Деформації функцій на поверхнях

Сергій Максименко

Інститут математики НАН України, м. Київ
maks@imath.kiev.ua

Нехай X – гладкий многовид. На просторі гладких функцій $C^{\infty}(X, \mathbb{R})$ на X існує природна ліва дія групи добутку груп дифеоморфізмів $D(\mathbb{R}) \times D(X)$ прямої та многовиду визначена за формулою

$$(\phi, h) \cdot f = \phi \circ f \circ h^{-1},$$

для $(\phi, h) \in D(\mathbb{R}) \times D(X)$ та $f \in C^{\infty}(X, \mathbb{R})$. Цю дію та її обмеження на різноманітні підгрупи $D(\mathbb{R}) \times D(X)$ можна мислити як «двохсторонні заміни координат» і вона фігурує в різноманітних контекстах в різних розділах математики. Її також часто називають «право-лівою».

Зокрема, вона містить дію ліву групи $D(X) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}} \times D(X)$:

$$h \cdot f = f \circ h^{-1},$$

для $h \in D(X)$ та $f \in C^{\infty}(X, \mathbb{R})$, яка часто називається «правою» (в сенсі, що h дописується справа), або регулярним представленням $D(X)$ на векторному просторі $C^{\infty}(X, \mathbb{R})$.

Тоді для кожної функції $f \in C^{\infty}(X, \mathbb{R})$ можна визначити її «право-ліві» стабілізатори і орбіти (відносно дії $D(\mathbb{R}) \times D(X)$) та «праві» стабілізатори і орбіти (відносно дії $D(X)$).

Наприклад, нехай $X = \mathbb{R}$ і $f : X \to \mathbb{R}$ визначена за формулою $f(x) = x^2$. Тоді маємо просту тотожність

$$4x^2 = (2x)^2.$$

Якщо розглянути відображення $\phi, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ задані формулами $\phi(t) = 4t$, $h(x) = 2x$, то вказана вище тотожність означає, що $\phi \circ f = f \circ h$, або $\phi \circ f \circ h^{-1} = f$, тобто пара відображень (ϕ, h) належить стабілізатору f відносно «право-лівої» дії $D(\mathbb{R}) \times D(X)$ на $C^{\infty}(X, \mathbb{R})$.

З іншого боку, нехай $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ визначено за формулою $g(x) = -x$. Тоді тотожність $(-x^2) = x^2$ означає, що $f \circ g^{-1} = f$, тобто g належить «правому» стабілізатору f відносно «правої» дії $D(X)$ на $C^{\infty}(X, \mathbb{R})$.

Мета цієї лекції описати зв'язок між «право-лівими» та «правими» стабілізаторами та орбітами широкого класу гладких функцій на многовидах, і, зокрема, розповісти про недавні результати київських математиків, а також О. А. Кудрявцевої (Москва), про випадок коли X – це компактна поверхня а f – функція Морса.