежені матричні функції, $x \in \mathcal{S}_0$, $t \geq t_0$, а векторна функція $\varphi(x, t)$ задовольняє умови (1.3). Якщо існує матрична функція $X(t)$, для якої виконуються матричні нерівності

$$\varepsilon_1 I_n \leq X(t) \leq \varepsilon_2 I_n, \quad 0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2,$$

$$E_0^T \dot{X}(t) E_0 + A_0^T(t) X(t) E_0 + E_0^T X(t) A_0(t) + \varepsilon_0 I_n \leq 0, \quad \varepsilon_0 > 0,$$

де $E_0 = E(0)$ і $A_0(t) = A(0, t)$, то нульовий розв'язок системи (1.9) асимптотично стійкий, при цьому $v(x, t) = x^T E_0^T X(t) E_0 x$ є функцією Ляпунова другого роду даної системи [39].

На практиці широко застосовують методи аналізу та синтезу динамічних систем з невизначеними елементами (параметри, коефіцієнти, функції тощо). Спільний стан рівноваги сім'ї систем, яку описують множини невизначених елементів, називається робастно стійким, якщо він асимптотично стійкий при довільних фіксованих значеннях невизначених елементів із даних множин. Якщо невідомі параметри є випадковими говорять про ймовірнісну невизначеність. Для практичного застосування досить зручною є інтервальна невизначеність параметрів та коефіцієнтів системи. Створено математичний апарат, який дозволяє одночасно досліджувати різні типи невизначеностей в системах керування [34, 56, 58, 94]. Яскравим прикладом розв'язання проблеми робастної стійкості є теорема Харитонова для матриці лінійної системи (1.5) у формі Фробеніуса з інтервальним характеристичним поліномом

$$f(\lambda) = \det(\lambda I - A) = a_0 + a_1 \lambda + \dots + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \lambda^n = 0, \quad \underline{a} \stackrel{\mathcal{K}}{\leq} a \stackrel{\mathcal{K}}{\leq} \bar{a}, \quad (1.10)$$

де $a = [a_0, \dots, a_{n-1}]^T$, $\bar{a} = [\bar{a}_0, \dots, \bar{a}_{n-1}]^T$, $\underline{a} = [\underline{a}_0, \dots, \underline{a}_{n-1}]^T$ [63]. Для того, щоб інтервальний поліном (1.10) був гурвіцевим, необхідно і достатньо, щоб були гурвіцевими чотири поліноми Харитонова:

$$f_1(\lambda) = \bar{a}_0 + \underline{a}_1 \lambda + \underline{a}_2 \lambda^2 + \bar{a}_3 \lambda^3 + \bar{a}_4 \lambda^4 + \dots,$$

$$f_2(\lambda) = \bar{a}_0 + \bar{a}_1\lambda + \underline{a}_2\lambda^2 + \underline{a}_3\lambda^3 + \bar{a}_4\lambda^4 + \dots,$$

$$f_3(\lambda) = \underline{a}_0 + \bar{a}_1\lambda + \bar{a}_2\lambda^2 + \underline{a}_3\lambda^3 + \underline{a}_4\lambda^4 + \dots,$$

$$f_4(\lambda) = \underline{a}_0 + \underline{a}_1\lambda + \bar{a}_2\lambda^2 + \bar{a}_3\lambda^3 + \underline{a}_4\lambda^4 + \dots.$$

Зазначимо, що аналога критерія Харитонова для лінійних дискретних систем не існує (див, наприклад, [34, 67]). В роботі [34] наведено достатні умови робастної стійкості лінійної неавтономної дискретної системи з матрицею у формі Фробеніуса.

При дослідженні задач робастної стійкості для класу псевдолінійних систем з невизначеною матрицею $A(x, t)$ застосовується апарат ЛМН. Спільний нульовий стан $x \equiv 0$ сім'ї таких систем з невизначеністю $A(x, t) \in \text{Co}\{A_1, \dots, A_\nu\}$ робастно стійкий, якщо для деякої матриці $X > 0$ виконується система ЛМН [80]

$$A_k^\top X + X A_k < 0, \quad k = \overline{1, \nu}.$$

Другий метод Ляпунова ефективно застосовується при розв'язанні практичних задач автоматичного регулювання, стабілізації та оптимізації параметрів складних динамічних систем, що функціонують під впливом постійно діючих збурень [4, 5, 58]. Теорія стійкості розв'язків диференціальних систем у банаховому просторі розвинута в роботах [20, 62].

Динаміка багатьох механічних об'єктів описується у вигляді системи диференціальних рівнянь другого порядку

$$C\ddot{x} + B\dot{x} + Ax = f(t), \tag{1.11}$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, $C = C^T$ — матриця мас, $B = D + G$, $D = D^T$ — матриця дисипативних сил, $G = -G^T$ — матриця гіроскопічних сил, $A = K + S$, $K = K^T$ — матриця потенціальних сил, $S = -S^T$ — матриця неконсервативних позиційних сил [24, 26, 30]. В загальному випадку матричні коефіцієнти в (1.11) можуть залежати від x , $\dot{x}$ і t . Методи структурних перетворень системи (1.11), запропоновані в [31, 32]), дозволяють виключити матрицю неконсервативних позиційних сил S , при відсутності яких виконуються наступні твердження

(теореми Томсона-Тета-Четаєва [21, 68, 149]): 1) якщо $\det K < 0$, то система нестійка; 2) якщо $K > 0$ і $D \geq 0$, то система стійка; 3) якщо $K > 0$ і $D > 0$, то система асимптотично стійка; 4) якщо $D > 0$ і матриця K має від'ємні власні значення, то система нестійка.

В роботах [2, 3, 39] побудовано алгебраїчні умови стійкості і методи стабілізації механічних систем на основі матричних нерівностей та властивостей гіперболічних в'язок матриць. Досліджено також умови робастної стійкості систем типу (1.11) з невизначеними матричними коефіцієнтами $A \in \text{Co}\{A_1, \dots, A_{\nu_1}\}$ і $B \in \text{Co}\{B_1, \dots, B_{\nu_2}\}$. Якщо для деяких $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ($\alpha + \beta \geq 2$) виконується система матричних нерівностей

$$A_i^T C^{-1} B_j + B_j^T C^{-1} A_i > (\alpha A_i - \beta A_i^T)(B_j + B_j^T)^{-1}(\alpha A_i^T - \beta A_i),$$

$$C = C^T > 0, \quad B_j + B_j^T > 0, \quad \alpha(A_i + A_i^T) \geq 0, \quad i = \overline{1, \nu_1}, \quad j = \overline{1, \nu_2},$$

то нульовий стан системи (1.11) робастно стійкий стосовно вказаних невизначеностей. Умови робастної стійкості лінійної системи (1.11) можуть бути сформульовані також в термінах власних значень квадратичних гіперболічних пучків матриць [39].

Істотним розвитком і узагальненням методу функцій Ляпунова в теорії стійкості є метод порівняння систем. При цьому роль функції Ляпунова виконує оператор, що відображає простір станів досліджуваної складної системи в простір станів допоміжної системи порівняння. Розв'язки систем порівняння мають властивості типу монотонності щодо деякого конуса в просторі станів, що істотно спрощує дослідження їх стійкості і асимптотичних властивостей (див., наприклад, [51, 53]). Методи порівняння узагальнено для неперервних та дискретних систем із застосуванням різних типів конусів [27, 36, 134], що дозволило, зокрема, сформулювати теореми про робастну стійкість динамічних систем з невизначеностями, які описуються за допомогою конусних нерівностей [134, 135].

1.2. Методи стабілізації та оптимізації систем керування

Основною задачею теорії керування є стабілізація руху динамічних систем. В 30-ті роки XX століття домінували *частотні методи* аналізу та синтезу систем керування, які застосовувались до деяких класів неперервних та дискретних моделей, а також в задачах абсолютної стійкості нелінійних систем регулювання (Лур'є, Айзерман, Попов). В кінці 50-х років в результаті розвитку авіаційної і космічної техніки виникли сучасні методи дослідження — *методи простору станів*. В основу цих методів покладено диференціальні або різницеві системи рівнянь, що моделюють рух відповідних керованих об'єктів.

Найпростіша лінійна модель системи керування подається у вигляді

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (1.12)$$

де $x \in \mathbb{R}^n$ і $u \in \mathbb{R}^m$ — вектори відповідно стану і керування, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ і $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ — матричні коефіцієнти. Задача стабілізації системи полягає у побудові матриці коефіцієнтів підсилення $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ статичного зворотного зв'язку за станом $u = Kx$, при якому замкнена система асимптотично стійка.

Система або пара матриць (A, B) називається *стабілізовною*, якщо існує матриця K , для якої матриця замкненої системи $A + BK$ *гурвіцева*. Пара матриць (A, B) називається *детектовною*, якщо пара $(A^\top, B^\top)$ стабілізовна. Достатньою умовою стабілізованості системи є критерій керованості Калмана

$$\text{rank} [B, AB, \dots, A^{n-1}B] = n.$$

Стабілізуючу матрицю K для системи (1.12) можна знайти за допомогою принципу максимуму Понтрягіна або методом динамічного програмування Белмана при мінімізації квадратичного функціоналу якості

$$J(u, x_0) = \int_0^\infty \varphi(x, u) dt, \quad \varphi(x, u) = [x^\top, u^\top] \Phi \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}, \quad \Phi = \begin{bmatrix} S & N \\ N^\top & R \end{bmatrix}, \quad (1.13)$$

де $x_0 = x(0)$ — початковий вектор, $R > 0$ і $S \geq NR^{-1}N^\top$. Якщо пара матриць (A, B) стабілізовна, а пара матриць (M, C) , де $M = A - BR^{-1}N^\top$ і $S =$

$NR^{-1}N^\top = C^\top C \geq 0$, детектовна, то матричне рівняння Ріккати

$$A^\top X + XA - (XB + N)R^{-1}(B^\top X + N^\top) + S = 0 \quad (1.14)$$

має єдиний розв'язок $X = X^\top \geq 0$, а замкнена система (1.12) з керуванням

$$u = Kx, \quad K = -R^{-1}(B^\top X + N^\top),$$

асимптотично стійка і досягається мінімальне значення функціоналу $J(u, x_0) = x_0^\top X x_0$ [164].

На основі теореми Ляпунова маємо конструктивні методи побудови стабілізуючих матриць K , які базуються на розв'язанні ЛМН (див., наприклад [6, 39, 56]), наприклад:

$$K = ZX^{-1}, \quad AX + XA^\top + BZ + Z^\top B^\top < 0$$

або

$$K = -B^\top X^{-1}, \quad AX + XA^\top < 2BB^\top.$$

При цьому $v(x) = x^\top X^{-1}x$ — функція Ляпунова замкненої системи.

В задачі стабілізації класу МІМО систем

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx + Du, \quad (1.15)$$

керування будується у вигляді статичного регулятора за виходом

$$u = Ky, \quad \det(I_m - KD) \neq 0. \quad (1.16)$$

Задача стабілізації системи за виходом відноситься до категорії складних задач теорії керування [57] і в загальному випадку не розв'язана. У [1, 159] проведений огляд відомих методів стабілізації лінійних систем за допомогою статичного зворотного зв'язку за виходом. Зокрема, у випадку $D = 0$ виконуються наступні твердження (див. [6, 85, 98, 123]).

Існує керування (1.16), що забезпечує асимптотичну стійкість замкненої системи (1.15), (1.16), тоді і лише тоді, коли для деякої матриці $X = X^\top > 0$ виконується система співвідношень

$$B^{\perp\top}(AX + XA^\top)B^\perp < 0, \quad C^\perp(A^\top X^{-1} + X^{-1}A)C^{\perp\top} < 0.$$

При цьому стабілізуючу матрицю K можна знайти як розв'язок ЛМН

$$AX + XA^\top + BKCX + XC^\top K^\top B^\top < 0.$$

Якщо для деяких матриць K і $X = X^\top > 0$ виконується матрична нерівність

$$AX + XA^\top - XC^\top CX + (BK + XC^\top)(BK + XC^\top)^\top < 0$$

то керування (1.16) забезпечує асимптотичну стійкість замкненої системи (1.15), (1.16). Якщо пара (A, B) стабілізовна, а пара (A, C) детектовна і

$$AX + XA^\top - XC^\top CX + (BK + XC^\top)(BK + XC^\top)^\top = -BB^\top, \quad X = X^\top \geq 0,$$

то керування (1.16) забезпечує асимптотичну стійкість замкненої системи (1.15), (1.16).

У випадках, коли властивості керованості і спостережуваності системи не гарантують для неї існування статичного стабілізуючого регулятора за виходом застосовуються динамічні регулятори або статичний зворотний зв'язок за станом спостерігача [5, 39, 56]. Формально задачі керування за допомогою динамічних регуляторів і спостерігачів зводяться до відповідних задач керування зі статичним зворотним зв'язком у розширеному фазовому просторі системи [39].

Для практики досить важливими є задачі стабілізації та оптимізації динамічних систем при наявності різних типів невизначеностей. Для класу лінійних систем з афінною невизначеністю

$$\dot{x} = \left[A_0 + \sum_{i=1}^k A_i r_i(t) \right] x + \left[B_0 + \sum_{i=1}^l B_i r_i(t) \right] u,$$

де $|r_i(t)| \leq \bar{r}$ і $|s_i(t)| \leq \bar{s}$ — області функціональної невизначеності, стабілізуюче керування можна знайти у вигляді $u = -\gamma R^{-1} B_0^\top P x$, де $\gamma > 0$ — достатньо велике число, $P = P^\top > 0$ — розв'язок алгебраїчного рівняння Ріккати [37, 142]. Наведемо умови робастної стабілізації сім'ї систем з параметричною невизначеністю

$$\dot{x} = A(p)x + Bu, \quad p \in \mathcal{P}, \quad (1.17)$$

де $A(p)$ — матриця, лінійно залежна від вектора параметрів $p \in \mathcal{P}$, а множина невизначеності $\mathcal{P}$ може бути інтервальною, поліедральною або афінною [56]. Якщо існують такі матриці $X = X^\top > 0$ і Y , що

$$A(p)X + XA^\top(p) + BY + Y^\top B^\top < 0, \quad p \in \mathcal{P},$$

то статичний регулятор

$$u = Kx, \quad K = YX^{-1}, \quad (1.18)$$

робастно стабілізує систему (1.17) при всіх $p \in \mathcal{P}$, а квадратична форма $v(x) = x^\top X^{-1}x$ є спільною функцією Ляпунова для відповідної сім'ї замкнених систем (робастна квадратична стабілізація [58]). В [56] наведено також керування, яке при всіх значеннях параметрів $p \in \mathcal{P}$ забезпечує заданий рівень γ квадратичного критерію якості.

Для лінійної системи зі структурованою матричною невизначеністю

$$\dot{x} = (A + F\Delta H)x + Bu, \quad \|\Delta\| \leq \gamma, \quad \Delta \in \mathbb{R}^{p \times q}, \quad (1.19)$$

умови робастної квадратичної стабілізації за допомогою регулятора (1.18) зводяться до системи ЛМН

$$\begin{bmatrix} AX + XA^\top + BY + Y^\top B^\top + \gamma^2 FF^\top & XH^\top \\ HX & -I_q \end{bmatrix} < 0, \quad X > 0. \quad (1.20)$$

При цьому $v(x) = x^\top X^{-1}x$ є спільною функцією Ляпунова для відповідної сім'ї замкнених систем [58].

Якщо для системи (1.15) сумісна система ЛМН

$$\Omega_\gamma = \begin{bmatrix} A^\top X + XA & XB & C^\top \\ B^\top X & -\gamma I_m & D^\top \\ C & D & -\gamma I_l \end{bmatrix} < 0, \quad X = X > 0, \quad (1.21)$$

то для довільного керування

$$u = Ky, \quad K^\top K \leq \eta^2 I_l, \quad \eta = \gamma^{-1}, \quad (1.22)$$

замкнена система асимптотично стійка і $v(x) = x^T X x$ є спільною функцією Ляпунова даної системи [5]. Максимальне значення $\eta = \eta_{\max}$, при якому система (1.15) зі структурованою невизначеністю (1.22) асимптотично стійка, називається радіусом робастної стабілізації системи (1.15), (1.22).

В [39] розглядається клас псевдолінійних МІМО систем керування у векторно-матричній формі

$$\dot{x} = A(x, t)x + B(x, t)u, \quad y = C(x, t)x + D(x, t)u, \quad (1.23)$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^l$, а матричні коефіцієнти A , B , C і D відповідних розмірів неперервно залежать від x і t . Стабілізуюче керування шукається у вигляді лінійного зворотного зв'язку за виходом

$$u = K(x, t)y, \quad \det[I_m - K(x, t)D(x, t)] \neq 0, \quad x \in \mathcal{S}_0, \quad t \geq 0, \quad (1.24)$$

де $\mathcal{S}_0$ — деякий окіл стану $x \equiv 0$, а також еліпсоїдальна множина стабілізуючих матричних функцій у вигляді

$$K(x, t) = K_*(x, t) + \tilde{K}(x, t), \quad \tilde{K}(x, t) \in \mathcal{K}, \quad (1.25)$$

де $\mathcal{K} = \{K : K^T P K \leq Q\}$, $P = P^T > 0$, $Q = Q^T > 0$, а $K_*(x, t)$ — деяка матрична функція, що задовольняє додаткову умову в (1.24) і забезпечує асимптотичну стійкість нульового стану замкненої системи з регулятором типу (1.24). Доведено, що якщо для деяких матричних функцій $X(t) = X^T(t)$ і $K_*(x, t)$ при $x = 0$ і $t \geq 0$ виконуються співвідношення

$$\Delta(x, t) = D^T Q D - G^T P G < 0, \quad \varepsilon_1 I_n \leq X(t) \leq \varepsilon_2 I_n, \quad 0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2,$$

$$\Omega(t) = \begin{bmatrix} \dot{X} + M_*^T X + X M_* + \varepsilon_0 I_n & X B_* & C_*^T \\ B_*^T X & -P & D_*^T \\ C_* & D_* & -Q^{-1} \end{bmatrix} \leq 0, \quad \varepsilon_0 > 0,$$

де $G = I_m - K_* D$, $M_* = A + B D(K_*) C$, $B_* = B(I_m - K_* D)^{-1}$, $C_* = (I_l - D K_*)^{-1} C$, $D_* = (I_l - D K_*)^{-1} D$, то будь яке керування (1.24), (1.25) забезпечує асимптотичну стійкість стану $x \equiv 0$ системи (1.23) та спільну

квадратичну функцію Ляпунова $v(x) = x^T X(t)x$. В роботі [39] також сформульовано аналог наведеного результату для дискретних систем.

В [108] розроблено методи робастної стабілізації для широкого класу нелінійних неавтономних систем

$$\dot{x} = A(\cdot)x + B(\cdot)u,$$

де матричні коефіцієнти $A(\cdot)$ і $B(\cdot)$ можуть залежати від t , x , $x(t-h)$ та $\int_{t_0}^t x(\xi)d\xi$, а також від невизначених параметрів. У такому вигляді можуть бути подані деякі класи нелінійних диференціальних систем із запізненням та інтегро-диференціальних систем керування. В роботі [66] розглянуто нелінійні різницеві системи аналогічного типу з інтервальними коефіцієнтами і запізненням. Встановлено достатні умови абсолютної стійкості на основі другого методу Ляпунова з використанням функціоналу Ляпунова–Красовського.

У 90-х роках минулого століття виник принципово новий напрямок досліджень в теорії керування, який отримав назву *H_∞ -теорія*. В даному напрямку досліджень одночасно розв'язуються важливі проблеми стабілізації, гасіння і мінімізації впливу зовнішніх (екзогенних) збурень у системах керування. Засновниками даної теорії вважаються G. Zames, B.A. Francis, J.C. Doyle і D. Glover. Результати досліджень в цьому напрямку об'єднали частотні методи і методи простору станів, що дозволило конструктивно розв'язувати проблеми стабілізації та оптимізації неперервних і дискретних систем керування при наявності зовнішніх збурень і невизначеностей. Для лінійної системи (1.15) з нульовим початковим вектором $x(0) = 0$ вводиться критерій якості

$$J = \sup_{0 < \|u\|_2 < \infty} \frac{\|y\|_2}{\|u\|_2}, \quad \|y\|_2^2 = \int_0^\infty y^T y dt, \quad \|u\|_2^2 = \int_0^\infty u^T u dt, \quad (1.26)$$

де $\|y\|_2$ і $\|u\|_2 \in L_2$ -норми векторних функцій у відповідних просторах. Значення J збігається з H_∞ -нормою передатної матричної функції системи від входу u до виходу y (див., наприклад, [56, 156, 167])

$$\|H\|_\infty = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \sqrt{\lambda_{\max}(H^T(-i\omega)H(i\omega))}, \quad H(\lambda) = C(\lambda I_n - A)^{-1}B + D,$$

яка характеризує рівень гасіння енергії вхідних сигналів при їх проходженні через дану систему. Задача H_∞ -оптимізації полягає у знаходженні законів керування, які забезпечують асимптотичну стійкість і мінімальне значення характеристики J .

Оцінка $J < \gamma$, еквівалентна частотній нерівності $H^T(-i\omega)H(i\omega) < \gamma^2 I_m$ ($\omega \in \mathbb{R}$), виконується тоді і тільки тоді, коли для деякої матриці $X = X^T > 0$ виконується лінійна матрична нерівність (1.21) (див., наприклад, [103, 153]). При цьому матриця A повинна бути гурвіцевою, а система (1.15) зі структурованою невизначеністю вхідного вектора (1.22) робастно стійка зі спільною функцією Ляпунова $v(x) = x^T X x$. В результаті характеристика (1.26) визначається як розв'язок оптимізаційної задачі: $J = \inf \{ \gamma : \Omega_\gamma < 0, X = X^T > 0 \}$.

Системи керування в рамках лінійної H_∞ -теорії подаються у вигляді

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1 w + B_2 u, \quad x(0) = x_0, \\ z &= C_1 x + D_{11} w + D_{12} u, \\ y &= C_2 x + D_{21} w + D_{22} u, \end{aligned} \quad (1.27)$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $w \in \mathbb{R}^s$, $z \in \mathbb{R}^k$ і $y \in \mathbb{R}^l$ — вектори відповідно стану, керування, зовнішніх збурень, керованого і спостережуваного виходів. Закони керування будуються у вигляді статичних або динамічних регуляторів по спостережуваному виходу, зокрема, по стану системи. В [7] у випадку $D_{22} = 0$ отримано критерій існування динамічного регулятора повного порядку $r = n$ з нульовим початковим вектором

$$\dot{x}_r = A_r x_r + B_r y, \quad u = C_r x_r + D_r y, \quad x_r(0) = 0, \quad (1.28)$$

який забезпечує бажану оцінку критерію якості

$$J_\rho = \sup_{0 < \|w\|_2^2 + \rho^2 x_0^\top x_0 < \infty} \frac{\|z\|_2}{\sqrt{\|w\|_2^2 + \rho^2 x_0^\top x_0}} < \gamma. \quad (1.29)$$

Застосування даного критерію зводиться до знаходження матриць $X > 0$ і

$Y > 0$, які задовольняють систему ЛМН

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} W_R & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} A^\top X + XA & XB_1 & C_1^\top \\ B_1^\top X & -\gamma^2 I & D_{11}^\top \\ C_1 & D_{11} & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_R & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0, \\ \begin{bmatrix} W_L & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} AY + YA^\top & YC_1^\top & B_1 \\ C_1 Y & -I & D_{11} \\ B_1^\top & D_{11}^\top & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_L & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0, \\ \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} \geq 0, \quad 0 < X < \rho^2 \gamma^2 I, \end{aligned} \quad (1.30)$$

де стовпці матриць W_R і W_L утворюють базиси ядер відповідних блочних матриць $R = [C_2, D_{21}]$ і $L = [B_2^T, D_{12}^T]$. В [7] при виконанні умов (1.30) вказано також спосіб побудови динамічного регулятора, що забезпечує оцінку (1.29).

В [39, 45] узагальнено результати роботи [7] для системи (1.27) з більш загальним зваженим критерієм якості

$$J = \sup_{0 < \|w\|_P^2 + x_0^T X_0 x_0 < \infty} \varphi(w, x_0), \quad \varphi(w, x_0) = \frac{\|z\|_Q}{\sqrt{\|w\|_P^2 + x_0^T X_0 x_0}}, \quad (1.31)$$

де $Q = Q^T > 0$, $P = P^T > 0$ і $X_0 = X_0^T > 0$ — деякі вагові матриці, $\|z\|_Q$ і $\|w\|_P$ — узагальнені L_2 -норми відповідних вектор-функцій, тобто

$$\|z\|_Q^2 = \int_0^\infty z^T Q z dt, \quad \|w\|_P^2 = \int_0^\infty w^T P w dt.$$

Встановлено, що для системи (1.27) існує динамічний регулятор (1.28) порядку r , що забезпечує замкненій системі асимптотичну стійкість і оцінку $J < \gamma$, тоді і лише тоді, коли сумісна стосовно $X = X^T > 0$ і $Y = Y^T > 0$ система співвідношень

$$W_R^T \begin{bmatrix} A^T X + XA + C_1^T Q C_1 & XB_1 + C_1^T Q D_{11} \\ B_1^T X + D_{11}^T Q C_1 & D_{11}^T Q D_{11} - \gamma^2 P \end{bmatrix} W_R < 0, \quad (1.32)$$

$$W_L^T \begin{bmatrix} AY + YA^T + B_1 P^{-1} B_1^T & YC_1^T + B_1 P^{-1} D_{11}^T \\ C_1 Y + D_{11} P^{-1} B_1^T & D_{11} P^{-1} D_{11}^T - \gamma^2 Q^{-1} \end{bmatrix} W_L < 0, \quad (1.33)$$

$$W = \begin{bmatrix} X & \gamma I_n \\ \gamma I_n & Y \end{bmatrix} \geq 0, \quad \text{rank } W \leq n + r, \quad 0 < X < \gamma^2 X_0. \quad (1.34)$$

При цьому рангова умова в (1.34) виконується автоматично при побудові динамічного регулятора повного порядку $r = n$.

В роботах [34, 58, 67, 78] розвинута техніка інваріантних множин, як засіб розв'язання задач гарантованих оцінок, фільтрації і мінімаксного оцінювання в динамічних системах з невизначеністю. За допомогою інваріантних множин можна апроксимувати області досяжності динамічних систем. Інваріантні еліпсоїди описуються у вигляді

$$\mathcal{E}_x = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T P^{-1} x \leq 1\}, \quad (1.35)$$

де $P = P^T > 0$ — задана матриця. При побудові інваріантних еліпсоїдів динамічних систем застосовуються метод квадратичних функцій Ляпунова і техніка ЛМН [55, 58, 64]. Метод інваріантних еліпсоїдів є один із ефективних засобів гасіння зовнішніх збурень у системах керування. Синтез оптимального керування за цим методом зводиться до пошуку так званого *мінімального інваріантного еліпсоїда* замкнутої системи. Так, якщо в лінійній системі (1.15) матриця A — Гурвіцева, пара (A, B) керована, $\text{rank } C = l$ і $D = 0$, а вхідний вектор u обмежений ($\|u(t)\| \leq 1$), то еліпсоїд (1.35) є інваріантним за станом для даної системи тоді і лише тоді, коли для деякого $\alpha > 0$ виконується матрична нерівність

$$AP + PA^T + \alpha P + \frac{1}{\alpha} BB^T < 0. \quad (1.36)$$

При цьому множина досяжних виходів $y(t)$ даної системи належить еліпсоїду

$$\mathcal{E}_y = \{y \in \mathbb{R}^l : y^T (CPC^T)^{-1} y \leq 1\}. \quad (1.37)$$

Це означає, що оцінка міри впливу L_∞ -обмежених вхідних сигналів або зовнішніх збурень на вектор виходу $y(t)$ системи керування зводиться до знаходження мінімального обмежуючого еліпсоїду (1.37). Критерієм мінімальності еліпсоїда (1.37) може бути його об'єм, найбільша піввісь або величина

$f(P) = \text{tr}(CPC^T)$. Аналогічний підхід застосовується в задачі гасіння l_∞ -обмежених зовнішніх збурень для дискретних систем керування.

Зазначимо, що для практичного застосування методів стабілізації та оптимізації систем керування, які зводяться до розв'язання систем ЛМН, розроблено ефективну оптимізаційну процедуру (метод внутрішньої точки), яка реалізована у програмному середовищі LMI Toolbox комп'ютерної системи Matlab [104]. Для розв'язання систем ЛМН з додатковими, зокрема, ранговими обмеженнями можуть бути застосовані також можливості комп'ютерної системи Mathcad Prime.

1.3. Дескрипторні системи у прикладних дослідженнях

Дескрипторні (диференціально-алгебраїчні) системи виникають при проектуванні та дослідженні динаміки керованих об'єктів механіки, електротехніки, економіки тощо (див., наприклад, [11,60,81,92,96,146]). З математичної точки зору клас таких систем є природним узагальненням звичайних систем, які будуються на основі відомих законів природи: фізичних, хімічних, біологічних тощо. Такі закони можуть мати диференціальну (наприклад, другий закон Ньютона) або алгебраїчну форму (наприклад, закон Кірхгофа). Зазвичай математична модель об'єкта керування подається у формі диференціальних або різницевих рівнянь. Однак існують ситуації, коли такої форми опису може не вистачити. Спроби опису подібних систем за допомогою лише диференціальних або різницевих рівнянь можуть привести до втрати інформації або ж до опису системи в деяких абстрактних фазових змінних. Отже, при виборі математичної моделі системи в змінних, які мають реальний фізичний зміст, доводиться стикатися з тим, що вона може містити в собі не лише диференціальні, а й алгебраїчні зв'язки і обмеження.

Теорія дескрипторних систем започаткована в роботах П. Дірака, К. Вейерштрасса і Л. Кронекера [93, 122, 163] і розвинута Ф.Р. Гантмахером з використанням матричних в'язок [18]. Механічні системи як дескрипторні системи в подальшому стали об'єктом широкого дослідження [73, 109, 112,

114, 127, 131, 154].

Запис математичної моделі системи керування в диференціально-алгебраїчній формі, як правило, тягне за собою неможливість розв'язати дану сукупність диференціально-алгебраїчних рівнянь стосовно першої похідної. Типова лінійна дескрипторна система має вигляд

$$E\dot{x} = Ax + Bw, \quad z = Cx + Dw, \quad x(0) = x_0, \quad (1.38)$$

де матриця при похідних E може бути виродженою.

Загальна математична теорія диференціально-алгебраїчних систем почала активно розвиватися в 1970-х роках незалежно в різних областях техніки. Необхідно виділити роботи Гіра [106], Тейкенса [161], а також монографії Кемпбелла [84] і Петзольда [143], що вийшли на початку 1980х років. У даних роботах основна увага була акцентована на численних аспектах моделювання дескрипторних систем. В даний час досить велика увага приділяється диференціально-алгебраїчним системам в частинних похідних [79, 132, 148], а також стохастичним дескрипторним системам [152]. У вітчизняній і зарубіжній літературі диференціально-алгебраїчні системи [14, 69, 83] називаються також сингулярними системами [84], узагальненими системами в просторі станів (або узагальненими системами) [76], неявними системами [71, 74] або дескрипторними системами [140]. Також у вітчизняній літературі можна зустріти термін “системи Леонтіївського типу” [15, 25, 61]. Найбільш часто в зарубіжній літературі використовується термін “дескрипторна система” (від англ. descriptor – описувач). В даному випадку мається на увазі, що змінні, які формують математичну модель керованого об'єкта, описують якийсь реальний процес, що протікає в об'єкті.

Дескрипторного системи знайшли своє застосування при моделюванні руху літальних апаратів [155], хімічних процесів [75, 125], в схемотехніці [140, 147], в економічних системах [129], для опису з'єднаних між собою систем високого порядку [130], в технічних системах [72, 116], в енергетичних системах [150], для опису механічних систем [73, 144] і в робототехніці [137]. Дескрипторні системи мають деякі характерні відмінності від звичайних систем

(тут і далі звичайними будемо називати системи, описувані тільки диференціальними або тільки різницевиими рівняннями). Для дескрипторних систем характерні наступні властивості [77, 107, 162]:

- Матрична передавальна функція дескрипторної системи може не бути строго правильною.
- Для довільних обмежених початкових умов розв'язки диференціально-алгебраїчних рівнянь можуть містити узагальнені функції (імпульсна поведінка), а розв'язки різницево-алгебраїчних рівнянь можуть залежати від майбутніх моментів часу (непричинна поведінка).
- Розв'язки лінійних диференціально-алгебраїчних рівнянь зазвичай містить три типи компонент: обмежені динамічні компоненти, що відповідають диференціальним складовим; нединамічні компоненти, що відповідають алгебраїчним складовим; необмежені динамічні компоненти з класу узагальнених функцій, наявність яких залежить від гладкості вхідного сигналу, а також від початкових умов.

Незважаючи на зазначені вище особливості, дослідження дескрипторних систем представляє досить перспективний напрямок як з точки зору фундаментальних досліджень, так і з точки зору практичного застосування. Істотні відмінності дескрипторних систем від звичайних обумовлювали розвиток і узагальнення математичного апарату для них.

Велика кількість фундаментальних понять і результатів з теорії звичайних систем успішно узагальнено для дескрипторних системи: можливість розв'язання диференціальн-алгебраїчних рівнянь, дослідження керованості та спостережуваності [14, 69]; канонічні форми та подання дескрипторних систем [84, 110]; мінімальні реалізації [91, 102, 113]; еквівалентність систем [92, 115]; регулярність і регуляризація [82, 88]; стійкість і стабілізація [107, 126, 141]; модальне керування [70, 90, 111, 151]; лінійно-квадратичне оптимальне керування [77, 124]; синтез спостерігачів та фільтрація [92, 138]; теореми і рівняння Ляпунова [77, 118, 157]; редукція моделі [158, 166]; H_2 і H_∞ керування [87, 101, 119, 133].

Наведемо приклади дескрипторних моделей реальних об'єктів.

Приклад 1. Механічні системи з обмеженнями [11]. Механічні системи в широких припущеннях описуються у вигляді

$$A_2\ddot{q}(t) + A_1\dot{q}(t) + A_0q(t) = Uu(t) + V\mu(t), \quad G_1\dot{q}(t) + G_0q(t) = 0, \quad (1.39)$$

де $q(t) \in \mathbb{R}^\nu$ — вектор положень, $u(t) \in \mathbb{R}^s$ — вектор діючих зовнішніх сил, $\mu(t) \in \mathbb{R}^r$ — вектор множників Лагранжа, A_2 — матриця інерційних характеристик, A_1 — матриця демпфування або гіроскопічних характеристик, A_0 — матриця жорсткості, $V^\top$ — якобіан рівняння обмежень. Система рівнянь (1.39) набуває стандартну форму (1.38), якщо

$$E = \begin{bmatrix} I_\nu & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & I_\nu & 0 \\ -A_0 & -A_1 & V \\ G_0 & G_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ U \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \\ \mu \end{bmatrix},$$

$$z = C_0q + C_1\dot{q}, \quad C = \begin{bmatrix} C_0 & C_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = 0. \quad (1.40)$$

Приклад 2. Випарник [11]. Розглянемо однокомпонентну систему фазової рівноваги, в якій присутні газоподібна та рідка фази (рис. 1.1). Пара (визначена індексом V) та рідина (індекс L) знаходяться в підігріваємій ємності. В ємності знаходяться 2 фази з масами M_V , M_L та температурами T_V і

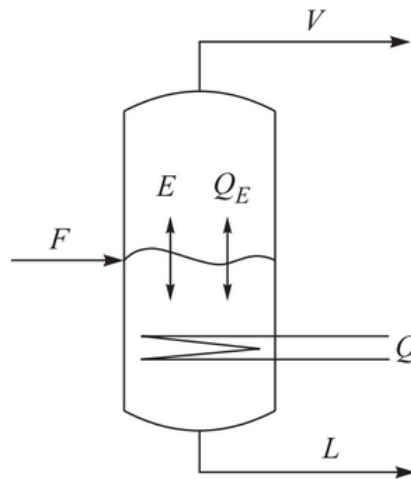


Рис. 1.1: Схема випарника.

T_L . Система має підживлення з потоком F . В даній моделі розглядаються 2

рівняння балансу об'єму: для газоподібної фази та для рідини. Рівняння, що описують динаміку процесу мають наступний вигляд.

Закони збереження:

баланс маси

$$\dot{M}_V = E - V, \quad \dot{M}_L = F - E - L;$$

баланс енергії

$$\dot{U}_V = Eh_{LV} - Vh_{LV} + Q_E, \quad \dot{U}_L = Fh_F - Eh_{LV} + Q - Q_E;$$

Рівняння передачі маси та енергії:

$$E = (k_{LV} + k_{VL})A(P^* - P), \quad Q_E = (u_{LV} + u_{VL})A(T_L - T_V),$$

де індекс LV означає рідину в парі, а VL — парі до рідини в коефіцієнтах передачі маси та енергії k_i та u_i . Коефіцієнти для LV та VL зазвичай різні.

Рівняння балансу об'ємів: $V_V = V_T - V_L$.

Закони керування: $L = f_1(M_L, P)$ або $L = f_2(M_L)$.

Позначення та змінні, розглянуті в прикладі: M_V — маса пари, U_V — внутрішня енергія пари, F — швидкість подачі підживлення, L — швидкість потоку рідини, T_V — температура пари, Q — інтенсивність джерела тепла, P — тиск системи, A — площа поверхні границі розділення фаз, V_V — об'єм пари, h_V — ентальпія пари, h_F — ентальпія підпитки, ρ_L — густина рідини, V_L — об'єм рідини, M_L — маса рідини, U_L — внутрішня енергія рідини, V — швидкість потоку пари, E — швидкість розділення фаз, T_L — температура рідини, P^* — тиск пари, R — газова константа, V_T — об'єм посудини, h_L — ентальпія рідини, m_ω — маса молекули, h_{LV} — ентальпія пари на границі розділення фаз, k_i — коефіцієнт обміну маси, u_i — коефіцієнт теплопередачі, індекс LV — перенос від рідини до пари, VL — перенос від пари до рідини. Залежність змінних виражена наступним чином:

$$h_V = h_V(T_V, P), \quad h_L = h_L(T_L, P), \quad h_{LV} = h_{LV}(T_L, P),$$

$$h_F = h_F(T_F, P), \quad k_{LV} = k_{LV}(T_L, T_V, P), \quad k_{VL} = k_{VL}(T_L, T_V, P),$$

$$u_{LV} = u_{LV}(T_L, T_V, P), \quad u_{LV} = u_{LV}(T_L, T_V, P), \quad \rho_L = \rho_L(T_L, P).$$

Наведені рівняння з урахуванням природних обмежень можуть бути записані у дескрипторній формі.

Приклад 3. Економічна модель Леонтьєва [11]. Запропонована Леонтьєвим на початку 1950-х років динамічна міжгалузева модель є класичним прикладом використання диференціальних та різницевих рівнянь в дослідженні проблем економічного зростання. Побудова цієї моделі зручно представити у вигляді дезагрегованих елементів найпростішої динамічної моделі відтворення загального продукту, при якому ендогенні та екзогенні макрозмінні замінюються векторами, а технологічні макропараметри — матрицями. Модель має вигляд:

$$x(k) = Ax(k) + B(x(k+1) - x(k)) + d(k), \quad k = 0, 1, \dots$$

де $x(k)$ — n -мірний вектор виробництва n галузей, $B(x(k+1) - x(k))$ — сумарна ємність виробничих потужностей, яка зазвичай існує в формі активів, $d(k)$ — вектор-стовпчик споживання (включаючи невиробниче накопичення), $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — матриця коефіцієнтів прямих матеріальних витрат (коефіцієнти в динамічній моделі включають також затрати на компенсацію вибуття та капітальний ремонт основних виробничих фондів), $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — матриця коефіцієнтів капіталоємності приростів виробництва (затрати виробничого накопичення на одиницю приросту відповідних видів продукції), $Ax(k)$ — частина сировинних продуктів, необхідних для виробництва поточної продукції. Рівняння моделі може бути записано так:

$$Bx(k+1) = (I - A + B)x(k) - d(k), \quad k = 0, 1, \dots$$

В багатогалузевих економічних системах збільшення виробництва в одній галузі не потребує інвестицій у всі інші галузі економіки, більш того, в практичних випадках всього лише декілька галузей потребують інвестицій для розвитку виробництва в інших галузях. Таким чином, більша частина елементів матриці B рівна нулю, за виключенням декількох елементів матриці.

Матриця B часто буває виродженою. В загальному випадку розглянута система є типовою виродженою дескрипторною системою дискретного часу.

Приклад 4. Дволанковий осцилятор [11]. Розглянемо механічну систему, яка складається з двох тіл одиничної маси, зв'язаних між собою демпфуючим елементом (рис. 1.2).

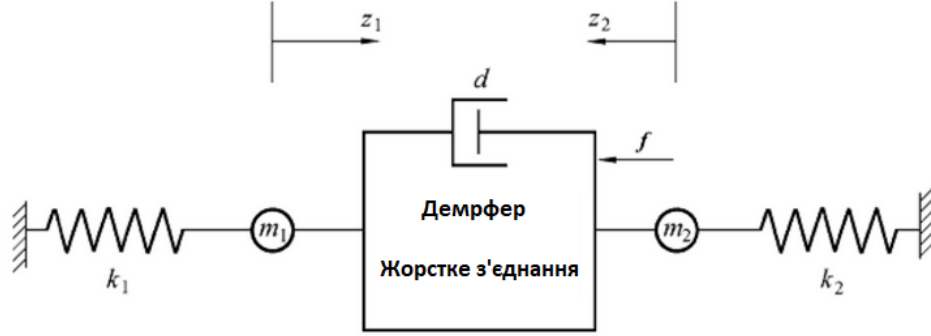


Рис. 1.2: Дволанковий осцилятор.

Нехай $m_1 = m_2 = 1$ кг, $d = 1$ Н·с/м, $k_1 = 2$ Н/м, $k_2 = 1$ Н/м. Тоді рівняння (1.39) і (1.40) для даної системи мають вигляд

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{z}_1 \\ \ddot{z}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} f + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mu,$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = 0, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = 0,$$

Матриці мають вигляд:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$L = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_v = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Таким чином, можна легко перейти до форми (1.38).

Приклад 5. Електричне коло [11]. Розглянемо електричну схему, зображену на рис. 1.2, де джерело струму $V_S(t)$ — керуючий вплив, R, L, C — опір, індуктивність, ємність відповідно з напругами $V_R(t), V_L(t), V_C(t)$.

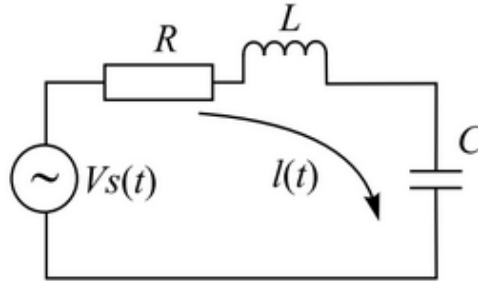


Рис. 1.3: RLC коло.

Відповідно до законів Кіргофа отримаємо математичну модель системи:

$$\begin{bmatrix} L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}(t) \\ \dot{I}_L(t) \\ \dot{I}_C(t) \\ \dot{I}_R(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{C} & 0 & 0 & 0 \\ -R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I(t) \\ V_L(t) \\ V_C(t) \\ V_R(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} V_s(t).$$

Тепер розглянемо електричне коло, що складається лише з опорів, ємності та ЕРС. Будемо вважати, що матриці R та C сталі. Припустимо, що коло заземлене, тобто будь-який вузол кола має шлях до заземлення. Це припущення еквівалентне тому, що елементи матриці зв'язку є лінійно-незалежними, тобто $\text{rank} A = N$, $N \geq B$. Зазначимо, що два стовпці матриці лінійно залежні тоді і тільки тоді, коли вони рівні, оскільки стовпці матриці містять або $+1$, або -1 , або нульові елементи. В цьому випадку, якщо коло містить контур з 2-х гілок між двома вузлами, то одну з гілок можна не враховувати. Для лінійного RC-кола з ЕРС рівняння системи є диференціально-алгебраїчним рівнянням індексу 1. В данному випадку схема має бути зібрана так, щоб джерела ЕРС були незалежними, а замкнені контури всередині схеми мають містити опори. Така система може бути зведена від дескрипторної форми до звичайної шляхом алгебраїчних розрахунків. Проте в загальному випадку розрідженість матриць системи не дозволяє отримати рівняння у звичайній формі.

Наведемо основні відомі властивості класу дескрипторних систем (1.38) (див, наприклад, [11, 117, 133]). Розглянемо H_∞ -норму матричної передатної функції системи (1.38):

$$\|G\|_\infty = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \sqrt{\lambda_{\max}(G^\top(-i\omega)G(i\omega))}, \quad G(\lambda) = C(\lambda E - A)^{-1}B + D.$$

Дана характеристика описує рівень впливу обмежених збурень на вихід системи (1.38). При цьому виконується оцінка

$$\|G\|_\infty < \gamma, \quad \gamma > 0, \quad (1.41)$$

тоді і лише тоді, коли для деякої матриці P виконується матрична нерівність

$$\begin{bmatrix} A^\top P + P^\top A + C^\top C & P^\top B + C^\top D \\ B^\top P + D^\top C & D^\top D - \gamma^2 I \end{bmatrix} < 0.$$

Наступні твердження еквівалентні [133]:

1) пара матриць (E, A) є допустимою (стійкою і неімпульсною) і виконується оцінка (1.41);

2) існує матриця $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ така, що

$$E^\top X = X^\top E \geq 0, \quad A^\top X + X^\top A + C^\top C + \frac{1}{\gamma^2} X^\top B B^\top X = 0;$$

2) існує матриця $Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$ така, що

$$Y E^\top = E Y^\top \geq 0, \quad Y A^\top + A Y^\top + B B^\top + \frac{1}{\gamma^2} Y C^\top C Y^\top < 0.$$

В роботі [99] розглядався узагальнений критерій якості системи (1.38):

$$\gamma(R) = \sup_{0 < \|w\|^2 + x_0^\top X_0 x_0 < \infty} \frac{\|z\|}{\sqrt{\|w\|^2 + x_0^\top R x_0}}, \quad (1.42)$$

де $\|w\|$ — L_2 -норма вектор-функції w , $R > 0$ — вагова матриця. У випадку $D = 0$ встановлено, що пара матриць (E, A) є допустимою і виконується оцінка $\gamma(R) < \gamma$ тоді і лише тоді, коли сумісна система співвідношень

$$0 \leq E^\top X = X^\top E \leq \gamma^2 E^\top R E, \quad \begin{bmatrix} A^\top X + X^\top A & X^\top B & C^\top \\ B^\top X & -\gamma I & 0 \\ C & 0 & -I \end{bmatrix} < 0.$$

На основі цього факту встановлено критерій існування і метод побудови статичного регулятора за станом $u = Kx$ для системи

$$\begin{aligned} E\dot{x} &= Ax + B_1w + B_2u, \quad x(0) = x_0, \\ z &= C_1x + D_{12}u, \end{aligned} \quad (1.43)$$

при якому замкнена система є допустимою і така, що виконується оцінка $\gamma(R) < \gamma$.

В [86] розроблено метод побудови статичного регулятора за виходом $u = Ky$ для системи

$$\begin{aligned} E\dot{x} &= Ax + B_1w + B_2u, \quad x(0) = x_0, \\ y &= Cx, \end{aligned} \quad (1.44)$$

Встановлено, що замкнена система

$$E\dot{x} = (A + B_2KC)x + B_1w, \quad x(0) = x_0, \quad (1.45)$$

є допустимою і така, що для неї виконується оцінка $\|G\|_\infty < \gamma$ тоді і лише тоді, коли для деяких матриць $P > 0$, Q , $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ і K виконується матрична нерівність

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A}^\top \mathcal{G}^\top + \mathcal{G}\mathcal{A} + \mathcal{C}^\top \mathcal{C} & (\mathcal{P}\mathcal{E} + \mathcal{Z}\mathcal{Q})^\top + \mathcal{A}^\top \mathcal{F}^\top - \mathcal{G} \\ \mathcal{P}\mathcal{E} + \mathcal{Z}\mathcal{Q} + \mathcal{F}\mathcal{A} - \mathcal{G}^\top & -\mathcal{F} - \mathcal{F}^\top \end{bmatrix} < 0,$$

де

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{B} \\ 0 & -I \end{bmatrix}, \quad \mathcal{E} = \begin{bmatrix} \hat{E} & 0 \\ 0 & (\gamma^2/2)I \end{bmatrix}, \quad \mathcal{C} = \begin{bmatrix} \hat{C} & 0 \end{bmatrix}, \\ \hat{E} &= \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{A} = \begin{bmatrix} A & B_2 \\ KC & -I \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{C} = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathcal{P} &= \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad \mathcal{Q} = \begin{bmatrix} Q & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{E}\mathcal{Z} = 0. \end{aligned}$$

Розглянемо лінійну систему керування в загальному вигляді

$$\begin{aligned} E\dot{x} &= Ax + B_1w + B_2u, \quad x(0) = x_0, \\ z &= C_1x + D_{11}w + D_{12}u, \\ y &= C_2x + D_{21}w + D_{22}u, \end{aligned} \quad (1.46)$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $w \in \mathbb{R}^s$, $z \in \mathbb{R}^k$ і $y \in \mathbb{R}^l$ — вектори відповідно стану, керування, зовнішніх збурень, керованого і спостережуваного виходів, а всі матричні коефіцієнти відповідних розмірів сталі.

Наступні твердження еквівалентні [133]:

1) для системи (1.46) існує динамічний зворотний зв'язок (регулятор)

$$\widehat{E}\dot{\xi} = \widehat{A}\xi + \widehat{B}y, \quad u = \widehat{C}\xi, \quad (1.47)$$

при якому замкнена система (1.46), (1.47), що зводиться до вигляду

$$E_c \dot{x}_c = A_c x_c + B_c w, \quad z = C_c x_c,$$

є допустимою і така, що $\|C_c(sE_c - A_c)^{-1}B_c\|_\infty < \gamma$;

2) (а) існують $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$ та $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ такі, що

$$E^\top X = X^\top E \geq 0, \quad \mathcal{F}_\gamma(X; A + B_2 F, B_1, C_1) < 0;$$

(б) існують $G \in \mathbb{R}^{n \times p}$ та $Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$ такі, що

$$EY^\top = YE^\top \geq 0, \quad \mathcal{F}_\gamma(Y^\top; (A + GC_2)^\top, C_1^\top, B_1^\top) < 0;$$

(с) невироджені матриці X та Y задовольняють

$$E^\top(\gamma^2 Y^{-\top} - X) \geq 0, \quad Y^{-\top} = (Y^\top)^{-1},$$

де $\mathcal{F}_\gamma(X, A, B, C) = A^\top X + X^\top A + C^\top C + \frac{1}{\gamma^2} X^\top B B^\top X$.

Наведений огляд досліджень звичайних і дескрипторних систем не є вичерпаним і не претендує на повноту. Існує велика кількість робіт з даної тематики, кожна із яких має свої переваги і недоліки. Основна мета цих досліджень полягає у зведенні проблем оцінки та досягнення рівня впливу обмежених збурень у системах керування до розв'язання лінійних матричних нерівностей, що вдається зробити у окремих випадках та при додаткових обмеженнях. В загальному випадку необхідно враховувати рангові обмеження, пов'язані з виродженістю матриці при похідних E .

Розділ 2

ОЦІНКА ЗВАЖЕНОГО РІВНЯ ГАСІННЯ ЗОВНІШНІХ І ПОЧАТКОВИХ ЗБУРЕНЬ

Сучасні напрямки досліджень лінійних і нелінійних систем керування складають методи теорії H_∞ -оптимізації, які забезпечують робастну стійкість станів рівноваги й мінімізують негативний вплив зовнішніх збурень на динаміку керованих об'єктів. Типовим критерієм якості систем керування з нульовим початковим станом є рівень гасіння зовнішніх збурень, якому відповідає максимальне значення відношення L_2 -норм векторів керованого виходу об'єкта і збурень. Відомі методи синтезу H_∞ -керування базуються на використанні верхніх оцінок для відповідних критеріїв якості, встановлених у термінах матричних рівнянь і нерівностей (твердження типу “Bounded Real Lemmas” [80, 103, 165]). В даному розділі розглядається клас лінійних дескрипторних систем зі збуреннями. Наводяться аналогічні оцінки для більш загальних критеріїв якості, які враховують як зовнішні, так і початкові збурення, що обумовлені невідомим початковим вектором таких систем.

2.1. Структура розв'язків і стійкість лінійних дескрипторних систем

Розглянемо лінійну дескрипторну систему

$$E\dot{x}(t) = Ax(t), \quad x(0) = x_0, \quad t \geq 0, \quad (2.1)$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ і $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — сталі матриці.

Означення 2.1. Система (2.1) і відповідна в'язка матриць $F(\lambda) = A - \lambda E$ називаються *регулярними*, якщо $\det F(\lambda) \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Регулярна в'язка матриць $F(\lambda)$ має $r \leq n$ власних значень із урахуванням кратностей, які є коренями рівняння $\det(F(\lambda)) = 0$ і утворюють скінченний спектр $\sigma(F) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$. В'язка $F(\lambda)$ є *стійкою*, якщо

$$\sigma(F) \subset \mathbb{C}^- = \{\lambda : \operatorname{Re} \lambda < 0\}.$$

Канонічна форма Веєрштраса регулярної в'язки матриць має вигляд [18]

$$LF(\lambda)R = \left[\begin{array}{c|c} A_1 - \lambda I_r & 0 \\ \hline 0 & I_{n-r} - \lambda N \end{array} \right], \quad (2.2)$$

де $A_1 \in \mathbb{R}^{r \times r}$ — матриця, спектр якої збігається з $\sigma(F)$, $N \in \mathbb{R}^{(n-r) \times (n-r)}$ — нільпотентна матриця індексу ν , тобто $N^\nu = 0$ і $N^k \neq 0$ при $k < \nu$, L і R — невироджені матриці перетворення еквівалентності. Згідно з (2.2) виконується співвідношення

$$LAR = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix}, \quad LER = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

Застосовуючи заміну змінних

$$x = R_1 x_1 + R_2 x_2, \quad R = [R_1, R_2], \quad x_1 \in \mathbb{R}^r, \quad x_2 \in \mathbb{R}^{n-r},$$

систему (2.1) можна подати у вигляді двох підсистем

$$\dot{x}_1(t) = A_1 x_1(t), \quad N \dot{x}_2(t) = x_2(t).$$

Із нільпотентності матриці N випливає, що

$$x_2(t) = N \dot{x}_2(t) = N^2 \ddot{x}_2(t) = \dots = 0.$$

Це означає, що розв'язок задачі Коші (1) існує лише тоді, коли початковий вектор x_0 належить підпростору

$$\text{Im } R_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : x = R_1 x_1, x_1 \in \mathbb{R}^r\}.$$

При цьому довільний розв'язок системи (2.1) можна подати у вигляді

$$x(t) = T e^{\Lambda t} z_0, \quad x_0 = T z_0, \quad (2.4)$$

де $T \in \mathbb{R}^{n \times r}$ і $\Lambda \in \mathbb{R}^{r \times r}$ — матриці, що задовольняють співвідношення

$$AT = ET\Lambda, \quad \text{rank } T = \text{rank}(ET) = r. \quad (2.5)$$

Зокрема, згідно з (2.3) і (2.5) можна покласти $T = R_1$, $\Lambda = A_1$ і $z_0 = x_1(0)$.

Матрична рівність в (2.5) визначає блочну власну пару (Λ, T) регулярної в'язки матриць $F(\lambda) = A - \lambda E$ [39]. Причому, якщо виконуються рангові обмеження в (2.5), то всі власні значення матриці Λ визначають скінчений спектр в'язки матриць $F(\lambda)$.

При дослідженні стійкості класу систем (2.1) використовуються матричні рівняння або нерівності типу Ляпунова [39]. Зокрема якщо існують симетричні матриці X і Y , що задовольняють систему ЛМН

$$A^\top X E + E^\top X A + E^\top Y E \leq 0, \quad (2.6)$$

$$E^\top X E \geq 0, \quad Y > 0, \quad (2.7)$$

то нульовий розв'язок системи (2.1) асимптотично стійкий. При цьому

$$v(x) = x^\top E^\top X E x$$

є функцією Ляпунова системи (2.1). Критерієм асимптотичної стійкості розв'язку $x = 0$ системи (2.1) є існування невід'ємно визначених матриць рангу r виду

$$X = T \tilde{X} T^\top \geq 0, \quad Y = T \tilde{Y} T^\top \geq 0, \quad (2.8)$$

що задовольняють матричне рівняння

$$A X E^\top + E X A^\top + E Y E^\top = 0. \quad (2.9)$$

При цьому шукані матриці $\tilde{X}$ і $\tilde{Y}$ симетричні і додатно визначені, а T — довільна матриця, для якої виконується співвідношення (2.5).

Доведення наведених умов стійкості дескрипторної системи (2.1) здійснюється на основі канонічного представлення матриць (2.1) та зведення до застосування класичного критерію стійкості матриці $\Lambda = A_1$ в термінах матричного рівняння або нерівності Ляпунова. Так, підставивши вирази (2.8) в (2.9) і враховуючи матричну рівність в (2.1), маємо

$$E T \Lambda \tilde{X} T^\top E^\top + E T \tilde{X} \Lambda^\top T^\top E^\top = E T \tilde{Y} T^\top E^\top$$

або

$$E T (\Lambda \tilde{X} + \tilde{X} \Lambda^\top - \tilde{Y}) T^\top E^\top = 0.$$

Згідно з (2.5) ET — матриця повного рангу r по стовпцям. Тому співвідношення (2.8) і (2.9) виконуються тоді і лише тоді, коли

$$\Lambda\tilde{X} + \tilde{X}\Lambda^\top = \tilde{Y}. \quad (2.10)$$

За теоремою Ляпунова матриця Λ гурвіцева або, що те ж саме, нульовий розв'язок системи (2.1) асимптотично стійкий тоді і лише тоді, коли матричне рівняння Ляпунова (2.10) має розв'язок $\tilde{X} = \tilde{X}^\top > 0$ для довільної матриці $\tilde{Y} = \tilde{Y}^\top > 0$.

2.2. Допустимі дескрипторні системи зі збуреннями

Розглянемо лінійну дескрипторну систему зі збуреннями

$$E\dot{x} = Ax + Bw, \quad z = Cx + Dw, \quad x(0) = x_0, \quad (2.11)$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, $w \in \mathbb{R}^s$ і $z \in \mathbb{R}^l$ — відповідно вектори стану, зовнішніх збурень і виходу, E , A , B , C і D — сталі матриці відповідних розмірів, причому в'язка матриць $F(\lambda) = A - \lambda E \in$ регулярною, тобто $\det F(\lambda) \neq 0$ ($\lambda \in \mathbb{C}$).

Застосовуючи канонічну форму Веєрштрасса (2.2) регулярної в'язки матриць $F(\lambda)$ у випадку $\rho = \text{rank } E < n$, систему (2.11) можна подати у вигляді

$$\dot{x}_1 = A_1x_1 + B_1w, \quad N\dot{x}_2 = x_2 + B_2w, \quad z = C_1x_1 + C_2x_2 + Dw, \quad (2.12)$$

де $x_1 \in \mathbb{R}^r$ і $x_2 \in \mathbb{R}^{n-r}$ — стани відповідно *повільної* і *швидкої* підсистем [11],

$$x = R \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad x_0 = R \begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{bmatrix}, \quad LB = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad CR = [C_1, C_2].$$

При цьому дана система має r скінченних *динамічних мод*, $n - \rho$ *нединамічних мод* і $\rho - r$ *імпульсних мод* [77].

Регулярна в'язка матриць $F(\lambda)$ при відсутності імпульсних мод ($\rho = r$) називається *неімпульсною*. У цьому випадку $\nu = 1$, тобто $N = 0$, і динамічна підсистема в (2.12) має вигляд

$$\dot{x}_1 = A_1x_1 + B_1w, \quad z = C_1x_1 + D_1w, \quad x_1(0) = x_{01}, \quad (2.13)$$

де $D_1 = D - C_2 B_2$. Її довільний розв'язок подається у вигляді

$$x_1(t) = e^{A_1 t} x_{01} + \int_0^t e^{A_1(t-\tau)} B_1 w(\tau) d\tau.$$

Якщо векторна функція $w(t)$ кусково неперервно-диференційовна ν разів, то в загальному випадку розв'язок другої (*алгебраїчної*) підсистеми має вигляд [11]

$$x_2(t) = - \sum_{i=1}^{\nu-1} \delta^{(i-1)}(t) N^i x_2(0) - \sum_{i=0}^{\nu-1} N^i B_2 w^{(i)}(t),$$

де $\delta(t)$ — δ -функція Дірака. Даний вираз при $\nu > 1$ містить імпульсні складові.

Означення 2.2. В'язка матриць $F(\lambda) = A - \lambda E$ називаються *допустимою*, якщо вона регулярна, стійка і неімпульсна. Дескрипторна система (2.11) з допустимою в'язкою матриць $F(\lambda)$ є *допустимою*.

Лема 2.1. *Регулярна в'язка матриць $F(\lambda)$ неімпульсна тоді і лише тоді, коли сумісна система матричних рівнянь*

$$AZE = EZA, \quad Z = ZEZ, \quad E = EZE. \quad (2.14)$$

Доведення. Нехай система (2.14) сумісна. Згідно з (2.2) застосуємо вирази

$$A = L^{-1} \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix} R^{-1}, \quad E = L^{-1} \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} R^{-1}$$

і розв'язок матричної системи (2.14) побудуємо у вигляді

$$Z = R \begin{bmatrix} Z_0 & Z_3 \\ Z_1 & Z_2 \end{bmatrix} L, \quad (2.15)$$

де Z_i — невідомі матриці ($i = \overline{0,3}$). Тоді, підставивши (2.15) в (2.14), отримаємо еквівалентну систему співвідношень

$$A_1 Z_0 = Z_0 A_1, \quad Z_1 = N Z_1 A_1,$$

$$Z_2 N = N Z_2, \quad A_1 Z_3 N = Z_3,$$

$$\begin{aligned}
Z_0 &= Z_0^2 + Z_3 N Z_1, & Z_1 &= Z_1 Z_0 + Z_2 N Z_1, \\
Z_2 &= Z_1 Z_3 + Z_2 N Z_2, & Z_3 &= Z_0 Z_3 + Z_3 N Z_2. \\
Z_0 &= I_r, & N Z_1 &= 0, & N Z_2 N &= N, & Z_3 N &= 0.
\end{aligned}$$

Із нільпотентності матриці N випливає, що блоки Z_1 , Z_2 і Z_3 повинні бути нульовими. Тоді очевидно $N = 0$.

Навпаки, якщо $N = 0$, то система (2.14) має єдиний розв'язок, який подається у вигляді

$$Z = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\omega} F^{-1}(\lambda) d\lambda = R \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} L, \quad (2.16)$$

де ω — замкнутий контур, що охоплює спектр $\sigma(F)$.

Лему доведено. □

Наведемо також відомий ранговий критерій неімпульсності в'язки матриць $F(\lambda)$ [96]:

$$\text{rank} \begin{bmatrix} E & 0 \\ A & E \end{bmatrix} = n + \rho. \quad (2.17)$$

Лема 2.2. [133] *Дескрипторна система (2.11) є допустимою тоді і лише тоді, коли сумісна система співвідношень*

$$A^\top X + X^\top A < 0, \quad (2.18)$$

$$E^\top X = X^\top E \geq 0. \quad (2.19)$$

Співвідношення (2.19) можна подати у вигляді ЛМН

$$\begin{bmatrix} S & S - E^\top X \\ S - X^\top E & 0 \end{bmatrix} \geq 0 \quad (2.20)$$

відносно X і $S = S^\top \geq 0$, оскільки усі елементи стрічок і стовпців невід'ємно визначеної матриці, які відповідають нульовим діагональним елементам, також повинні бути нульовими. Розв'язок матричної нерівності (2.18) для допустимої системи завжди можна побудувати у параметричному вигляді [145]

$$X = SE + E_0 G, \quad (2.21)$$

де $E_0 = W_{E^\top}$ — матриця, стовпці якої утворюють базис ядра матриці $E^\top$, а $S = S^\top > 0$ і $G \in \mathbb{R}^{n-\rho}$ — нові шукані матриці. При цьому співвідношення (2.19) виконується автоматично.

2.3. Зважений рівень гасіння обмежених збурень

Нехай вектор збурень $w(t)$ у системі (2.11) обмежений за зваженою L_2 -нормою $\|w\|_P$. Введемо критерій якості даної системи у вигляді

$$J = \sup_{(w, x_0) \in \mathcal{W}} \frac{\|z\|_Q}{\sqrt{\|w\|_P^2 + x_0^\top X_0 x_0}}, \quad (2.22)$$

де $\mathcal{W}$ — множина пар (w, x_0) , для яких система має розв'язок і виконується нерівність $0 < \|w\|_P^2 + x_0^\top X_0 x_0 < \infty$, а $P = P^\top > 0$, $Q = Q^\top > 0$ і $X_0 = X_0^\top \geq 0$ — деякі вагові матриці.

Значення J характеризує зважений рівень впливу зовнішніх і початкових збурень на вихід системи (2.11). Для даного критерію якості використовуємо позначення J_0 або J_1 , якщо відповідно $x_0^\top X_0 x_0 = 0$ або $w \equiv 0$, тобто

$$J_0 = \sup_{0 < \|w\|_P^2 < \infty} \frac{\|z\|_Q}{\|w\|_P},$$

$$J_1 = \sup_{x_0^\top X_0 x_0 > 0} \frac{\|z\|_Q}{\sqrt{x_0^\top X_0 x_0}}.$$

Очевидно, що $J_0 \leq J$ і $J_1 \leq J$, причому J_1 є характеристикою динамічної підсистеми (2.13), оскільки при відсутності зовнішніх збурень $x_2 \equiv 0$. У випадку одиничних матричних коефіцієнтів характеристика J_0 збігається з H_∞ -нормою матричної передатної функції

$$\|G\|_\infty = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \sqrt{\lambda_{\max}(G^\top(-i\omega)G(i\omega))}, \quad G(\lambda) = C(\lambda E - A)^{-1}B + D.$$

Означення 2.3. Початковий x_0 і збурювальний w вектори, при яких досягається супремум в (2.22), є *найгіршими* стосовно критерію якості J .

З методами знаходження найгірших пар векторів (x_0, w) для звичайних систем ($E = I_n$) можна ознайомитись в [7, 44].

Означення 2.4. Система (2.11) називається *неекспансивною*, якщо її вектор виходу при довільному $\tau > 0$ задовольняє нерівність

$$\int_0^\tau z^\top Q z dt \leq \int_0^\tau w^\top P w dt + x_0^\top X_0 x_0.$$

Неекспансивна система (2.11) має критерій якості $J \leq 1$.

Лема 2.3. [42] Якщо існують матриці X і $S = S^\top \geq 0$, що задовольняють систему ЛМН (2.20) і

$$\Psi(X) = \begin{bmatrix} A^\top X + X^\top A + C^\top Q C & X^\top B + C^\top Q D \\ B^\top X + D^\top Q C & D^\top Q D - \gamma^2 P \end{bmatrix} < 0, \quad (2.23)$$

то в'язка матриць $F(\lambda)$ допустима і $J_0 < \gamma$. Зворотне твердження виконується за умови

$$\text{rank} \begin{bmatrix} E \\ D^\top Q C \end{bmatrix} = \rho. \quad (2.24)$$

Лема 2.4. [46] Якщо сумісна система співвідношень (2.20), (2.23) і $S < \gamma^2 X_0$, то в'язка матриць $F(\lambda)$ допустима і $J < \gamma$. Зворотне твердження виконується за умов (2.24) і

$$X_0 = E^\top Z^\top H Z E + (I_n - E^\top Z^\top) H (I_n - Z E) > 0,$$

де $H = H^\top > 0$, а Z — матриця (2.16).

Лема 2.5. [42] Нехай вагова матриця X_0 задана у вигляді

$$X_0 = E^\top H E, \quad H = H^\top > 0. \quad (2.25)$$

Якщо сумісна система співвідношень (2.20), (2.23) і

$$S \leq \gamma^2 X_0, \quad (2.26)$$

$$\text{rank}(S - \gamma^2 X_0) = \rho, \quad (2.27)$$

то в'язка матриць $F(\lambda)$ допустима і $J < \gamma$. Зворотне твердження виконується за умови (2.24).

Зауваження 2.1. За лемою Шура маємо еквівалентний запис матричної нерівності (2.23):

$$\Omega(X) = \begin{bmatrix} A^\top X + X^\top A & X^\top B & C^\top \\ B_1^\top X & -\gamma^2 P & D^\top \\ C & D & -Q^{-1} \end{bmatrix} < 0. \quad (2.28)$$

Саме у такій формі іноді зручно використовувати умову (2.23) лем 2.3 – 2.5 у подальших дослідженнях, оскільки всі матричні коефіцієнти системи (2.11) входять у вираз (2.28) лінійно.

Із наведених тверджень випливають алгоритми обчислення критеріїв якості J_0 і J системи (2.11) на основі розв’язування відповідних оптимізаційних задач (див. також [46, лема 2.3]). Зокрема, при виконанні необхідних і достатніх умов лем 2.3 і 2.5 відповідно маємо:

$$J_0 = \inf \{ \gamma : \Psi(X) < 0, 0 \leq E^\top X = X^\top E \}, \quad (2.29)$$

$$J = \inf \{ \gamma : \Psi(X) < 0, 0 \leq E^\top X = X^\top E \leq \gamma^2 X_0 \}.$$

Зауваження 2.2. При виконанні умов, що забезпечують строгі оцінки $J_0 < \gamma$ і $J < \gamma$ у лемах 2.3–2.5, нульовий стан системи (2.11) зі структурованою невизначеністю вектора збурень

$$w = \frac{1}{\gamma} \Theta z, \quad \Theta^\top P \Theta \leq Q, \quad (2.30)$$

робастно стійкий зі спільною функцією Ляпунова $v(x) = x^\top S x$. Це твердження доводиться за допомогою узагальненої леми про матричну невизначеність [39, лема 3.3.1].

2.4. Найгірші зовнішні та початкові збурення

У практичних задачах доцільно визначити найгірші зовнішні і початкові збурення у системі керування, а також дослідити поведінку замкненої системи при таких збуреннях. У розділі 3 показано, що при застосуванні статичних та динамічних регуляторів за виходом або станом замкнені лінійні дескрипторні системи керування набувають вигляду (2.11).

Для класу дескрипторних систем (2.11) знайдемо умови, які дозволяють знаходити найгірші зовнішні і початкові збурення стосовно критеріїв якості J і J_0 .

Із доведення лема 2.5 випливає, що для виконання не строгої оцінки $J \leq \gamma$ достатньо існування матриць X і $S = S^\top \geq 0$, що задовольняють матричні нерівності (2.20), (2.26) і

$$\Psi(X) = \begin{bmatrix} A^\top X + X^\top A + C^\top Q C & X^\top B + C^\top Q D \\ B^\top X + D^\top Q C & D^\top Q D - \gamma^2 P \end{bmatrix} \leq 0. \quad (2.31)$$

Якщо

$$R = \gamma^2 P - D^\top Q D > 0, \quad (2.32)$$

то за лемою Шура блочна матрична нерівність (2.31) виконується тоді і лише тоді, коли виконується квадратична матрична нерівність типу Ріккати

$$A_1^\top X + X^\top A_1 + X^\top R_1 X + Q_1 \leq 0, \quad (2.33)$$

де

$$A_1 = A + B R^{-1} D^\top Q C, \quad Q_1 = C^\top (Q + Q D R^{-1} D^\top Q) C, \quad R_1 = B R^{-1} B^\top.$$

При цьому виконується нерівність

$$\dot{v}(x) + z^\top Q z - \gamma^2 w^\top P w = [x^\top, w^\top] \Psi(X) \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} \leq 0, \quad (2.34)$$

де $\dot{v}(x)$ — похідна функції $v(x) = x^\top S x$ в силу системи (2.11). Після інтегрування виразу (2.34) від 0 до τ за умов (2.20), (2.26), (2.33) і $v(x(\tau)) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow \infty$ маємо

$$\|z\|_Q^2 - \gamma^2 \|w\|_P^2 \leq x_0^\top S x_0 \leq \gamma^2 x_0^\top X_0 x_0, \quad (2.35)$$

тобто $J \leq \gamma$. Причому, виконання рівностей у (2.35) означає, що $J = \gamma$, а відповідні вектор збурення $w(t)$ і початковий вектор x_0 є найгіршими стосовно критерію якості J . Перша рівність у (2.35) виконується, якщо

$$w = K_0 x, \quad K_0 = R^{-1} (B^\top X + D^\top Q C), \quad (2.36)$$

де X — розв’язок матричного рівняння Ріккати

$$A_1^\top X + X^\top A_1 + X^\top R_1 X + Q_1 = 0, \quad (2.37)$$

а $x(t)$ — розв’язок системи

$$E\dot{x} = (A + BK_0)x, \quad x(0) = x_0. \quad (2.38)$$

При цьому права частина співвідношення (2.34) дорівнює 0. Друга рівність у (2.35) виконується, якщо

$$x_0^\top (S - \gamma^2 X_0) x_0 = 0. \quad (2.39)$$

Останнє співвідношення за умови (2.26) еквівалентне рівності $(S - \gamma^2 X_0)x_0 = 0$. Зокрема, ненульовий вектор

$$x_0 \in \text{Ker}(S - \gamma^2 X_0)$$

є власним вектором матриці $S - \gamma^2 X_0$, що відповідає її нульовому власному значенню. Якщо вагова матриця X_0 подана у вигляді (2.25) і $x_0 \in \text{Ker } E$, тобто

$$Ex_0 = 0, \quad x_0 \neq 0,$$

то рівність (2.39) виконується незалежно від значення матриці-розв’язку X рівняння (2.37).

Отже, встановлено таке твердження.

Лема 2.6. *Нехай існують матриці X і $S = S^\top \geq 0$, що задовольняють співвідношення (2.20), (2.26) і (2.37) при $\gamma = J$. Тоді структурований вектор зовнішніх збурень (2.36) і довільний вектор $x_0 \in \text{Ker}(S - J^2 X_0)$ є найгіршими стосовно критерію якості J для системи (2.11).*

2.5. Висновки до розділу

У даному розділі розглянуто клас лінійних диференціально-алгебраїчних (дескрипторних) систем з обмеженими збуреннями. Отримано наступні результати.

- Досліджена структура загального розв'язку регулярних дескрипторних систем з узгодженими початковими умовами.
- В термінах розв'язків лінійних матричних рівнянь та нерівностей наведено умови стійкості регулярних дескрипторних систем.
- Встановлено алгебраїчний критерій неімпульсності регулярної в'язки матриць.
- Наведено верхні оцінки для зважених критеріїв якості лінійних дескрипторних систем, що узагальнюють H_∞ -норму матричної передатної функції в системах керування.
- Запропоновано методику знаходження векторів найгірших зовнішніх і початкових збурень у дескрипторних системах стосовно зважених критеріїв якості.

Розділ 3

МЕТОДИ ГАСІННЯ ОБМЕЖЕНИХ ЗБУРЕНЬ У ДЕСКРИПТОРНИХ СИСТЕМАХ КЕРУВАННЯ

В сучасній теорії керування інтенсивно розвиваються методи робастної стабілізації та H_∞ -оптимізації динамічних систем, математичні моделі яких враховують вплив обмежених зовнішніх збурень. Критерієм якості таких систем є H_∞ -норма матричної передатної функції, яка характеризує рівень гасіння обмежених вхідних сигналів. Задача H_∞ -оптимізації полягає у побудові законів керування, які мінімізують даний критерій якості.

В даному розділі викладено деякі узагальнення відомих підходів до побудови статичних та динамічних H_∞ -регуляторів по виходу, які забезпечують оцінку та мінімізацію зважених критеріїв якості J та J_0 типу (2.22), а також робастну стійкість замкненої системи зі структурованою невизначеністю вхідних сигналів. При цьому вагова матриця X_0 в (2.22) подана у вигляді (2.25).

3.1. Лінійні системи з керованими і спостережуваними виходами. Постановка задачі.

Розглянемо систему керування

$$\begin{aligned} E\dot{x} &= Ax + B_1w + B_2u, & x(0) &= x_0, \\ z &= C_1x + D_{11}w + D_{12}u, \\ y &= C_2x + D_{21}w + D_{22}u, \end{aligned} \tag{3.1}$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $w \in \mathbb{R}^s$, $z \in \mathbb{R}^k$ і $y \in \mathbb{R}^l$ — вектори відповідно стану, керування, зовнішніх збурень, керованого і спостережуваного виходів, а всі матричні коефіцієнти відповідних розмірів сталі, причому $\text{rank } E = \rho \leq n$.

Нас цікавлять закони керування у вигляді зворотного зв'язку за спостережуваним виходом y , які понижують та мінімізують критерії якості J_0 і J типу (2.22) і, зокрема, забезпечують умови неекспансивності замкненої системи відносно вектора керованого виходу z .

Статичний зворотний зв'язок (статичний регулятор) за спостережуваним виходом будується у вигляді

$$u = Ky, \quad (3.2)$$

де $K \in \mathbb{R}^{m \times l}$ — матриця коефіцієнтів підсилення. Якщо $y \equiv x$, тобто $C_2 = I_n$, $D_{21} = 0$ і $D_{22} = 0$, то (3.2) є статичним регулятором за станом.

При застосуванні динамічних регуляторів в задачах керування виникають більші можливості, порівняно зі статичними регуляторами. Динамічний регулятор для дескрипторної системи (3.1) в загальному випадку також можна шукати у вигляді дескрипторної системи

$$F\dot{\xi} = Z\xi + Vy, \quad u = U\xi + Ky, \quad \xi(0) = \xi_0, \quad (3.3)$$

де $\xi \in \mathbb{R}^p$ — вектор стану регулятора, p — порядок регулятора, а матриці F , Z , V , U і K підлягають визначенню.

Статичні та динамічні регулятори, які мінімізують критерій якості J , будемо називати *J-оптимальними*. J_0 -оптимальне керування у випадку одиничних вагових матриць P і Q відоме як *H_∞ -оптимальне керування*.

При дослідженні класу систем (3.1) використовуються такі їхні властивості, як *C*-, *R*- та *I*-керованість, а також двоїсті до них *C*-, *R*- та *I*-спостережуваність [11, 100]. Зокрема, для розв'язання задач H_∞ -оптимізації та їх узагальнень необхідно, щоб трійка матриць (E, A, B_2) була стабілізовною та *I*-керованою. Це означає, що повинна існувати така матриця K , щоб пара матриць $(E, A + B_2K)$ була стійкою і неімпульсною, тобто допустимою. Критеріями *I*-керованості трійки (E, A, B_2) і *I*-спостережуваності трійки (E, A, C_2) є відповідні рівності [89]

$$\text{rank} \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ A & E & B_2 \end{bmatrix} = n + \rho, \quad \text{rank} \begin{bmatrix} E & A \\ 0 & E \\ 0 & C_2 \end{bmatrix} = n + \rho.$$

3.2. Побудова статичних регуляторів за спостережуваним виходом

3.2.1. Методи лінійних матричних нерівностей з обмеженнями.

Розглянемо систему керування (3.1) зі статичним регулятором

$$u = Ky, \quad \det(I_m - KD_{22}) \neq 0, \quad (3.4)$$

де K — шукана матриця коефіцієнтів підсилення. Замкнена система має вигляд

$$E\dot{x} = A_*x + B_*w, \quad z = C_*x + D_*w, \quad (3.5)$$

де

$$\begin{aligned} A_* &= A + B_2K_*C_2, & B_* &= B_1 + B_2K_*D_{21}, \\ C_* &= C_1 + D_{12}K_*C_2, & D_* &= D_{11} + D_{12}K_*D_{21}, \\ K_* &= (I_m - KD_{22})^{-1}K. \end{aligned}$$

У подальшому використовуватимемо відомий критерій існування розв'язків ЛМН типу

$$A^\top XB + B^\top X^\top A < C, \quad (3.6)$$

де $A \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{q \times n}$ і $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — задані матриці, а $X \in \mathbb{R}^{p \times q}$ — невідома матриця.

Лема 3.1. [103] *Лінійна матрична нерівність (3.4) має розв'язок X тоді і лише тоді, коли виконується одна із таких умов:*

- (a) $\text{rank } A = n, \text{rank } B = n$;
- (b) $\text{rank } A < n, \text{rank } B = n, W_A^\top C W_A > 0$;
- (c) $\text{rank } B < n, \text{rank } A = n, W_B^\top C W_B > 0$;
- (d) $\text{rank } A < n, \text{rank } B < n, W_A^\top C W_A > 0, W_B^\top C W_B > 0$,

де W_A і W_B — матриці, стовпці яких складають базиси відповідних ядер $\text{Ker } A$ і $\text{Ker } B$.

Теорема 3.1. Нехай для деяких матриць X , Y і $S = S^T \geq 0$ виконується система співвідношень (2.20), (2.26), (2.27) і

$$W_R^T \begin{bmatrix} A^T X + X^T A + C_1^T Q C_1 & X^T B_1 + C_1^T Q D_{11} \\ B_1^T X + D_{11}^T Q C_1 & D_{11}^T Q D_{11} - \gamma^2 P \end{bmatrix} W_R < 0, \quad (3.7)$$

$$W_L^T \begin{bmatrix} A Y + Y^T A^T + B_1 P^{-1} B_1^T & Y^T C_1^T + B_1 P^{-1} D_{11}^T \\ C_1 Y + D_{11} P^{-1} B_1^T & D_{11} P^{-1} D_{11}^T - \gamma^2 Q^{-1} \end{bmatrix} W_L < 0, \quad (3.8)$$

$$X Y = \gamma^2 I_n, \quad (3.9)$$

де $R = [C_2, D_{21}]$, $L = [B_2^T, D_{12}^T]$ і $\gamma > 0$. Тоді існує статичний регулятор (3.4), при якому замкнена система (3.5) є допустимою і виконується оцінка $J < \gamma$. Навпаки, якщо для деякої матриці K регулятора (3.4) замкнена система (3.5) з критерієм якості $J < \gamma$ допустима і виконується рівність

$$\text{rank} \begin{bmatrix} E \\ D_*^T Q C_* \end{bmatrix} = \rho, \quad (3.10)$$

то система співвідношень (2.20), (2.26), (2.27), (3.7) – (3.9) сумісна.

Доведення. Враховуючи лему Шура, перепишемо матричну нерівність (2.23) у лемі 2.6 для замкненої системи (3.5) у вигляді ЛМН стосовно K_* (див. зауваження 2.1):

$$\begin{bmatrix} A_*^T X + X^T A_* & X^T B_* & C_*^T \\ B_*^T X & -\gamma^2 P & D_*^T \\ C_* & D_* & -Q^{-1} \end{bmatrix} < 0$$

або

$$\widehat{L}^T K_* \widehat{R} + \widehat{R}^T K_*^T \widehat{L} + \Omega < 0, \quad (3.11)$$

де

$$\widehat{R} = [R, 0_{l \times k}], \quad R = [C_2, D_{21}], \quad \widehat{L} = [L, 0_{m \times s}] \widetilde{X}, \quad L = [B_2^T, D_{12}^T],$$

$$\widetilde{X} = \begin{bmatrix} X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_k \\ 0 & I_s & 0 \end{bmatrix}, \quad \Omega = \begin{bmatrix} A^T X + X^T A & X^T B_1 & C_1^T \\ B_1^T X & -\gamma^2 P & D_{11}^T \\ C_1 & D_{11} & -Q^{-1} \end{bmatrix}.$$

Далі застосуємо критерій сумісності ЛМН (3.11) (умови (d) леми 3.1)

$$W_{\hat{R}}^\top \Omega W_{\hat{R}} < 0, \quad W_{\hat{L}}^\top \Omega W_{\hat{L}} < 0. \quad (3.12)$$

Оскільки

$$W_{\hat{R}} = \begin{bmatrix} W_R & 0 \\ 0 & I_k \end{bmatrix}, \quad W_{\hat{L}} = \tilde{X}^{-1} \begin{bmatrix} W_L & 0 \\ 0 & I_s \end{bmatrix},$$

то дані співвідношення набувають вигляду (3.7) і (3.8), де $Y = \gamma^2 X^{-1}$.

Якщо матрична нерівність (3.11) сумісна, то завжди можна обрати такий його розв'язок K_* , щоб $\det(I_m - K D_{22}) \neq 0$, де

$$K = K_*(I_l + D_{22}K_*)^{-1}. \quad (3.13)$$

Отже, співвідношення (2.20), (2.26), (2.27) і (3.7) – (3.9) на основі лем 2.6 і 3.1 забезпечують існування регулятора (3.4), при якому замкнена система (3.5) допустима і виконується оцінка $J < \gamma$. Зворотнє твердження виконується за додатковою умовою (3.10).

Теорему доведено. □

Зауваження 3.1. Замість матричної рівності (3.9) в теоремі 3.1 можна використовувати рангову умову

$$\text{rank} \begin{bmatrix} X & \gamma I_n \\ \gamma I_n & Y \end{bmatrix} = n, \quad (3.14)$$

яка еквівалентна (3.9).

Зауваження 3.2. Рангова умова (3.10) не залежить від K і виконується, якщо

$$D_{11} = 0, \quad D_{21} = 0 \quad (3.15)$$

або

$$D_{12} = 0, \quad \text{rank} \begin{bmatrix} E^\top & C_1^\top Q D_{11} \end{bmatrix} = \rho. \quad (3.16)$$

Можна також встановити, що для виконання (3.10) достатньо, щоб

$$\text{rank} \begin{bmatrix} E^\top & C_1^\top Q D_{11} & C_1^\top Q D_{12} & C_2^\top \end{bmatrix} = \rho. \quad (3.17)$$

Наведемо наслідки теореми 3.1 у таких двох випадках:

$$B_2 = I_n, \quad D_{12} = 0, \quad D_{11}P^{-1}D_{11}^\top < \gamma^2 Q^{-1}; \quad (3.18)$$

$$C_2 = I_n, \quad D_{21} = 0, \quad D_{11}^\top Q D_{11} < \gamma^2 P. \quad (3.19)$$

За умов (3.18) $W_L = [0_{k \times n}, I_k]^\top$ і матрична нерівність (3.8) у теоремі 3.1 не залежить від Y , а за умов (3.19) $W_R = [0_{s \times n}, I_s]^\top$ і матрична нерівність (3.7) не залежить від X . У цьому випадку, враховуючи рівність (3.9), співвідношення (2.20), (2.26) і (2.27) можна переписати у вигляді

$$\begin{bmatrix} G & G - EY \\ G - Y^\top E^\top & 0 \end{bmatrix} \geq 0, \quad (3.20)$$

$$0 \leq G \leq Y^\top X_0 Y, \quad \text{rank}(G - Y^\top X_0 Y) = \rho, \quad (3.21)$$

де G — деяка невідома матриця. Якщо у системі (3.1) виконуються умови (3.19), причому $D_{22} = 0$, то $y = x$ і шуканий регулятор (3.4) є статичним зворотним зв'язком за станом.

Наслідок 3.1. Для системи (3.1) за умов (3.18) існує статичний регулятор (3.4), що забезпечує оцінку $J_0 < \gamma$ ($J < \gamma$), якщо для деяких матриць X і $S = S^\top \geq 0$ виконується система співвідношень (2.20) і (3.7) ((2.20), (2.26), (2.27) і (3.7)). При цьому замкнена система допустима.

Наслідок 3.2. Для системи (3.1) за умов (3.19) існує статичний регулятор (3.4), що забезпечує оцінку $J_0 < \gamma$ ($J < \gamma$), якщо для деяких матриць Y і $G = G^\top \geq 0$ виконується система співвідношень (3.8) і (3.20) ((3.8), (3.20) і (3.21)). При цьому замкнена система допустима.

Якщо у співвідношеннях (2.27) і (3.21) не враховувати рангових обмежень, то у відповідних твердженнях наслідків 3.1 і 3.1 повинні виконуватись нестрогі оцінки $J \leq \gamma$.

Наведемо алгоритми побудови матриць статичного регулятора (3.4), що забезпечує строгу оцінку критерію якості $J_0 < \gamma$ замкненої системи (3.5) за відповідних обмежень (3.18) і (3.19).

- Алгоритм 3.1.** 1) Обчислення матриці W_R , де $R = [C_2, D_{21}]$.
 2) Розв'язування системи ЛМН (2.20) і (3.7) щодо X і $S = S^\top \geq 0$.
 3) Розв'язування ЛМН (3.11) щодо K_* .
 4) Обчислення матриці регулятора K за формулою (3.13).

- Алгоритм 3.2.** 1) Обчислення матриці W_L , де $L = [B_2^\top, D_{12}^\top]$.
 2) Розв'язування системи ЛМН (3.8) і (3.20) щодо Y і $G = G^\top \geq 0$.
 3) Розв'язування ЛМН (3.11) щодо K_* , де $X = \gamma^2 Y^{-1}$.
 4) Обчислення матриці регулятора K за формулою (3.13).

Наведемо ще один наслідок теореми 3.1 із застосуванням параметризації невідомої матриці Y (умови існування статичного регулятора за станом). Нехай $E_l, E_r \in \mathbb{R}^{n \times \rho}$ — компоненти скелетного розкладу матриці $E = E_l E_r^\top$.

Наслідок 3.3. *Нехай виконуються умови*

$$C_2 = I_n, \quad D_{11}^\top Q D_{11} < \gamma^2 P, \quad D_{21} = 0, \quad D_{22} = 0. \quad (3.22)$$

Тоді існує статичний регулятор за станом

$$u = Kx, \quad K \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad (3.23)$$

при якому замкнена система (3.5) допустима і має критерій якості $J < \gamma$, якщо система ЛМН (3.8) і

$$E_r^\top T E_r > (E_l^\top H E_l)^{-1} \quad (3.24)$$

з невиродженою матрицею

$$Y = T E^\top + W_E F \quad (3.25)$$

сумісна стосовно $T = T^\top$ і F . Зворотнє твердження справедливе, якщо разом з (3.22) виконуються умови (3.15) або (3.16).

Із даного твердження випливає наступний алгоритм синтезу статичного регулятора за станом (3.23).

- Алгоритм 3.3.** 1) Обчислення матриці W_L , де $L = [B_2^\top, D_{12}^\top]$.
 2) Розв'язування системи ЛМН (3.8) і (3.24) щодо $T = T^\top$ і F за умови (3.25).
 3) Розв'язування ЛМН (3.11) щодо K_* , де $X = \gamma^2 Y^{-1}$.
 4) Обчислення матриці K регулятора (3.23) за формулою (3.13).

3.2.2. Застосування критеріїв сумісності квадратичних матричних нерівностей. Розглянемо систему (3.1) зі статичним регулятором (3.4) і критерії якості J_0 і J типу (2.22). При досягненні бажаної оцінки $J < \gamma$ для замкненої системи (3.5) застосуємо лему 2.5. Перепишемо умову (2.23) для системи (3.5) у вигляді квадратичної матричної нерівності

$$W + U^\top K_* V + V^\top K_*^\top U + V^\top K_*^\top R K_* V < 0, \quad (3.26)$$

де

$$W = \begin{bmatrix} A^\top X + X^\top A + C_1^\top Q C_1 & X^\top B_1 + C_1^\top Q D_{11} \\ B_1^\top X + D_{11}^\top Q C_1 & D_{11}^\top Q D_{11} - \gamma^2 P \end{bmatrix},$$

$$U = [B_2^\top X + D_{12}^\top Q C_1, D_{12}^\top Q D_{11}], \quad V = [C_2, D_{21}], \quad R = D_{12}^\top Q D_{12} \geq 0.$$

Сформулюємо критерій сумісності даної нерівності за умов $m < q$ і $l < q$ ($q = n + s$), які природні для системи (3.1).

Лема 3.2. *Якщо $R > 0$, то матрична нерівність (3.26) має розв'язок $K_* \in \mathbb{R}^{m \times l}$ тоді і лише тоді, коли*

$$W_V^\top W W_V < 0, \quad W < U^\top R^{-1} U. \quad (3.27)$$

Доведення. На основі леми Шура [18] матричну нерівність (3.26) можна подати у вигляді ЛМН стосовно K_*

$$\begin{bmatrix} W + U^\top K_* V + V^\top K_*^\top U & V^\top K_*^\top \\ K_* V & -R^{-1} \end{bmatrix} < 0$$

або

$$\widehat{W} + \widehat{U}^\top K_* \widehat{V} + \widehat{V}^\top K_*^\top \widehat{U} < 0,$$

де

$$\widehat{W} = \begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & -R^{-1} \end{bmatrix}, \quad \widehat{U} = \begin{bmatrix} U & I_m \end{bmatrix}, \quad \widehat{V} = \begin{bmatrix} V & 0_{l \times m} \end{bmatrix}.$$

За лемою 3.1 критерієм сумісності даної ЛМН є співвідношення

$$W_{\widehat{U}}^\top \widehat{W} W_{\widehat{U}} < 0, \quad W_{\widehat{V}}^\top \widehat{W} W_{\widehat{V}} < 0,$$

тобто умови (3.27), оскільки

$$W_{\hat{U}} = \begin{bmatrix} I_q \\ -U \end{bmatrix}, \quad W_{\hat{V}} = \begin{bmatrix} W_V & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix}.$$

□

Отже, на основі лем і маємо такий результат.

Теорема 3.2. *Нехай виконуються умови*

$$R_0 = D_{12}^\top Q D_{12} > 0, \quad R_1 = \gamma^2 P - D_{11}^\top Q_1 D_{11} > 0 \quad (3.28)$$

і сумісна щодо X і S система співвідношень (2.20), (2.26), (2.27), (3.7) і

$$A_2^\top X + X^\top A_2 + X^\top R_2 X + Q_2 < 0, \quad (3.29)$$

де

$$\begin{aligned} A_2 &= A_1 + B_{11} R_1^{-1} D_{11}^\top Q_1 C_1, \quad A_1 = A - B_2 R_0^{-1} D_{12}^\top Q C_1, \\ R_2 &= B_{11} R_1^{-1} B_{11}^\top - B_2 R_0^{-1} B_2^\top, \quad B_{11} = B_1 - B_2 R_0^{-1} D_{12}^\top Q D_{11}, \\ Q_1 &= Q - Q D_{12} R_0^{-1} D_{12}^\top Q, \quad Q_2 = C_1^\top (Q_1 + Q_1 D_{11} R_1^{-1} D_{11}^\top Q_1) C_1. \end{aligned}$$

Тоді існує статичний регулятор (3.4), при якому замкнена система (3.5) є допустимою і виконується оцінка $J < \gamma$.

Зауваження 3.3. За умов теореми 3.2 матрицю шуканого регулятора (3.4) можна побудувати у вигляді

$$K = K_*(I_l + D_{22} K_*)^{-1},$$

де K_* — розв'язок квадратичної матричної нерівності (3.26) або ЛМН (3.11).

3.3. Побудова динамічних регуляторів за спостережуванним виходом

3.3.1. Система керування у розширеному фазовому просторі

Розглянемо дескрипторну систему (3.1) з динамічним регулятором за спостережуванним виходом

$$\dot{\xi} = Z\xi + Vy, \quad u = U\xi + Ky, \quad \xi(0) = 0, \quad (3.30)$$

де $\xi \in \mathbb{R}^p$, p — порядок регулятора, матриці Z , V , U і K підлягають визначенню. Зауважимо, що початковий вектор шуканого регулятора нульовий.

Побудова динамічного регулятора (3.30) формально зводиться до пошуку статичного регулятора

$$\hat{u} = \hat{K}_* \hat{y}$$

для системи керування у розширеному фазовому просторі:

$$\begin{aligned} \hat{E}\dot{\hat{x}} &= \hat{A}\hat{x} + \hat{B}_1 w + \hat{B}_2 \hat{u}, \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0, \\ z &= \hat{C}_1 \hat{x} + \hat{D}_{11} w + \hat{D}_{12} \hat{u}, \\ \hat{y} &= \hat{C}_2 \hat{x} + \hat{D}_{21} w, \end{aligned} \quad (3.31)$$

де

$$\begin{aligned} \hat{x} &= \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix}, \quad \hat{x}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{y} = \begin{bmatrix} y - D_{22}u \\ \xi \end{bmatrix}, \quad \hat{u} = \begin{bmatrix} u \\ \dot{\xi} \end{bmatrix}, \quad \hat{E} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix}, \\ \hat{A} &= \begin{bmatrix} A & 0_{n \times p} \\ 0_{p \times n} & 0_{p \times p} \end{bmatrix}, \quad \hat{B}_1 = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0_{p \times s} \end{bmatrix}, \quad \hat{B}_2 = \begin{bmatrix} B_2 & 0_{n \times p} \\ 0_{p \times m} & I_p \end{bmatrix}, \\ \hat{C}_1 &= [C_1, 0_{k \times p}], \quad \hat{D}_{11} = D_{11}, \quad \hat{D}_{12} = [D_{12}, 0_{k \times p}], \\ \hat{C}_2 &= \begin{bmatrix} C_2 & 0_{l \times p} \\ 0_{p \times n} & I_p \end{bmatrix}, \quad \hat{D}_{21} = \begin{bmatrix} D_{21} \\ 0_{p \times s} \end{bmatrix}, \quad \hat{D}_{22} = \begin{bmatrix} D_{22} & 0_{l \times p} \\ 0_{p \times m} & 0_{p \times p} \end{bmatrix}, \\ \hat{K}_* &= \begin{bmatrix} K_* & U_* \\ V_* & Z_* \end{bmatrix}, \quad \hat{K} = \begin{bmatrix} K & U \\ V & Z \end{bmatrix} = (I_{n+p} + \hat{K}_* \hat{D}_{22})^{-1} \hat{K}_*. \end{aligned}$$

Замкнена система має вигляд

$$\hat{E}\dot{\hat{x}} = \hat{A}_* \hat{x} + \hat{B}_* w, \quad z = \hat{C}_* \hat{x} + \hat{D}_* w, \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0, \quad (3.32)$$

де

$$\begin{aligned} \hat{A}_* &= \hat{A} + \hat{B}_2 \hat{K}_* \hat{C}_2, \quad \hat{B}_* = \hat{B}_1 + \hat{B}_2 \hat{K}_* \hat{D}_{21}, \\ \hat{C}_* &= \hat{C}_1 + \hat{D}_{12} \hat{K}_* \hat{C}_2, \quad \hat{D}_* = \hat{D}_{11} + \hat{D}_{12} \hat{K}_* \hat{D}_{21}. \end{aligned}$$

Нехай вагова матриця X_0 в (2.22) задана у вигляді (2.25), а $\hat{J}$ — критерій якості типу (2.22) для системи (3.32) з ваговою матрицею

$$\hat{X}_0 = \hat{E}^\top \hat{H} \hat{E}, \quad \hat{H} = \begin{bmatrix} H & H_1^\top \\ H_1 & H_2 \end{bmatrix} > 0. \quad (3.33)$$

Оскільки $\xi_0 = 0$, то $\hat{J} = J$, причому $X_0 = E^\top H E$ є першим діагональним блоком матриці $\hat{X}_0$ і значення $\hat{J}$ не залежить від H_1 і H_2 .

3.3.2. Умови існування та алгоритми побудови динамічних регуляторів

Лема 3.3. Для заданих невідроджених матриць $X, Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$, довільної матриці $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ і числа $\gamma > 0$ наступні твердження еквівалентні:

1) існують матриці $X_1, Y_1 \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $X_2, Y_2 \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $X_3, Y_3 \in \mathbb{R}^{n \times p}$ такі, що

$$\hat{E}^\top \hat{X} = \hat{X}^\top \hat{E} \geq 0, \quad \hat{E} \hat{Y} = \hat{Y}^\top \hat{E}^\top \geq 0, \quad \hat{X} \hat{Y} = \gamma^2 I_{n+p}, \quad (3.34)$$

де

$$\hat{E} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix}, \quad \hat{X} = \begin{bmatrix} X & X_3 \\ X_1 & X_2 \end{bmatrix}, \quad \hat{Y} = \begin{bmatrix} Y & Y_3 \\ Y_1 & Y_2 \end{bmatrix};$$

2) виконуються умови

$$W = W^\top \geq 0, \quad \text{rank } W = \rho + \delta, \quad \delta = \text{rank } \Delta \leq p, \quad (3.35)$$

де

$$W = \begin{bmatrix} E^\top X & \gamma E^\top \\ \gamma E & EY \end{bmatrix}, \quad \Delta = \gamma^2 I_n - XY;$$

3) для деякої матриці $\Theta = \Theta^\top \geq 0$ виконуються умови

$$\text{rank} \begin{bmatrix} X - \Theta E & \gamma I_n \\ \gamma I_n & Y \end{bmatrix} = n, \quad \text{rank } \Theta \leq p, \quad EY = Y^\top E^\top \geq 0; \quad (3.36)$$

4) для деякої матриці $\Lambda = \Lambda^\top \geq 0$ виконуються умови

$$\text{rank} \begin{bmatrix} X & \gamma I_n \\ \gamma I_n & Y - \Lambda E^\top \end{bmatrix} = n, \quad \text{rank } \Lambda \leq p, \quad E^\top X = X^\top E \geq 0. \quad (3.37)$$

Доведення. Еквівалентність тверджень 1 і 2 доведена в [46].

Нехай виконується твердження 3. Із відомої формули для рангу блочної матриці випливає, що перша умова в (3.36) еквівалентна рівності $X - \gamma^2 Y^{-1} =$

ΘE або $\Delta = -\Theta E Y$. При цьому $E^\top X = X^\top E \geq 0$, якщо $EY = Y^\top E^\top \geq 0$. Застосуємо конгруентне перетворення матриці W в (3.35):

$$T^\top W T = \begin{bmatrix} EY & 0 \\ 0 & \Gamma \end{bmatrix},$$

де

$$T = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ I_n & -\gamma Y^{-1} \end{bmatrix}, \quad \det T \neq 0,$$

$$\Gamma = E^\top (X - \gamma^2 Y^{-1}) = E^\top \Theta E \geq 0.$$

Використовуючи розклад невід'ємно визначеної матриці $\Theta = \Theta_0^\top \Theta_0$ за умов (3.36) маємо:

$$\delta = \text{rank } \Delta \leq \text{rank } (\Theta_0 E) = \text{rank } \Gamma \leq \delta,$$

тобто $\text{rank } \Gamma = \delta$, $\text{rank } W = \rho + \delta$ і $\delta \leq \text{rank } \Theta \leq p$. Отже твердження 2 є наслідком твердження 3.

Покажем, що твердження 3 є наслідком твердження 1. Дійсно, покладемо $\Theta = X_3 X_2^{-1} X_3^\top$, при цьому $X_1 = X_3^\top E$ і $X_2 = X_2^\top > 0$. Тоді із рівностей $XY + X_3 Y_1 = \gamma^2 I_n$ і $X_1 Y + X_2 Y_1 = 0$ випливає $\gamma^2 I_n = (X - \Theta E)Y$, тобто рангова умова (3.36). Крім того, виконуються співвідношення $EY = Y^\top E^\top \geq 0$ і $\text{rank } \Theta \leq p$.

Аналогічно доводиться, що твердження 2 є наслідком твердження 4, а твердження 4 є наслідком твердження 1, при цьому $\Lambda = Y_3 Y_2^{-1} Y_3^\top$, $Y_1 = Y_3^\top E^\top$, $Y_2 = Y_2^\top > 0$ і $\text{rank } \Lambda \leq p$.

Лему доведено. □

Теорема 3.3. *Нехай існують матриці $X, Y, S = S^\top \geq 0$ і*

$\Theta = \Theta^\top \geq 0$, *що задовольняють співвідношення (2.20), (2.26), (2.27), (3.36)*

і

$$W_R^\top \begin{bmatrix} A^\top X + X^\top A + C_1^\top Q C_1 & X^\top B_1 + C_1^\top Q D_{11} \\ B_1^\top X + D_{11}^\top Q C_1 & D_{11}^\top Q D_{11} - \gamma^2 P \end{bmatrix} W_R < 0, \quad (3.38)$$

$$W_L^\top \begin{bmatrix} AY + Y^\top A^\top + B_1 P^{-1} B_1^\top & Y^\top C_1^\top + B_1 P^{-1} D_{11}^\top \\ C_1 Y + D_{11} P^{-1} B_1^\top & D_{11} P^{-1} D_{11}^\top - \gamma^2 Q^{-1} \end{bmatrix} W_L < 0, \quad (3.39)$$

де $L = [B_2^\top, D_{12}^\top]$ і $R = [C_2, D_{21}]$. Тоді існує динамічний регулятор (3.30), при якому критерій якості (2.22) замкненої системи (3.32) $J < \gamma$ і в'язка матриць $\hat{F}_*(\lambda) = \hat{A}_* - \lambda \hat{E}$ допустима.

Навпаки, якщо для деякого регулятора (3.30) замкнена система має критерій якості $J < \gamma$, в'язка матриць $\hat{F}_*(\lambda)$ допустима і виконується рівність

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \hat{E} \\ \hat{D}_*^\top Q \hat{C}_* \end{bmatrix} = \rho + p, \quad (3.40)$$

то система співвідношень (2.20), (2.26), (2.27), (3.36), (3.38) і (3.39) сумісна.

Доведення. На основі леми Шура [18] подамо умови леми 2.5 для системи (3.32) у вигляді

$$\hat{\Omega}_* = \begin{bmatrix} \hat{A}_*^\top \hat{X} + \hat{X}^\top \hat{A}_* & \hat{X}^\top \hat{B}_* & \hat{C}_*^\top \\ \hat{B}_*^\top \hat{X} & -\gamma^2 P & \hat{D}_*^\top \\ \hat{C}_* & \hat{D}_* & -Q^{-1} \end{bmatrix} < 0, \quad \hat{X} = \begin{bmatrix} X & X_3 \\ X_1 & X_2 \end{bmatrix}, \quad (3.41)$$

$$0 \leq \hat{E}^\top \hat{X} = \hat{X}^\top \hat{E} = \hat{S} \leq \gamma^2 \hat{X}_0, \quad \text{rank} (\hat{S} - \gamma^2 \hat{X}_0) = \rho + p. \quad (3.42)$$

Очевидно, що блочна матриця $\hat{X}$ в (3.41) повинна бути невід'ємною. Застосовуючи розклад невід'ємно визначеної матриці $\hat{S} = \hat{L}^\top \hat{L}$ в (3.42), маємо $[X_1, X_2] = L_2^\top \hat{L}$, $\text{rank} [X_1, X_2] = p \leq \text{rank} L_2 = \text{rank} X_2$, де $\hat{L} = [L_1, L_2]$, $X_1 = X_3^\top E$ і $X_2 = X_2^\top = L_2^\top L_2 > 0$. Рангове обмеження у (3.42) за умов (2.20), (2.26), (2.27) можна задовольнити шляхом вибору доповнювальних блоків H_1 і H_2 матриці $\hat{H} > 0$ в (3.33), які не впливають на значення критерію якості $\hat{J}$. Зокрема, якщо покласти $H_1 = \gamma^{-2} X_3^\top$ і $H_2 > \gamma^{-2} X_2$, то співвідношення (3.42) зводяться до умов (2.20), (2.26) і (2.27).

Застосуємо таке перетворення шуканої матриці

$$\hat{X} = \hat{U}^\top \tilde{X} \hat{V}^{-1},$$

де

$$\hat{U} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ X_2^{-1} X_3^\top & I_p \end{bmatrix}, \quad \hat{V} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -X_2^{-1} X_1 & X_2^{-1} \end{bmatrix}, \quad \tilde{X} = \begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix},$$

$G = X - X_3 X_2^{-1} X_1$. Тоді матричну нерівність (3.41) можна подати у вигляді

$$\tilde{\Omega}_* = \begin{bmatrix} \tilde{A}_*^\top \tilde{X} + \tilde{X}^\top \tilde{A}_* & \tilde{X}^\top \tilde{B}_* & \tilde{C}_*^\top \\ \tilde{B}_*^\top \tilde{X} & -\gamma^2 P & \tilde{D}_*^\top \\ \tilde{C}_* & \tilde{D}_* & -Q^{-1} \end{bmatrix} < 0$$

або

$$\tilde{L}_*^\top \hat{K}_* \tilde{R}_* + \tilde{R}_*^\top \hat{K}_*^\top \tilde{L}_* + \tilde{\Omega} < 0,$$

де

$$\begin{aligned} \tilde{A}_* &= \hat{U} \hat{A}_* \hat{V} = \tilde{A} + \tilde{B}_2 \hat{K}_* \tilde{C}_2, & \tilde{B}_* &= \hat{U} \hat{B}_* = \tilde{B}_1 + \tilde{B}_2 \hat{K}_* \hat{D}_{21}, \\ \tilde{C}_* &= \hat{C}_* \hat{V} = \tilde{C}_1 + \hat{D}_{12} \hat{K}_* \tilde{C}_2, & \tilde{D}_* &= D_{11} + \hat{D}_{12} \hat{K}_* \hat{D}_{21}, \\ \tilde{A} &= \hat{U} \hat{A} \hat{V} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ X_2^{-1} X_3^\top & 0 \end{bmatrix}, & \tilde{B}_2 &= \hat{U} \hat{B}_2 = \begin{bmatrix} B_2 & 0 \\ X_2^{-1} X_3^\top B_2 & I_p \end{bmatrix}, \\ \tilde{C}_2 &= \hat{C}_2 \hat{V} = \begin{bmatrix} C_2 & 0 \\ -X_2^{-1} X_1 & X_2^{-1} \end{bmatrix}, & \tilde{B}_1 &= \hat{U} \hat{B}_1 = \begin{bmatrix} B_1 \\ X_2^{-1} X_3^\top B_1 \end{bmatrix}, \\ \tilde{L}_* &= [\tilde{B}_2^\top \tilde{X}, 0, \hat{D}_{12}^\top] = \tilde{L} \Delta_L^{-1}, & \tilde{R}_* &= [\tilde{C}_2, \hat{D}_{21}, 0] = \tilde{R} \Delta_R^{-1}, \\ \tilde{L} &= \begin{bmatrix} L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_p \end{bmatrix}, & \tilde{R} &= \begin{bmatrix} R & 0 & 0 \\ 0 & I_p & 0 \end{bmatrix}, \\ \Delta_L &= \begin{bmatrix} G^{-1} & 0 & 0 & -G^{-1} X_3 X_2^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & I_p \\ 0 & 0 & I_s & 0 \\ 0 & I_k & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \Delta_R &= \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 & 0 \\ X_1 & 0 & X_2 & 0 \\ 0 & I_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_k \end{bmatrix}, \\ \tilde{\Omega} &= \begin{bmatrix} A^\top G + G^\top A & A^\top X_3 X_2^{-1} & G^\top B_1 & C_1^\top \\ X_2^{-1} X_3^\top A & 0 & X_2^{-1} X_3^\top B_1 & 0 \\ B_1^\top G & B_1^\top X_3 X_2^{-1} & -\gamma^2 P & D_{11}^\top \\ C_1 & 0 & D_{11} & -Q^{-1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Критерій існування розв'язку $\hat{K}_*$ даної нерівності має вигляд (див. лему 2.6)

$$W_{\tilde{R}_*}^\top \tilde{\Omega} W_{\tilde{R}_*} < 0, \quad W_{\tilde{L}_*}^\top \tilde{\Omega} W_{\tilde{L}_*} < 0, \quad (3.43)$$

де

$$W_{\tilde{L}_*} = \Delta_L \begin{bmatrix} W_L & 0 \\ 0 & I_s \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad W_{\tilde{R}_*} = \Delta_R \begin{bmatrix} W_R & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I_k \end{bmatrix}.$$

Позначимо $\tilde{G} = G^{-1}X_3X_2^{-1}$ і знайдемо вирази

$$\Delta_L^\top \tilde{\Omega} \Delta_L = \begin{bmatrix} AG^{-1} + G^{-1\top}A^\top & G^{-1\top}C_1^\top & B_1 & -A\tilde{G} \\ C_1G^{-1} & -Q^{-1} & D_{11} & -C_1\tilde{G} \\ B_1^\top & D_{11}^\top & -\gamma^2P & 0 \\ -\tilde{G}^\top A^\top & -\tilde{G}^\top C_1^\top & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Delta_R^\top \tilde{\Omega} \Delta_R = \begin{bmatrix} A^\top X + X^\top A & X^\top B_1 & A^\top X_3 & C_1^\top \\ B_1^\top X & -\gamma^2P & B_1^\top X_3 & D_{11}^\top \\ X_3^\top A & X_3^\top B_1 & 0 & 0 \\ C_1 & D_{11} & 0 & -Q^{-1} \end{bmatrix}.$$

Тоді співвідношення (3.43) набувають вигляду

$$\begin{bmatrix} W_R^\top & 0 \\ 0 & I_k \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cc|c} A^\top X + X^\top A & X^\top B_1 & C_1^\top \\ B_1^\top X & -\gamma^2P & D_{11}^\top \\ \hline C_1 & D_{11} & -Q^{-1} \end{array} \right] \begin{bmatrix} W_R & 0 \\ 0 & I_k \end{bmatrix} < 0,$$

$$\begin{bmatrix} W_L^\top & 0 \\ 0 & I_s \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cc|c} AG^{-1} + G^{-1\top}A^\top & G^{-1\top}C_1^\top & B_1 \\ C_1G^{-1} & -Q^{-1} & D_{11} \\ \hline B_1^\top & D_{11}^\top & -\gamma^2P \end{array} \right] \begin{bmatrix} W_L & 0 \\ 0 & I_s \end{bmatrix} < 0,$$

або, враховуючи лему Шура, маємо відповідно (3.38) і (3.39), де $Y = \gamma^2 G^{-1}$.

Згідно з (3.42) $E^\top G = G^\top E \geq 0$, тобто $EY = Y^\top E^\top \geq 0$, причому

$$X - \gamma^2 Y^{-1} = \Theta E, \quad \text{rank } \Theta \leq p,$$

де $\Theta = X_3X_2^{-1}X_3^\top \geq 0$. Останні співвідношення зводяться до рангових умов (3.36) в твердженні 3 леми 3.3.

Отже, якщо матриці X , Y , S і Θ знайдено із співвідношень (2.20), (2.26), (2.27), (3.36), (3.38) і (3.39), то при побудові доповнювальних блоків матриці

$\hat{X}$, що задовольняє умови (3.41) і (3.42), можна використати спектральний розклад матриці Θ або її представлення $\Theta = \Theta_0^\top \Theta_0$, де $\Theta_0 \in \mathbb{R}^{q \times n}$, при цьому $X_2 = I_q$ і $X_3 = \Theta_0$. В результаті на основі лем 2.5 і 2.6, а також еквівалентності тверджень 1 і 3 леми 3.3 можна стверджувати, що існує регулятор (3.30) порядку $p \geq q$, при якому критерій якості (2.22) замкненої системи (3.32) $J < \gamma$ і в'язка матриць $\hat{F}_*(\lambda) = \hat{A}_* - \lambda \hat{E}$ допустима. Зворотнє твердження виконується за додатковою умовою (3.40).

Теорему доведено. $\square$

Зауваження 3.4. Можна встановити, що рангові умови (3.10) і (3.40) у зворотних твердженнях теорем 3.1 і 3.3 еквівалентні. Тому для виконання (3.40) достатньо одної із умов (3.15) – (3.17) (див. зауваження 3.1).

Зауваження 3.5. Умови теореми 3.1 у випадку $\Theta = 0$ забезпечують існування статичного регулятора (3.4), при якому замкнена система (3.5) є допустимою і виконується оцінка $J < \gamma$ (див. [46, теорема 3.1]).

На основі теореми 3.1 наведемо алгоритм синтезу динамічного регулятора (3.30) для системи (3.1).

Алгоритм 3.4.

- 1) Обчислення матриць W_L і W_R , де $L = [B_2^\top, D_{12}^\top]$, $R = [C_2, D_{21}]$.
- 2) Знаходження матриць $X, Y, S = S^\top \geq 0$ і $\Theta = \Theta^\top \geq 0$, що задовольняють систему співвідношень (2.20), (2.26), (2.27), (3.36), (3.38) і (3.39).
- 3) Знаходження спектрального розкладу невід'ємно визначеної матриці

$$\Theta = T \Lambda T^\top,$$

де

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_q \end{bmatrix}, \quad T = [t_1, \dots, t_q],$$

λ_i і t_i — ненульові власні значення і відповідні ортонормовані власні вектори матриці Θ .

- 4) Формування доповнювальних блоків матриці $\hat{X}$ у вигляді $X_1 = T^\top E$, $X_2 = \Lambda^{-1}$ і $X_3 = T$ ($p = q$).
- 5) Розв'язування ЛМН

$$\hat{L}_*^\top \hat{K}_* \hat{R}_* + \hat{R}_*^\top \hat{K}_*^\top \hat{L}_* + \hat{\Omega} < 0, \quad (3.44)$$

стосовно $\hat{K}_*$ за умови $\det(I_m - K D_{22}) \neq 0$, де

$$\hat{R}_* = [\hat{C}_2, \hat{D}_{21}, 0_{(l+p) \times k}], \quad \hat{L}_* = [\hat{B}_2^\top \hat{X}, 0_{(m+p) \times s}, \hat{D}_{12}^\top],$$

$$\hat{\Omega} = \begin{bmatrix} \hat{A}^\top \hat{X} + \hat{X}^\top \hat{A} & \hat{X}^\top \hat{B}_1 & \hat{C}_1^\top \\ \hat{B}_1^\top \hat{X} & -\gamma^2 P & \hat{D}_{11}^\top \\ \hat{C}_1 & \hat{D}_{11} & -Q^{-1} \end{bmatrix},$$

- 6) Обчислення матриць регулятора (3.30) за формулою

$$\hat{K} = \begin{bmatrix} K & U \\ V & Z \end{bmatrix} = (I_{n+p} + \hat{K}_* \hat{D}_{22})^{-1} \hat{K}_*.$$

Реалізація даного алгоритму забезпечує оцінку критерію якості $J < \gamma$, а також регулярність, неімпульсивність і асимптотичну стійкість замкненої системи (3.32). Ранг, матриці Θ , знайденої у п. 2 алгоритму, визначає порядок динамічного регулятора p . Якщо $\Theta = 0$, то є можливість побудувати статичний регулятор з потрібними властивостями. У випадку $X_0 > 0$ замість рангової умови в (2.27) доцільно використати ЛМН $S < \gamma^2 X_0$. Для досягнення оцінки $J_0 < \gamma$ можна використати спрощений варіант алгоритму 3.4, у якому не використовуються співвідношення з ваговою матрицею X_0 .

Зазначимо, що алгоритм 3.4 при мінімально можливих значеннях параметра γ може бути застосований при побудові наближених J -оптимальних законів керування для класу систем типу (3.1).

3.4. Приклади та обчислювальні експерименти

3.4.1. Приклад 1. Статичний регулятор. Розглянемо дескрипторну систему керування (3.1) з такими матричними коефіцієнтами (див. [128, Приклад 4.17]):

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_{11} = 0_{2 \times 2}, \quad D_{12} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C_2 = I_4, \quad D_{21} = 0_{4 \times 2}, \quad D_{22} = 0_{4 \times 1}.$$

У даному випадку $n = 4$, $m = 1$, $k = 2$, $s = 2$ і $l = 4$, причому $y = x$ і виконуються умови (3.19) наслідку 3.2. В'язка матриць $F(\lambda) = A - \lambda E$ має спектр $\sigma(F) = \{-0,5 \pm 0,86603i\}$ і є допустимою, оскільки алгебраїчна система (2.14) має єдиний розв'язок

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

максимального рангу $\rho = 2$, знайдений за допомогою системи Mathcad.

Нехай критерії якості J_0 і J для даної системи визначають матриці

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad X_0 = E^\top H E, \quad H = I_4.$$

Для системи без керування на основі формул (2.29) отримано такі значення $J_0 = 2,78413$ і $J = 2,82383$.

Застосовуючи твердження наслідку 3.2 при $\gamma = 2$, отримано матриці

$$Y = \begin{bmatrix} 15,64226 & -10,58153 & 0 & 0 \\ -21,15212 & -2,78667 & 19,12753 & 0,79646 \\ -10,58153 & 9,02720 & 0 & 0 \\ 19,60824 & 2,68715 & -21,45475 & -4,75586 \end{bmatrix},$$

$$G = \begin{bmatrix} 15,64226 & -10,58153 & 0 & 0 \\ -10,58153 & 9,02720 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

які задовольняють систему ЛМН (3.8) і (3.20), а також співвідношення (3.21).

При цьому статичний регулятор (3.4) з матрицею

$$K = \begin{bmatrix} -0,40598 & 0,22073 & -0,11817 & 0,02629 \end{bmatrix}$$

забезпечує замкненій системі (3.5) критерії якості $J_0 = 1,26684$ і $J = 1,67739$.

Відповідна в'язка матриць $F_*(\lambda)$ має спектр $\sigma(F_*) = \{-0,88525 \pm 0,80699i\}$ і є допустимою.

Отримано також наближено матрицю J_0 -оптимального регулятора

$$K = \begin{bmatrix} -0,91414 & 0,25619 & -0,35685 & 0,19649 \end{bmatrix},$$

при якому замкнена система є допустимою, має спектр

$\sigma(F_*) = \{-1,15462 \pm 0,70073i\}$ та критерії якості $J_0 = 1,10245$ і $J = 1,61076$.

3.4.2. Приклад 2. Динамічний регулятор. Розглянемо систему керування (3.1) з такими матрицями [128]:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{12} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad D_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_{22} = 0,$$

У даному випадку $n = 4$, $m = 1$, $k = 2$, $s = 2$, $l = 1$ і, на відміну від попереднього прикладу, керування будується на основі вектора спостережуваного виходу $y = x_3 + w_2$.

Нехай критерії якості J_0 і J типу (2.22) визначені з ваговими матрицями

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad X_0 = 5E^T E = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Для системи без керування маємо такі значення $J_0 = 2,78270$ і $J = 2,78533$, що вираховані згідно з (2.29).

Алгоритм 3.4 реалізовано за допомогою комп'ютерної системи РТС Mathcad Prime. Спочатку наближено знайдено найменше значення параметра $\gamma = 1,5$, при якому сумісна система співвідношень (2.20), (2.26), (2.27), (3.36), (3.38) і (3.39), відповідні матриці

$$X = \begin{bmatrix} 4,55602 & 0 & -1,90889 & 0 \\ -1,90889 & 0 & 4,91959 & 0 \\ 5,01484 & 1,87960 & 3,22631 & -0,14856 \\ -3,72768 & -1,58627 & -0,76704 & -1,25203 \end{bmatrix},$$

$$Y = \begin{bmatrix} 4,02596 & -2,47210 & 0 & 0 \\ -2,65983 & -0,89927 & 1,08810 & -0,12911 \\ -2,47210 & 2,66911 & 0 & 0 \\ 0,67589 & 0,74616 & -1,37858 & -1,63351 \end{bmatrix},$$

$$S = \begin{bmatrix} 4,55602 & 0 & -1,90889 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1,90889 & 0 & 4,91959 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \geq 0,$$

$$\Theta = \begin{bmatrix} 3,26019 & -3,10907 & 1,11697 & -1,52252 \\ -3,10907 & 2,96502 & -1,05864 & 1,45978 \\ 1,11697 & -1,05864 & 2,55609 & 0,11989 \\ -1,52252 & 1,45978 & 0,11989 & 1,58268 \end{bmatrix} \geq 0,$$

а також доповнювальні блоки матриці $\hat{X}$:

$$X_1 = \begin{bmatrix} -0,65544 & 0 & 0,62515 & 0 \\ 0,08457 & 0 & -0,08450 & 0 \\ -0,29835 & 0 & 0,27625 & 0 \end{bmatrix},$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} 0,13436 & 0 & 0 \\ 0 & 0,41521 & 0 \\ 0 & 0 & 1,94918 \end{bmatrix},$$

$$X_3 = \begin{bmatrix} -0,65544 & 0,08457 & -0,29835 \\ 0,62515 & -0,08450 & 0,27625 \\ -0,27740 & -0,89251 & 0,35564 \\ 0,32036 & -0,43490 & -0,84154 \end{bmatrix}.$$

Далі, розв'язуючи ЛМН (3.44), знайдено матричні коефіцієнти шуканого динамічного регулятора (3.30) порядку $p = \text{rank } \Theta = 3$:

$$Z = \begin{bmatrix} -2,08370 & -0,39169 & 1,02327 \\ -0,48944 & -7,90153 & -0,48605 \\ 0,06443 & -0,56449 & -7,14171 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} -13,07781 \\ -0,53548 \\ -0,69422 \end{bmatrix},$$

$$U = \begin{bmatrix} -0,15375 & 0,02058 & -0,12741 \end{bmatrix}, \quad K = -1,26024.$$

В результаті спектр замкненої системи

$$\sigma(\hat{F}_*) = \{ -1,20482, -6,94203, -8,15689, -0,91160 \pm 1,12177i \},$$

відповідна в'язка матриць $\widehat{F}_*(\lambda) = \widehat{A}_* - \lambda \widehat{E}$ є регулярною, стійкою і неімпульсивною, а значення зваженого критерію якості замкненої системи $J = 1,45912$ не перевищує γ .

Далі, застосовуючи лему 2.6 для замкненої системи (3.32), знайдено відповідні матриці $\widehat{X}$, $\widehat{S} = \widehat{S}^\top \geq 0$, найгірші вектор зовнішніх збурень $w = \widehat{K}_0 \widehat{x}$ і початковий вектор $\widehat{x}_0$, де

$$\widehat{K}_0 = \begin{bmatrix} 2,17513 & 0,15889 \\ 0 & -0,12092 \\ -0,95335 & -0,10577 \\ 0 & -0,48533 \\ -0,32401 & -0,00201 \\ 0,03731 & -0,00977 \\ -0,13544 & 0,19112 \end{bmatrix}^\top, \quad \widehat{x}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ \xi_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,52717 \\ 0 \\ 0,84976 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

причому

$$(\widehat{S} - \gamma^2 \widehat{X}_0) \widehat{x}_0 = 0, \quad \|\widehat{x}_0\| = 1, \quad 0 \leq \widehat{S} \leq \gamma^2 \widehat{X}_0, \quad \widehat{X}_0 = \text{diag}\{X_0, I_p\},$$

де $\gamma = J \approx 1,45912$.

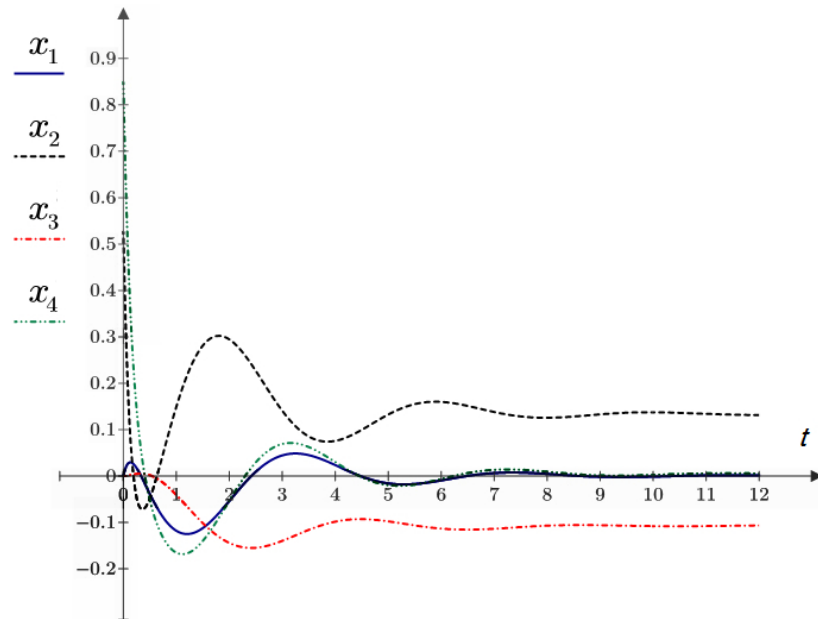


Рис. 3.1: Поведінка замкненої керованої системи при найгіршому збуренні.

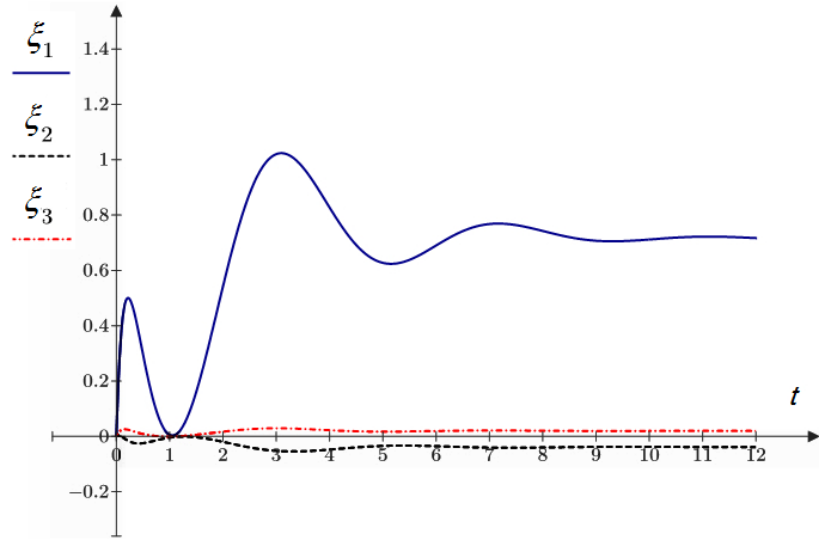


Рис. 3.2: Поведінка динамічного регулятора при найгіршому збуренні.

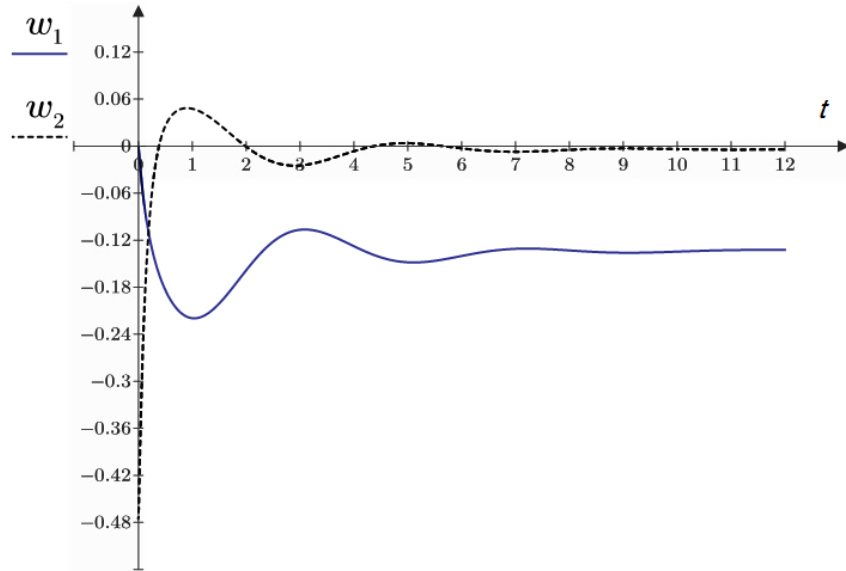


Рис. 3.3: Найгірше збурення.

На рис. 3.1 і 3.2 зображена поведінка компонент розв'язку $\hat{x}$ об'єднаної дескрипторної системи “об'єкт + регулятор”

$$\hat{E}\dot{\hat{x}} = \hat{A}_0\hat{x}, \quad \hat{A}_0 = \hat{A}_* + \hat{B}_*\hat{K}_0, \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0$$

при наведених значеннях початкового вектора і зовнішніх збурень (див. також рис. 3.3). Даний розв'язок побудований у термінах пари матриць T і Δ , що задовольняють матричне рівняння $\hat{A}_0T = \hat{E}T\Delta$, а саме:

$$\hat{x} = Tz, \quad \dot{z} = \Delta z, \quad z(0) = z_0.$$

При цьому $\hat{x}_0 = Tz_0$, матриця T має повний ранг за стовпцями, а власні числа матриці Δ утворюють скінченний спектр

$$\sigma(\hat{F}_0) = \{ -0,00393, -6,7716, -8,50199, -0,46769 \pm 1,53525i \}$$

в'язки матриць $\hat{F}_0(\lambda) = \hat{A}_0 - \lambda\hat{E}$.

Для розглядуваної системи (3.1) виконуються умови (3.28), що дає змогу будувати статичні регулятори з бажаними властивостями на основі теореми 3.2. При $\gamma = 2,5$ знайдено матрицю

$$X = \begin{bmatrix} 4,28441 & 0 & 1,16184 & 0 \\ 1,16184 & 0 & 4,70812 & 0 \\ 4,28300 & 0,42666 & 1,77609 & 0,37196 \\ -3,72698 & -0,58943 & -0,58261 & -1,14690 \end{bmatrix},$$

що задовольняє систему співвідношень (2.20), (2.26), (2.27) і (3.29) Знайдено також коефіцієнт підсилення $K_0 = -0,40868$ статичного регулятора (3.4) (див. зауваження 3.3), при якому замкнена система має критерії якості $J_0 = 2.40672$ і $J = 2.40970 < \gamma$. При цьому відповідна в'язка матриць $F_*(\lambda) = A_* - \lambda E$ допустима і має скінченний спектр $\sigma(\hat{F}_*) = \{ -0,5 \pm 1,07642i \}$.

3.4.3. Приклад 3. Гідравлічна система з трьома резервуарами.

Розглянемо лінеаризовану модель гідравлічної системи з трьома послідовно сполученими резервуарами, яка описується як дескрипторна система керування (3.1) з такими матрицями [72]

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -k_1 & 0 & 0 \\ k_1 & -k_2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_{11} = 0_{1 \times 2}, \quad D_{12} = 1,$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_{22} = 0_{2 \times 1}.$$

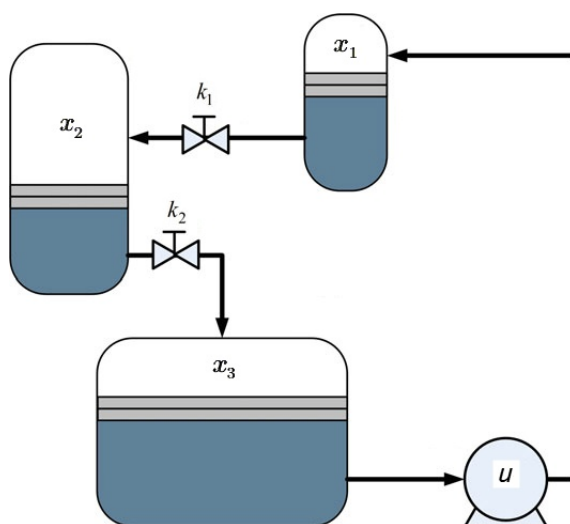


Рис. 3.4: Гідравлічна система з трьома резервуарами.

У даному прикладі $n = 3$, $m = 1$, $k = 1$, $s = 2$ і $l = 2$. Компоненти вектора стану $x = [x_1, x_2, x_3]^\top$ визначають рівні рідини у відповідних резервуарах, вектор $w = [w_1, w_2]^\top$ формують неконтрольовані збурення w_1 й похибка w_2 у вимірах $y = [x_1, x_2 + w_2]^\top$, а керування u , що регулює рівні рідини у перших двох резервуарах — це дебіт (потік) рідини в насосі із третього резервуара в перший (рис. 3.4).

Виберемо значення параметрів $k_1 = 0,01$, $k_2 = 0,25$ і вагові матриці критерію якості (2.22):

$$P = \text{diag}\{2, 1\}, \quad Q = 1, \quad X_0 = \text{diag}\{1, 1, 0\}, \quad H = I_3.$$

У даному випадку пара матриць (E, A) допустима, а система (3.1) — імпульсно керована й імпульсно спостережувана.

Застосовуючи комп'ютерну систему Mathcad Prime, при $\gamma = 2$ знайдено матриці

$$S = \begin{bmatrix} 2,66295 & 1,47938 & 0 \\ 1,47938 & 2,34076 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$X = \begin{bmatrix} 2,66295 & 1,47938 & 0 \\ 1,47938 & 2,34076 & 0 \\ 1,62013 & 0,67532 & -0,86984 \end{bmatrix},$$

що задовольняють систему співвідношень (2.20), (2.26), (2.27), (3.7) і (3.29) у теоремі 3.2, а також матрицю статичного регулятора (3.4)

$$K_1 = - \begin{bmatrix} 1,05265 & 0,70320 \end{bmatrix},$$

при якому замкнена система (3.5) допустима і має критерій якості $J = 1,95467 < \gamma$. При цьому $J_0 = 1,52671$.

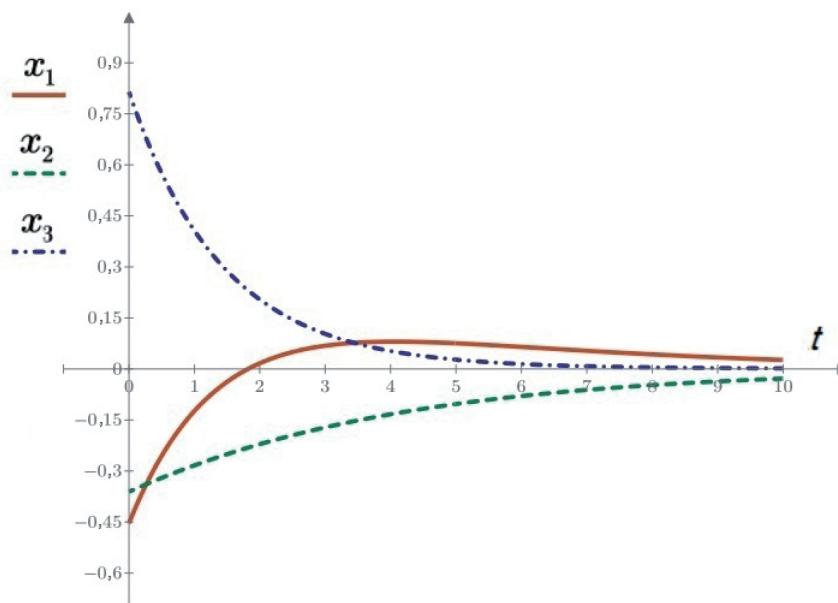


Рис. 3.5: Поведінка замкненої системи при найгіршому збуренні.

Далі, для замкненої системи з матрицею регулятора K_1 побудовано найгірше збурення

$$w = K_0 x, \quad K_0 = \begin{bmatrix} 0,30667 & 0,24308 & 0 \\ -0,27293 & -0,24407 & -0,21133 \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

і найгірший початковий вектор

$$x_0 = \begin{bmatrix} -0,45380 & -0,36093 & 0,81473 \end{bmatrix}^\top$$

щодо критерію якості J (див. лему 2.6). На рис. 3.5 зображена поведінка розв'язку замкненої системи при наявності найгіршого збурення

$$E\dot{x} = A_0 x, \quad x(0) = x_0, \quad (3.46)$$

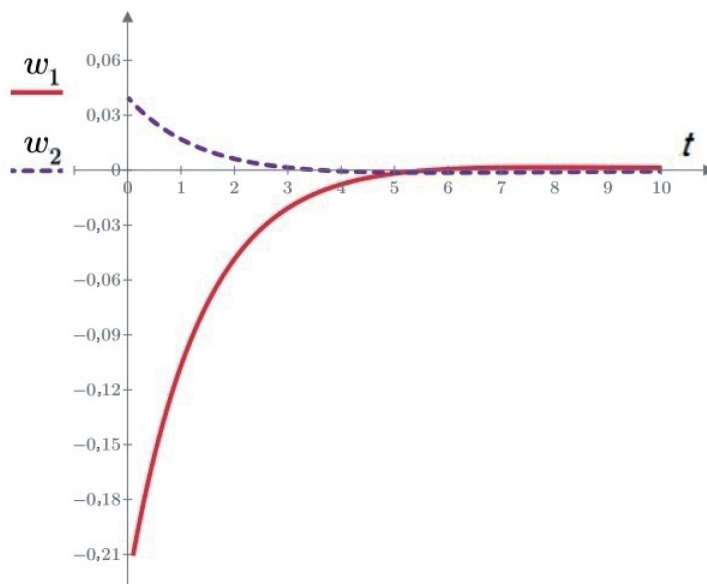


Рис. 3.6: Найгірше збурення.

де $A_0 = A + B_2 K_1 C_2 + B_1 K_0$, а на рис. 3.6 — компонентів збурення (3.45). Система (3.46) допустима і має скінчений спектр

$$\sigma(F_0) = \{ -0,25965, -0,70302 \}.$$

Її розв'язок побудовано у вигляді $x(t) = T\tilde{x}(t)$, де T — матриця повного рангу, для якої виконуються співвідношення

$$A_0 T = E T \Lambda, \quad \text{rank } T = \text{rank } (E T) = \text{rank } E,$$

а $\tilde{x}(t)$ — розв'язок звичайної системи $\dot{\tilde{x}} = \Lambda \tilde{x}$, причому $\sigma(\Lambda) = \sigma(F_0)$ і $x_0 = T\tilde{x}_0$.

3.5. Висновки до розділу

У даному розділі досліджено задачі синтезу узагальнених H_∞ статичних та динамічних регуляторів для класу лінійних дескрипторних систем з керуваннями і спостережуваними виходами. Отримано наступні результати.

- Встановлено необхідні і достатні умови існування стабілізуючих статичних регуляторів за спостережуванням виходом, при яких замкнена система належить класу допустимих дескрипторних систем і її зважений

рівень гасіння зовнішніх і початкових збурень менший заданого значення. Отримані умови у випадку застосування статичних регуляторів за станом зведено до розв'язання лінійних матричних нерівностей.

- Розвинуто комбінований метод лінійних та квадратичних матричних нерівностей для розв'язання узагальненої задачі H_∞ -керування зі зваженим критерієм якості.
- Задача синтезу дескрипторних систем з динамічним регулятором зведено до аналогічної задачі зі статичним регулятором у розширеному фазовому просторі.
- Встановлено необхідні і достатні умови існування динамічних регуляторів за спостережуваним виходом, при яких замкнена система належить класу допустимих дескрипторних систем і її зважений рівень гасіння зовнішніх і початкових збурень менший заданого значення. Отримані умови зведено до розв'язання лінійних матричних нерівностей при додаткових рангових обмеженнях.
- Розроблено і чисельно реалізовано алгоритми синтезу динамічного регулятора для розв'язання узагальненої задачі H_∞ -керування.

Розділ 4

ОЦІНКА ГАСІННЯ ОБМЕЖЕНИХ ЗБУРЕНЬ ЗА УМОВ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

В даному розділі викладено деякі підходи до розв'язання задач існування та побудови узагальнених статичних та динамічних H_∞ -регуляторів по виходу для класу дескрипторних систем за умов невизначеності матричних коефіцієнтів. В результаті замкнена система керування повинна бути допустимою і робастно (асимптотично) стійкою відносно заданих матричних невизначеностей. Такими множинами невизначеності можуть бути матричні інтервали, політопи, афінні множини тощо.

Зазначимо, що матричні інтервали і афінні множини можна описати у вигляді політопів (див. [39, 56]). Наприклад, матричний інтервал

$$\mathcal{A} = \{A \in \mathbb{R}^{n \times m} : \underline{A} \leq A \leq \overline{A}\},$$

де $\underline{A} = \|\underline{a}_{ij}\|_{i,j=1}^{n,m}$, $\overline{A} = \|\overline{a}_{ij}\|_{i,j=1}^{n,m}$, а $\leq$ — знак нерівності стосовно конуса невід'ємних матриць, описує політоп з $\nu = 2^{nm}$ вершинами:

$$\text{Co}\{A_1, \dots, A_\nu\} = \left\{ \sum_{i=1}^{\nu} a_i A_i : a_i \geq 0, i = \overline{1, \nu}, \sum_{i=1}^{\nu} a_i = 1 \right\},$$

де

$$A_k = \|a_{ij}^k\|_{i,j=1}^{n,m}, \quad a_{ij}^k \in \{\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}\}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, \nu}.$$

Застосування матричних політопів дозволяє отримані в розділах 2 і 3 результати поширити на деякі класи нелінійних (псевдолінійних) дескрипторних систем керування.

4.1. Поліедральна невизначеність матричних коефіцієнтів

Наведемо ряд тверджень типу лем 2.2 – 2.4 для дескрипторних систем за умов поліедральної невизначеності матричних коефіцієнтів.

За лемою 2.2 кожна в'язка матриць $F(\lambda) = A - \lambda E$ при

$$E \in \text{Co}\{E_1, \dots, E_{\nu_0}\}, \quad A \in \text{Co}\{A_1, \dots, A_{\nu_1}\} \quad (4.1)$$

є допустимою тоді і лише тоді, коли сумісна система ЛМН

$$A_{i_1}^\top X + X^\top A_{i_1} < 0, \quad E_{i_0}^\top X = X^\top E_{i_0} \geq 0, \quad i_0 = \overline{1, \nu_0}, \quad i_1 = \overline{1, \nu_1}, \quad (4.2)$$

де E_{i_0} і A_{i_1} — вершини заданих політопів у просторі матриць $\mathbb{R}^{n \times n}$. Еквівалентність співвідношень (2.18), (2.19) і системи (4.2) впливає із зображення матриць

$$A = \sum_{i_1=1}^{\nu_1} \alpha_{i_1} A_{i_1}, \quad E = \sum_{i_0=1}^{\nu_0} \beta_{i_0} E_{i_0},$$

де $\alpha_{i_1} \geq 0$, $\beta_{i_0} \geq 0$, $\alpha_1 + \dots + \alpha_{\nu_1} = \beta_1 + \dots + \beta_{\nu_0} = 1$. Зазначимо, що матричні інтервали і афінні множини можна описати у вигляді політопів.

Аналогічно, якщо існують матриці X і $S_{i_0} = S_{i_0}^\top \geq 0$, що задовольняють систему ЛМН

$$\begin{bmatrix} S_{i_0} & S_{i_0} - E_{i_0}^\top X \\ S_{i_0} - X^\top E_{i_0} & 0 \end{bmatrix} \geq 0, \quad i_0 = \overline{1, \nu_0}, \quad (4.3)$$

$$\begin{bmatrix} A_{i_1}^\top X + X^\top A_{i_1} + C_{i_3}^\top Q C_{i_3} & X^\top B_{i_2} + C_{i_3}^\top Q D_{i_4} \\ B_{i_2}^\top X + D_{i_4}^\top Q C_{i_3} & D_{i_4}^\top Q D_{i_4} - \gamma^2 P \end{bmatrix} < 0, \quad (4.4)$$

$$i_1 = \overline{1, \nu_1}, \quad i_2 = \overline{1, \nu_2}, \quad i_3 = \overline{1, \nu_3}, \quad i_4 = \overline{1, \nu_4},$$

то за лемою 2.3 для системи (2.11) з довільними коефіцієнтами (4.1) і

$$B \in \text{Co}\{B_1, \dots, B_{\nu_2}\}, \quad C \in \text{Co}\{C_1, \dots, C_{\nu_3}\}, \quad D \in \text{Co}\{D_1, \dots, D_{\nu_4}\} \quad (4.5)$$

в'язка матриць $F(\lambda)$ допустима і виконується оцінка $J_0 < \gamma$. При цьому за лемою 2.5 $J \leq \gamma$, якщо разом з (4.3) і (4.4) виконуються умови

$$S_{i_0} \leq \gamma^2 X_0, \quad i_0 = \overline{1, \nu_0}. \quad (4.6)$$

Для сім'ї систем (2.11) з невизначеними коефіцієнтами (4.5) виконується строга оцінка $J < \gamma$, якщо сумісна система співвідношень (4.4) і

$$\begin{bmatrix} S & S - E^\top X \\ S - X^\top E & 0 \end{bmatrix} \geq 0, \quad (4.7)$$

$$S \leq \gamma^2 X_0, \quad \text{rank}(S - \gamma^2 X_0) = \rho, \quad (4.8)$$

де вагова матриця X_0 подана у вигляді (2.25).

Наведемо відомий підхід до вивчення та застосування ЛМН з невизначеними коефіцієнтами загального типу

$$M(X) = \sum_{i,j=1}^{\nu} \gamma_{ij} A_i^* X A_j > 0 (\geq 0), \quad (4.9)$$

де γ_{ij} — елементи ермітової матриці Γ . Позначимо через $\mathcal{I}$ підмножину індексів $\mathcal{I} \subseteq \{1, \dots, \nu\}$, для яких відповідні матричні коефіцієнти невизначені:

$$A_i \in \text{Co}\{A_{i1}, \dots, A_{i\nu_i}\}, \quad i \in \mathcal{I}. \quad (4.10)$$

Сформулюємо лему 1.21 із [39] у наступному вигляді.

Лема 4.1. *Нехай виконується одна із умов*

$$\gamma_{ii} = 0, \quad i \in \mathcal{I}, \quad X = X^*, \quad (4.11)$$

або

$$\gamma_{ii} \leq 0, \quad i \in \mathcal{I}, \quad X = X^* \geq 0. \quad (4.12)$$

Тоді матрична нерівність (4.9) за умов невизначеності (4.10) виконується в тому і лише в тому випадку, коли сумісна система ЛМН

$$M_{r_1, \dots, r_\nu}(X) = \sum_{i,j=1}^{\nu} \gamma_{ij} \tilde{A}_{ir_i}^* X \tilde{A}_{jr_j} > 0 (\geq 0), \quad r_i \in \{1, \dots, \nu_i\}, \quad i = \overline{1, \nu}, \quad (4.13)$$

де

$$\tilde{A}_{ir_i} = \begin{cases} A_i, & i \notin \mathcal{I}, \\ A_{ir_i}, & i \in \mathcal{I}, r_i \in \{1, \dots, \nu_i\} \end{cases}, \quad i = \overline{1, \nu}.$$

4.2. Умови існування зважених H_∞ -регуляторів за умов невизначеності

Розглянемо дескрипторну систему з керованими і спостережуваними виходами

$$\begin{aligned} E\dot{x} &= Ax + B_1w + B_2u, \quad x(0) = x_0, \\ z &= C_1x + D_{11}w + D_{12}u, \\ y &= C_2x + D_{21}w + D_{22}u, \end{aligned} \quad (4.14)$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $w \in \mathbb{R}^s$, $z \in \mathbb{R}^k$, $y \in \mathbb{R}^l$ і критерій якості J виду (2.22) з ваговою матрицею (2.25). Методи побудови узагальнених (зважених) H_∞ -регуляторів, викладених у розділі 3, у деяких випадках можна застосувати до сімей систем типу (4.14) з поліедральною невизначеністю матричних коефіцієнтів A , B_1 , C_1 і D_{11} :

$$A \in \text{Co}\{A_1, \dots, A_{\nu_1}\}, \quad B_1 \in \text{Co}\{B_1^1, \dots, B_1^{\nu_2}\}, \quad (4.15)$$

$$C_1 \in \text{Co}\{C_1^1, \dots, C_1^{\nu_3}\}, \quad D_{11} \in \text{Co}\{D_{11}^1, \dots, D_{11}^{\nu_4}\}. \quad (4.16)$$

На основі теорем 3.1, 3.2 і леми 4.1 маємо такі твердження.

Теорема 4.1. *Нехай існують матриці X , Y , $S = S^\top \geq 0$ і $\Theta = \Theta^\top \geq 0$, що задовольняють співвідношення (3.36), (4.7), (4.8) і*

$$W_R^\top \begin{bmatrix} A_{i_1}^\top X + X^\top A_{i_1} + C_1^{i_3 \top} Q C_1^{i_3} & X^\top B_1^{i_2} + C_1^{i_3 \top} Q D_{11}^{i_4} \\ B_1^{i_2 \top} X + D_{11}^{i_4 \top} Q C_1^{i_3} & D_{11}^{i_4 \top} Q D_{11}^{i_4} - \gamma^2 P \end{bmatrix} W_R < 0, \quad (4.17)$$

$$W_L^\top \begin{bmatrix} A_{i_1} Y + Y^\top A_{i_1}^\top + B_1^{i_2} P^{-1} B_1^{i_2 \top} & Y^\top C_1^{i_3 \top} + B_1^{i_2} P^{-1} D_{11}^{i_4 \top} \\ C_1^{i_3} Y + D_{11}^{i_4} P^{-1} B_1^{i_2 \top} & D_{11}^{i_4} P^{-1} D_{11}^{i_4 \top} - \gamma^2 Q^{-1} \end{bmatrix} W_L < 0, \quad (4.18)$$

$$i_1 = \overline{1, \nu_1}, \quad i_2 = \overline{1, \nu_2}, \quad i_3 = \overline{1, \nu_3}, \quad i_4 = \overline{1, \nu_4},$$

де $R = [C_2, D_{21}]$ і $L = [B_2^\top, D_{12}^\top]$. Тоді існує динамічний регулятор (3.30), при якому замкнена система (3.32) з невизначеними матрицями (4.15), (4.16) є допустимою і для її критерію якості (2.22) виконується оцінка $J < \gamma$.

Теорема 4.2. *Нехай виконуються умови (3.28) і сумісна щодо X і S система співвідношень (2.20), (2.26), (2.27), (4.17) і*

$$A_2^{i_1 i_2 \top} X + X^\top A_2^{i_1 i_2} + X^\top R_2^{i_2} X + Q_2 < 0, \quad i_1 = \overline{1, \nu_1}, \quad i_2 = \overline{1, \nu_2}, \quad (4.19)$$

де

$$A_2^{i_1 i_2} = A_1^{i_1} + B_{11}^{i_2} R_1^{-1} D_{11}^\top Q_1 C_1, \quad A_1^{i_1} = A_{i_1} - B_2 R_0^{-1} D_{12}^\top Q C_1,$$

$$R_2^{i_2} = B_{11}^{i_2} R_1^{-1} B_{11}^{i_2 \top} - B_2 R_0^{-1} B_2^\top, \quad B_{11}^{i_2} = B_1^{i_2} - B_2 R_0^{-1} D_{12}^\top Q D_{11},$$

$$Q_1 = Q - Q D_{12} R_0^{-1} D_{12}^\top Q, \quad Q_2 = C_1^\top (Q_1 + Q_1 D_{11} R_1^{-1} D_{11}^\top Q_1) C_1.$$

Тоді існує статичний регулятор (3.4), при якому замкнена система (3.5) з невизначеними матрицями (4.15) є допустимою і для її критерію якості (2.22) виконується оцінка $J < \gamma$.

Зауваження 4.1. При застосуванні теореми 4.1 матриці шуканого динамічного регулятора (3.30) можна побудувати за допомогою ускладненого алгоритму 3.4, у п. 2 якого замість (3.38) і (3.39) розв'язується система ЛМН (4.17) і (4.18), а у п. 5 — система ЛМН типу (3.44) при всіх можливих наборах вершин політопів (4.15), (4.16).

Зауваження 4.2. Теорема 4.1 у випадку нульової матриці $\Theta = 0$ дає умови існування статичного регулятора за виходом (3.4), при якому замкнена система (3.5) з невизначеними матрицями (4.15), (4.16) є допустимою і для її критерію якості (2.22) виконується оцінка $J < \gamma$ (див. зауваження 3.5).

Викладені результати можна розвинути та застосувати до класу нелінійних дескрипторних систем з керованими і спостережуваними виходами

$$\begin{aligned} E\dot{x} &= A(x)x + B_1(x)w + B_2(x)u, & x(0) &= x_0, \\ z &= C_1(x)x + D_{11}(x)w + D_{12}(x)u, \\ y &= C_2(x)x + D_{21}(x)w + D_{22}(x)u, \end{aligned} \quad (4.20)$$

де всі матричні коефіцієнти є неперервними функціями стану x в деякому відкритому і опуклому околі $\mathcal{S}_0$ нульового стану $x = 0$ (див., наприклад, [43, 139] у випадку $E = I_n$). Для цього замість (4.19) слід розглянути лінеаризовану систему

$$\begin{aligned} E\dot{x} &= A(0)x + B_1(0)w + B_2(0)u, & x(0) &= x_0, \\ z &= C_1(0)x + D_{11}(0)w + D_{12}(0)u, \\ y &= C_2(0)x + D_{21}(0)w + D_{22}(0)u. \end{aligned} \quad (4.21)$$

При формулюванні тверджень типу теорем 3.1 – 3.3, а також 4.1 і 4.2 для системи (4.21) використовуються локальні характеристики J_0 і J вихідної системи (4.20), визначені в околі $\mathcal{S}_0$.

4.3. Побудова сім'ї статичних регуляторів за спостережуваним виходом

Розглянемо дескрипторну систему (4.14) і наведемо умови існування та метод побудови множини узагальнених H_∞ регуляторів (3.4), яку формують матриці коефіцієнтів підсилення. Для цього сформулюємо допоміжне твердження про матричну невизначеність.

Введемо на множині матриць $\mathcal{K}_D = \{K : \det(I_m - KD) \neq 0\}$ нелінійний оператор $\mathbf{D}(K) = (I_m - KD)^{-1}K$ і розглянемо матричну нерівність

$$W + U^\top \mathbf{D}(K)V + V^\top \mathbf{D}^\top(K)U + V^\top \mathbf{D}^\top(K) R \mathbf{D}(K)V < 0, \quad (4.22)$$

де $D \in \mathbb{R}^{l \times m}$, $U \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $V \in \mathbb{R}^{l \times n}$, $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ і $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ — задані матриці, причому $W = W^\top$ і $R = R^\top \geq 0$.

Лема 4.2. (Узагальнена лема про матричну невизначеність [39]).

Нехай для деяких матриць $P_0 = P_0^\top > 0$ і $Q_0 = Q_0^\top > 0$ виконується матрична нерівність

$$\Omega = \begin{bmatrix} W & U^\top & V^\top \\ U & R - P_0 & D^\top \\ V & D & -Q_0^{-1} \end{bmatrix} < 0. \quad (4.23)$$

Тоді $K \in \mathcal{K}_D$ і виконується матрична нерівність (4.22) для кожної матриці K з еліпсоїда

$$\mathcal{K} = \{K : K^\top P_0 K \leq Q_0\}. \quad (4.24)$$

На основі лем 2.3, 2.5 і 4.2 маємо таке твердження.

Теорема 4.3. Нехай існують матриці X , $S = S^\top \geq 0$, $P_0 = P_0^\top > 0$ і $Q_0 = Q_0^\top > 0$, що задовольняють систему ЛМН (2.20) і

$$\Omega(X, P_0, Q_0) = \begin{bmatrix} \Omega_1 & \Omega_2 & \Omega_3 \\ \Omega_2^\top & \Omega_4 & \Omega_5 \\ \Omega_3^\top & \Omega_5^\top & \Omega_6 \end{bmatrix} < 0, \quad (4.25)$$

де

$$\Omega_1 = A^\top X + X^\top A + C_1^\top Q C_1 + C_2^\top Q_0 C_2, \quad \Omega_2 = X^\top B_1 + C_1^\top Q D_{11} + C_2^\top Q_0 D_{21},$$

$$\Omega_3 = X^\top B_2 + C_1^\top Q D_{12} + C_2^\top Q_0 D_{22}, \quad \Omega_4 = D_{11}^\top Q D_{11} + D_{21}^\top Q_0 D_{21} - \gamma^2 P,$$

$$\Omega_5 = D_{11}^\top Q D_{12} + D_{21}^\top Q_0 D_{22}, \quad \Omega_6 = D_{12}^\top Q D_{12} + D_{22}^\top Q_0 D_{22} - P_0.$$

Тоді для довільного керування (3.4) при $K \in \mathcal{K}$ замкнена система (3.5) допустима і має критерій якості $J_0 < \gamma$. При цьому $J < \gamma$, якщо разом із (2.20) і (4.25) виконуються умови (2.26) і (2.27).

Доведення. Перепишемо матричну нерівність (2.23) у лемі 2.3 для замкненої системи (3.5) у вигляді квадратичної нерівності (4.22), де

$$\mathbf{D}(K) = (I_m - K D_{22})^{-1} K,$$

$$W(X) = \begin{bmatrix} A^\top X + X^\top A + C_1^\top Q C_1 & X^\top B_1 + C_1^\top Q D_{11} \\ B_1^\top X + D_{11}^\top Q C_1 & D_{11}^\top Q D_{11} - \gamma^2 P \end{bmatrix},$$

$$U(X) = [B_2^\top X + D_{12}^\top Q C_1, D_{12}^\top Q D_{11}], \quad V = [C_2, D_{21}], \quad R = D_{12}^\top Q D_{12} \geq 0.$$

Далі, застосовуючи лему Шура, подамо матричну нерівність (4.23) у вигляді

$$\Omega = \begin{bmatrix} W(X) + V^\top Q_0 V & U^\top(X) + V^\top Q_0 D \\ U(X) + D^\top Q_0 V & R + D^\top Q_0 D - P_0 \end{bmatrix} < 0$$

або (4.23). У даному виразі залежність від матриць P_0 і Q_0 , що визначають еліпсоїд (4.24), лінійна.

Отже, умови (2.20) і (4.23) забезпечують існування сім'ї статичних регуляторів, при яких система (3.5) допустима і має критерій якості $J_0 < \gamma$. При цьому за лемою 2.5 $J < \gamma$, якщо разом із (2.20) і (4.25) виконуються умови (2.26) і (2.27). $\square$

Зауваження 4.3. При застосуванні теореми 3.3 необхідно, щоб у відсутності керування ($u = 0$) система (3.1) була допустимою і виконувалась оцінка $J_0 < \gamma$. Якщо K_0 — матриця регулятора (3.4), знайдена на основі теореми 3.2, то, застосовуючи теорему 3.3 для замкненої системи з регулятором $u = K_0 y + v$,

де v — нове керування, можемо побудувати еліпсоїдальну множину таких матриць

$$\mathcal{K}_0 = \{K : (K - K_0)^\top P_0 (K - K_0) \leq Q_0\},$$

тобто визначити гарантовані межі робастності бажаного статичного регулятора. При цьому $K = K_0 + \tilde{K}$, де $\tilde{K} \in \mathcal{K}$.

4.4. Приклад. Робастна стабілізація дескрипторної моделі електричного кола.

Система керування електричним колом описується у вигляді (4.14) з матрицями [160]:

$$E = \begin{bmatrix} L & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -R_1 & -1 & 1 \\ 0 & -1/R_2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$D_{11} = D_{21} = D_{22} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

де

$$x = \begin{bmatrix} i & v_2 & v_1 \end{bmatrix}^\top, \quad z = \begin{bmatrix} v_2 & u + \alpha v_1 \end{bmatrix}^\top, \quad y = \begin{bmatrix} v_2 & v_1 \end{bmatrix}^\top,$$

$L = 3$ — індуктивність, $C = 2$ — ємність, $R_1 = 2$ і $R_2 = 1$ — опори, i — струм, v_1 і v_2 — напруги, u — керуючий сигнал джерела струму з обмеженням збуренням w , $\alpha = 1$ — параметр (рис. 4.1). У даній системі пара матриць (E, A) імпульсна, а трійки (E, A, B_2) і (E, A, C_2) — відповідно I -керована та I -спостережувана.

Виберемо вагові матриці критерію якості (2.22)

$$P = 1, \quad Q = I_2, \quad X_0 = E^\top E,$$

і допустимі значення параметрів

$$\underline{R}_1 = 1 \leq R_1 \leq 2,5 = \overline{R}_1, \quad \underline{R}_2 = 0,8 \leq R_2 \leq 2 = \overline{R}_2. \quad (4.26)$$

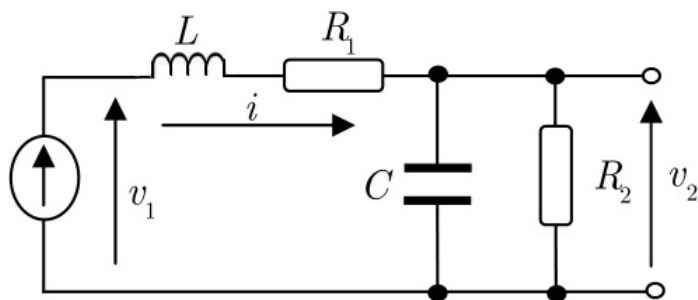


Рис. 4.1: Електричне коло.

Застосовуючи комп'ютерну систему Mathcad Prime, при $\gamma = 0,7$, знайдено матриці

$$X = \begin{bmatrix} 0,18472 & 0,19750 & 0 \\ 0,29625 & 0,75578 & 0 \\ -0,21446 & 0,47774 & -0,32337 \end{bmatrix},$$

$$S = \begin{bmatrix} 0,55416 & 0,59249 & 0 \\ 0,59249 & 1,51155 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

що задовольняють умови теореми 4.2, яка включає систему восьми матричних нерівностей, сформовану згідно (4.17) і (4.19) при таких значеннях пари (R_1, R_2) : $(\underline{R}_1, \underline{R}_2)$, $(\underline{R}_1, \overline{R}_2)$, $(\overline{R}_1, \underline{R}_2)$, $(\overline{R}_1, \overline{R}_2)$.

Далі знайдено матрицю статичного регулятора (3.1)

$$K = - \begin{bmatrix} 0,28690 & 0,70786 \end{bmatrix},$$

як розв'язок деякої системи ЛМН, при якому замкнена система (3.5) допустима і має критерій якості $J = 0,48208 < \gamma$ і скінчений спектр

$$\Sigma = \{ -0,81879 \pm 0,36413 i \}.$$

При цьому $J_0 = \|G_{zw}\|_\infty = 0,41234$ — стандартний критерій якості системи.

Далі, застосовуючи лему 2.5 для замкненої системи при $R_1 = 2$ і $R_2 = 1$ побудовано найгірше збурення

$$w = K_0 x, \quad K_0 = \begin{bmatrix} 2,00557 & 0,59895 & 1,07379 \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

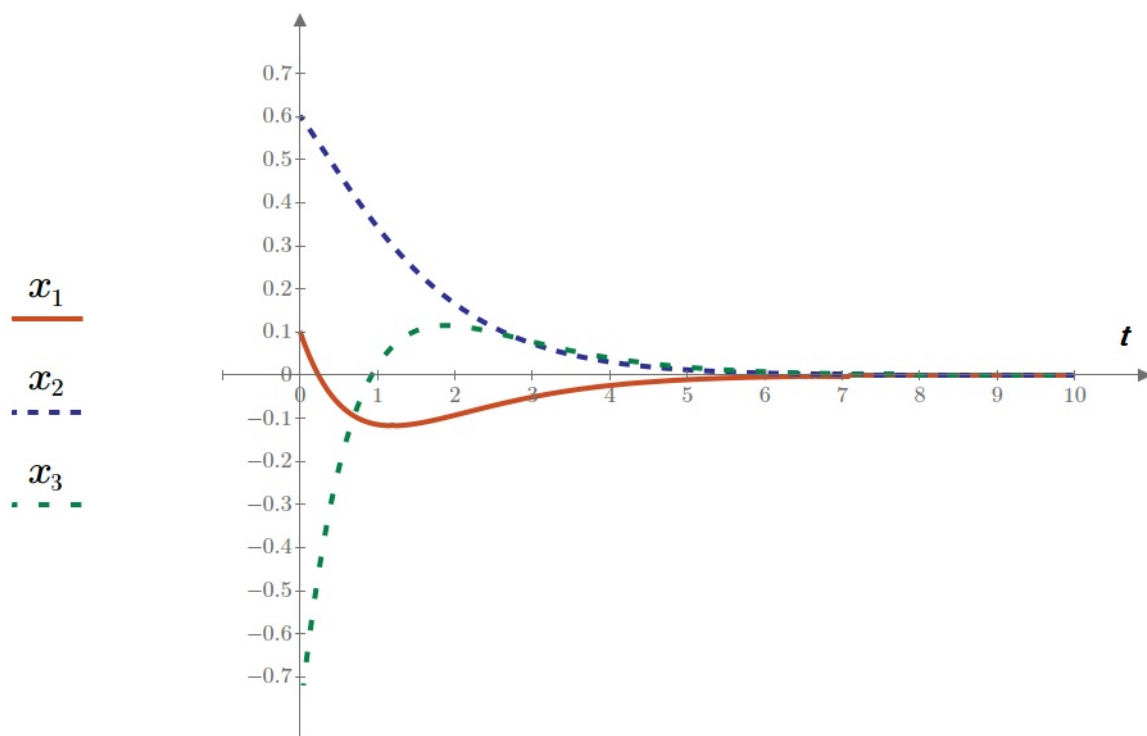


Рис. 4.2: Поведінка замкненої системи.

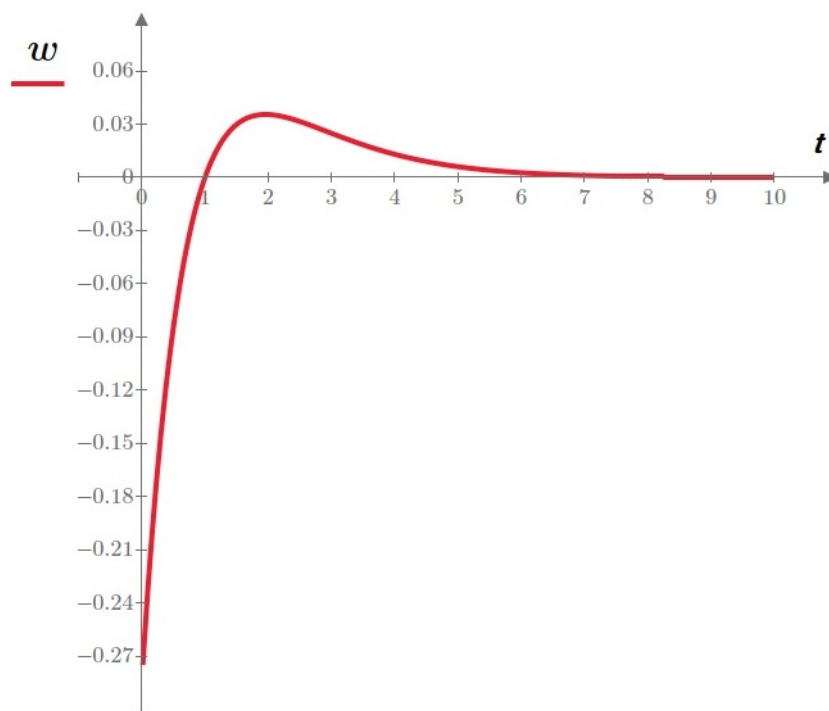


Рис. 4.3: Найгірше збурення.

і найгірший початковий вектор

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0,10164 \\ 0,60158 \\ -0,79232 \end{bmatrix}$$

щодо критерію якості J . На рис. 4.2 зображена поведінка розв'язку замкненої системи з найгіршим початковим вектором при наявності найгіршого збурення

$$E\dot{x} = A_0x, \quad A_0 = A + B_2KC_2 + B_1K_0, \quad x(0) = x_0, \quad (4.28)$$

а на рис. 4.3 — функція (4.27) даного збурення. Система (4.28) допустима і має скінчений спектр

$$\Sigma = \{ -0,4133 \pm 0.12552i \}.$$

Її розв'язок побудовано у вигляді $x(t) = T\tilde{x}(t)$, де T — матриця повного рангу, для якої виконуються співвідношення

$$A_0T = ET\Lambda, \quad \text{rank } T = \text{rank } (ET) = \text{rank } E,$$

а $\tilde{x}(t)$ — розв'язок звичайної системи

$$\dot{\tilde{x}} = \Lambda\tilde{x}, \quad \tilde{x}(0) = \tilde{x}_0,$$

причому, $\sigma(\Lambda) = \Sigma$ і $x_0 = T\tilde{x}_0$.

4.5. Висновки до розділу

У даному розділі досліджено задачі синтезу узагальнених H_∞ статичних та динамічних регуляторів для класу лінійних дескрипторних систем з керованими і спостережуваними виходами за умов невизначеності матричних коефіцієнтів. Отримано наступні результати.

- Встановлено умови існування стабілізуючих статичних та динамічних регуляторів за спостережуванним виходом, при яких замкнена система з поліедральною невизначеністю матричних коефіцієнтів належить класу допустимих дескрипторних систем і її зважений рівень гасіння зовнішніх і початкових збурень менший заданого значення. Отримані умови у випадку застосування статичних регуляторів за станом зведено до розв'язання лінійних матричних нерівностей.

- Узагальнено комбінований метод лінійних та квадратичних матричних нерівностей в задачі зваженого H_∞ -керування для дескрипторних систем з полієдральною невизначеністю матричних коефіцієнтів.
- Застосовуючи узагальнену лему про матричну невизначеність, розвинуто методику побудови еліпсоїдальної сім'ї матриць статичних регуляторів за спостережуваним виходом, при яких замкнена система належить класу допустимих дескрипторних систем і її зважений рівень гасіння зовнішніх і початкових збурень менший заданого значення.
- Розроблено і чисельно реалізовано алгоритм синтезу узагальненого H_∞ -регулятора для дескрипторної моделі керування електричного кола за умов інтервальної невизначеності опорів.

ВИСНОВКИ

В дисертаційній роботі сформульовано та розв'язано нові задачі синтезу статичних та динамічних регуляторів для лінійних диференціально-алгебраїчних (deskriptorних) систем. Основні нові результати проведених досліджень полягають у наступному:

1. Описана структура загального розв'язку регулярних deskriptorних систем з узгодженими початковими умовами.

2. Запропоновано методику знаходження найгірших зовнішніх і початкових збурень у deskriptorних системах стосовно зважених критеріїв якості, що узагальнюють H_∞ -норму матричної передатної функції керованих систем.

3. Задачу синтезу deskriptorних систем з динамічним регулятором зведено до аналогічної задачі зі статичним регулятором у розширеному фазовому просторі;

4. Встановлено необхідні і достатні умови існування статичних та динамічних регуляторів за спостережуваним виходом, при яких замкнена система належить класу допустимих deskriptorних систем і її зважений рівень гасіння обмежених збурень менший заданого значення. Отримані умови зведено до розв'язання лінійних матричних нерівностей при додаткових рангових обмеженнях.

5. Розвинуто комбінований метод лінійних та квадратичних матричних нерівностей для розв'язання узагальненої задачі H_∞ керування зі зваженим критерієм якості.

6. Встановлено умови існування робастних статичних та динамічних регуляторів за спостережуваним виходом, при яких замкнена система з поліедральною невизначеністю матричних коефіцієнтів належить класу допустимих deskriptorних систем і її зважений рівень гасіння обмежених збурень менший заданого значення. Отримані умови у випадку застосування статичних регуляторів за станом зведено до розв'язання лінійних матричних нерівностей.

7. Розвинуто методику побудови еліпсоїдальної сім'ї матриць статичних регуляторів за спостережуванним виходом, при яких замкнена система належить класу допустимих дескрипторних систем і її зважений рівень гасіння зовнішніх і початкових збурень менший заданого значення.

8. Розроблені методи та алгоритми продемонстровано за допомогою комп'ютерних засобів в задачах стабілізації та узагальненої H_∞ -оптимізації конкретних дескрипторних моделей керування. Зокрема, чисельно реалізовано алгоритми синтезу узагальненого H_∞ регулятора для дескрипторних моделей керування гідравлічної системи з трьома резервуарами та електричного кола за умов інтервальної невизначеності опорів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Алиев Ф.А., Ларин В.Б. Задачи стабилизации системы с обратной связью по выходной переменной // Прикладная механика. — 2011. — **47**, №3. — С. 3–49.
2. Алілуйко А.М. Алгебраїчні умови стійкості диференціальних систем другого порядку // Динамические системы. — Вып. 22. — 2007. — С. 96–108.
3. Алілуйко А.М., Мазко О.Г. Стійкість та стабілізація диференціальних систем другого порядку // Проблеми аналітичної механіки: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2006. — **3**, №1. — С. 7–24.
4. Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р. Математическая теория конструирования систем управления. — М.: Высш. шк., 1989. — 447 с.
5. Баландин Д. В., Коган М. М. Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. — М.: Физматлит, 2007. — 280 с.
6. Баландин Д.В. Синтез регуляторов на основе линейных матричных неравенств и алгоритма поиска взаимнообратных матриц // Автоматика и телемеханика. — 2005. — №1. — С. 82–99.
7. Баландин Д. В., Коган М. М. Обобщенное H_∞ -оптимальное управление как компромисс между H_∞ -оптимальным и γ -оптимальным управлениями // Автоматика и телемеханика. — 2010. — №6. — С. 20–38.
8. Баландин Д. В., Коган М. М., Кривдина Л. Н., Федюков А. А. Синтез обобщенного H_∞ -оптимального управления в дискретном времени на конечном и бесконечном интервалах // Автоматика и телемеханика. — 2014. — №1. — С. 3–22.
9. Барбашин Е.А. Функции Ляпунова: М.: Наука, 1970. — 240 с.
10. Башняков О.М., Гаращенко Ф.Г., Пічкур В.В. Практична стійкість, оцінки та оптимізація. Видавничо-поліграфічний центр “Київський університет”, 2008. — 383 с.
11. Белов А. А., Курдюков А. П. Дескрипторные системы и задачи управления. — М.: Физматлит, 2015. — 272 с.

12. *Бирюков Р. С.* Обобщенный H_∞ -оптимальный фильтр для непрерывного объекта по дискретным по времени наблюдениям // Информатика и системы управления. — 2014. — № 4 (42). — С. 89–101.
13. *Бояринцев Ю. Е.* Регулярные и сингулярные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. — Новосибирск: Наука, 1980. — 222 с.
14. *Бояринцев Ю. Е.* Линейные и нелинейные алгебро-дифференциальные системы. — Новосибирск: Наука, 2000.
15. *Бурлачко И. В.* Исследование оптимального управления системами уравнений леонтьевского типа. — Дис. на соискание канд. физ.-мат. наук, Челябинск, 2005.
16. *Валеев К. Г., Финин Г. С.* Построение функций Ляпунова: Киев: Наукова думка, 1981. — 412 с.
17. *Воронов А. А.* Современное состояние и проблемы теории устойчивости // Автомат. и телемех. — 1982. — № 5. — С. 5–28.
18. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. — М.: Наука, 1988. — 552 с.
19. *Гелиг А., Зубер И., Чурилов А.* Устойчивость и стабилизация нелинейных систем. — Санкт-Петербург: Издательство СПбГУ, 2006. — 272 с.
20. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — М: Наука, 1970. — 534 с.
21. *Зайцев В. В.* Второй метод Ляпунова для оценок областей достижимости нелинейных систем // Автоматика и телемеханика, 1994. — № 6. — С. 32–40.
22. *Зуев А. Л., Игнатъев А. О., Ковалёв А. М.* Устойчивость и стабилизация нелинейных систем. — Киев: Наук. думка, 2013. — 431 с.
23. *Калитин Б. С., Тртьякова Л. В.* Оценка области притяжения методом функция Ляпунова: Развитие и применение метода функций Ляпунова. — Новосибирск: Наука, 1992. — С. 210–215.
24. *Карпетян А. В., Румянцев В. В.* Устойчивость консервативных и диссипативных систем // Итоги науки и техн. Серия Общая механика / ВИНТИ. — 1983. — 6. — С. 3–128.

25. *Келлер А.В.* Численное исследование задач оптимального управления для моделей Леонтьевского типа.— Дис. на соискание д. физ.-мат. наук, Челябинск, 2011.
26. *Кильчевский Н.А.* Курс теоретической механики : в 2-х т.— М.: Наука, 1977. — 2. — 544 с.
27. *Козлов Р.И.* Теория систем сравнения в методе векторных функций Ляпунова.— Новосибирск: Наука, 2001. — 128 с.
28. *Комарова Г.Л., Леонов Г.А.* Об оценке областей притяжения состояния равновесия динамической системы прямым методом Ляпунова // Прикладная математика и механика. — 1985. — **49**, № 6. — С. 900–908.
29. *Корневский Д.Г.* Устойчивость решений детерминированных и стохастических дифференциально-разностных уравнений.— Киев: Наук. думка, 1992. — 148 с.
30. *Кошляков В.Н.* Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов.— М.: Наука, 1985. — 286 с.
31. *Кошляков В.Н.* О структурных преобразованиях динамических систем // Прикл. мат. и мех. — 1997. — **61**, №5. — С. 774–780.
32. *Кошляков В.Н., Макаров В.Л.* Структурный анализ некоторого класса динамических систем // Укр. мат. журнал. — 2000. — **52**, №8. — С. 1089–1096.
33. *Котов Т.О., Мазко О.Г.* Зважена оцінка та мінімізація впливу обмежених збурень у дескрипторних системах керування // Тези VI міжнародної конференції “Сучасні проблеми механіки” (30–31 серпня 2021 р., Київ) с. 34.
34. *Кунцевич В.М.* Управление в условиях неопределенности: гарантированные результаты в задачах управления и идентификации.— Киев: Наук. думка, 2006. — 264 с.
35. *Курцвейль Я.* Об обращении второй теоремы Ляпунова об устойчивости движения // Чехословацкий мат. журнал. — 1956. — **6**, №2. — С. 217–259.

36. *Лакшмикантам В., Лиля С., Мартынюк А.А.* Устойчивость движения: метод сравнения.— Киев: Наук. думка, 1991.— 248 с.
37. *Ларин В.Б.* Задачи управления системами, содержащими неопределенность // Прикладная механика. — 2001. — **37**, №12. — С. 37–67.
38. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения.— М.-Л.: Гос. издательство технико-теоретической литературы, 1980. — 472 с.
39. *Мазко А. Г.* Робастная устойчивость и стабилизация динамических систем. Методы матричных и конусных неравенств // Праці Інституту математики НАН України, 2016. — **102**. — 332 с.
40. *Мазко А. Г.* Робастная устойчивость и оценка функционала качества нелинейных систем управления // Автоматика и телемеханика. — 2015. — № 2. — С. 73–88.
41. *Мазко А.Г., Кусий С.Н.* Стабилизация по выходу и взвешенное подавление возмущений в дискретных системах управления // Проблемы управления и информатики. — 2017. — № 6. — С. 78–93.
42. *Мазко О.Г.* Оцінка зваженого рівня гасіння обмежених збурень у дескрипторних системах // Укр. мат. журн. — 2018. — №11. — С. 1541–1552.
43. *Мазко О. Г., Кусий С. М.* Робастна стабілізація та гасіння зовнішніх збурень у системах з керованими і спостережуваними виходами // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2016. — **13**, 3. — С. 129–145.
44. *Мазко О.Г., Кусий С.М.* Зважене гасіння обмежених збурень у системі керування літака в режимі посадки // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2018. — **15**, №1. — С. 88–99.
45. *Мазко А. Г., Кусий С.Н.* Робастная стабилизация и оценка взвешенного подавления возмущений в системах управления // Проблемы управления и информатики. — 2016. — № 6. — С. 71–82.
46. *Мазко О.Г., Котов Т.О.* Стабілізація і гасіння обмежених збурень у дескрипторних системах керування // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2018. — **15**, №1. — С. 65 – 87.

47. *Мазко О.Г., Котов Т.О.* Оцінка впливу і гасіння обмежених збурень у дескрипторних системах керування // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2019. — **16**, №2. — С. 63 – 84.
48. *Мазко О.Г., Котов Т.О.* Робастна стабілізація і зважене гасіння обмежених збурень у дескрипторних системах керування // Укр. мат. журн. — 2019. — **71**, №10. — С. 1374 – 1388.
49. *Мазко А. Г., Котов Т. А.* Стабилизация и подавление ограниченных возмущений в дескрипторных системах управления // Тези V міжнародної конференції “Сучасні проблеми механіки” (28–30 серпня 2019 р., Київ) с. 58.
50. *Мазко А. Г., Котов Т. А.* Оценка взвешенного подавления возмущений в дескрипторных системах управления // Proceedings of XIX International conference reports “Dynamical system modelling and stability investigation” (May 22–24, 2019, Kyiv, Ukraine), P. 334 – 336.
51. *Мартынюк А.А., Оболенський А.Ю.* Об устойчивости решений автономных систем Важевского // Дифф. уравнения. — 1980. — **16**, №8. — С. 1392–1407.
52. *Массера Х.Л.* К теории устойчивости // Математика. — 1957. — **1**, №4. — С. 81–104.
53. *Матросов В.М., Анапольский Л.Ю., Васильев С.Н.* Метод сравнения в математической теории систем— Новосибирск: Наука, 1980. — 480 с.
54. *Меркин Д.Р.* Гироскопические системы: Наука, 1974. — 344 с.
55. *Назин С.А., Поляк Б. Т., Топунов М. В.* Подавление ограниченных внешних возмущений с помощью метода инвариантных эллипсоидов // Автоматика и телемеханика. — 2007. — № 3. — С. 106–125.
56. *Поляк Б. Т., Щербаков П. С.* Робастная устойчивость и управление. — М.: Наука, 2002. — 303 с.
57. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Трудные задачи линейной теории управления. Некоторые подходы к решению // Автоматика и телемеханика.— 2005. — №5. — С. 7–46.

58. *Поляк Б. Т., Хлебников М. В., Щербаков П. С.* Управление линейными системами при внешних возмущениях. Техника линейных матричных неравенств. — М.: Ленанд, 2014. — 560 с.
59. *Румянцев В.В.* О развитии исследований в СССР по теории устойчивости движения // Дифференциальные уравнения. — 1983. — №5. — С. 739–774.
60. *Самойленко А. М., Шкіль М. І., Яковець В. П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. — Київ: Вища школа, 2000. — 294 с.
61. *Свиридюк Г. А., Брычев С. В.* Численное решение систем уравнений леонтьевского типа // Изв. вузов, Математика, №8, С. 46-52, 2003.
62. *Слюсарчук В.Ю.* Нестійкість розв'язків еволюційних рівнянь— Рівне : Вид-во НУВГП, 2004. — 416 с.
63. *Харитонов В.Л.* Асимптотическая устойчивость семейства систем линейных дифференциальных уравнений // Дифф. уравн. — 1978. — 14, Вып. 11. — С. 2086 – 2088.
64. *Хлебников М.В., Поляк Б.Т., Кунцевич В.М.* Оптимизация линейных систем при ограниченных внешних возмущениях (техника инвариантных эллипсоидов) // Автомат. и телемех. — 2011. — №11. — С. 9–59.
65. *Хусайнов Д.Я., Шатирко А.В.* Метод функций Ляпунова в исследованиях устойчивости дифференциально-функциональных систем: Изд-во Киевского университета, 1997. — 236 с.
66. *Хусайнов Д.Я., Шатирко А.В.* Умови абсолютної інтервальної стійкості різницевих систем із запізнюванням // Вісник Київського університету. Сер. Кібернетика. — 2010. — Вип. 10. — С. 34–47.
67. *Черноустько Ф.Л.* Оценивание фазового состояния динамических систем.— М.: Наука, 1988. — 320 с.
68. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения.— М.: Наука, 1965. — 208 с.
69. *Чистяков В.Ф., Щеглова А.А.* Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем.— Новосибирск: Наука, 2003.— 320 с.

70. *Ailon A.* On the design of output-feedback for finite and infinite pole assignment in singular systems with application to the control problem of constrained robots // Circuit. Syst. Sig. Process.— 1994.— **13**.— P. 525–544.
71. *Aplevich J.D.* Implicit Linear Systems.— Berlin: Springer-Verlag, 1991.
72. *Araujo J.M., Barros P.R., Dorea C.E.T.* Design of observers with error limitation in discrete-time descriptor systems: A case study of a hydraulic tank system // IEEE Trans. Control Syst. Technol. — 2012. — **20**, 4. — P. 1041–1047.
73. *Barone F., Grassini R., Mendella G.* A unified approach to constrained mechanical systems as implicit differential equations // Ann. Inst. Henri Poincaré, Phys. Theor.—1999.— **70**, P. 515–546.
74. *Banaszuk A., Kociecki M., Lewis F.L.* Kalman decomposition for implicit linear systems // IEEE Trans. Automat. Control.—1992.— **37**.— P. 1509–1514.
75. *Bauer I., Bock H.G., Korkel S., Schlöder J.P.* Numerical Methods for Initial Value Problems and Derivative Generation for DAE Models with Application to Optimum Experimental Design of Chemical Processes // Scientific Computing in Chemical Engineering II Werther: Springer, 1999.— P. 282–289.
76. *Beellena T., Vandooren P.* A numerical-method for deadbeat control of generalized state-space systems // Systems Control Lett.— 1988.— **10**.— P. 225–233.
77. *Bender D. J., Laub A. J.* The Linear-Quadratic Optimal Regulator for Descriptor Systems // IEEE Trans. Autom. Control. — 1987. —AC-**32**, 8. — P. 672–688.
78. *Blanchini F.* Set Invariance in Control — A Survey // Automatica J. IFAC. — 1999. — **35**, No. 11. — P. 1747–1767.
79. *Bodestedt M., Tischendorf C.* PDAE models of integrated circuits and index analysis // Math. Comput. Model. Dyn. Syst.—2007.— **13**.— P. 1–17.

80. *Boyd S., Ghaoui L. El, Feron E., Balakrishman V.* Linear matrix inequalities in system and control theory. SIAM Studies in Applied Mathematics, 15.—1994.— Philadelphia: PA.— 193 p.
81. *Boichuk A. A., Pokutnyi A. A., Chistyakov V. F.* Application of perturbation theory to the solvability analysis of differential algebraic equations // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2013. — **53**, 6. — P. 777–788.
82. *Bunse-Genster A., Byers R., Mehrmann V., Nichols N.K.* Feedback design for regularizing descriptor systems // Linear Algebra Appl.—1999.—**299**.— P. 119–151.
83. *Byrne G.D., Ponzi P.R.* Differential-algebraic systems, their applications and solutions // Comput. Chem. Eng.—1988.—**12**, P. 377–382.
84. *Campbell S.L.* Singular Systems of Differential Equations. Pitman, 1980.
85. *Cao Yong-Yan, Lam J., Sun You-Xiam* Static Output Feedback Stabilization: An LMI Approach // Automatica. — 1998. — No. 12. — P. 1641–1645.
86. *Chadli M., Shi P., Feng Z., Lam J.* New bounded real lemma formulation and H_∞ control for continuous-time descriptor systems // Asian Journal of Control. — 2018. — **20**, No.1. — P. 1–7.
87. *Chadli M., Darouach M.* Novel bounded real lemma for discrete-time descriptor systems: Application to H_∞ control design // Automatica.—2012.—**48**.— P. 449–453.
88. *Chu D.L., Chan H.C., Ho D.W.C.* Regularization of singular systems by derivative and proportional output feedback // SIAM J.Matrix Anal. Appl.—1998.—**19**, P. 21–38.
89. *Cobb J.D.* Robust Controllability, observability and duality in singular systems // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1984. — **29**. — P. 1076–1082.
90. *Cobb J.D.* Feedback and pole placement in descriptor variable systems // Int. J. Control.—1981.—**33**.—No. 6, P. 1135–1146.

91. *Conte G., Perdon A.* Generalized state-space realizations of non-proper rational transfer-functions. // Systems n Control Lett.—1982.—**1**, P. 270—276.
92. *Dai L.* Singular Control Systems. Lecture Notes in Control and Information Sciences. — New York: Springer-Verlag, 1989. — 340 p.
93. *Dirac P.A.M.* Generalized Hamiltonian dynamics // Can. J. Math.— 1950.—**2**.— P. 129—148.
94. *Doyle J.C., Francis B.A., Tannenbaum A.R.* Feedback control theory. — Englewood Cliffs, NY: MacMillan, 1992. — 196 p.
95. *Dullerud G.E., Paganini F.G.* A Course in Robust Control Theory. A Convex Approach. — Berlin: Springer-Verlag, 2000. — 419 p.
96. *Duan G.-R.* Analysis and Design of Descriptor Linear Systems.— New York, Dordrecht, Heidelberg, London: Springer, 2010.
97. *Dziurla B., Newcomb R.* The Drazin inverse and semi-state equations // Proc. Intl. Symp. Math. Theory of Networks and Systems.—1979.— P. 283—289.
98. *El-Ghaoui L., Gahinet P.* Rank minimization under LMI constraints: a framework for output feedback problems // Proc. Eur. Control Conf. Groningen, The Netherlands, 1993. — P. 1176—1179.
99. *Feng Z., Lam J., Xu S., Zhou S.* H_∞ control with transients for singular systems // Asian Journal of Control. — 2016. — **18**.— №3. — P. 817—827.
100. *Feng Yu, Yagoubi M.* Robust Control of Linear Descriptor Systems. — Springer Nature Singapore Pte Ltd, 2017. — XI+142 p.
101. *Feng Yu., Yagoubi M.* On state feedback H_∞ control for discrete-time singular systems // IEEE Trans. Aut. Control.— 2013.—**58**.— №10.— P. 2674—2679.
102. *Fang C.-H., Chang F.-R.* A strongly observable and controllable realization of descriptor systems // Control Theory Adv. Tech.—1990.—**6**.— P. 133—141.
103. *Gahinet P., Apkarian P.* A Linear Matrix Inequality Approach to H_∞ Control // Intern. J. of Robust and Nonlinear Control. — 1994. — **4**. — P. 421—448.

104. *Gahinet P., Nemirovski A., Laub A. J., Chilali M.* The LMI Control Toolbox. For Use with Matlab. User's Guide. — Natick, MA: The MathWorks, Inc., 1995. — 138 p.
105. *Gao F., Liu W. Q., Sreeram V., Teo K. L.* Bounded real lemma for descriptor systems and its application. *IFAC 14th Triennial World Congress*, Beijing, P. R., China, 1999. — P. 1631–1636.
106. *Gear C.W.* The simultaneous numerical solution of differential-algebraic equations // *IEEE Trans. Circuit Theory*.— 1971.— **18**.— P. 89–95.
107. *Geerts T.* Solvability conditions, consistency, and weak consistency for linear differential-algebraic equations and time-invariant singular systems: The general case. // *Linear Algebra Appl.*— 1993.— **181**.— P. 111–130.
108. *Gelig A.Ch., Zuber I.E.* Vector Control Design for Robust Stabilization of a Class of Uncertain Systems // *Avtomatika i Telemekhanika*. — 2009. — No. 11. — P. 117–125.
109. *Geradin M., Carona A.* Flexible Multibody Dynamics: A Finite Element Approach. John Wiley Sons, 2001.
110. *Glusingluerssen H.* Feedback canonical form for singular systems // *Int. J. Control*.— 1990.— **52**.— P. 347–376.
111. *Goodwin M.S., Fletcher L.R.* Exact pole assignment with regularity by output feedback in descriptor systems. I. // *Int. J. Control*.— 1995.— **62**.— P. 379–411.
112. *Gracia X., Pons J.M.* Constrained systems: A unified geometric approach // *Int. J. Theor. Phys.*— 1991.— **30**.— P. 511–516.
113. *Grimm J.* Realization and canonicity for implicit systems // *SIAM J. Control Optim.*— 1988.— **26**.— P. 1331–1347.
114. *Hairer E., Wanner G.* Solving Ordinary Differential Equations II: Stiff and Differential-Algebraic Problems. Springer-Verlag, 1996.
115. *Hayton G., Fretwell P., Pugh A.* Fundamental equivalence of generalized state-space systems // *IEEE Trans. Automat. Control*.— 1986.— **31**.— P. 431–439.

116. *Hemami H., Wyman B. F.* Modeling and control of constrained dynamic systems with application to biped locomotion in the frontal plane // IEEE Trans. Automat. Control.— 1979.— **24**.— P. 526–535.
117. *Inoue IM., Wada T., Ikeda M., Uezato E.* State-space H_∞ controller design for descriptor systems // Automatica. — 2015. — **59**. — P. 164–170.
118. *Ishihara J.Y., Terra M.H.* A new Lyapunov equation for discrete-time descriptor systems // Proc. of American Control Conf., Denver.—2003.— P. 5078–5082.
119. *Ishihara J.Y., Terra M.H., Sales R.M.* The full information and state feedback H_2 optimal controllers for descriptor systems // Automatica.— 2003.— **39**.— P. 391–402.
120. *Iwasaki T., Skelton R.E.* All Controllers for the General H_∞ Control Problem: LMI Existence Conditions and State Space Formulas // Automatica. — 1994. — **30**, No.8. — P. 1307–1317.
121. *Khargonekar P.P., Nagpal K.M., Poolla K.R.* H_∞ control with transients // SIAM J. Control and Optimization. — 1991. — **29**, 6. — P. 1373–1393.
122. *Kronecker L.* Algebraische Reduction der Schaaren Bilinearer Formen // Sitzungsberichte Akad. Wiss. Berlin, P. 1225–1237, 1890; Leopold Kronecker's Werke, Chelsea, P. 139–155, 1968.
123. *Kucera V., De Souza C.E.* A Necessary and Sufficient Condition for Output Feedback Stabilizability // Automatica. — 1995. — No. 9. — P. 1357–1359.
124. *Kunkel P., Mehrmann V.* The linear quadratic optimal control problem for linear descriptor systems with variable coefficients // Maths. Contr. Sig. Sys.— 1997.— **10**.— P. 247–264.
125. *Kumar A., Daoutidis P.* Feedback control of nonlinear differential-algebraic equation systems // AIChE Journal.—1995.—**41**.— P. 619–636.
126. *Lee L., Chen J.L.* Strictly positive real lemma and absolute stability for discrete-time descriptor systems // IEEE Trans. Circuits Syst.I.— 2003.— **50**.— P. 788–794.

127. *Leimkuhler B., Reich S.* Simulating Hamiltonian Dynamics. Cambridge University Press, 2004.
128. *Losse P.* The H_∞ Optimal Control Problem for Descriptor Systems // Dissertation Dr. Rer. Nat. Technische Universität Chemnitz (Germany). — 2011.— 104 p.
129. *Luenberger D.G., Arbel A.* Singular dynamic Leontief systems // Econometrica.— 1977.— **45**.— P. 991—995.
130. *Luenberger D.G.* Dynamic equations in descriptor form // IEEE Trans. Automat. Control.—1977.—**22**.— P. 312—321.
131. *Marmo G., Mendella G., Tulczyjew W.M.* Symmetries and constants of the motion for dynamics in implicit form // Ann. Inst. Henri Poincaré, Phys. Theor.— 1992.— **57**.— P. 147—166.
132. *Marszalek W.* Analysis of Partial Differential Algebraic Equations. PhD Thesis, North Carolina State University, 1997.
133. *Masubushi I., Kamitane Y., Ohara A., Suda N.* H_∞ Control for Descriptor Systems: A Matrix Inequalities Approach // Automatica. — 1997. — **33**, 4. — P. 669—673.
134. *Mazko A.G.* Matrix Equations, Spectral Problems and Stability of Dynamic Systems // An international book series “Stability, Oscillations and Optimization of Systems” (Eds. A.A. Martynyuk, P. Borne and C. Cruz-Hernandez), **2**. — Cambridge : Cambridge Scientific Publishers Ltd, 2008. — xx + 270 p.
135. *Mazko A.G.* Cone Inequalities and Stability of Dynamical Systems // Nonlinear Dynamics and Systems Theory. — 2011. — No. 3. — P. 303—318.
136. *Mazko A.G., Kotov T.O.* Robust stabilization and weighted damping of bounded disturbances in descriptor control systems // Ukrainian Mathematical Journal. — 2020. — **71**, No. 10, P. 1572 – 1589. <https://doi.org/10.1007/s11253-020-01732-x>.
137. *Mills J.K., Goldenberg A.A.* Force and position control of manipulators during constrained motion tasks // IEEE Trans. Robot. Automat.—1989.—**5**.— P. 30—46.

138. *Minamide N., Fujisaki Y., Shimizu A.* A parametrization of all observers for descriptor systems // Int. J. Control.— 1997.— **66**.— P. 767–777.
139. *Najmurokhman A.* On solvability of output feedback nonlinear H_∞ -control problem using nonlinear matrix inequalities approach // Journal of Electrical Engineering and Information Technology. — 2003. — **1**, 1. — P. 33–39.
140. *Newcomb R.W.* The semistate description of nonlinear time-variable circuits // IEEE Trans. Circuits Syst.—1981.—**2**, No.8, P. 62–71.
141. *Pandolfi L.* Controllability and stabilization for linear systems of algebraic and differential equations // J. Optim. Theory Appl.— 1980.— **30**.— P. 601–620.
142. *Petersen I.R., Hollot C.V.* Riccati equation approach to the stabilization of uncertain linear systems // Automatica. — 1986. — **22**, No.4. — P. 397–411.
143. *Petzold L.R.* Differential/Algebraic equations are not ODE's // SIAM J. Sci. Slat, Camp.— 1982.— **3**.— P. 367.
144. *Rabier P.J., Rheinboldt W.C.* Nonholonomic Motion of Rigid Mechanical Systems from a DAE Viewpoint. SIAM, 2000.
145. *Rehm A., Allgöwer F.* General quadratic performance analysis and synthesis of differential algebraic equation (DAE) systems // Journal of Process Control. — 2002. — No.12. — P. 467–474.
146. *Riaza R.* Differential-Algebraic Systems. Analytical Aspects and Circuit Applications. — Singapore: World Scientific, 2008. — 330 p.
147. *Riaza R., Torres-Ramirez J.* Nonlinear circuit modeling via nodal methods // Internat. J. Circuit Theory Appl.— 2005.— **33**.— P. 281–305.
148. *Reich S.* On the local qualitative behavior of differential-algebraic equations // Cir. Sys. Signal Process.— 1995.— **14**.— P. 427–443.
149. *Roberson R.E.* Notes on the Thomson-Tait-Chetaev stability theorem // J. Astronaut. Sci. — 1968. — **15**, No. 6. — P. 319–324.
150. *Scott B.* Power system dynamic response calculations // Proc. IEEE.— 1979.— **67**.— P. 219–247.

151. *Sebe N.* New LMI Characterizations for Discrete-Time Descriptor Systems and Application to Multiobjective Control System Synthesis // Proc of the 17th World Congress IFAC.— 2008.— P. 8821—8827.
152. *Schein O.* Stochastic Differential-Algebraic Equations in Circuit Simulation. Shaker Verlag, 1999.
153. *Scherer C.* The Riccati Enequality and State-Space H_∞ -Optimal Control / Ph. D. Dissertation. — Universitat Wurzburg, Germany, 1990.
154. *Seiler W.M.* Numerical analysis of constrained Hamiltonian systems and the formal theory of differential equations // Math. Comp. Simul.— 1998.— **45**.— P. 561—576.
155. *Stevens B.L., Lewis F.L.* Aircraft Modeling. Dynamics and Control. New York: Wiley, 1991.
156. *Stoorvogel A.A.* The H_∞ Control Problem: A State Space Approach. — New York: Prentice-Hall, 1992. — 468 p.
157. *Stykel T.* Stability and inertia theorems for generalized Lyapunov equations // Linear Algebra Appl.— 2002.— **355** (1-3).— P. 297—314.
158. *Stykel T.* Gramian-based model reduction for descriptor systems // Math. Control Signals Syst.— 2004.— **16**.— P. 297—319.
159. *Syrmos V.L., Abdallah C.T., Dorato P., Grigoriadis K.* Static output feedback : a survey // Automatica. — 1997. — **33**, No. 2. — P. 125—137.
160. *Takaba K., Katayama T.* Robust H^2 control of descriptor system with time-varying uncertainty // Intern. J. of Robust and Nonlinear Control. — 1998. — **71**, 4. — P. 559—579.
161. *Takens F.* Constrained equations; a study of implicit differential equations and their discontinuous solutions // Lect. Notes Maths.— 1976.— **525**.— P. 143—234.
162. *Verghese G.C., Levy B.C., Kailath T.* A generalized state-space for singular systems // IEEE Trans. Automat. Control.—1981.—**26**, No. 4, P.811—831.
163. *Weierstrass K.* Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen // Monatsberichte Akad. Wiss. Berlin 1868, P. 310—338; Mathematische Werke, II, Georg Olms Verlag and Johnson Reprint Co., 1967, P. 19—44.

164. *Wonham W. M.* Linear multivariable control: A geometric approach. — New York: Springer-Verlag, 1979. — xv+326 p.
165. *Xu S., Lam J., Zou Y.* New Versions of Bounded Real Lemmas for Continuous and Discrete Uncertain Systems // Circuits, Systems and Signal Process. — 2007. — **26**. — P. 829–838.
166. *Zhang L., Lam J., Zhang Q.L.* Optimal model reduction of discrete-time descriptor systems // Int. J. Systems Sci.— 2001.— **32**.— P. 575—583.
167. *Zhou K., Doyle J.C., Glover K.* Robust and optimal control. — Englewood: Prentice Hall. — 1996. — 596 p.

ДОДАТОК

Цей додаток містить список публікацій здобувача на тему дисертації, а також відомості про апробацію результатів дисертаційної роботи.

Наукові праці, у яких опубліковані наукові результати дисертації

1. Мазко О.Г., Котов Т.О. Стабілізація і гасіння обмежених збурень у дескрипторних системах керування // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2018. — **15**, №1. — С. 65 – 87.

2. Мазко О.Г., Котов Т.О. Оцінка впливу і гасіння обмежених збурень у дескрипторних системах керування // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2019. — **16**, №2. — С. 63 – 84.

3. Мазко О.Г., Котов Т.О. Робастна стабілізація і зважене гасіння обмежених збурень у дескрипторних системах керування // Укр. мат. журн. — 2019. — **71**, №10. — С. 1374 – 1388.

Переклад: Mazko A.G., Kotov T.O. Robust stabilization and weighted damping of bounded disturbances in descriptor control systems // Ukrainian Mathematical Journal. — 2020. — **71**, No. 10, P. 1572 – 1589.
<https://doi.org/10.1007/s11253-020-01732-x> .

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

1. Мазко А. Г., Котов Т. А. Стабилизация и подавление ограниченных возмущений в дескрипторных системах управления // Тези V міжнародної конференції “Сучасні проблеми механіки” (28–30 серпня 2019 р., Київ) с. 58.

2. Мазко А. Г., Котов Т. А. Оценка взвешенного подавления возмущений в дескрипторных системах управления // Proceedings of XIX International

conference reports “Dynamical system modelling and stability investigation” (May 22–24, 2019, Kyiv, Ukraine), P. 334 – 336.

3. Котов Т.О., Мазко О.Г. Зважена оцінка та мінімізація впливу обмежених збурень у дескрипторних системах керування // Тези VI міжнародної конференції “Сучасні проблеми механіки” (30–31 серпня 2021 р., Київ) с.34.

Відомості про апробацію результатів дисертації.

Основні результати дисертації доповідалися й обговорювалися на наступних конференціях і семінарах:

- XIX International conference “Dynamical system modelling and stability investigation” (May 22–24, 2019, Kyiv, Ukraine);
- V міжнародна конференція “Сучасні проблеми механіки” (28–30 серпня 2019 р., Київ);
- VI міжнародна конференція “Сучасні проблеми механіки” (30–31 серпня 2021 р., Київ);
- Семінар відділу математичних проблем механіки та теорії керування Інституту математики НАН України (Керівник семінару академік НАН України І.О. Луковський, 2019 р.).
- Семінар відділу стійкості процесів Інституту механіки НАН України (Керівник семінару академік НАН України А.А. Мартинюк, 2020 р.).
- Семінар відділу математичних проблем механіки та теорії керування Інституту математики НАН України (Керівник семінару член-кореспондент НАН України О.М. Тимоха, 2021 р.).