Один з класів фрактальних функцій

Працьовитий Микола Вікторович

НПУ імені М.П. Драгоманова, Інститут математики НАН України

Семінар з фрактального аналізу
Київ, 22 вересня 2021 року

У роботі Бл. Сендов розглядав функції, ним названі *двійково власне-подібними* (ДВП), кожна з яких визначалась своєю числовою послідовністю (λ_k) ненульових елементів такою, що

$$\prod_{k=1}^{\infty} \lambda_k < \infty$$

і функціональними співвідношеннями:

$$f(x+2^{-k}) = \lambda_k f(x), \ \ x \in \nabla^2_{a_1 \dots a_{k-1} 0}, \ k = 1, 2, \dots,$$

де $\nabla^2_{a_1 \dots a_{k-1} 0} = \left(\sum\limits_{i=1}^{k-1} 2^{-i} a_i ; 2^{-k} + \sum\limits_{i=1}^{k-1} 2^{-i} a_i \right)$.

Сендов Бл. Х. Двоично собственно-подобные фрактальные функции // Фундаментальная и прикладная математика, 1999. — Т. 5, № 2. — С. 589-595.

Функції цього класу мають представлення

$$f(x = \Delta^2_{a_1 \dots a_k \dots}) = \prod_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{a_k(x)}, \text{ де } x = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} a_k.$$

Легко бачити, що класу S належать всі показникові функції (функції $y = a^x$ відповідає послідовність $\lambda_k = 2^{-k}$), при $\lambda_k = 1$ для всіх $k \in N$ маємо $f(x) = 1$.

Акцент у згаданій роботі зроблено на питаннях неперервності функції за Гаусдорфом, інтегральних та «фрактальних» властивостях функцій цього класу, а також на їх використанні для конструювання системи ортогональних функцій типу Уолша (Вулша) і пакету перетворень Хаара.

А до чого може привести використання замість класичного двійкового зображення аргумента деякого іншого двосимвольного зображення? Укрупнення моделі класу функцій отримується за рахунок використання узагальнення класичного двійкового зображення чисел відрізка $[0;1]$.

Нехай $A = \{0,1\}$ — алфавіт, $L = A \times A \times \ldots$ — простір послідовностей елементів алфавіту (нулів та одиниць), $q_{ik} > 0$, $q_{0k} + q_{1k} = 1$, $\prod\limits_{k=1}^{\infty} \max\{q_{ik}\} = 0$, тоді для довільного $x \in [0;1]$ існує послідовність $(\alpha_n) \in L$ така, що

$$x = \alpha_1 q_{1-\alpha_1,1} + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\alpha_n q_{1-\alpha_n,n} \prod_{i=1}^{n-1} q_{\alpha_i,i} \right) = \Delta^{Q_2^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}.$$

У випадку, коли $q_{ik} = q_i$ для будь-якого $k \in N$, то Q_2^*-зображення є *Q_2-зображенням*. Якщо $q_{0k} = \frac{1}{2}$, то Q_2^*-зображення є *класичним двійковим*.

Основним об'єктом вивчення є функція

$$f(x=\Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots})=\prod_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{\alpha_k}, \tag{1}$$

де (λ_k) — задана послідовність додатних чисел така, що нескінченний добуток $\prod\limits_{k=1}^{\infty}\lambda_k$ є абсолютно збіжним до числа P.

Оскільки існує зліченна множина чисел, які мають два зображення ($\Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_m}$ $\Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_m0(1)}$), їх ми називаємо Q_2-бінарними), то корекність означення функції забезпечується домовленістю розглядати лише перше з вказаних зображень таких чисел, а саме те, що має період (0). Решта чисел називаються Q_2-унарними.

Нас цікавлять структурні, варіаційні, інтегральні, диференціальні та фрактальні властивості функції (1), а також її зв'язки з відомими класами фрактальних функцій.

Очевидними є наступні рівності:

1) $f(0=\Delta^{Q_2}_{(0)})=1,\ f(x=\Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_m1(0)})=\lambda_1^{c_1}\lambda_2^{c_2}\ldots\lambda_m^{c_m}\lambda_{m+1};$

2) $\dfrac{f(\Delta^{Q_2}_{a_1a_2\ldots a_k\ldots})}{f(\Delta^{Q_2}_{b_1b_2\ldots b_k\ldots})}=\prod\limits_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{a_k-b_k}$, зокрема

$f(\Delta^{Q_2}_{\alpha_1\ldots\alpha_m c\alpha_{m+2}\ldots})=\lambda_{m+1}^{2c-1}f(\Delta^{Q_2}_{\alpha_1\ldots\alpha_m[1-c]\alpha_{m+2}\ldots}).$

Примітка 1. Враховуючи, що $\lambda_k>0$, можна ввести позначення $\lambda_k=e^{v_k}$ і переписати рівність (1) у формі

$$f(x=\Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots})=\prod_{k=1}^{\infty}e^{\alpha_k v_k}=e^{\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_k v_k}.$$

Тоді із абсолютної збіжності нескінченного добутку випливає абсолютна збіжність ряду $v_1+v_2+\ldots+v_k+\ldots$.

Означення функції f грунтується на ланцюжку залежностей

$$[0;1] \ni x \to (\alpha_n) \in L \to \varphi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} v_i \alpha_i(x) \to f(x) = e^{\varphi(x)}.$$

Лема

Функція f має структуру: $f(x) = e^{\varphi(x)}$,
де $\varphi(x = \Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...}) = v_1\alpha_1(x) + ... + v_k\alpha_k(x) + ...$

Наслідок

Множина значень функції f з точністю до зліченної множини є образом множини неповних сум ряду $v_1 + v_2 + ... + v_n + ...$ під дією функції $y = e^x$, тобто є проміжком, об'єднанням проміжків, ніде не щільною множиною або канторвалом.

Приклад 1. Якщо $v_n = \frac{2}{3^n}$, то множина значень функції f є ніде не щільною нуль-множиною Лебега, розмірність Гаусдорфа-Безиковича якої дорівнює $\log_3 2$.

Теорема

Якщо $\lambda_k = e^{v_k}$, $v_k \geqslant r_k \equiv v_{k+1} + v_{k+2} + ... > 0$ для всіх $k \in N$, то функція f, означена рівністю (1), є неспадною, причому зростаючою при виконані строгої нерівності, в цьому випадку її множина значень E_f є ніде не щільною множиною , яка має міру Лебега рівну нулю лише тоді, коли $\lim\limits_{k \to \infty} 2^k r_k = 0$, а її фрактальна розмірність Гаусдорфа-Безиковича обчислюється за формулою $\alpha_0(E_f) = -\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n}{\log_2 r_n}$.

Теорема

Функція f неперервна в кожній Q_2-унарній точці, а в Q_2-бінарній точці неперервна справа.

Лема

Нехай $x_0 = \Delta^{Q_2}_{c_1 c_2 \dots c_m 1(0)}$. Тоді

$$\delta(x_0) \equiv \lim_{x \to x_0 - 0} [f(x_0) - f(x)] = \lambda_1^{c_1} \dots \lambda_m^{c_m} (\lambda_{m+1} - \prod_{i=2}^{\infty} \lambda_{m+i}). \qquad (2)$$

Якщо $\lambda_{m+1} \neq \lambda_{m+2} \cdot \lambda_{m+3} \cdot \dots \Leftrightarrow v_{m+1} \neq v_{m+2} + v_{m+3} + \dots$, то стрибок $\delta(x_0)$ функції f у точці x_0 обчислюється за формулою (2).

Наслідок

У Q_2-бінарній точці $x_0 = \Delta^{Q_2}_{c_1 c_2 \dots c_m 1(0)}$ функція f є неперервною зліва тоді і тільки тоді, коли
$\lambda_{m+1} = \lambda_{m+2} \cdot \lambda_{m+3} \cdot \dots \Leftrightarrow v_{m+1} = v_{m+2} + v_{m+3} + \dots$.

Теорема

Функція f, означена рівністю (1), неперервна на відрізку $[0;1]$ тоді і тільки тоді, коли $\lambda_k = e^{\frac{b}{2^k}}$ для деякого $b \in R$ і всіх $k \in N$.

Лема

Якщо $\lambda_n = 1$ для всіх $n \geqslant m$, то функція f кусково стала, а саме є константою на кожному Q_2-циліндрі рангу m.

Означення

Q_2-модулем рангу k неперервності функції f називається число

$$\mu(f;k) = \sup\{|f(x') - f(x'')| : \forall x', x'' \in \Delta^{Q_2}_{c_1\dots c_k}, \forall (c_1, \dots, c_k) \in A^k\}.$$

Означення

Функція f називається неперервною за Гаусдорфом, якщо виконується умова $\lim\limits_{k\to\infty} \mu(f,k) = 0$.

Лема

Мають місце співвідношення:

$$A_m \equiv \inf_{x \in \Delta^{Q_2}_{c_1 \dots c_m}} f(x) = \prod_{i=1}^{m} \lambda_i^{c_i} \cdot \prod_{k=m+1}^{\infty} \lambda_k^{\beta_k}, \text{ де } \beta_k = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \lambda_k \geqslant 1, \\ 1, & \text{якщо } \lambda_k < 1; \end{cases}$$

$$B_m \equiv \sup_{x \in \Delta^{Q_2}_{c_1 \dots c_m}} f(x) = \prod_{i=1}^{m} \lambda_i^{c_i} \cdot \prod_{k=m+1}^{\infty} \lambda_k^{\gamma_k}, \text{ де } \gamma_k = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \lambda_k < 1, \\ 1, & \text{якщо } \lambda_k \geqslant 1; \end{cases}$$

$$\lim_{m\to\infty} \frac{A_m}{B_m} = 1, \text{ тобто } \lim_{m\to\infty} (A_m - B_m) = 0.$$

Наслідок

Функція f неперервна за Гаусдорфом.

Клас всіх функцій, означених рівністю (1), позначатимемо через S, а клас неперервних функцій через S_c.

Лема

Для функції f, означенної рівністю(1), виконується

$$\int\limits_0^1 f(x)dx = \prod_{k=1}^{\infty}(q_0 + \lambda_k q_1). \qquad (3)$$

Лема

Якщо f і g — функції класу S, яким відповідають послідовності (λ_k), (μ_k), то

$$\int_0^1 f(x)g(x)dx = \prod_{k=1}^{\infty}(q_0 + \lambda_k \mu_k q_1). \qquad (4)$$

При $q_0 = \frac{1}{2}$ маємо $\int\limits_0^1 f(x)g(x)dx = \prod\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1+\lambda_k \mu_k}{2}$

Означення

Функцію f назвемо квазіпоказниковою, якщо вона має таку структуру: $f(x) = a^{g(x)}$, де $g(x)$ — неперервна строго монотонна функція, причому зростаюча при $a > 1$ і спадна при $0 < a < 1$.

Теорема

Неперервні на $[0;1]$ функції класу S вичерпуються квазіпоказниковими. Більше того, якщо $f \in S_c$, то $f(x) = a^{g(x)}$, де $g(x)$ при $q_0 \neq \frac{1}{2}$ є сингулярно неперервною строго зростаючою функцією розподілу випадкової величини, цифри Q_2-зображення якої є незалежними, однаково розподіленими і рівноймовірними, а при $q_0 = \frac{1}{2}$ функція $g(x) = x$.

Лема

Графік Γ_g складової $g(x) = \frac{1}{2}\alpha_1(x) + \ldots + \frac{1}{2^k}\alpha_k(x) + \ldots$ неперервної функції $f(x) = a^{g(x)}$ є самоафінною множиною зі структурою:

$$\Gamma_g = \Gamma_0 \cup \Gamma_1, \quad \text{де } \Gamma_i = \gamma_i(\Gamma_g), \gamma_i : \begin{cases} x' = \Delta^{Q_2}_{i\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots} = iq_{1-i} + q_i x, \\ y' = \Delta^{2}_{i\alpha_1(y)\alpha_2(y)\ldots} = \frac{i}{2} + \frac{1}{2}y; \end{cases} \qquad i = 0$$

Наслідок

Має місце рівність

$$\int\limits_0^1 g(x)dx = q_1 = 1 - q_0.$$

Лема

Якщо для послідовності (λ_n) нескінченну кількість разів виконуються нерівності $\lambda_n > 1$, $\lambda_k < 1$, $n, k \in N$, то функція $f(x)$ ніде не монотонна.

Теорема

Якщо нерівність $v_n < r_n$ виконується для нескінченної кількість значень n, то функція f є ніде не монотонною.

Нехай $0 < a$ — фіксоване дійсне число, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ — абсолютно збіжний ряд з сумою r_0 зі спадною послідовністю доданків v_n, $x = \Delta^{Q_2^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ — Q_2^*-зображення числа. Розглядається функція, означена рівністю (5)

$$f(x = \Delta^{Q_2^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = a^{\varphi(x)}, \text{ де } \varphi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i v_i. \quad (5)$$

Очевидними є рівності

$$\varphi(\Delta^{Q_2^*}_{1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = v_1 + \varphi(\Delta^{Q_2^*}_{0\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}), \; f(\Delta^{Q_2^*}_{1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = a^{v_1} f(\Delta^{Q_2^*}_{0\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}). \tag{6}$$

Теорема

Для функції f, означеної рівністю(5), виконується

$$\int\limits_0^1 f(x)dx = \prod_{k=1}^{\infty}(q_{0k} + a^{v_k} q_{1k}). \tag{7}$$

Д о в е д е н н я. Оскільки $f(\Delta^{Q_2^*}_{1\alpha_2\alpha_3\ldots}) = a^{v_1} f(\Delta^{Q_2^*}_{0\alpha_2\alpha_3\ldots})$, то

$$\int\limits_0^1 f(x)dx = \int\limits_{\Delta^{Q_2^*}_0} f(x)dx + \int\limits_{\Delta^{Q_2^*}_1} f(x)dx =$$

$$= \int\limits_{\Delta^{Q_2^*}_0} f(x)dx + a^{v_1} \int\limits_{\Delta^{Q_2^*}_0} f(t)d(q_{01} + \frac{q_{11}}{q_{01}} t) =$$

$$= \int\limits_{\Delta^{Q_2^*}_0} f(x)dx + a^{v_1} \frac{q_{11}}{q_{01}} \int\limits_{\Delta^{Q_2^*}_0} f(t)dt = (1 + \frac{a^{v_1} q_{11}}{q_{01}}) \int\limits_{\Delta^{Q_2^*}_0} f(x)dx.$$

Оскільки $f(\Delta^{Q_2^*}_{01\alpha_3\alpha_4\ldots}) = a^{v_2} f(\Delta^{Q_2^*}_{00\alpha_3\alpha_4\ldots})$, то

$$\int\limits_{\Delta^{Q_2^*}_{0}} f(x)dx = \int\limits_{\Delta^{Q_2^*}_{00}} f(x)dx + \int\limits_{\Delta^{Q_2^*}_{01}} f(x)dx =$$

$$= \int\limits_{\Delta^{Q_2^*}_{00}} f(x)dx + a^{v_2} \int\limits_{\Delta^{Q_2^*}_{00}} f(t)d(q_{01}q_{02} + \frac{q_{12}}{q_{02}}t) =$$

$$= \int\limits_{\Delta^{Q_2^*}_{00}} f(x)dx + a^{v_2}\frac{q_{12}}{q_{02}} \int\limits_{\Delta^{Q_2^*}_{00}} f(t)dt = (1 + \frac{a^{v_2}q_{12}}{q_{02}}) \int\limits_{\Delta^{Q_2^*}_{00}} f(x)dx.$$

Отже,

$$\int\limits_0^1 f(x)dx = (1 + \frac{a^{v_1}q_{11}}{q_{01}})(1 + \frac{a^{v_2}q_{12}}{q_{02}}) \int\limits_{\Delta^{Q_2^*}_{00}} f(x)dx$$

Аналогічно міркуючи, за k кроків отримаємо

$$\int\limits_0^1 f(x)dx = \prod_{i=1}^{k}\left(1+\frac{a^{v_i}q_{1i}}{q_{0i}}\right)\cdot \int\limits_{\Delta^{Q_2^*}_{\underbrace{0\cdots0}_{k}}} f(x)dx.$$

Оскільки $a^{v_k} \to 1$ $(k\to\infty)$, а $f(x)\to 1$, коли $x\to 0$, то для достатньо великих $k\in N$

$$\int\limits_{\Delta^{Q_2^*}_{\underbrace{0\cdots0}_{k}}} f(x)dx \approx \prod_{i=1}^{k} q_{0i} \text{ і } \int\limits_0^1 f(x)dx \approx \prod_{i=1}^{k} q_{0i}\left(1+\frac{a^{v_i}q_{1i}}{q_{0i}}\right) = \prod_{i=1}^{k}(q_{0i}+a^{v_i}q_{1i}).$$

Спрямувавши k до нескінченності, отримуємо рівність (7). $\square$

Наслідок

Якщо $q_{0n}=q_0$ для всіх $n\in N$, то $\int\limits_0^1 f(x)dx = \prod\limits_{k=1}^{\infty}(q_0+a^{v_k}q_1)$.

Аналогічними міркуваннями можна довести наступне твердження.

Лема

Якщо f і g — функції класу S, яким відповідають послідовності (v_k), (u_k), то

$$\int_0^1 f(x)g(x)dx = \prod_{k=1}^{\infty}(q_{0k} + a^{v_k+u_k} q_{1k}). \tag{8}$$

Наслідок

При $q_{0k} = \frac{1}{2}$ для $k \in N$ маємо $\int\limits_0^1 f(x)g(x)dx = \prod\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1+a^{v_k+u_k}}{2}$.

Теорема

Функція f неперервна в кожній Q_2^*-унарній точці, а в Q_2^*-бінарній точці неперервна справа.

Д о в е д е н н я. Нехай $x_0 = \Delta^{Q_2^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ — довільне Q_2^*-унарне число. Розглянемо $x = \Delta^{Q_2^*}_{c_1\ldots c_n\ldots}$ таке, що $x \neq x_0$. Тоді існує m таке, що $c_m \neq \alpha_m$, але $c_i = \alpha_i$ при $i < m$. Тому маємо

$$\frac{f(x)}{f(x_0)} = \prod_{i=1}^{m-1} a^{v_i(c_i-\alpha_i)} \cdot a^{v_m(c_m-\alpha_m)} \cdot \prod_{i=m+1}^{\infty} a^{v_i(c_i-\alpha_i)},$$

але $\prod\limits_{i=1}^{m-1} a^{v_i(c_i-\alpha_i)} = 1$, $\lim\limits_{m\to\infty} a^{v_m} = 1 = \lim\limits_{m\to\infty} \prod\limits_{i=1}^{m-1} a^{v_i(c_i-\alpha_i)}$.

Отже, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, тобто функція f є неперервною в точці x_0.

Розглянемо Q_2^*-бінарну точку $x_0 = \Delta^{Q_2^*}_{c_1c_2\ldots c_m1(0)} = \Delta^{Q_2^*}_{c_1c_2\ldots c_m0(1)}$. Нехай $x > x_0$ і достатньо близьке до x_0. Тоді $x = \Delta^{Q_2^*}_{c_1\ldots c_m1\underbrace{0\ldots0}_{k}\alpha_{m+k+2}\ldots}$, причому серед членів послідовності (α_{m+k+2}) є одиниці, разом з цим умова $x \to x_0$ рівносильна $k \to \infty$. Оскільки $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{f(x_0)} = 1$, то f — неперервна в точці x_0 справа. $\square$

Лема

Для того щоб функція $\varphi(x)$ була неперервна у точці $x_0 = \Delta^{Q_2^*}_{c_1 c_2 \ldots c_{m-1} 1(0)}$, необхідно і достатньо, щоб виконувалась рівність $v_m = v_{m+1} + v_{m+2} + \ldots$.

Наслідок

Функція $\varphi(x)$ є неперервною на $[0;1]$ тоді і тільки тоді, коли $v_n = \frac{v}{2^n}$ для будь-якого $n \in N$ і деякого $v \in R$.

Симетрії

Лема

Справедливі рівності:

1) $\dfrac{\varphi(\Delta^{Q_2^*}_{c\alpha_2\alpha_3\ldots})}{\varphi(\Delta^{Q_2^*}_{[1-c]\alpha_2\alpha_3\ldots})} = 1 + \dfrac{v_1(2c-1)}{\varphi(\Delta^{Q_2^*}_{[1-c]\alpha_2\alpha_3\ldots})}$;
2) $\varphi(I(x)) = \varphi(1) - \varphi(x)$, тобто $\varphi(x) + \varphi(I(x)) = \varphi(1)$;
3) $f(x) \cdot f(I(x)) = a^{\varphi(1)}$.

Лема

Якщо у точці $x_0 = \Delta^{Q_2^*}_{c_1c_2\ldots c_{m-1}1(0)}$ функція φ має розрив, тобто $v_m > r_m$, то величина стрибка $\delta_\varphi(x_0)$ функції φ не залежить від набору цифр $c_1, \ldots, c_{m-1}$ і обчислюється за формулою: $\delta_\varphi(x_0) = v_m - r_m$. Сума всіх стрибків функції f

Теорема

Якщо $v_n \geqslant r_n$ для кожного $n \in N$, то функція φ є неспадною.

Наслідок

Якщо $v_n \geqslant r_n$ для всіх n, більших деякого $m \in N$, то функція φ є функцією обмеженої варіації.

Теорема

Для того щоб функція f була ніде не монотонною, необхідно і достатньо, що нерівність $v_n < r_n$ виконувалася для нескінченної кількість значень n.

Д о в е д е н н я. Н е о б х і д н і с т ь. Нехай f ніде не монотонна функція. Припустимо, що при цьому нерівність $v_n < r_n$ виконується лише скінченну кількість разів, причому $v_n \geqslant r_n$ для всіх $n \geqslant k$. Розглянемо циліндр $\Delta^{Q_2^*}_{\underbrace{0\ldots0}_{k}}$ і довільні дві точки $x_1 = \Delta^{Q_2^*}_{\underbrace{0\ldots0}_{k}c_1\ldots c_{m-1}0\beta_1\beta_2\ldots}$, $x_2 = \Delta^{Q_2^*}_{\underbrace{0\ldots0}_{k}c_1\ldots c_{m-1}1\alpha_1\alpha_2\ldots}$, що йому належать. Оскільки $x_1 < x_2$, але $\varphi(x_2) - \varphi(x_1) = (v_{m+k} + \alpha_1 v_{m+k+1} + \alpha_2 v_{m+k+2}\ldots) - (\beta_1 v_{m+k+1} + \beta_2 v_{m+k+2} + \ldots) \geqslant v_{m+k} - (v_{m+k+1} + v_{m+k+2} + \ldots) \geqslant 0$, то функція φ на циліндрі $\Delta^{Q_2^*}_{\underbrace{0\ldots0}_{k}}$ є неспадною. Якщо $a > 1$, то такою є і функція f. Якщо ж $0 < a < 1$, то функція f на даному циліндрі є незростаючою. В обох випадках отримуємо суперечність з умовою ніде не монотонності функції.

Д о с т а т н і с т ь. Зрозуміло, що коли $v_n < r_n$, то існує таке натуральне $s = s(n)$, що виконується нерівність $v_n < v_{n+1} + v_{n_2} + \ldots + v_{n+s}$. Очевидно, що f буде ніде не монотонною тоді і тільки тоді, коли вона не є монотонною на кожному з Q_2^*-циліндрі. Розглянемо довільний Q_2^*-циліндр $\Delta^{Q_2^*}_{c_1\ldots c_m}$ і три точки, що йому належать:
$x_1 = \Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_m\underbrace{1\ldots1}_{k}(0)}$, $x_2 = \Delta^{Q_2}_{c_1..c_m\underbrace{1\ldots1}_{k-1}0\underbrace{1\ldots1}_{p}(0)}$, $x_3 = \Delta^{Q_2}_{c_1..c_m\underbrace{1\ldots1}_{k-1}0\underbrace{1\ldots1}_{s}(0)}$,
такі, що $v_{m+k} < r_{m+k}$, $s < p$, $v_{m+k} < v_{m+k+1} + v_{m+k+2} + \ldots + v_{m+k+s}$. Тоді $x_3 < x_2 < x_1$. Разом з цим $\varphi(x_2) - \varphi(x_3) = v_{m+k+s+1} + v_{m+k+s+2} + \ldots + v_{m+k+s+p} > 0$,
$\varphi(x_1) - \varphi(x_2) = v_{m+k} - (v_{m+k+1} + \ldots + v_{m+k+p}) < 0$.
Тобто $(\varphi(x_2) - \varphi(x_3))(\varphi(x_1) - \varphi(x_2)) < 0$, що є свідченням немонотонності функції на циліндрі $\Delta^{Q_2^*}_{c_1\ldots c_m}$. А отже, такою є і функція $f(x)$. Таким чином, функція $f(x)$ ніде не монотонна. $\square$

ДЯКУЮ ЗА УВАГУ!