АНОТАЦІЯ

Котов Т.О. Робастна стабілізація та зважене гасіння обмежених збурень у дескрипторних системах керування. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 113 – прикладна математика. — Інститут математики НАН України, Київ, 2021.

Дисертаційна робота присвячена розробці нових методів стабілізації та оптимізації дескрипторних систем керування за умов невизначеності. Наявність невизначених елементів у рівняннях руху керованих об'єктів обумовлюється аналітичною складністю математичного моделювання та дією зовнішніх неконтрольованих збурень, які суттєво впливають на стійкість та якість даних об'єктів в реальних умовах. Задача робастної стабілізації полягає у побудові законів керування, які забезпечують асимптотичну стійкість руху керованого об'єкта при допустимих значеннях елементів невизначеності.

Сучасна теорія H_∞-керування, засновниками якої є G. Zames, B.A. Francis, J.C. Doyle та ін. (1981 – 1990), розв'язує важливі для практики проблеми оцінки та мінімізації рівня впливу обмежених збурень на стійкість та якість керованих систем. Вказані проблеми є особливо актуальними для класу дескрипторних систем, які дозволяють описувати динаміку багатьох керованих об'єктів механіки, робототехніки, електротехніки, економіки тощо. Розвиток та узагальнення методів H_∞-оптимізації неперервних та дискретних систем керування отримано у роботах багатьох авторів (P. Gahinet, P. Apkarian, I. Masubushi, A.A. Stoorvogel, T. Iwasaki, S. Boyd, Z. Feng, S. Zhou, A. Rehm, Б.Т. Поляк, П.С. Щербаков, Д.В. Баландін, М.М. Коган, В.М. Кунцевич, В.Б. Ларін, О.Г. Мазко та ін.).

Дисертація складається з анотацій українською й англійською мовами, вступу, чотирьох розділів основної частини, висновків, списку використаних джерел і додатка.

У вступі обґрунтовано актуальність тематики дослідження, наведено мету, об'єкт, предмет, завдання і методи дослідження, відмічено наукову новизну отриманих результатів, їхнє практичне значення, зв'язок роботи з науковими темами та особистий внесок здобувача, а також інформацію про апробацію результатів дисертаційної роботи.

У першому розділі проведено огляд літературних джерел та основних задач, пов'язаних з темою дисертаційної роботи. Наведено основні класичні результати з теорії стійкості руху, відомі методи стабілізації та оптимізації систем керування з невизначеністю, а також ряд прикладів конкретних дескрипторних моделей динамічних систем, що застосовуються на практиці.

Другий розділ присвячено аналітичному дослідженні класу лінійних дескрипторних систем. На основі канонічної форми регулярної в'язки матриць досліджена структура загального розв'язку регулярних дескрипторних систем з узгодженими початковими умовами, встановлено алгебраїчний критерій неімпульсності регулярної в'язки матриць та наведено умови стійкості таких систем в термінах матричних рівнянь та нерівностей. Виділено клас допустимих дескрипторних систем, які описують регулярні, неімпульсні та стійкі в'язки матриць.

Для класу дескрипторних систем з обмеженими зовнішніми та початковими збуреннями

$$E\dot{x} = Ax + Bw, \quad z = Cx + Dw, \quad x(0) = x_0,$$

використовуються основні критерії якості

$$J_0 = \sup_{0<\|w\|_P^2<\infty} \frac{\|z\|_Q}{\|w\|_P}, \quad J = \sup_{0<\|w\|_P^2 + x_0^\top X_0 x_0<\infty} \frac{\|z\|_Q}{\sqrt{\|w\|_P^2 + x_0^\top X_0 x_0}},$$

де $\|z\|_Q$ і $\|w\|_P$ — зважені L_2-норми відповідно векторів виходу та зовнішніх збурень, $P > 0$, $Q > 0$ і $X_0 = E^\top H E \geq 0$ — вагові матриці. Значення J_0 у випадку одиничних вагових матриць збігається з класичним критерієм якості — H_∞-нормою матричної передатної функції системи, а критерій якості J характеризує зважений рівень гасіння зовнішніх і початкових збурень у системі. Наведено необхідні та достатні умови, що забезпечують виконання верхніх оцінок наведених критеріїв якості $J_0 < \gamma$ та $J < \gamma$ (підрозділ 2.3). У підрозділі 2.4 запропоновано методику знаходження найгірших зовнішніх і початкових збурень у дескрипторних системах стосовно зваженого критерію якості J.

У розділі 3 досліджується клас лінійних дескрипторних систем керування

$$\begin{aligned}&E\dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u, \quad x(0) = x_0,\\&z = C_1 x + D_{11} w + D_{12} u, \quad y = C_2 x + D_{21} w + D_{22} u,\end{aligned}$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $w \in \mathbb{R}^s$, $z \in \mathbb{R}^k$ і $y \in \mathbb{R}^l$ — вектори відповідно стану, керування, зовнішніх збурень, керованого і спостережуваного виходів, а всі матричні коефіцієнти відповідних розмірів сталі, причому $\operatorname{rank} E = \rho \leq n$. Основною задачею для таких систем є пониження та мінімізація впливу обмежених збурень на їхню динаміку і, зокрема, стійкість за допомогою придатних законів керування. Статичні та динамічні регулятори, які мінімізують значення зваженого критерію якості J замкненої системи, називаються J-оптимальними. Наближені методи знаходження таких регуляторів базуються на умовах виконання верхньої оцінки $J < \gamma$ при мінімально можливих значеннях γ.

У підрозділі 3.2 в термінах лінійних матричних нерівностей при додаткових рангових обмеженнях встановлено необхідні і достатні умови існування стабілізуючих статичних регуляторів за спостережуваним виходом $u = Ky$, при яких замкнена система належить класу допустимих дескрипторних систем і її зважений рівень гасіння зовнішніх і початкових збурень J менший заданого значення (теорема 3.1). Виділено окремі випадки даних умов, коли алгоритми пошуку матриці коефіцієнтів підсилення K суттєво спрощуються. Зокрема, при виконанні додаткових умов

$$C_2 = I_n, \quad D_{11}^{\top} Q D_{11} < \gamma^2 P, \quad D_{21} = 0, \quad D_{22} = 0$$

існує статичний регулятор за станом $u = Kx$, при якому замкнена система допустима і виконується бажана оцінка $J < \gamma$. При цьому відповідний алгоритм пошуку матриці K зводиться до розв'язування лише лінійних матричних нерівностей без додаткових рангових обмежень.

Розвинуто комбінований метод лінійних та квадратичних матричних нерівностей для розв'язання узагальненої задачі H_∞-керування зі зваженим критерієм якості J (теорема 3.2). Для практичного застосування цього методу встановлено критерій сумісності квадратичних матричних нерівностей загального вигляду при додаткових рангових обмеженнях на матричні коефіцієнти (лема 3.2).

Встановлено необхідні і достатні умови існування динамічного регулятора за спостережуваним виходом з нульовим початковим вектором

$$\dot{\xi} = Z\xi + Vy, \quad u = U\xi + Ky, \quad \xi \in \mathbb{R}^p, \quad \xi(0) = 0,$$

при якому замкнена система у розширеному фазовому просторі $\mathbb{R}^{n+p}$ належить класу допустимих дескрипторних систем і її зважений рівень гасіння зовнішніх і початкових збурень J менший заданого значення (теорема 3.3). З метою спрощення процедури пошуку невідомих матричних коефіцієнтів регулятора встановлена допоміжна лема 3.3 про еквівалентність блочних матричних співвідношень, які можна застосувати у твердженнях теореми 3.3. Отримані умови в загальному випадку зведено до розв'язання лінійних матричних нерівностей при додаткових рангових обмеженнях. Розроблено і чисельно реалізовано алгоритми синтезу статичних та динамічних регуляторів для розв'язання узагальненої задачі H_∞-керування (підрозділ 3.3). Результати розрахунків на чисельних прикладах узгоджені з отриманими теоретичними висновками. Виділено клас нелінійних дескрипторних систем з керованими і спостережуваними виходами, для яких можуть бути застосовані отримані методи розв'язання проблеми зваженого H_∞-керування з локальним критерієм якості J.

У розділі 4 викладено результати досліджень узагальненої задачі H_∞-керування для дескрипторних систем з керованими і спостережуваними виходами за умов поліедральної невизначеності матричних коефіцієнтів

$$A \in \mathrm{Co}\{A_1, \dots, A_{\nu_1}\}, \quad B_1 \in \mathrm{Co}\{B_1^1, \dots, B_1^{\nu_2}\},$$

$$C_1 \in \mathrm{Co}\{C_1^1, \dots, C_1^{\nu_3}\}, \quad D_{11} \in \mathrm{Co}\{D_{11}^1, \dots, D_{11}^{\nu_4}\},$$

де $\mathrm{Co}\{A_1, \ldots, A_\nu\}$ — політоп (багатогранник) з вершинами $A_1, \ldots, A_\nu$ у просторі матриць, тобто опукла множина матриць

$$\Big\{ \sum_{i=1}^{\nu} a_i A_i : \ \ a_i \geq 0, \ i = \overline{1, \nu}, \ \sum_{i=1}^{\nu} a_i = 1 \Big\}.$$

Окремими випадками поліедральної невизначеності можуть бути, наприклад, інтервальна або афінна невизначеності матричних коефіцієнтів, які часто використовуються в практичних задачах робастної стабілізації та оптимізації керованих систем.

У підрозділі 4.1 наведено нове формулювання відомої леми про матричну нерівність з поліедральними коефіцієнтами, на основі якої узагальнено основні результати з розділу 3. Встановлено достатні умови існування стабілізуючих динамічних регуляторів за спостережуваним виходом, при яких замкнена система з поліедральною невизначеністю матричних коефіцієнтів належить класу допустимих дескрипторних систем і її зважений рівень гасіння зовнішніх і початкових збурень J менший заданого значення (теорема 4.1). Отримані умови у окремому випадку забезпечують існування статичного регулятора за спостережуваним виходом, при якому замкнена система має аналогічні властивості, причому при застосуванні статичних регуляторів за станом дані умови зводяться до розв'язування лише лінійних матричних нерівностей. Комбінований метод лінійних та квадратичних матричних нерівностей для розв'язання узагальненої задачі H_∞-керування зі зваженим критерієм якості J поширено на сім'ю лінійних дескрипторних систем, яку описують невизначені матричні коефіцієнти (теорема 4.2).

Застосовуючи узагальнену лему про матричну невизначеність, розвинуто методику побудови еліпсоїдальної множини матриць статичних регуляторів за спостережуваним виходом $\mathcal{K} = \big\{K \, : \, K^\top P_0 K \, \leq \, Q_0\big\}$, при яких замкнена система належить класу допустимих дескрипторних систем і її зважений рівень гасіння зовнішніх і початкових збурень J менший заданого значення (підрозділ 4.3).

Розроблені методи дослідження, що базуються на розв'язанні систем лінійних та квадратичних матричних нерівностей, за допомогою комп'ютерних засобів продемонстровано в задачах робастної стабілізації та зваженої H_∞-оптимізації для дескрипторної моделі керування електричного кола за умов інтервальної невизначеності опорів (підрозділ 4.4).

У додатку викладено список публікацій здобувача за темою дисертаційної роботи та відомості про апробацію результатів даної роботи.

Ключові слова: дескрипторна система, робастна стійкість, функція Ляпунова, робастна стабілізація, H_∞-керування, статичний регулятор, динамічний регулятор, матрична нерівність.

Kotov T.O. Robust stabilization and weighted damping of bounded disturbances in descriptor control systems. — Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

The dissertation on competition of a scientific degree of the doctor of philosophy on a specialty 113 – applied mathematics. — Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2021.

The dissertation is devoted to the development of new methods of stabilization and optimization of descriptor control systems with uncertainties. The availability of uncertainty elements in the motion equations of controlled objects is due to the analytical complexity of mathematical modeling and the action of external uncontrolled disturbances, which significantly affect the stability and quality of these objects in actual conditions. The robust stabilization problem consists of constructing a control law, which provides an asymptotic stability of the controlled object motion with admissible values of uncertainty elements.

The modern H_∞-control theory founded by G. Zames, B.A. Francis, J.C. Doyle et al. (1981 – 1990) solves important practical problems of estimating and minimizing the level of influence of bounded disturbances on the stability and quality of controlled systems. These problems are especially relevant for a class of descriptor systems, which allow us to describe the dynamics of many controlled objects of mechanics, robotics, electrical engineering, economics, etc. Development and generalization of H_∞-optimization methods for continuous and discrete-time

control systems are received in works of many authors (P. Gahinet, P. Apkarian, I. Masubushi, A.A. Stoorvogel, T. Iwasaki, S. Boyd, Z. Feng, S. Zhou, A. Rehm, B.T. Polyak, P.S. Scherbakov D.V. Balandin, M.M. Kogan, V.M. Kuntsevich, V.B. Larin, A.G. Mazko etc.).

The dissertation consists of an abstract in Ukrainian and in English, an introduction, four chapters of the main results, conclusions, references and an appendix.

The introduction grounds the actuality of the research topic and formulates the purpose, object, subject, task and methods of the research, indicates the scientific novelty of the obtained results, their practical significance, the relation of the research to scientific programs, the personal contribution of the applicant as well as points out information about the approbation of main obtained results of the dissertation.

The first chapter reviews the literature sources and the main tasks related to the topic of the dissertation. The main classical results from the theory of motion stability, known methods of stabilization and optimization of control systems with uncertainty, and several examples of specific descriptor models of dynamical systems used in practice are given.

The second chapter is devoted to the analytical study of the class of linear descriptor systems. Based on the canonical form of regular matrix pencil, a structure of the general solution of regular descriptor systems with agreed initial conditions is investigated. An algebraic criterion is established, which guarantees the regular matrix pencil to be impulse-free and the stability conditions of such systems in terms of matrix equations and inequalities are given. A class of admissible descriptor systems is distinguished, which describe regular, impulse-free and stable matrix pencils.

For a class of descriptor systems with bounded external and initial perturbations

$$E\dot{x} = Ax + Bw, \quad z = Cx + Dw, \quad x(0) = x_0,$$

we use the basic performance measures

$$J_0 = \sup_{0<\|w\|_P^2<\infty} \frac{\|z\|_Q}{\|w\|_P}, \quad J = \sup_{0<\|w\|_P^2+x_0^\top X_0 x_0<\infty} \frac{\|z\|_Q}{\sqrt{\|w\|_P^2 + x_0^\top X_0 x_0}},$$

where $\|z\|_Q$ and $\|w\|_P$ are the weighted L_2-norms of output vector and perturbation vector, accordingly, and $P > 0$, $Q > 0$ and $X_0 = E^\top H E \geq 0$ are the weighted matrices. The value of J_0 in the case of identity weight matrices coincides with the classical performance measure — H_∞-norm of the matrix transfer function of the system, and the performance measure J characterizes the weighted damping level of external and initial perturbations in the system. Necessary and sufficient conditions are given to ensure the fulfillment of the upper evaluations for given performance measures $J_0 < \gamma$ and $J < \gamma$ (section 2.3). Section 2.4 proposes a method for finding the worst external and initial perturbations in descriptor systems with respect to the weighted performance measure J.

In chapter 3, the class of linear descriptor control systems

$$\begin{aligned} E\dot{x} &= Ax + B_1 w + B_2 u, \quad x(0) = x_0, \\ z &= C_1 x + D_{11} w + D_{12} u, \quad y = C_2 x + D_{21} w + D_{22} u, \end{aligned}$$

is investigated, where $x \in \mathbb{R}^n$ is the state, $u \in \mathbb{R}^m$ is the control input, $w \in \mathbb{R}^s$ is the the exogenous input (perturbations), $z \in \mathbb{R}^k$ is the regulated output and $y \in \mathbb{R}^l$ is the measured output, and all matrix coefficients are constant matrices with compatible dimensions, and $\operatorname{rank} E = \rho \leq n$. The main problem for such systems is to reduce and minimize the influence of bounded perturbations on their dynamics and, in particular, stability with the help of appropriate control laws. Static and dynamic controllers that minimize the value of weighted performance measure J for a closed-loop system are called J-optimal. Approximate methods for finding such controllers are based on the conditions of performing the upper estimate $J < \gamma$ at the minimum possible values of γ.

In section 3.2, in terms of linear matrix inequalities with additional rank restrictions, the necessary and sufficient conditions for the existence of stabilizing static output controllers $u = Ky$, are obtained to ensure the closed-loop system to be admissible and its weighted damping level of external and initial disturbances J to be less than the specified value (theorem 3.1). Some cases of these conditions are highlighted, when the algorithms for finding the gain matrix K are significantly simplified. In particular, if the following additional conditions

$$C_2 = I_n, \quad D_{11}^{\top} Q D_{11} < \gamma^2 P, \quad D_{21} = 0, \quad D_{22} = 0$$

hold, then there exists a static state-feedback controller $u = Kx$ to ensure the closed-loop system to be admissible and the performance measure J to be less than a prescribed scalar. In this case, the corresponding matrix search algorithm K is reduced to solving only linear matrix inequalities without additional rank restrictions.

A combined method of linear and quadratic matrix inequalities for solving the generalized H_∞-control problem with a weighted performance measure J is developed (theorem 3.2). For the practical application of this method, the solvability criterion for quadratic matrix inequalities of general form with additional rank restrictions on matrix coefficients is established (lemma 3.2).

Necessary and sufficient conditions of existence of the dynamic controller with zero initial state

$$\dot{\xi} = Z\xi + Vy, \quad u = U\xi + Ky, \quad \xi \in \mathbb{R}^p, \quad \xi(0) = 0,$$

are established to ensure the closed-loop system in the extended phase space $\mathbb{R}^{n+p}$ to be admissible and its weighted damping level of external and initial disturbances J to be less than the specified value (Theorem 3.3). In order to simplify the procedure for searching for unknown matrix coefficients of the controller, auxiliary lemma 3.3 on the equivalence of block matrix relations, which can be applied in the statements of theorem 3.3, is established. In the general case, the obtained conditions are reduced to solving the linear matrix inequalities with additional rank constraints. Algorithms for the synthesis of static and dynamic controllers for solving the generalized H_∞-control problem have been developed and numerically implemented (subsection 3.3). The results of calculations for numerical examples are consistent with the obtained theoretical conclusions. A class of nonlinear descriptor systems with controllable and observable outputs is distinguished, for which the obtained methods for solving the problem of weighted H_∞-control with the local performance measure J can be applied.

Chapter 4 presents the results of studies of the generalized H_∞-control problem for descriptor systems with controlled and observed outputs under conditions of polyhedral uncertainty of matrix coefficients

$$A \in \mathrm{Co}\{A_1, \ldots, A_{\nu_1}\}, \quad B_1 \in \mathrm{Co}\{B_1^1, \ldots, B_1^{\nu_2}\},$$

$$C_1 \in \mathrm{Co}\{C_1^1, \ldots, C_1^{\nu_3}\}, \quad D_{11} \in \mathrm{Co}\{D_{11}^1, \ldots, D_{11}^{\nu_4}\},$$

where $\mathrm{Co}\{A_1, \ldots, A_\nu\}$ is the polytope (polyhedron) with vertices $A_1, \ldots, A_\nu$ in a matrix space that is the convex set of matrices

$$\Big\{ \sum_{i=1}^{\nu} a_i A_i : \ a_i \geq 0, \ i = \overline{1, \nu}, \ \sum_{i=1}^{\nu} a_i = 1 \Big\}.$$

Some cases of polyhedral uncertainty may be, for example, interval or affine uncertainty of matrix coefficients, which are often used in practical problems of robust stabilization and optimization of controlled systems.

Section 4.1 presents a new formulation of the known lemma on matrix inequality with polyhedral coefficients, based on which the main results from chapter 3 are generalized. Sufficient conditions for the existence of stabilizing dynamic output-feedback controller are obtained to ensure the closed-loop system with polyhedral uncertainty of matrix coefficients to be admissible and its weighted damping level of external and initial perturbations J to be less than the specified value (theorem 4.1). The obtained conditions in a particular case ensure the existence of a static output-feedback controller for which a closed-loop system has similar properties, and when using static state-feedback controller these conditions are reduced to solving only the linear matrix inequalities. The combined method of linear and quadratic matrix inequalities for solving the generalized H_∞-control problem with a weighted performance measure J is extended to a family of linear descriptor systems described by uncertain matrix coefficients (theorem 4.2).

Applying the generalized lemma on matrix uncertainty, the method for constructing of an ellipsoidal set of gain matrices of static output-feedback controller $\mathcal{K} = \{K : K^\top P_0 K \leq Q_0\}$, for which closed-loop system belongs to the class of admissible descriptor systems and its weighted damping level of external and initial perturbations J is less than the specified value (section 4.3).

The appendix contains the applicant's publications list concerning the topic of the thesis and the information about approbation of research results of this work.

Keywords: descriptor system, robust stability, Lyapunov's function, robust stabilization, H_∞-control, static controller, dynamic controller, matrix inequality.